

**Investigación en Educación
Matemática. Comunicaciones
de los Grupos de Investigación
de la SEIEM**

XIV Simposio de la SEIEM

Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los Grupos de Investigación de la SEIEM

XIV Simposio de la SEIEM

María del Mar Moreno

Nuria Climent (Eds.)

Lleida, 2011

**Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los Grupos
de Investigación de la SEIEM.**

XIV Simposio de la SEIEM

Edita:

© Edicions de la Universitat de Lleida, 2011

© Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)

© María Mar Moreno y Nuria Climent

Diseño de la portada: Edicions i Publicacions de la Universitat de Lleida.

Depósito Legal: L-869-2011

ISBN: 978-84-694-6212-6

INDICE

<u>PRESENTACIÓN</u>	9
GRUPO APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA (AG)	11
PROYECTO DE INVESTIGACIÓN SOBRE ESPIRALES Y HÉLICES. ANÁLISIS SOBRE LA CONCEPTUALIZACIÓN SOCIAL EXISTENTE SOBRE LAS ESPIRALES Y HÉLICES; INCIDENCIA EN EL CURRÍCULUM DE LAS MATEMÁTICAS EN LA EDUCACIÓN OBLIGATORIA Y METODOLOGÍA APLICADA PARA SU ENSEÑANZA. Callís, J. y Fiol, M.L.	13
INSTRUMENTOS Y CRITERIOS PARA EVALUAR LOS APRENDIZAJES EN GEOMETRÍA (AG) Y EL DESARROLLO DE LA COMPETENCIA COMUNICATIVA (CC) EN UN ENTORNO INTERACTIVO DE APRENDIZAJE. Murillo, J.; Jiménez, C.; Arnal, P.M. y Marcos, G.	29
ESTUDIO EXPLORATORIO SOBRE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS GEOMÉTRICOS POR ALUMNOS DE 1º DE BACHILLERATO. Ruiz de Cenzano, M.R. y Guillén, G.	59
BUSCANDO CLAVES PARA EL ESTUDIO DE LA RESOLUCIÓN POR INSIGHT DE PROBLEMAS GEOMÉTRICOS. Sánchez, F. y Fiol, M.L.	71
DIFICULTADES EN EL RAZONAMIENTO DEL ALUMNADO DE 2º DE ESO RELACIONADAS CON EL CONCEPTO DE MEDIDA DE LAS MAGNITUDES GEOMÉTRICAS: LONGITUD Y ÁREA. Sanmiguel, M. y Salinas, M.J.	83
GRUPO CONOCIMIENTO Y DESARROLLO PROFESIONAL DEL PROFESOR (CDPP)	99
APORTACIONES, IDEAS Y VISIÓN DE CONJUNTO, DESDE EL GRUPO DE TRABAJO DE LA SEIEM CONOCIMIENTO Y DESARROLLO PROFESIONAL DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS (CDPPM). Cardeñoso, J.M.	101

“APRENDER A MIRAR CON SENTIDO” SITUACIONES DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS. Callejo, M.L.; Valls, J. y Llinares, S.....	111
FORMACIÓN DEL PROFESORADO Y CONOCIMIENTO MATEMÁTICO PARA LA ENSEÑANZA EN LA TRANSICIÓN DE PRIMARIA A SECUNDARIA. Figueiras, L.; Deulofeu, J.; Martínez, M.; Pujol, R.; Moreno, M.; Giné, C.; Fernández, S. y Azcárate, C.	123
GRUPO DIDÁCTICA DEL ANÁLISIS (DA)	135
LÍNEAS DE COHERENCIA Y REDES SISTÉMICAS: UNA APROXIMACIÓN METODOLÓGICA PARA EL ANÁLISIS DE LA COMPRESIÓN DE PROFESORES DE LOS MACRO OBJETOS $f(a)$ y $f(x)$. Badillo, E. y Azcárate, C.....	137
DESARROLLO DE UN ESQUEMA SOBRE LA RECTA TANGENTE EN UN ENTORNO TECNOLÓGICO. Boigues, F.J.; Estruch, V. y Orts, A.....	161
EL ANÁLISIS MATEMÁTICO A TRAVÉS DE LAS SITUACIONES REALES PRESENTES EN LOS LIBROS DE TEXTO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA. Codes, M.; González, M.T.; Monterrubio, M.C. y Delgado, L.	173
ATLAS.TI COMO HERRAMIENTA DE ANÁLISIS DE LA PRÁCTICA DOCENTE: EL CASO DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL. Vargas, J.; González, M.T. y Llinares, S.	187
GRUPO DIDÁCTICA DE LA ESTADÍSTICA, PROBABILIDAD Y COMBINATORIA (DEPC).....	201
LAS TABLAS DE CONTINGENCIA: UN OBJETO SEMIÓTICO COMPLEJO. Cañadas, G.; Arteaga, P. y Batanero, C.	203
ESTUDIOS SOBRE LOS PROBLEMAS TERNARIOS DE PROBABILIDAD CONDICIONAL DE NIVEL N_0 Edo, P.I. y Huerta, P.	215
INSTRUMENTOS DE MEDICIÓN DE ACTITUDES HACIA LA ESTADÍSTICA: LA ESCALA EAEE PARA PROFESORES. Estrada, A.	233

CREENCIAS SOBRE LA ALEATORIEDAD DE FUTUROS PROFESORES DE EDUCACIÓN PRIMARIA. Mohamed, N. y Ortiz, J.J.	253
MODOS FUNDAMENTALES DE RAZONAMIENTO ESTADÍSTICO EN EGRESADOS DE LICENCIATURA EN PSICOLOGÍA EDUCATIVA. Pérez, C.; Batanero, C. y Contreras, J.M.	267
LA COMPRENSIÓN DE LA NOCIÓN DE VARIACIÓN ESTADÍSTICA DE ESTUDIANTES DE SECUNDARIA. Sánchez, E. y Orta, J.A.	281
ERRORES Y DIFICULTADES DE ESTUDIANTES DE PSICOLOGIA EN RELACIÓN A INTERVALOS DE CONFIANZA Y CONTRASTE DE HIPÓTESIS. Vera, O. y Díaz, C.	295
GRUPO DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS COMO DISCIPLINA CIENTÍFICA (DMDC)	309
DESARROLLO DE TAREAS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS Y LAS CIENCIAS DESDE UN ENFOQUE INTERDISCIPLINAR: PROYECTO “COMPASS”. García, F.J.; Abril, A.M.; Quesada, A.; Romero, M. y Ruiz, L.....	311
APRENDIZAJE EN CIENCIAS Y MATEMÁTICAS BASADO EN LA INVESTIGACIÓN, PARA LA FORMACIÓN DEL PROFESORADO EUROPEO: PROYECTO “PRIMAS”. García, F.J.; Abril, A.M.; Quesada, A.; Romero, M. y Ruiz, L.....	321
COMPETENCIAS PROFESIONALES DE LOS FUTUROS PROFESORES DE MATEMÁTICAS DE SECUNDARIA. Font, V.; Rubio, N.; Giménez, J.; Aubanell, A.; Benseny, A.; Gómez, J.; Vanegas, Y.; Larios, V. y Barajas, M.....	333
ANÁLISIS DE CLASES Y DESARROLLO PROFESIONAL DEL PROFESORADO. Martínez, M.; Badillo, E.; Figueiras, L. y Font, V.....	343
GRUPO HISTORIA DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA (HEM)	355
ANÁLISIS PRELIMINAR DE MANUALES ESCOLARES DE ARITMÉTICA. Carrillo, C. y Sierra, M.	357

UN ANÁLISIS SISTÉMICO DE LA OBRA DE JOSÉ MARIANO VALLEJO DESDE LA PERSPECTIVA DE LA INVESTIGACIÓN HISTÓRICA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA: LIBROS PARA PRIMERA ENSEÑANZA. López, J.I. y Sierra, M.....	373
---	-----

GRUPO PENSAMIENTO NUMÉRICO Y ALGEBRAICO (PNA) 393

FRACCIONAR Y REPARTIR: UN ESTUDIO CON MAESTROS EN FORMACIÓN INICIAL. Castro, E. y Rico, L.....	395
---	-----

LA CAPACIDAD INDUCTIVA EN ESTUDIANTES DE TERCER CURSO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA. Cerveró, S. y Cerdán, F.....	411
--	-----

COLABORACIÓN EN LA DIRECCIÓN DE TESIS DOCTORALES DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA EN ESPAÑA. Maz, A.; Bracho, R.; Gutiérrez, M.P.; Hidalgo, M.D.; Torralbo, M.; Jiménez, N. y Antiduelo, C.....	421
---	-----

LA REVISTA PNA CUATRO AÑOS DESPUÉS DE SU LANZAMIENTO. Molina, M.; Cañadas, M.C.; Gallardo, J.; Gómez, P. y Lupiáñez, J.L.....	433
--	-----

COMPETENCIAS NUMÉRICAS DE LOS NIÑOS/AS AL COMENZAR LA EDUCACIÓN INFANTIL. Salgado, M. y Salinas, M.J.....	439
--	-----

SENTIDO ESTRUCTURAL MANIFESTADO POR ALUMNOS DE 1º DE BACHILLERATO EN TAREAS QUE INVOLUCRAN IGUALDADES NOTABLES. Vega-Castro, D.; Castro, E. y Molina, M.	453
--	-----

PRESENTACIÓN

Los simposios de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM) celebrados anualmente desde su fundación en el año 1996 en distintas universidades españolas, son el punto de encuentro de los investigadores y grupos de investigación en Educación Matemática, constituyen un espacio de intercambio de ideas y proyectos, esencial para construir colectivamente el conocimiento, sobre la base de un debate de reconocido prestigio nacional, con una proyección creciente en los países de habla hispana.

El décimo cuarto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), celebrado en la Universidad de Lleida entre los días 8 al 10 de septiembre de 2010, constituyó una muestra de las investigaciones que se vienen realizando durante los últimos años en el campo de la Educación Matemática, tanto en España como en algunos países Latinoamericanos y Portugal. En la publicación *Investigación en Educación Matemática XIV*¹ se recogieron las 32 comunicaciones arbitradas y debatidas durante el simposio, así como las seis ponencias que se desarrollaron en los dos Seminarios de Investigación donde se abordaron con profundidad dos temas de gran interés en el actual panorama educativo: : “Enseñanza y aprendizaje de la Geometría” y “Educación Matemática y Diversidad”. Respecto del Seminario I de “Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría”, fue la segunda vez que se abordaba en un Simposio de la SEIEM. La primera ocasión fue en el ya lejano 1999 en el Simposio celebrado en Valladolid, la perspectiva del tiempo y la continua actualidad de la agenda de investigación sobre temas de geometría en el ámbito educativo ha hecho que el comité científico optará por incluir este tema en uno de los seminarios de investigación.

El tema del Seminario II no se ha abordado con anterioridad, pero sí es cierto que se ha detectado un creciente interés de los investigadores por investigaciones en las que se contempla de forma especial la diversidad, bien por aproximarse a lo sociocultural, bien por abordar la problemática de las necesidades educativas especiales o bien por, contemplar el efecto de la componente afectiva del ser humano en el complejo proceso de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En ambos casos, se pretendió actualizar el conocimiento y profundizar en la reflexión teórica, al tiempo que se analizaba la transferencia de las propuestas y

¹ Moreno, M. M., Estrada, A., Carrillo, J., Sierra, T.A. (2010). *Investigación en Educación Matemática XIV*. Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM). Edicions de la Universitat de Lleida. Lleida.

resultados a las distintas instituciones educativas. La coordinación del Seminario I corrió a cargo del profesor Ángel Gutiérrez de la Universidad de Valencia y la del Seminario II a cargo del profesor Enrique de la Torre de la Universidad de A Coruña.

El resto del Simposio se completaba con las reuniones de los grupos de trabajo sobre:

- Aprendizaje de la Geometría
- Didáctica del Análisis
- Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria
- Pensamiento Numérico y Algebraico
- Didáctica de la Matemática como Disciplina Científica
- Conocimiento y Desarrollo Profesional del Profesor
- Investigación en Historia de las Matemáticas.

Además, al igual que en ocasiones anteriores, en el XIV Simposio se dispuso de un espacio de discusión que se repartió lo largo de dos días en dos sesiones de hora y media, donde los Grupos de Investigación se reunieron para exponer y debatir sobre las comunicaciones que presentamos ahora en soporte informático. Es sabido, que la discusión de estos trabajos resulta útil para los investigadores noveles o expertos, debido al debate constructivo que se fomenta en estos grupos en el que participan estudiantes de doctorado, directores de Tesis Doctorales, etc.

En esta nueva publicación en formato CD se recogen las diferentes comunicaciones presentadas en los Grupos de Investigación las cuales no han sido sometidas a arbitraje, pero en las que los autores han incorporado algunas de las sugerencias y aportaciones fruto del debate que surgió en las exposiciones de las mismas durante su presentación en el Simposio. Hemos considerado oportuno, incluir en este CD el contenido de la publicación Investigación en Educación Matemática XIV, que fue publicada y entregada a los participantes en el Simposio en formato de libro.

M. Mar Moreno
Nuria Climent
(Editoras)

GRUPO:

APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA

Coordinador: **Enrique de la Torre**, Universidade a Coruña

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN SOBRE ESPIRALES Y HÉLICES. ANÁLISIS SOBRE LA CONCEPTUALIZACIÓN SOCIAL EXISTENTE SOBRE LAS ESPIRALES Y HÉLICES; INCIDENCIA EN EL CURRÍCULUM DE LAS MATEMÁTICAS EN LA EDUCACIÓN OBLIGATORIA Y METODOLOGÍA APLICADA PARA SU ENSEÑANZA. Callís, J. y Fiol, M.L.

INSTRUMENTOS Y CRITERIOS PARA EVALUAR LOS APRENDIZAJES EN GEOMETRÍA (AG) Y EL DESARROLLO DE LA COMPETENCIA COMUNICATIVA (CC) EN UN ENTORNO INTERACTIVO DE APRENDIZAJE.

Murillo, J.; Jiménez, C.; Arnal, P.M. y Marcos, G.

ESTUDIO EXPLORATORIO SOBRE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS GEOMÉTRICOS POR ALUMNOS DE 1º DE BACHILLERATO.

Ruiz de Cenzano, M.R. y Guillén, G.

BUSCANDO CLAVES PARA EL ESTUDIO DE LA RESOLUCIÓN POR INSIGHT DE PROBLEMAS GEOMÉTRICOS.

Sánchez, F. y Fiol, M.L.

DIFICULTADES EN EL RAZONAMIENTO DEL ALUMNADO DE 2º DE ESO RELACIONADAS CON EL CONCEPTO DE MEDIDA DE LAS MAGNITUDES GEOMÉTRICAS: LONGITUD Y ÁREA.

Sanmiguel, M. y Salinas, M.J.

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN SOBRE ESPIRALES Y HÉLICES. ANÁLISIS SOBRE LA CONCEPTUALIZACIÓN SOCIAL EXISTENTE SOBRE LAS ESPIRALES Y HÉLICES; INCIDENCIA EN EL CURRÍCULUM DE LAS MATEMÁTICAS EN LA EDUCACIÓN OBLIGATORIA Y METODOLOGÍA APLICADA PARA SU ENSEÑANZA.

Josep Callís i Franco(*), M. Luisa Fiol Mora
Universidad de Girona(*), *Universidad Autónoma de Barcelona*

Resumen

El objetivo de detectar la conceptualización existente a nivel social respecto a algunas curvas (circunferencia, espiral y hélice), el dominio competencial que socialmente se tiene de ellas y los procesos metodológicos que se aplican en las aulas para su aprendizaje. Estas curvas han tenido gran importancia social, tanto a nivel de ser formas simbólicas de significación cosmogónica y mitológica, como para la creación artística, a la vez que formas que configuran las estructuras del macro y microuniverso, y que forman parte de nuestra realidad natural, resulta muy importante dicho dominio y aprendizaje como base de comprensión de nuestra realidad. La investigación quiere determinar los conceptos sociales a partir de la aplicación para ello usaremos un test a una muestra de alumnos que hayan terminado la educación obligatoria y a profesionales de la educación primaria y secundaria. Se analizará el tratamiento que se da de ellas en los libros de texto y otros materiales educativos en especial los elaborados como materiales virtuales y los resultados e investigaciones efectuadas en esta dirección.

Abstract

The aim of this research proposal is to detect the conceptualization, existing at a social level, of some curves (circle, spiral and helix), the ability command that society has of them and the methodological processes applied in classroom learning. Given the importance that these curves have had for society, both in terms of their symbology with a cosmological and mythological significance and of their artistic creation, being forms that make up the structures of macro- and microuniverse and that are part of nature, their command and learning are of the highest importance as basic means to understand our reality. The research pretends to determine social concepts by applying a test, on one hand, on a sample of students who have completed compulsory schooling and, on the other, on professionals in primary and secondary education. Meanwhile, the treatment given to them in textbooks and other educational materials will be examined, especially those developed as virtual materials and the results of research made in this direction.

Callis, J, Fiol, M.L. (2011). Proyecto de investigación sobre espirales y hélices. Análisis sobre la conceptualización social existente sobre las espirales y hélices; incidencia en el currículum de las matemáticas en la educación obligatoria y metodología aplicada para su enseñanza. En M.M. Moreno, N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los Grupos de Investigación de la SEIEM* (pp. 13- 27). Lleida.

Marco conceptual y fundamentos.

El proyecto que hemos iniciado se centra en el estudio de las espirales y hélices. Se tratará en primer lugar de identificar el estudio de curvas en distintos niveles y contextos. Se pretende analizar la conceptualización social existente sobre las espirales y las hélices, la incidencia en el currículum de la educación obligatoria y en el parvulario y la metodología y materiales utilizada para su enseñanza.

Dada la gran interrelación de estas formas curvas con las estructuras funcionales de la naturaleza y la vida, creemos importante generar un debate sobre si el aprendizaje de ellas debe de intensificarse en los currículum de infantil, educación primaria y secundaria y, en todo caso, buscar alternativas didácticas que posibiliten un mejor aprendizaje y dominio.

Tal como se comenta en Sánchez y Fiol (2010), buena parte de la enseñanza de la geometría, se orienta preferentemente y de forma cotidiana hacia un aprendizaje reproductivo. Este aprendizaje reproductivo consiste generalmente en que los alumnos tienen que interiorizar una serie de algoritmos, estrategias y destrezas que posteriormente deben ser reproducidas en aquellos problemas que guardan cierta similitud con el contexto inicial de aprendizaje. Esta forma de aprendizaje que fue ya identificada por la Gestalt, -aplicar destrezas o conocimientos adquiridos previamente-, es conocida (Wertheimer, 1959) como aprendizaje reproductivo. En el caso de las curvas la situación parece resultar más dramática en el sentido de que así como son cada vez más omnipresentes en la vida cotidiana, en los medios de comunicación y en general en la identificación de formas en nuestro entorno cultural y cotidiano, sin embargo una primera ojeada a libros de texto y comentarios de maestros y profesores nos muestran que se continúan estudiando unas pocas curvas que podríamos llamar clásicas – círculo, elipse, parábola,... - y a nivel de secundaria incluso desaparece el nombre de la mayor parte de curvas que en todo caso son “gráficas de funciones” . En unos pocos casos aparecen como parábolas, gráficas curvilíneas o sinusoidales, aunque el nombre genérico es el de gráficas.

En ningún caso este escrito pretende aportar conocimiento teórico ni tampoco resultados relativos a las espirales y hélices sino únicamente es la presentación y reflexión del estado actual del proyecto de investigación centrado en el dominio y aprendizaje que se hace de ellas; de manera que más que el marco teórico nos preocupa el diseño de la metodología del trabajo en su aspecto empírico, en sus aspectos exploratorios. Cómo planificar y estructurar la investigación: elección de muestras; primera secuenciación del paso de los test, las entrevistas, etc.

Así y todo, ¿Cuál es el marco conceptual del que partimos?

Consideramos cinco líneas fundamentales en las que tenemos que continuar trabajando:

- a) La percepción y la identificación y reconocimiento de formas, Arnheim, R. (1987), Mehler J. y Dupoux, E. (1994)
- b) Estudios de psicología genética: Piaget, J.; Inhelder, B. (1948).
- c) La constatación y profundización en el pensamiento corporizado, Jonhson, M. (1991). Curves & Shape, Wilson, F. (2000) etc....especialmente de cara a futuros planteamientos curriculares, pero también ahora como uno de los pilares de la reflexión.
- d) El estudio de proyectos llevados a cabo y otros tipos de trabajos con reflexión sobre desarrollos curriculares posibles: Van Hiele, P. (1957). Malkevitch, J. (1991). Geometry's Today, Muckey, R. y otros (1971): Curves & Shapes.
- e) Identificación de estudios diversos trabajos de divulgación sobre curvas: libros, artículos, programas de software, páginas web, etc. sobre el tema.

Antecedentes y consideraciones sobre el interés de la investigación

Estamos involucrados desde hace unos años en la investigación relacionada con las formas curvas. El motivo de ello es fruto y consecuencia del trabajo que se inició con la tesis doctoral “Estimació de mesures longitudinals. Procediments, recursos i estratègies (2002)” en la que los dos, M. Lluïsa como directora y Josep como doctorando, nos vimos inmersos. A través de dicha investigación detectamos la clara diferenciación en la consecución del dominio rectilíneo y el curvilíneo y la poca incidencia o correlación existente del dominio de uno sobre el dominio del otro.

A partir de ahí, el interés hacia las relaciones existentes entre forma y función han sido motivo de profundización conceptual y de investigación. Fruto de ello han sido ya algunos artículos al respecto (Callís (1998, 2003); Fiol (2002, 2003, 2004); Callís y Fiol (2003, 2005, 2010); Fiol y Callís (2010)) y la coordinación-dirección de un monográfico sobre dicho tema (Forma. Perspectiva Escolar, 275).

El modelo del mundo que se presenta en los currículums tanto en la educación primaria como en la educación secundaria por medio de la enseñanza/aprendizaje de la geometría en 2D y 3D, está centrada de manera prioritaria en todo lo que es rectilíneo: rectas, segmentos, planos,... presentados de forma aislados o agrupados (polígonos, poliedros, mosaicos, puzzles, etc.), de manera que son las imágenes y conceptos espaciales que se generan o se activan en la mente social, mientras que la realidad del mundo percibido o imaginado es más curvado, más complejo.

Para avanzar en la integración de aprendizaje social y realidad o realidades, cada vez se hace necesario desde la matemática y en especial desde la mirada

geométrica, para conseguir romper la dicotomía que se está produciendo, tal como ya hemos comentado, respecto al desarraigo entre aprendizaje académico y realidad y, consecuentemente, potenciar –en este caso– la identificación, reconocimiento, estudio y aplicación de los objetos e imágenes y representaciones curvadas.

La comprensión de los fenómenos que nos rodean lleva inexorablemente a la necesidad de comprender el mundo de las curvas, las cuales configuran tanto el micromundo de las trayectorias, el movimiento de las partículas atómicas o en la nanotecnología, como el macromundo de las estructuras, fenómenos y movimientos astronómicos, pasando por la realidad del mesomundo en el que nos movemos: crecimiento de estructuras vivas, movimientos de líquidos y gases, formas de nuestro entorno cotidiano, etc.

Al iniciar el proyecto nos ha parecido interesante ponernos en situación de replantear y valorar algunos aspectos del currículum tanto de primaria como de secundaria. Ponemos el énfasis y consideramos como objetivos que sería deseable conseguir a través de la enseñanza/aprendizaje de las curvas en general y del estudio de las espirales y las hélices en especial:

- Integrar el aprendizaje matemático para que sea congruente con la comprensión de la realidad del entorno de manera que la geometría permita aumentar en estos niveles la conciencia de la complejidad del mundo físico y del mundo imaginado.
- Generar conocimiento sobre el mundo de las curvas en especial de las espirales y de las hélices de forma que permita leer mejor algunos aspectos de la naturaleza.
- Interrelacionar algunas formas geométricas con los movimientos que las generan.
- Generar conocimiento de las formas curvas prestando atención a la relación existente entre movimiento y los puntos que se mantienen fijos en el segmento o en el plano generador.
- Saber diferenciar algunas de las diferentes tipologías de espirales y hélices y su modelización.
- Saber identificar expresiones algebraicas de modelos matemáticos de algunas curvas de manera que permitan discutir sobre sus potencialidades, dificultades y limitaciones.
- Potenciar capacidades estimativas que permitan un acercamiento de tanteo a las características de curvas y a su medida.
- Ayudar a desplegar una imaginación creativa, en “movimiento” y no tanto estática como la que hoy en día, lamentablemente, todavía se encuentra presente en muchas aulas.

Al final del proyecto desearíamos poder plantear una propuesta o una serie de actividades para aplicar en las aulas de diferentes niveles de primaria y secundaria para conseguir que la persona pueda:

- Observar la realidad natural que nos rodea y constatar la existencia de curvas variadas con sus posibles distorsiones, combinaciones y movimientos.
- Observar la realidad artística, tecnológica y computacional para detectar curvas muy diversas en un entorno cada vez con un potencial más creativo.
- Las curvas y su sentido místico, su significado en la mitología occidental así como su presencia en el folklore popular.
- Creación de formas curvas según las condiciones e interconexiones que se producen al intervenir determinados movimientos.
- Propiedades, optimización y características de las espirales y las hélices.
- Interrelacionar curvas y lenguaje y dominar la semántica de las palabras.
- Adquisición de técnicas y estrategias de estimación métrica para calcular la longitud de círculos y espirales.
- Estimulación de la capacidad de creación artística personal con diferentes materiales utilizando formas curvadas.

El interés despertado hacia las curvas viene determinado, por lo tanto y en primer lugar, por el hecho que la realidad y el entorno se estructura fundamentalmente en el mundo de las curvas, las cuales resultan ser las formas predominantes y constitutivas de las distintas realidades del micro, meso y macromundo; de manera que existe una profunda interrelación de las formas curvas con las estructuras funcionales de la naturaleza y la vida, siendo presentes desde las estructuras microscópicas de los ácidos nucleídos hasta las correspondientes a las galaxias del macrouniverso; generadoras y fruto de movimientos y procesos de crecimiento, rentabilizadas a nivel utilitario por la tecnología en multitud de instrumentos y procedimientos de trabajo, mientras la educación obligatoria, los programas se centran exclusivamente en el marco teórico de la recta y las estructuras geométricas ideales tanto en la bidimensionalidad como en la tridimensionalidad.

El entorno social, los productos culturales y artísticos, utilizan muy frecuentemente las espirales y hélices como formas de aplicación tecnológica y de decoración artística, hecho que se constata en todas las culturas, incluso siendo presentes en las representaciones del arte rupestre. Evidentemente esta continuidad histórica de su uso enlaza con la simbología que ellas representan a nivel de interpretación y simbolización cosmogónica y mítica, enlazando con profundos sentimientos espirituales, religiosos y místicos.

Hoy a consecuencia de las nuevas y diversas aportaciones de la ciencia y la tecnología, estamos viviendo profundas transformaciones en todos los ámbitos de la vida y la ciencia, las cuales afectan tanto a las propias concepciones de la misma ciencia como a las relaciones humanas, incidiendo, incluso, en la ética y la moralidad social. A menudo, fruto de los nuevos avances, se generan determinadas maneras de vivir y funcionar, las cuales a su vez están produciendo una profunda transformación en las conductas y en las formas de actuar. Pensemos tan solo como el funcionamiento (función) de las nuevas tecnologías está afectando los comportamientos (forma) de las relaciones humanas.

Hablar de forma y función podría dirigir hacia una limitada visión unilateral centrada en la consideración de como la forma queda afectada, en el mundo material y natural, por la influencia de la función. Desde esta perspectiva, la mutua incidencia causal se focaliza, esencialmente y de forma casi exclusiva, dentro de la óptica de los procesos de adaptación y evolución natural, sin tener en cuenta o sin profundizar que la relación forma y función va mucho más lejos de la naturaleza y que afecta también la concepción de la formación humana, la inteligencia, el arte, la educación y de cualquier proceso social. Nada se escapa de la relación causa-efecto existente entre forma y función. Evidentemente pues, resulta necesario y imprescindible dominar y comprender las formas de nuestro entorno para saber leer comprensivamente en el libro de la realidad, y entre las muchas formas y sus funciones, el mundo de las cónicas y de manera especial las esferas, las espirales y las hélices tienen una importancia capital. Entendemos que una geometría determinada por la linealidad rectilínea configura una forma de ser, pensar e interpretar la realidad y la vida que puede resultar sesgada sin la comprensión del mundo curvado.

Intentar profundizar en la interrelación existente entre forma y función y su repercusión en el saber, comporta asumir un reto importante y difícil de materializar, por ser enfoques relativamente novedosos y en los que se está entrando poco a poco, y más si se efectúa en una direccionalidad de enfoque educativo.

Esta investigación debe permitirnos introducir, por lo tanto, en un campo poco analizado y consecuentemente en una dirección en la que será necesario seguir trabajando para poder clarificar mucho más sobre el dominio y tratamiento de las curvas y su incidencia en la comprensión del mundo y en avanzar en la gestación teórica fruto de nuevas investigaciones con el objetivo de que en un futuro bien próximo sea posible aportar nuevas perspectivas de innovación y profundización educativa que mejore el aprendizaje del mundo de las curvas. Y es en base a todo ello que planteamos el presente proyecto de investigación

Objetivos de la investigación

El objetivo de la investigación se focaliza en tres direcciones:

1.- Contexto sociológico.

Se trata de determinar el concepto existente a nivel social respecto a las espirales y hélices y en qué nivel existe dicho dominio a la vez que detectar si existe dominio competencial y de relación con la realidad respecto a ellas.

2.- Conceptualización y metodología en el contexto educativo docente

En referencia al marco docente pretendemos analizar los criterios y concepciones del profesorado respecto a dicha formación.

El objetivo es intentar determinar las concepciones imperantes respecto al nivel de interés que existe para el aprendizaje académico y si debería de ser tratado o no en el currículo que se imparte en la educación obligatoria, en qué medida dicha integración y el porqué de dicha importancia o desinterés.

Paralelamente se trata de analizar los procedimientos y metodología que se aplica en su enseñanza a partir del análisis de los libros de texto utilizados en primaria y secundaria.

3.- Propuesta didáctica.

A partir de los resultados obtenidos, elaborar y plantear una propuesta didáctica y su adecuada integración en el currículo

Los interrogantes

Obviamente los objetivos planteados son el resultado de multitud de interrogantes y dudas previas respecto a cada uno de los tres ámbitos. A grandes rasgos y en síntesis, estos interrogantes se concretan en:

A.- Sobre el dominio social

a.1.- ¿Existe una conceptualización, más o menos generalizada socialmente, respecto a las espirales y hélices? ¿Cuáles son? ¿Cuál es la predominante?

a.2.- ¿Existe un conocimiento social respecto a su génesis o creación?

a.3.- ¿Existen procedimientos socializados culturalmente para crearlas? ¿Cuáles?

a.4.- ¿Existen relaciones entre las concepciones de espirales y hélices y su dimensionalidad?

a.5.- ¿Existe alguna comprensión y relación entre forma y función?

a.6.- ¿Hay alguna relación entre la forma de la espiral y hélice y las tipologías de movimiento en el plano o el espacio?

a.7.- ¿Hay alguna diferencia significativa debidas a género, edad, formación,... y la conceptualización existente?

a.8.- ¿Existe alguna diferenciación conceptual entre variedades de espirales y hélices o sólo ésta es única para cada forma?

a.9.- ¿Cuáles han sido los procedimientos de aprendizaje de los conceptos que se tienen de ellas? ¿Dónde y cómo se adquirieron?

a.10.- ¿Existe un conocimiento consciente de la relación de estas formas y su existencia y presencia en la realidad circundante?

a.11.- ¿En las conceptualizaciones aparecen indicadores conceptuales de cosmogonía?

a.12.- ¿Qué tipos de comprensión conceptual o tecnológica existen entre forma y función en cada caso?

B.- Sobre el aprendizaje

b.1.- ¿Cuáles son las dificultades y errores que el profesorado cree que tiene el alumnado para la comprensión de las funciones algebraicas de estas formas y el dominio general de ellas?

b.2.- ¿Qué es lo que se cree que sabe el alumnado sobre circunferencia, espiral, hélice,...?

b.3.- ¿Qué es lo que se cree que se debería hacer o sería necesario hacer para mejorar su aprendizaje y dominio?

b.4.- ¿Cuál es la opinión del profesorado respecto a si han de estar o no en el currículum de primaria y secundaria y si se debería ampliar o reducir la formación existente actualmente? ¿Cuáles son según su criterio los motivos o factores esenciales para incrementar o potenciar el aprendizaje curricular de las curvas o a la inversa, para reducirlo?

b.5.- ¿Cuáles son las concordancias y discordancias entre las opiniones del profesorado y el alumnado?

C.- Sobre la mejora formativa

c.1.- ¿Existe una mejora significativa y competencial en la estimación métrica longitudinal sobre las espirales y hélices? ¿Aparecen más y nuevos procedimientos, recursos y estrategias después de un trabajo y conocimiento de ellas?

c.2.- ¿Se sabe escoger la mejor forma, ante una determinada situación problemática en la que se debe optimizar una determinada función?

c.3.- ¿Existe una diferencia significativa en los resultados obtenidos por un grupo en el que se haya trabajado estas curvas, respecto a los resultados obtenidos por la muestra general, al pasarles el mismo test planteado para determinar la concepción social de las curvas?

Muestra.

A) Conceptualización social: muestra de 200 a 300 alumnos que hayan terminado los estudios obligatorios.

B) Procedimiento de enseñanza-aprendizaje: muestra seleccionada de 5 maestros/as de infantil; 10 maestros/as de primaria y 20 profesores/as de secundaria.

C) Tratamiento curricular: muestra de libros de texto y otros recursos (manipulativos, informáticos,...) que actualmente se utilizan en la docencia en primaria y secundaria.

Metodología

a) Conceptualización sociológica.

Dado que el objetivo es el de detectar el concepto y capacidad competencial que se tiene a nivel de población respecto a las espirales, dicho análisis se efectuará a partir de un test centrado en diferentes preguntas a las que se tendrá que responder según el criterio personal de cada persona de la muestra.

En base a ello se efectuará el correspondiente análisis cuantitativo a partir de las tablas estadísticas que permitan visualizar las tendencias centrales sobre las conceptualizaciones y dominios existentes. Al mismo tiempo, un estudio cualitativo de las respuestas dadas por la muestra.

b) Nivel docente.

b.1) El estudio centrado en la docencia que se lleva a término en las aulas, en relación a la enseñanza-aprendizaje de las curvas, se realizará a partir del estudio de casos. Será una muestra seleccionada entre profesorado de primaria y secundaria. En todos los casos la entrevista se llevará a término según el mismo protocolo y en base a las cuestiones preparadas como test a aplicar.

b.2) Análisis estadístico de los recursos educativos (libros, applets,...) se efectuará a partir del tratamiento estadístico de los resultados obtenidos a partir de una ficha de valoración de dichos materiales, según unos ítems definidos previamente.

Los Test

Elaborados en formato de respuestas abiertas para permitir estudios cuantitativos y a la vez análisis cualitativos de las respuestas.

Se elaboran dos test y una ficha de valoración de materiales. El test CSEH (conceptualización social sobre las espirales y hélices) tiene por objetivo tal como indican sus siglas, el análisis de la conceptualización y dominio social existente en relación a las espirales y hélices. El test EAEH (enseñanza-aprendizaje de las espirales y hélices) destinado exclusivamente a maestros y profesores en ejercicio, ha de servir para analizar los procesos de aprendizaje sobre espirales y hélices que se imparten en las aulas. La ficha VDMAEH (Valoración didáctica de materiales para el aprendizaje de las espirales y hélices) permite analizar la direccionalidad didáctica y metodológica de los aprendizajes que plantea el recurso que se investiga.

a) Las cuestiones planteadas en el test CSEH son las siguientes:

1.- ¿Qué es una curva? Indica el nombre de las cuatro primeras curvas que se te ocurran

2.- Indica diferentes maneras de generar o dibujar una circunferencia.

3.- Dibuja una espiral. Descríbela con palabras. ¿La asocias con alguna fórmula? ¿Cuál?

4.- Dibuja diferentes tipos de espirales. Indica en cada caso su nombre.

5.- ¿Cómo definirías una espiral? Defínela de tantas maneras diferentes como sepas.

6.- ¿Podrías explicar diferentes maneras para poder obtener espirales o cómo dibujarlas?

7.- ¿Qué propiedades o ventajas, para cualquier aspecto que creas oportuno, crees que tienen o pueden tener las espirales y cuáles sus inconvenientes?

8.- Indica objetos, realidades o situaciones que tengan la espiral como estructura o que la generen.

Explica qué has hecho o como lo has hecho para poder dar dicha longitud.

9.- ¿Qué entiendes por hélice? ¿Cómo la definirías?

10.- ¿Cómo lo harías para producir u obtener una hélice? Explica maneras diferentes de cómo generarlas o de cómo dibujarlas.

11.- Indica objetos, realidades o situaciones que tengan la forma de hélice o que la generen.

12.- ¿Cuáles son, según tu parecer, las ventajas y los inconvenientes de las hélices para cualquier aspecto que creas oportuno?

13.- ¿Cuál es para ti, la diferencia o diferencias que existen entre espirales y hélices?

14.- ¿Lo que sabes sobre espirales y hélices dónde lo aprendiste?

15.- ¿Cuál crees que es la longitud de esta espiral? (Se presenta una espiral construida en alambre) La longitud es de

16.- ¿Cuál crees que es la longitud de esta hélice? (Se presenta una hélice construida en alambre) La longitud es de

a) *Las preguntas del test AEEH base para las entrevistas, son:*

1.- ¿Crees que los estudiantes dominan el mundo de las curvas? ¿Por qué? ¿Cuáles crees que pueden identificar? ¿Qué aspectos consideras que dominan mínimamente y cuáles no?

2.- ¿Cuáles son las curvas que se trabajan o estudian en tu centro educativo?

3.- ¿Cuáles crees que son las dificultades que tienen o encuentran los alumnos en el aprendizaje de las curvas y sus funciones algebraicas?

3.- ¿Cuáles son los errores más comunes o frecuentes que aparecen en dicho dominio?

4.- ¿Qué sería necesario hacer o qué debería hacerse para mejorar dicho aprendizaje?

5.- ¿Crees que el tratamiento curricular de las curvas debería mantenerse tal como está enfocado actualmente o bien reducirlo o ampliarlo? ¿Qué aspectos deberían añadirse o reducirse?

6.- Si hubieras de dar unas razones clave para la ampliación del tratamiento curricular de las curvas ¿cuáles darías? ¿Y cuáles para su reducción?

7.- ¿Cuáles son las razones a tu entender, fundamentales para que curricularmente se traten y trabajen las espirales y hélices? ¿Deberían trabajarse ya desde primaria o como ahora centrarlo en secundaria, por qué?

8.- ¿Qué aspectos o contenidos trabajas en relación a las espirales y hélices?

9.- ¿Qué actividades prácticas, manipulativas o experimentales, centradas en el dominio de las curvas, trabajas? ¿Y en el caso de las espirales y hélices?

10.- ¿Cuáles son los recursos que utilizas para impartir este aprendizaje?

b) *La Ficha VDMAEH tiene por objetivo detectar:*

b.1) el grado de incidencia del tema tratado respecto a la totalidad del libro o el bloque de geometría.

- Porcentaje de páginas que tratan las curvas en relación a la totalidad del libro.
- Porcentaje de páginas que tratan las curvas en relación al bloque de geometría.
- Porcentaje de páginas que tratan las espirales y hélices en relación a la totalidad del libro y bloque de geometría.
- Porcentaje de sesiones de clase que comporta este tema

b.2) Variedad y tipología de las formas curvas que se trabajan

- Análisis diferencial del tratamiento y/o prioridad de cada una de ellas

b.3) Planteamiento de la docencia

- Enfoque teórico con ejercicios de aplicación.
- Se parte de situaciones ejemplificadas de la realidad para entrar en enfoque teórico y actividades de aplicación.
- Se presenta una situación problemática que hay que resolver.

b.4) Tipología de las actividades

- De aplicación teórica y enfoque calculístico descontextualizado
- Situaciones contextualizadas de realidades con enfoque calculístico
- Resolución de situaciones problemáticas de la realidad
- Reflexiones críticas de análisis de situaciones
- Saber optimizar formas para determinadas funciones
- Elaboración de materiales
- Experimentaciones prácticas

bd.5) Contenidos competenciales

- Prioridad en aplicación de funciones específicas
- Relación de formas con la realidad y entorno
- Funcionalidad y optimización de la forma
- Relación forma y movimiento
- Relación forma y dimensionalidad espacial
- Relación con aplicación y tecnología

En el caso de materiales informáticos (applets) además:

- Grado de abertura de los contenidos
- Grado de apertura del procedimiento resolutorio.

Temporalización

El desarrollo del proyecto de investigación contempla:

a) Validación de los test.

Se pasará a 3 especialistas en didáctica de la matemática y a 3 profesores de secundaria y a 3 maestros para que evalúen de 1 a 4 si consideran que los test y la ficha evaluativa de materiales docentes, servirán para evaluar los objetivos que se pretenden investigar. A la vez, también que evalúen de 1 a 4, cada uno de los ítems, respecto a si resultan comprensibles o no. Al mismo tiempo se les pedirá que indiquen lo que creen se debería de mejorar.

Según los resultados obtenidos se efectuarán las modificaciones pertinentes.

b) Muestra experimental

Tanto el test CSEH como el EAEH, se pasarán a una pequeña muestra previa para detectar, según opinión de los propios participantes, cuáles han sido sus problemas en el momento de haber de responder las cuestiones que se formulan, para así, poder retocar y tener presentes las dificultades que puedan surgir a lo largo de la aplicación.

c) Análisis de marco teórico y de investigaciones sobre el tema

Se trabajará en la revisión documental bibliográfica y de materiales de la red que traten sobre los objetivos de la investigación.

d) Desarrollo de la investigación.

Se trabajará paralelamente en todas las direccionalidades determinadas por los objetivos del proyecto.

Referencias bibliográfica

- AAVV. (2003). *Forma, Perspectiva Escolar*, 275.
- Arnheim, R. (1987). *Arte y percepción visual. Psicología de la percepción creativa*, UDEBA-SEM (Edi. Universitaria de Buenos Aires) Buenos Aires.
- Bachelard, G. (1994). *La tierra y los ensueños de la voluntad*, Fondo de Cultura Económica. Méjico.
- Blanco, M^a. F. (2004): *Metodología y aplicaciones de las matemáticas en la ESO*, Ministerio de Educación y Ciencia, Madrid.
- Boden, M. A. (1994). *La mente creativa. Mitos y mecanismos*, Gedisa. Barcelona.
- Callís, J. (1998). Estimación de medidas longitudinales que tienen y aplican los educadores populares de la Comunidad Segundo Montes (El

- Salvador). En: Oliveras, M^a L; Fernández, J.; Fuentes, J. (Eds), *Etnomatemáticas y educación Matemática. Construyendo un Futuro Equitativo*. Universidad de Granada. Granada.
- Callis, J. (2002). *Estimació de mesures rectilínies i curvilínies. Procediments, Recursos i estratègies*. Tesis Doctoral. UAB. <http://www.tdx.cat/TDX-0224103-185956>
- Callis, J. (2003). Forma, funció i fons: de la natura a l'aprenentatge, a: Formes. *Perspectiva Escolar*, 275, 43-51.
- Callis J.; Fiol, M. L. (2003). *Características y factores incidentes en la estimación métrica longitudinal*. En E. Castro y otros (Eds), *Investigación en Educación Matemática*, Actas VIII Simposio de la SEIEM. Universidad de Granada. Granada.
- Callis J.; Fiol M.L. (2005). La 'xia' de Gala. El mundo de las espirales, *Matemáticas, belleza y arte*, UNO, 40, 11-26.
- Callis, J.; Fiol, M. L. (2010). Estimació Mètrica. Factors determinats de la capacitat intuïtiva. Una proposta didàctica pel seu aprenentatge. En *Actas del II Congreso CiDd 2010*. Universitat de Girona. Girona.
- Cirlot, J.E. (1988). *Diccionario de símbolos*, Labor. Barcelona.
- Fiol, M. L. (2002). Duendes en el desván: tanteo, intuición, creatividad. En M. C. Penalva, G. Torregrosa y J. Valls. (Eds), *Aportaciones de la Didáctica de la Matemática a Diferentes Perfiles Profesionales*, pp.21-43 .Universidad de Alicante. Alicante.
- Fiol, M. L. (2003). Els infants, l'espai i la forma de les coses, a. Formes, *Perspectiva Escolar*, 275, 4-16.
- Fiol, M. L. (2004). La forma de las cosas: del sueño a la imaginación. En M. F. Blanco (Ed), *Metodología y aplicaciones de las matemáticas en la ESO*. Instituto Superior de Formación de Profesorado del Ministerio de Educación y Ciencia. Madrid.
- Fiol, M. L.; Callis, J. (2010). El món corbat: espirals i hèlixs. Estructuració d'una intervenció a l'aula: mirar, fer i imaginar. En *Actas del II Congreso CiDd 2010*. Universitat de Girona. Girona.
- Froebel, F. (1989). *La educación del hombre i el Jardín de infancia*, Eumo. Vic.
- Gutiérrez, A. (1991). Procesos y habilidades en visualización espacial, *Memorias del Tercer Congreso Internacional sobre investigación en educación Matemática*, Universidad de Valencia. Valencia.
- Guzmán, M. (1996). *El rincón de la pizarra. Ensayos de visualización en análisis Matemático*, Pirámide. España.

- Hadamard, J. (1949). *The psychology of invention in the mathematical field*, University Press. Princeton. Princeton.
- Johnson, M. (1991). *El cuerpo en la mente. Fundamentos corporales del significado, la imaginación y la razón*, Debate. Madrid.
- Jung, C. G. (1966). *Recuerdos, sueños y pensamientos*, Seix Barral. Barcelona.
- Luelmo, M.J. (1986). *Geometría en la Naturaleza*, Ministerio de Educación y Ciencia. Madrid.
- Malkevitch, J. (1991). *Geometry's Future*, COMAP. Lexington, MA.
- Mehler J.; Dupoux, E. (1994). *Nacer sabiendo. Introducción al desarrollo cognitivo del hombre*, Alianza. Madrid.
- Muckey, R. y otros (1971). *Curves and Shapes*. MINNESMAST Coordinated Mathematics – Science Series, Unit 2. Univ. Minnesota. Minneapolis.
- Plasencia, C. I. (2000). *Análisis del papel de las imágenes en la actividad matemática. Un estudio de casos*, Tesis doctoral. Universidad de la Laguna. Tenerife.
- Presmeg, N. C. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education*, pp. 205–235. Netherlands: Sense Publishers. Rotterdam.
- Piaget, J.; Inhelder, B. (1948). *La représentation de l'espace chez l'enfant*, PUF. París.
- Root-Berstein, R. y M. (2000). *El secreto de la creatividad*, Kairós. Barcelona.
- Sánchez, F.; Fiol, M. L. (2010). Buscando claves para el estudio de la resolución por insight de problemas geométricos. Actas XIV SEIEM, Universitat de Lleida. Lleida.
- Stevens, P.S. (1986). *Patrones y pautas en la naturaleza*, Salvat. Barcelona.
- Thompson, D'A. W. (1980). *Sobre el crecimiento y la forma*, Blume. Madrid.
- Van Hiele, P. M. (1957). *El problema de la comprensión*, Tesis doctoral. Universidad Real de Utrecht. Utrecht.
- Wagensberg, J. (2004). *La rebelión de las formas*, Tusquets. Barcelona.
- Wertheimer, M. (1959). *Productive thinking*, Harper & Brothers. New York.
- Wilson, F. (2000). *La mano. De cómo su uso configura el cerebro, el lenguaje y la cultura humana*, Tusquets. Barcelona.

INSTRUMENTOS Y CRITERIOS PARA EVALUAR LOS APRENDIZAJES EN GEOMETRÍA (AG) Y EL DESARROLLO DE LA COMPETENCIA COMUNICATIVA (CC) EN UN ENTORNO INTERACTIVO DE APRENDIZAJE

Jesús Murillo, Clara Jimenez, Petra María Arnal, Guillermina Marcos
Universidad de La Rioja. España

Resumen

Hemos implementado y analizado un modelo para potenciar el desarrollo de ciertas competencias matemáticas por parte de alumnos de Educación Secundaria, cuando los mismos desarrollan trabajo colaborativo en un entorno virtual de aprendizaje (EVA) que utiliza soportes informáticos. Nos hemos centrado en particular en las competencias relacionadas con el aprendizaje de la Geometría y con la competencia comunicativa matemática. A partir del modelo diseñado, de los instrumentos de análisis y de los resultados obtenidos, hemos adaptado dos unidades de trabajo en la asignatura de Enseñanza y Aprendizaje del Master de Profesorado de Educación Secundaria. En el texto que sigue, mostramos algunos de los aspectos más relevantes de la investigación llevada a cabo con los alumnos de la ESO y algunas ideas de la adaptación del modelo a la enseñanza en el Máster de Profesorado.

Abstract

We have implemented and analyzed a model to strengthen the development of certain mathematics abilities by secondary school students, while they perform collaborative tasks in a computer based virtual learning environment (e-learning environment) (EVA from the spanish words). In particular, our work is focused on the abilities related to Geometry learning and the ability of maths communication. From the designed model, the analysis tools and the obtained results we have adapted two work units from the course "Enseñanza y Aprendizaje" (Teaching and Learning) from the master that qualifies to teach in secondary schools "Master de Profesorado de Educación Secundaria". This paper presents the most relevant conclusions from the research done with ESO (secondary school) students and some ideas for the adaptation of this model to the teaching at a master level (in our case, in the "Master de Profesorado").

Murillo, J., Jimenez, C., Arnal, P.M., Marcos, G. (2011). Instrumentos y criterios para evaluar los aprendizajes en geometría (ag) y el desarrollo de la competencia comunicativa (cc) en un entorno interactivo de aprendizaje. En M.M. Moreno, N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los Grupos de Investigación de la SEIEM* (pp. 29- 57). Lleida.

Introducción

Con el modelo diseñado se pretende potenciar un aprendizaje matemático que desarrolle las competencias matemáticas (que priorizan lo que el alumno es capaz de hacer con sus conocimientos y destrezas matemáticas) y analizar los beneficios producidos. Se ha diseñado, aplicado y estudiado un entorno interactivo de aprendizaje, soportado por medios informáticos y por TIC, en el que el trabajo se organiza de modo colaborativo y las formas de interacción, comunicación y aprendizaje son diferentes respecto al modelo tradicional.

El entorno de aprendizaje diseñado se ha implementado y analizado en el marco de la materia optativa *Taller de Matemáticas* destinada a alumnos de ESO. Se ha implementado en el Máster de Profesorado y queda por analizar los resultados con los instrumentos diseñados.

Se han diseñado y aplicado los instrumentos de análisis correspondientes para estudiar, por un lado, las actividades propuestas a lo largo del proceso de aprendizaje teniendo en cuenta diferentes criterios para las mismas y, por otro lado, la evolución de los aprendizajes de los alumnos en relación a las competencias matemáticas mencionadas más arriba.

En cuanto al estudio de las actividades propuestas, hemos determinado las condiciones estructurales mínimas en función de las diferentes etapas del proceso; teniendo en cuenta que en cada fase las modalidades comunicativas, los conocimientos tecnológicos y geométricos de los alumnos y los objetivos propuestos son diferentes.

En relación a los beneficios cognitivos producidos en los alumnos, se han aplicado los instrumentos diseñados con el objeto de establecer los perfiles de aprendizaje a lo largo del proceso en relación al Aprendizaje de la Geometría y al desarrollo de la Competencia Comunicativa y se ha estudiado la existencia o no de interrelaciones entre los mismos. Se han estudiado también, aspectos relacionados con la capacidad de motivación del EVA (Entorno Virtual de Aprendizaje); analizando el impacto de su implementación en el interés y la participación de los alumnos.

Nuestro trabajo comprende aspectos de innovación (diseño e implementación de un EVA para potenciar el desarrollo de ciertas competencias en el que se abordan temáticas curriculares relativas a la Geometría) y de investigación (sobre determinados aprendizajes e interacciones).

Hemos analizado la evolución producida respecto al Aprendizaje de la Geometría y al desarrollo de la Competencia Comunicativa; para estudiar posteriormente la existencia o no de correlaciones entre los progresos entre ambas

dimensiones. En términos del esquema propuesto, hemos estudiado los polos CC y AG y las interacciones representadas por la arista que los une; por supuesto sin perder de vista que esta interacción no deja de ser parte de un sistema más amplio de interacciones². Aspectos estos, que como ya hemos señalado, pretendemos analizar en el marco de la asignatura de Enseñanza y Aprendizaje del Máster de Profesorado.

Marco teórico

En el marco de nuestra investigación:

“Entendemos por entorno de aprendizaje un espacio educativo capaz de generar situaciones de aprendizaje adaptadas e interactivas para trabajar matemáticamente y capaces de promover y soportar el cambio cognitivo de los alumnos” (Murillo, 2001).

En tal sentido, caracterizamos el entorno interactivo de aprendizaje propuesto de la siguiente manera: un entorno de aprendizaje interactivo, soportado por aplicaciones informáticas y por el uso de las TIC, en el que el trabajo se organiza de manera colaborativa. Está constituido fundamentalmente por una red electrónica como soporte instruccional y en el que las actividades propuestas para resolver con un SGD (Software de Geometría Dinámica), presentadas en la página Web correspondiente o a través del correo electrónico, constituyen el medio esencial de comunicación y aprendizaje. Se utiliza además un foro electrónico en el que es posible plantear preguntas, replicar, solicitar aclaraciones, quedando todas las intervenciones a la vista del grupo.

Para el diseño del EVA, se ha considerado como función principal del profesor la de intentar modular y guiar el proceso. Para describir esta función, empleamos el concepto de *“andamiaje”*; acuñado por Bruner y colaboradores (1975) y retomado por Vygostky (1978), según el cual el profesor es quien realiza *“la parte de la tarea que el estudiante todavía no puede manejar y le proporciona soporte en forma de sugerencias o ayuda, basadas en una diagnosis correcta del nivel actual del alumno en cuanto a destrezas o dificultades. El andamiaje es un modo cooperativo de resolución de problemas de profesor y alumnos, en el que el soporte se modifica gradualmente hasta que los alumnos se hace cargo de lo suyo y finalmente la ayuda del profesor se desvanece”* (Murillo, 2001). El diseño y control de los

² Cabe destacar que las implicancias del polo “tutorización” han sido ampliamente estudiadas, por Cobo y Fortuny (2005), en relación al desarrollo de competencias por parte de los alumnos en un *entorno e-learning*. Asimismo, existen numerosas investigaciones que han estudiado la influencia de los medios, en particular de las TIC, al aprendizaje (Gutiérrez Martín 2000, Depover 1998, ...) y más específicamente al aprendizaje de la Geometría (Murillo 2001, ...).

entornos de aprendizaje debe contribuir a este andamiaje; proporcionando en cada momento más que los aportes necesarios los mínimos necesarios, de manera que se potencia el desarrollo óptimo de los alumnos.

La competencia comunicativa (CC) en Matemáticas

En los últimos años el *“aprender a comunicarse matemáticamente”*, ha cobrado gran importancia como parte del proceso de aprendizaje de las Matemáticas. La relevancia del desarrollo de la capacidad de comunicarse matemáticamente y del papel del lenguaje en el aprendizaje de las Matemáticas, se ve reflejado tanto en numerosas investigaciones de Didáctica de las Matemáticas (Nesher 2000, Niss 1999, Duval 2001, Morgan 1998, Powell 1995 y 2001, Fortuny y Jiménez 2000), así como en diversas orientaciones curriculares (NCTM, MEC, Proyecto OCDE / PISA).

La conversación matemática es buena para el pensamiento matemático (Sfard, 1997); en particular la acción de “describir” en la clase de Matemáticas, resulta una tarea lingüística con consecuencias matemáticas (Hyde, 1996).

El lenguaje matemático, el geométrico en particular, constituye un sistema muy complejo dado su carácter mixto; mixto en el sentido de que incluye un lenguaje natural y un lenguaje simbólico específico en permanente interacción y que a su vez también contiene registros semióticos no lingüísticos como son los gráficos (figuras, diagramas, etc.)

El paradigma comunicativo

El *“paradigma comunicativo”*, proveniente de la Didáctica de la Lengua y de los modelos comunicativos, aporta algunas consideraciones importantes a tener en cuenta en relación al aprendizaje de la comunicación tanto para el diseño de entornos de aprendizaje como para el análisis de los procesos de aprendizaje. Desde este nuevo paradigma, la comunicación deja de entenderse como un *“contenido enseñable”* (en un contexto específico y transferible a otros contextos) para convertirse en *“una actividad que debe hacerse”* en los distintos espacios curriculares, de manera que los alumnos puedan desarrollar su *competencia comunicativa*³, mediante la participación en procesos comunicativos reales y

³ Según Lomas, Osoro y Tusón (1997), con la expresión Competencia comunicativa se hace referencia *“al conjunto de procesos y conocimientos de diverso tipo lingüísticos, socio-lingüísticos, estratégicos y discursivos- que el hablante/ oyente/ escritor/ lector deberá poner en juego para producir o comprender discursos adecuados a la situación y al contexto de comunicación y al grado de formalización requerido”*. Este conjunto de habilidades y conocimientos operativos necesarios para interacción comunicativa incluye diversidad de conocimientos, estrategias, destrezas cuyo carácter es integrador e

contextualizados que les permitan relacionarse con los otros, regular sus discursos, negociar significados, hacerse entender, transmitir ideas, argumentar, etc.; y el aula debe ser entonces un contexto comunicativo significativo donde no sólo se aprende, sino que también se aprende a hacer; donde los procesos de comprensión y expresión, escrita y oral, se alcanzan de manera progresiva a través del uso y de la interacción.

La Competencia Comunicativa constituye una noción social recontextualizada en Educación Matemática (Bernstein 1996, Planas 2002); es decir una noción proveniente de otras disciplinas incorporada a la Didáctica de la Matemática. En su investigación sobre el proceso de recontextualización de esta noción, Planas reinterpreta lo que significa ser competente en el aula de Matemáticas desde un punto de vista comunicativo

“La adquisición de competencia comunicativa consiste en la adquisición de todo aquello que es necesario saber para poder relacionarse con eficacia en contextos cultural y socialmente significativos sin que se produzcan discontinuidades que lo impidan”. En este sentido, la construcción de conocimiento matemático y el buen desarrollo de los procesos de comunicación son del todo inseparables. (Planas, 2002: pp. 179,180).

Hablar (y escribir) de matemáticas

Nesher (2000) distingue entre dos acciones: *“hablar matemáticamente”* y *“hablar de matemáticas”*. Con el término *“hablar matemáticamente”* se refiere a usar el lenguaje matemático, aplicándolo a variados contextos, pero teniendo en cuenta su propia sintaxis. Con la expresión *“hablar de matemáticas”* hace referencia al hecho de utilizar el lenguaje natural como metalenguaje para expresar ideas matemáticas; en este caso, el vocabulario y la gramática, sintaxis y semántica, son las del lenguaje natural; aunque claro está que suele tratarse de discursos parcialmente expresados en términos matemáticos.

Adaptamos la expresión *“hablar de matemáticas”* propuesta por Nesher y utilizamos el *“escribir de geometría”*, para referirnos al proceso de producción de discursos –escritos– en los que los alumnos explican, justifican, describen el procedimiento que han llevado a cabo para la resolución de problemas, empleando el lenguaje natural como metalenguaje.

La reflexión escrita sobre las experiencias matemáticas puede llevar a los alumnos a pensar críticamente sus ideas favoreciendo los procesos metacognitivos (Powell, 2001).

interdependiente. La competencia comunicativa es una competencia cultural que se adquiere mediante la participación en procesos comunicativos reales.

Frente a la naturaleza efímera del habla, la escritura ofrece un medio estable, que permite a profesor y alumno, examinar, reaccionar y responder al pensamiento matemático (Powell, 2001).

Metodología

Hemos aplicado los instrumentos diseñados para el análisis de los progresos producidos en relación al desarrollo de la Competencia Comunicativa y al Aprendizaje de la Geometría, a resoluciones sucesivas propuestas los t alumnos, con el objeto de estudiar el proceso y establecer un perfil de aprendizaje correspondiente a cada dimensión de análisis.

Descripción de los alumnos estudiados

La elección de los alumnos así como de las actividades cuyas resoluciones se han analizado, se han llevado teniendo en cuenta los siguientes criterios metodológicos:

Se trata de un estudio de casos, pero que los alumnos estudiados represente a la población de alumnos con los que se trabaja

La elección de los alumnos a analizar no ha sido aleatoria sino que la misma se ha realizado en base a la información académica anterior disponible para cada alumno (notas en general, notas en la asignatura Matemáticas, cantidad de suspensos, concepto de los profesores y tutores en relación a actitudes frente al aprendizaje, capacidades generales y específicas, etc.).

En base a la información recogida y analizada respecto a la totalidad de los alumnos, se han establecido tres clases o categorías según el rendimiento escolar, que coloquialmente hemos denominado: “alumnos buenos y muy bueno”, “alumnos regulares o medios” y “alumnos de rendimiento insuficiente”.

Diseño del EVA diseñado e implementado

Las clases se desarrollan en un aula de Informática, cuyos ordenadores cuentan con un SGD (Software de Geometría Dinámica), con acceso a Internet y con un navegador. En el desarrollo de la asignatura, se diferencian tres fases o etapas que denominamos: *ñetapa presencialò*, *ñetapa correo electrónicoò* y *ñetapa foro electrónicoò*. Dichas etapas, aparecen cronológicamente en el orden en que se han mencionado; no obstante la aparición de una no supone la finalización de la anterior sino que en muchos casos coexisten.

Las actividades propuestas: el sistema de ñayudas progresivas y diversificacionesò y la idea de ñitinerario de resolución

Para hacer posible el máximo desarrollo de las potencialidades de cada alumno, se han diseñado unas actividades adaptables a cada interlocutor, que especifican tanto como sea necesario (y suficiente) para cada alumno y que permiten a cada uno desarrollar el máximo nivel de profundidad y complejidad en su resolución.

Según el sistema diseñado, todos los alumnos parten de un mismo enunciado, planteado para poner en juego ciertos conceptos y destrezas y que tiende a desarrollar ciertas competencias; pero dicho enunciado inicial se irá adaptando a cada resolutor.

Esta adaptabilidad a receptores tan diversos, se logra a través de un sistema de **ñayudas progresivas y diversificacionesò**.

Las **ñayudas progresivasò** son orientaciones docentes que se administran gradualmente cuando el enunciado inicial no es asequible para el alumno y pretenden convertir dicho enunciado en uno abordable de tal manera que el alumno sea capaz de resolver la actividad. Una ayuda puede consistir, según el caso, en recordar una definición, realizar una sugerencia, proponer un procedimiento, formular una nueva pregunta, reformular la pregunta inicial, aportar un dibujo, etc. Estas ayudas se van aportando gradualmente porque, como hemos mencionado, pretendemos que sean las necesarias pero también las suficientes para resolver el problema. La cantidad y el tipo de ayudas, así como el momento en que se aportan, dependen de cada alumno y cada actividad.

A través de las **ñdiversificacionesò** de la actividad inicial, el docente propone a cada alumno diferentes niveles de profundidad, complejidad y formalización. Las diversificaciones se proponen una vez que la actividad propuesta inicialmente, ya ha sido resuelta correctamente por el alumno. Una diversificación puede consistir en la generalización de resultados, en la demostración de la propiedad involucrada en la resolución, en el análisis de otros casos, en la expresión simbólica de algún resultado, etc. Al igual que las ayudas, las diversificaciones también se van incorporando gradualmente y la cantidad, tipo y momento en que se aportan, dependen de cada alumno.

Con este sistema de **ñayudas progresivas y diversificacionesò**, cada alumno, sigue su propio itinerario de resolución; todos cumplen con las expectativas básicas propuestas para una actividad que se vuelve asequible a cada resolutor pero también, cada alumno desarrolla al máximo sus potencialidades respecto a ella. Existe un recorrido mínimo recorrido por todos, cumpliendo así con las pautas curriculares mínimas planteadas, pero también damos una respuesta a la atención a la diversidad de manera tal que se permite a cada uno alcanzar el nivel de profundización y formalización más conveniente.

Logramos de esta manera que, en cada momento, todos los alumnos estén trabajando sobre la misma actividad (sobre los mismos contenidos), y evitamos así que los que terminan más rápido avancen hacia otras actividades o tengan que esperar equiparando sus tiempos al de los que trabajan un poco más lento, tiempo que también pretendemos respetar.

Llamamos **itinerario de resolución** a la secuencia recorrida por un alumno en la resolución de una actividad dada, teniendo en cuenta las ayudas que fueron necesarias y las diversificaciones que fueron posibles en cada caso.

Así, si bien el enunciado inicial de las actividades se corresponde en principio con el de **problemas abiertos**, como dichos enunciados se van adaptando a las necesidades cognitivas de cada alumno a través del sistema de ayudas progresivas y diversificaciones, puede resultar que, según el itinerario de resolución recorrido, una misma actividad termine convirtiéndose en **problema de aplicación** o en **ejercicio algorítmico** (Alsina y otros, 1997) para distintos alumnos.

Consideramos importante distinguir con cuántas ayudas y de qué tipo resolvió una actividad cada alumno, porque dicha información da cuenta del tipo de problema resuelto; mientras algunos resuelven un **problema de aplicación**, otros pueden resolver un **ejercicio algorítmico** y otros un **problema abierto**.

Resulta claro entonces que el análisis del itinerario de resolución recorrido por el alumno, aporta una información muy relevante para el estudio del proceso de Aprendizaje de la Geometría, estableciendo qué tipo de actividad ha resultado cada enunciado en cada caso, y evaluar la evolución de cada alumno a lo largo del proceso.

Criterios utilizados para la organización de las secuencias de actividades

Las actividades propuestas a los alumnos a lo largo del Taller, cumplen ciertas condiciones para adaptarse a cada una de las tres etapas del proceso (**etapa presencial**, **etapa correo electrónico** y **etapa foro electrónico**) y sus correspondientes modalidades comunicativas y para responder al sistema de **ayudas progresivas y diversificaciones** que hemos propuesto para atender a la diversidad de manera que cada alumno pueda recorrer el **itinerario de resolución** más conveniente.

Pero más allá de esas características para las actividades, hemos asumido ciertos criterios relacionados con el orden en que éstas se presentan, la manera en que se seleccionan a la hora de construir una secuencia didáctica de actividades.

Las actividades que forman parte de cada una de las secuencias propuestas a los alumnos guardan un orden que respeta criterios de complejidad creciente y resulta acorde a los contenidos y objetivos que se pretenden desarrollar.

Pero entre unas y otras, se intercalan otras actividades que involucran otros conceptos y procedimientos geométricos; es decir las actividades seleccionadas para el desarrollo y estudio de un núcleo temático no se presentan de manera consecutiva.

La razón de esta “*decisión didáctica*” radica en el hecho sabido de que los alumnos *no aprenden* durante su escolaridad a tipificar las actividades, tendiendo a aplicar los conceptos recién aprendidos a la resolución de las actividades que se proponen a continuación; y de la misma manera a identificar en una secuencia de problemas correlativos los contenidos y procedimientos involucrados en su resolución.

Queremos evitar que casi antes de leer una serie de problemas, o con la resolución del primero de ellos, los alumnos puedan realizar afirmaciones del tipo *“estos se hacen con mediatriz”, “estos son de Pitágoras”*; porque consideramos que parte de la competencia matemática se relaciona no sólo con disponer de los conceptos y procedimientos necesarios para resolver una situación, sino también, con la capacidad para seleccionar, adaptar y aplicar dichos conceptos y destrezas en contextos escolares y no escolares.

Dominio conceptual

En relación al Aprendizaje de la Geometría, hemos diseñado instrumentos y determinado indicadores y criterios que nos permiten analizar los progresos producidos en los alumnos en relación al Aprendizaje de la Geometría.

En relación con el desarrollo de la Competencia Comunicativa, hemos diseñado instrumentos y determinado indicadores y criterios que nos permitan analizar las producciones escritas, a través de las cuales los alumnos expresan ideas matemáticas utilizando el lenguaje natural como metalenguaje –discursos que suelen estar parcialmente expresados utilizando términos y notaciones geométricas – como parte de la resolución de problemas geométricos.

En este sentido, hemos analizado los progresos producidos en el desarrollo de la competencia comunicativa.

Instrumentos y criterios para evaluar los Aprendizaje en Geometría (AG)

La resolución de problemas geométricos es un proceso dinámico que incluye la modelización del mismo a partir del enunciado, el trabajo sobre el modelo geométrico propuesto seleccionando y aplicando para ello conceptos, relaciones, procedimientos,... y la reinterpretación de resultados en el contexto del enunciado inicial para dar una respuesta con la correspondiente validación. Los procesos metacognitivos de control y reflexión sobre el proceso de resolución hacen que las

anteriores no sean fases lineales y consecutivas, sino componentes en permanente interacción.

El diseño del instrumento para el análisis del Aprendizaje de la Geometría (AG), ha implicado un proceso de revisión de aportes de diferentes autores en relación a la resolución de problemas (Polya 1982, Mason, Burton y Stacey 1988, Brandsford y Stein 1993), al aprendizaje de la Geometría (Duval 2001, De la Torre 2003, Alsina et al. 1997), al enfoque por competencias (PISA 2001, Rico 2004 y 2006, Cobo y Fortuny, 2005); y a la vez una contextualización a nuestro EVA, teniendo en cuenta algunos aspectos como su formato bimodal, el sistema de *ayudas progresivas y diversificaciones* como estrategia para la atención a la diversidad, la noción de lo que entendemos por *itinerario de resolución* recorrido por el alumno.

Este proceso ha dado lugar al instrumento que presentamos en el Cuadro 1.

Componente C1: <i>Transformación 1:</i> <i>modelización del problema</i>	Indicador: ¿Convierte el enunciado real en un enunciado matemático? (si es necesario) Sin ayudas: Con ayudas:
	Indicador: ¿Traduce el enunciado matemático en una estructura geométrica (respetando la correspondencia entre las condiciones planteadas por el enunciado y su representación geométrica)? Sin ayudas: Con ayudas:
Componente C2: <i>Transferencia:</i> <i>resolución del problema dentro del modelo</i>	Indicador: ¿Identifica, selecciona y aplica los conceptos y relaciones construidos anteriormente, necesarios para resolver el problema? Sin ayudas: Con ayudas:
	Indicador: ¿Aplica y adapta las estrategias necesarias para resolver el problema? Sin ayudas: Con ayudas:
Componente C3: <i>Metacognición:</i> <i>Reflexión y control sobre el proceso de resolución</i>	Indicador: ¿Reflexiona y controla el proceso de resolución? Sin ayudas: Con ayudas:
Componente C4: <i>Transformación 2:</i> <i>codificación e interpretación de la solución en el contexto del enunciado</i>	Indicador: ¿Comunica acerca del modelo y de sus resultados dando una solución justificada al problema propuesto? Sin ayudas: Con ayudas:
Componente C5: <i>Itinerario recorrido</i>	Indicador: ¿Cuántas ayudas ha necesitado?
	Indicador: ¿Cuántas diversificaciones resuelve? (¿hasta qué nivel de profundización avanza?)
Valoración/ponderación: Clase de actividad que resuelve el alumno y nivel que le corresponde	

Las anteriores capacidades son las componentes fundamentales del proceso de resolución de problemas geométricos, entendido desde la noción de competencia, que llevan a cabo nuestros alumnos al resolver problemas a lo largo del Taller. Dichas capacidades no deben entenderse como componentes aisladas y de sucesión cronológica y lineal (por esa razón, preferimos llamarlas componentes en vez de fases o etapas); dado que los procesos de metacognición hacen posibles las interacciones entre ellas y de esta forma el proceso se hace dinámico y personal en el caso de cada actividad y cada alumno.

Si bien estas componentes de análisis constituyen heurísticos generales sobre la resolución de problemas, son los conceptos, relaciones conceptuales, procedimientos y estrategias planteados en los enunciados e involucrados en su resolución los que los convierten en indicadores para el análisis del aprendizaje de la Geometría desde nuestra perspectiva que entiende este Aprendizaje como la mejora en la capacidad de poner en juego las competencias necesarias para la resolución de problemas geométricos.

En base al análisis de cada uno de los indicadores, se establece un nivel general del alumno, nivel que representa el estado general del alumno en relación al Aprendizaje de la Geometría:

- **Nivel Uno (AG1):** Teniendo en cuenta el análisis del itinerario realizado, el alumno resuelve una *Actividad de Primera clase (Reproducción y procedimientos rutinarios)*. Este nivel se caracteriza por un manejo básico de conceptos y procedimientos rutinarios que le permite resolver solamente **ñejercicios algorítmicosò**.

- **Nivel Dos (AG2):** Teniendo en cuenta el análisis del itinerario realizado, el alumno resuelve una *Actividad de Segunda clase (Conexiones e integración para resolver problemas estandarizados)*. Este nivel se caracteriza por la capacidad de realizar conexiones e integrar conceptos y procedimientos que le permiten resolver **ñproblemas de aplicaciónò**.

- **Nivel Tres (AG3):** Teniendo en cuenta el análisis del itinerario realizado, el alumno resuelve una *Actividad de Tercera clase (Razonamiento, argumentación, intuición y generalización para resolver problemas originales)*. Este nivel se caracteriza por las capacidades de razonamiento, argumentación, intuición y generalización necesarios para resolver **ñproblemas abiertosò**

Estos niveles, han surgido del proceso de análisis exhaustivo de las resoluciones de todos los alumnos mediante el instrumento de análisis propuesto y de la organización de las mismas en categorías, de acuerdo a la clase de Actividad resuelta en cada caso teniendo en cuenta las ayudas recibidas y las diversificaciones resueltas.

Instrumentos y criterios para evaluar el desarrollo de la competencia comunicativa (CC)

Consideramos que las producciones escritas, a través de las cuales los alumnos utilizan el lenguaje natural como metalenguaje para expresar ideas matemáticas – discursos que suelen estar parcialmente expresados utilizando términos y notaciones geométricas– son parte de la resolución del problema geométrico propuesto (Figura 1).

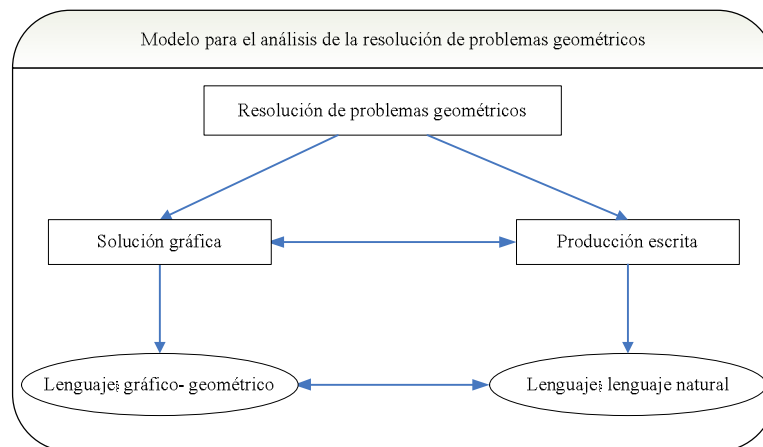


Figura 1

Entendemos que cuando los alumnos producen este tipo de discursos, desarrollan aprendizaje matemático; en particular cuando los alumnos comunican sus estrategias geométricas en este modo mixto desarrollan aprendizaje geométrico.

Por esta razón, nuestro trabajo incluye el análisis de los discursos escritos producidos por los alumnos, como parte de la resolución de los problemas geométricos propuestos; discursos en los que los alumnos explican, justifican y describen el procedimiento que han llevado a cabo (competencia comunicativa).

Nuevamente, el diseño de este instrumento de análisis ha implicado un proceso de revisión de aportes de diferentes autores en relación a la noción de competencia comunicativa en general y en ámbito de la Educación Matemática (Canale, 1995), a cuestiones relativas al discurso académico (Cassany et al., 1997; Atienza, 1999) y a la vez una contextualización a nuestro EVA. Este complejo proceso de diseño de este instrumento de análisis, también se describe en Murillo y Marcos (2005, 2007, 2008) y Marcos (2008).

Las componentes de análisis, y sus correspondientes interpretaciones, son las siguientes:

a) *Coherencia (componente relativa a la competencia discursiva)*: para analizar la capacidad de elaborar discursos coherentes, en los que no aparezcan contradicciones, cuyas partes estén conexas dando lugar a un mensaje claro, con sentido y completo.

Analizamos la coherencia tomando en consideración dos niveles, uno centrado en la propia estructura del discurso (intratextual) y otro tomando en consideración la relación entre la solución gráfica⁴ y la producción escrita (extratextual).

b) *Cortesía y Adecuación (componente relativa a la competencia socio-comunicativa)*: para analizar el conocimiento de las reglas socioculturales de uso necesarias para llevar a cabo cualquier acto comunicativo.

Con adecuación, hacemos referencia al uso del texto en un contexto concreto de comunicación; contexto que incluye las circunstancias de lugar y tiempo, las características de los destinatarios, su edad, sus caracteres, la relación que se mantiene con ellos, etc. Las normas de adecuación, se refieren a la utilización de un discurso adecuado al contexto específico.

Respecto a la cortesía, diremos que no es algo que sólo embellece el lenguaje sino además un constituyente esencial en la comunicación; en tanto permite evitar conflictos y mantener la armonía en el proceso.

c) *Ortografía y Vocabulario (componente relativa a la competencia lingüística)*: para analizar el código lingüístico propiamente dicho.

Con ortografía, hacemos referencia al uso correcto de las palabras y signos auxiliares; con vocabulario, al uso correcto del vocabulario general y específico, tanto por su riqueza (cantidad y valoración de palabras que no son usuales en el lenguaje del alumno) como por su precisión (utilización adecuada de esas palabras, oportunidad de su empleo en el desarrollo de la idea).

En nuestro contexto específico, estas categorías se refieren no sólo al lenguaje natural en general sino también a las particularidades del lenguaje geométrico; el uso de sus términos, notaciones y modos de decir de un lenguaje tan específico como el matemático, deben ser aprendidos en la clase de Matemáticas.

⁴ No se emplea la expresión “resolución geométrica”, porque entendemos que la resolución geométrica abarca tanto la construcción o solución gráfica como la expresión escrita correspondiente a dicha resolución. Denominamos texto o discurso escrito a dicha producción escrita.

d) *Creatividad y solución de problemas comunicativos (componente relativa a la competencia estratégica)*: para analizar el dominio de estrategias de comunicación, capacidad y creatividad para resolver problemas comunicativos, así como la originalidad de las ideas.

La creatividad y la riqueza de estrategias deben ser un elemento fundamental de la clase de Matemáticas, entendidas desde el “hacer matemáticas” y desde la “resolución de problemas”.

En el caso del análisis de las producciones escritas de los alumnos, entendidas como parte de la resolución de problemas geométricos, también consideramos importante el desarrollo de la creatividad comunicativa, entendida ésta como originalidad de ideas, como capacidad de resolución de problemas comunicativos.

Se trata de determinar cuando un alumno es capaz de resolver situaciones a pesar del desconocimiento de un término específico o el olvido de una definición, proponiendo caminos alternativos y superando ese escollo comunicativo.

Establecemos, para cada una de las componentes, los indicadores que se recogen en el Cuadros 2.

Para establecer el nivel general del alumno en cada momento en relación al desarrollo de la Competencia Comunicativa partimos de lo que entendemos por *discurso correcto*.

Consideramos que un *discurso correcto* es aquél que además de ser coherente, cumple con las reglas ortográficas y de vocabulario (generales y geométricas), es adecuado (responde a las condiciones relativas a la situación y a los destinatarios sino también a los requerimientos solicitados por la actividad) y, de ser necesario, resuelve los problemas comunicativos - como puede ser el olvido de una palabra. Ponderamos este tipo de discursos como de Nivel 3 (CC3) y proponemos otros dos niveles.

Cuadro 2

Componente: Coherencia	Indicadores:
Intratextual	<i>Repeticiones, contradicciones, insuficiencia de ejemplos, insuficiencia de argumentos, desorden, ambigüedad, información insuficiente o excesiva, falta de claridad- inadecuación respecto al objetivo comunicativo</i>
Extratextual	<i>Coincidencia entre el procedimiento descrito a través del texto y el llevado a cabo en la construcción</i>
Componente: Cortesía y adecuación	Indicadores:
Respeto	<i>Imposiciones de voluntad o imperaciones, ofrecimiento de opciones, reforzamiento de lazos.</i>
Adecuación	<i>Utilización de un registro adecuado a la edad del destinatario, a la relación que se mantiene con el destinatario (relación profesor- alumno, relación alumno- alumno), y a las circunstancias de lugar y tiempo (ámbito educativo, la clase).</i>
Componente: Ortografía y vocabulario	Indicadores:
Ortografía	<i>Uso correcto de las palabras y signos auxiliares, propios del castellano en general y del lenguaje geométrico en particular, uso correcto de notaciones.</i>
Vocabulario	<i>Empleo de palabras que no son usuales en el lenguaje habitual del sujeto, precisión en la utilización adecuada de las palabras, oportunidad de su empleo en el desarrollo de la idea o de su situación en la frase.</i>
Componente: Creatividad y solución de problemas comunicativos	Indicadores:
	<i>Utilización de sinónimos cuando no se recuerda una palabra específica, construcción de definiciones convenientes.</i>

- Nivel 1 (CC1): Discurso no aceptable: Son discursos caracterizados por la falta grave de coherencia, que muestra o bien que el alumno no ha comprendido el problema o bien que aunque puede realizar la resolución gráfica, tiene dificultades graves para expresar sus ideas (esta segunda posibilidad, aunque menos frecuente, aparece en algunos casos). En este nivel se incluye también la **ñfalta de discursoò**. Este tipo de discursos muestra que actividad planteada no ha resultado asequible para ese alumno y en este caso la actuación del profesor consistirá en replantear la situación o proponer nuevas situaciones que permitan al alumno trabajar sobre las destrezas y conceptos previos con los que muestra dificultades.

- Nivel 2 (CC2): Discurso aceptable pero mejorable: El discurso carece de alguna o algunas de las características propias de un discurso correcto pero mantiene un grado de coherencia mínimo que posibilita su interpretación y permite una actuación docente orientada a la reformulación (no sólo del discurso sino también de las ideas) por parte del alumno. El docente puede orientar el proceso con preguntas, ayudas, sugerencias, etc.

- Nivel 3 (CC3): Discurso correcto. En estos casos, la actuación del profesor se orienta a la propuesta de diversificaciones de la actividad que permitan un enriquecimiento y una profundización de la actividad planteada originalmente y que puede consistir, según el caso, en la búsqueda de una generalización, en la formulación de una conjetura, en una demostración, en el análisis de otros casos posibles, etc.

Estos niveles, han surgido del proceso de análisis exhaustivo de las resoluciones de todos los alumnos mediante el instrumento de análisis propuesto y de la organización de las mismas en categorías según las características del discurso en cada caso.

Criterios generales y específicos para el análisis de la CC y el AG

Hemos aplicado los instrumentos diseñados para el análisis de los progresos producidos en relación al desarrollo de la Competencia Comunicativa y al Aprendizaje de la Geometría, a resoluciones sucesivas propuestas por tres alumnos a lo largo del Taller, con el objeto de estudiar el proceso y establecer un perfil de aprendizaje correspondiente a cada dimensión de análisis.

Realizamos el estudio de estos tres alumnos, considerando para cada uno de ellos las resoluciones propuestas para nueve actividades. Estas nueve actividades seleccionadas corresponden, tres de ella a la etapa presencial y otras seis a la etapa correo electrónico.

Análisis e interpretación de datos

Hemos evaluado mediante los instrumentos de análisis propuestos para el desarrollo de la Competencia Comunicativa y para el Aprendizaje de la Geometría, las resoluciones llevadas a cabo por cada uno de los tres alumnos seleccionados, en relación a nueve actividades consideradas.

Evolución producida en relación al AG y a la CC por parte de los alumnos:

Al aplicar el instrumento diseñado para el análisis del AG, a las resoluciones propuestas por cada uno de los tres alumnos estudiados a lo largo del proceso,

hemos obtenido que los tres alumnos han evolucionado positivamente, en el sentido de poder resolver actividades cada vez más complejas.

Al aplicar el instrumento diseñado para el análisis de la CC, a las resoluciones propuestas por cada uno de los tres alumnos estudiados a lo largo del proceso, hemos obtenido que los tres alumnos han progresado en relación al desarrollo de su competencia comunicativa geométrica, dado que los tres han mejorado sus discursos.

Estudio de las relaciones existentes entre el progreso relativo a la CC y al AG

Una vez analizados los progresos producidos en relación al AG y a la CC, hemos analizado, si los progresos de los alumnos en relación al desarrollo de la Competencia Comunicativa y el referido al aprendizaje de la Geometría están en relación o no, calculando el coeficiente de correlación lineal para el conjunto de resultados obtenidos para cada uno de los tres alumnos estudiados, considerando como variables x e y al nivel obtenido en cada caso para la CC y para el AG. En los tres casos, hemos obtenido valores de correlación elevada, lo que indica que existe una asociación lineal positiva bastante fuerte entre ambas variables en los tres casos estudiados.

Interpretamos estas correlaciones de la siguiente manera: el desarrollo de la Competencia Comunicativa ha favorecido el mejor aprendizaje de la Geometría – porque saber comunicar un saber añade valor a ese saber-, pero este desarrollo también se debe a las mejoras en el Aprendizaje de la Geometría en general, porque la comunicación se aprende en un contexto específico y para comunicarse es necesario compartir unas temáticas, un registro, un lenguaje común como es en este caso el geométrico que no se aprende aisladamente sino en interacción con el resto de estrategias y conceptos geométricos: los progresos generales en el aprendizaje de la geometría dan fluidez y seguridad a los procesos de comunicación.

Para los tres alumnos se han obtenido progresos notorios en relación al AG y a la CC; progresos que a su vez guardan una fuerte correlación positiva entre sí.

Resultados igualmente favorables se han obtenido también en el resto de los alumnos; hecho que destacamos como una ventaja del diseño del entorno virtual de aprendizaje.

Discusión y conclusiones

Uno de los principales objetivos de nuestra investigación ha sido: “Analizar los beneficios producidos en los alumnos en relación al desarrollo de la competencia comunicativa matemática”

Mediante la aplicación del instrumento de análisis correspondiente, a resoluciones sucesivas propuestas por algunos alumnos a lo largo del Taller, hemos podido estudiar el proceso y establecer un perfil de evolución correspondiente al desarrollo de la competencia comunicativa por parte de cada uno de los tres alumnos analizados.

En relación a la Competencia Comunicativa

Hemos obtenido que los tres alumnos han progresado en relación al desarrollo de su competencia comunicativa geométrica a lo largo del Taller de Matemáticas, en el sentido de comprender y producir discursos geométricos cada vez más complejos.

La comunicación matemática debe constituir un objetivo muy importante y a la vez un contenido fundamental en relación a la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría en la ESO.

El describir de geometría, constituye una modalidad comunicativa que favorece el desarrollo de la competencia comunicativa matemática y mejora las capacidades geométricas.

El modelo con formato bimodal (presencial y virtual) para las interacciones ha resultado beneficioso, mejorando la capacidad de comunicación tanto matemática como personal por parte de los alumnos, al darle una dimensión real al proceso.

El enfoque comunicativo y la noción de competencia comunicativa, constituyen nociones sociales recontextualizadas en Educación Matemática que aportan valiosas perspectivas de análisis y potentes herramientas para contribuir a analizar y mejorar los procesos relacionados con la producción de discursos geométricos y el Aprendizaje de la Geometría.

En relación al Aprendizaje de la Geometría

Hemos obtenido así que los tres alumnos han evolucionado positivamente, en el sentido de poder resolver estratégicamente actividades cada vez más complejas según resulta del estudio de su itinerario de resolución recorrido en cada caso.

El proceso de enseñanza y aprendizaje de la Geometría, puede organizarse a través de un modelo para organizar las actividades que permite atender a la diversidad en el aula, adaptando las actividades a cada alumno de manera que cada uno desarrolle al máximo sus potencialidades de aprendizaje y sin perder la coherencia dada por los contenidos geométricos planteados.

Resulta posible y motivador organizar la enseñanza de la Geometría en la ESO a través de un entorno interactivo de aprendizaje que incluya el uso de TIC.

Relaciones existentes entre el Aprendizaje de la Geometría y el desarrollo de la Competencia Comunicativa

Interpretamos los elevados valores de correlación obtenidos de esta manera: El desarrollo de la CC ha favorecido el aprendizaje de la Geometría, la escritura académica en su función representativa, facilita el aprendizaje (el desarrollo de habilidades escritoras permite una mejor aprehensión del contenido geométrico). Pero a la vez, los progresos en relación al AG mejoran la comunicación, porque dan fluidez y seguridad a los procesos de comunicación.

Presentación e implementación para el Máster.

Con el desarrollo e implementación de esta metodología en el Máster de Profesorado nos hemos planteado conseguir en los alumnos del Máster, entre otros, los objetivos profesionales que detallamos a continuación:

1. Percatarse del interés del trabajo colaborativo en la clase como sistema de enseñanza aprendizaje en la resolución de problemas.

Varios aspectos señalan el interés por este método de enseñanza aprendizaje.

genera una interdependencia positiva,

promueve la interacción y valora la contribución individual,

logra habilidades personales y de grupo obliga a la autoevaluación del grupo ya que se necesita continuamente evaluar la efectividad de su grupo, el trabajo individual de cada uno de los integrantes de equipo cara a la consecución de los objetivos y el grado de consecución de los objetivos que determinará la futura actuación del grupo.

2. Aprender a diseñar actividades que fomenten el trabajo cooperativo/colaborativo en entornos interactivos de aprendizaje y controlar el proceso de aprendizaje.

3. Mejorar la capacidad de resolver problemas, mediante el trabajo colaborativo

4. Reconocer el mérito que tienen las ideas de los estudiantes y lo importante que es su propio lenguaje para expresar sus procesos de pensamiento y adquirir de manera profunda sus ideas científicas.

5. Aprender a motivar a los alumnos para comunicarse con sus compañeros para que les muestren sus resultados y razonamientos, bien sea en forma oral, escrita o electrónica, incluyendo argumentos científicos y racionales, no solamente descripciones de procedimientos y resúmenes.

6. *Diseñar actividades que ofrezcan a los alumnos la oportunidad de que se discuta sobre temas, sobre gente y sobre las implicaciones culturales de las ciencias.*

7. *Diseñar y organizar actividades para que los alumnos consoliden su pensamiento científico a través de la comunicación y aprendan a comunicar su pensamiento científico con coherencia y claridad a los compañeros, profesores y otras personas.*

a) Marco y metodología

Consideramos que el trabajo cooperativo, es un conjunto de estrategias (docentes y discentes) y de herramientas tecnológicas, encaminado a implantar y fomentar el trabajo en grupo entre los alumnos con la finalidad de optimizar la adquisición de conocimientos y capacidades personales pretendidos.

De las características del aprendizaje colaborativo hemos incidido en una que consideramos fundamental: *“...donde cada miembro del grupo es responsable tanto de su aprendizaje como del de los restantes miembros del grupo”*.

La función del profesor ha sido la de guía y orientador del proceso. Se trata de trabajar de un modo colaborativo de resolución de problemas de profesor y alumnos, en el que el soporte se modifica gradualmente hasta que los alumnos se hacen cargo de lo suyo y finalmente la ayuda del profesor desaparece.

Se ha buscado que los alumnos se comprometan con su propio aprendizaje y aprendan junto a otros a aprender, que sea su responsabilidad el que su compañero de grupo se desarrolle, y donde el éxito del grupo completo depende de los individuales aportes de cada uno de sus miembros.

Las tecnologías de la comunicación y de la información, y en general cualquier recurso tecnológico, constituyen un medio muy interesante para la comunicación científica. Los ordenadores exigen a los alumnos que utilicen un lenguaje preciso y conciso, la utilización del lenguaje informático para implementar un procedimiento científico requiere la traducción del lenguaje de las ciencias al correspondiente lenguaje de programación, utilizando la sintaxis correspondiente.

En el diseño e implementación de las actividades de aprendizaje, hemos utilizado una metodología de trabajo en la que el alumno ha participado formalmente y de manera activa en la adquisición del conocimiento científico, en el desarrollo de la competencia comunicativa y de estrategias de trabajo colaborativo.

Es muy importante que los estudiantes sean capaces de describir cómo han llegado a una respuesta o las dificultades que han encontrado al intentar resolver un problema.

b) Prácticas

Se han propuesto a los alumnos del Máster una serie de Prácticas, que básicamente han consistido en darles el enunciado de una actividad para los alumnos de secundaria y que la analicen planteándoles diversas cuestiones.

Ejemplo 1

En las actividades que se ha presentado, determinar:

Las variables didácticas⁵ que puede gestionar el profesor

Alguno de los procedimientos posibles que pueden utilizar los alumnos para resolver la actividad

¿Qué conocimientos permiten resolver a los alumnos la situación

¿Qué posibles estrategias pueden poner los alumnos en funcionamiento para resolver la situación?

Modificar alguna de las variables didácticas en el enunciado de la actividad

¿Qué razones científicas justifican el cambio realizado?

Ejemplo 2

Reflexiona e intenta responder a las siguientes cuestiones, en relación a la actividad planteada a los alumnos de Secundaria.

¿Qué conocimientos científicos ponen en juego los alumnos para resolver la actividad planteada?

Un alumno solicita ayuda sobre la palabra o concepto ----- ¿Cuál crees que debería ser la actuación del profesor?

Un alumno solicita ayuda sobre la construcción de la ----- ¿Cuál crees que debería ser la actuación del profesor?

Un alumno realiza la construcción correctamente, comprueba utilizando las herramientas del software la relación existente y como respuesta a la actividad se limita a dar esta relación?. ¿Cuál crees que debería ser la actuación del profesor?

Puedes comparar tus respuestas con las que aparecen en el archivo AYUDA

⁵ Variable didáctica: es una variable de la situación que gestionada por el profesor, provoca cambios cualitativos en los procedimientos del alumno, es decir, modificaciones en su aprendizaje

Ejemplo 3

Esta actividad tiene como objetivo diseñar una serie de secuencias didácticas con distinto nivel de exigencia en la que mediante el trabajo colaborativo y a partir de un enunciado determinado los alumnos desarrollen su competencia científica y comunicativa.

Se pide finalmente que comparen sus propuestas de secuencias didácticas a la actividad planteada con las nuestras.

Ejemplo 4

Analizar la actividad propuesta, en relación a los objetivos, adecuación a los niveles educativos y establecer procedimientos y alternativas de resolución para los distintos niveles educativos.

Ejemplo 5

Diseñar una actividad para que los alumnos trabajando de forma interactiva y colaborativa, desarrollen la competencia comunicativa y aprendan, la generalización de la relación -----

Una vez que hayan diseñado la(s) correspondiente(s) actividades, compararlas con las respuestas que se presentan por nuestra parte, estableciendo las ventajas e inconvenientes que a su entender presenta cada una de ellas (incluida la propia).

c) Unidades didácticas

Los ejemplos anteriores se han concretado en el diseño de dos unidades didácticas, una sobre el *trabajo colaborativo/cooperativo* y otra sobre la *competencia comunicativa*.

Un esquema de una práctica de una de las unidades didácticas se muestra a continuación:

Aprendizaje cooperativo / colaborativo.

[Presentación](#)[Objetivos](#)[Guía](#)[Práctica 1](#)[Práctica 2](#)[Práctica 3](#)

Presentación.

El aprendizaje es en principio una actividad individual y personal, pero ésta no se produce sin las interacciones con los demás. Para que se produzca aprendizaje matemático, se debe favorecer la contextualización y funcionalización

de un conocimiento matemático general y formal que ha sido construido en épocas con características sociales, económicas y culturales diferentes a las vividas por los alumnos; en un proceso de construcción histórica en el que el conocimiento se ha ido despersonalizando y descontextualizando, pasando a ser parte de la Ciencia Matemática y, por lo tanto, de la cultura.

Dichas contextualización y funcionalización se propician a través de situaciones que permitan a los alumnos participar activamente de la comprensión del conocimiento; situaciones en las que juega un papel preponderante la interacción social. **El saber se contempla como una construcción social. La participación activa del alumno en su aprendizaje, es un factor fundamental de cara a conseguir el aprendizaje genuino.**

En el trabajo colaborativo, la necesidad de articular y explicar al grupo las ideas propias lleva a que éstas sean más concretas y precisas y a organizar e integrar más el conocimiento. Los momentos de interacción permiten a los alumnos tomar conciencia del grado de dominio adquirido pero también reconocer lo que todavía no logran hacer solos y los medios de los que disponen para alcanzar ese objetivo.

Podemos definir el **aprendizaje colaborativo** (Jonhson, D. y Jonhson, R. 1987)*, como **ñun conjunto de métodos de instrucción para la aplicación en los grupos pequeños, de entrenamiento y desarrollo de habilidades mixtas (aprendizaje y desarrollo personal y social), donde cada miembro del grupo es responsable tanto de su aprendizaje como del de los restantes miembros del grupo.**

Estamos de acuerdo en que la tecnología resulta esencial en el proceso educativo de las matemáticas, influyendo de manera decisiva en las matemáticas que se enseñan , mejorando los aprendizajes de los alumnos, facilitando la apropiación por parte de los alumnos de ideas matemáticas más complejas y abstractas.

En particular el uso de programas de Geometría Dinámica, permite una visualización y retroalimentación, bastante difícil de conseguir en otros entornos no dinámicos, cuando los estudiantes discuten entre sí y con su maestro, acerca de los objetos que muestra la pantalla y los efectos que tienen las diferentes transformaciones dinámicas que permite realizar la tecnología.

El aprendizaje colaborativo asistido por ordenador podemos definirlo como **ñun método de enseñanza-aprendizaje por medio del cual interactúan dos o más sujetos para construir aprendizaje, a través de discusión, reflexión y toma de decisión, proceso en el cual los recursos informáticos actúan como mediadores.**

El uso de programas de Geometría Dinámica (Cabri Géomètre, Geogebra, Regla y Compás(ambos gratuitos), Geometer's Sketchpadé), cuando los estudiantes discuten entre sí y con su profesor acerca de los objetos que muestra la pantalla y los efectos que producen las diferentes transformaciones dinámicas, permite una visualización y retroalimentación, bastante difícil de conseguir en otros entornos no dinámicos, potenciando la interactividad y facilitando la adquisición de competencias geométricas.

Es en este marco, donde **adquiere gran importancia la resolución de problemas, y el aprender Matemáticas se identifica con el hacer Matemáticas**; siguiendo a Brousseau (1986**): "No hacemos Matemática sino cuando nos ocupamos de problemas"

* BROUSSEAU, G. (1986)

Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas. Recherches en Didactique des Mathématiques, 7 (2): 33-115. Traducción de Julia Centeno, Begoña Melendo y Jesús Murillo. (Universidad de Zaragoza. Dto. De Matemáticas).

** JOHNSON, D. and JOHNSON, R. (1989)

Cooperative Learning: Giving At-Risk Students Hopes for a Brighter Future Edina, MN: International Book Company.

Objetivos profesionales.

1. Percatarse del **interés del trabajo colaborativo** en la clase como sistema de enseñanza aprendizaje en la resolución de problemas de matemáticas en general y en particular en la Geometría.

Varios aspectos señalan el interés por este método de enseñanza aprendizaje:

- genera una interdependencia positiva,
 - promueve la interacción y valora la contribución individual,
 - logra habilidades personales y de grupo, y
 - obliga a la autoevaluación del grupo ya que se necesita continuamente evaluar la efectividad de su grupo, el trabajo individual de cada uno de los integrantes de equipo cara a la consecución de los objetivos y el grado de consecución de los objetivos que determinará la futura actuación del grupo.
2. Aprender a **diseñar actividades que fomenten el trabajo cooperativo/colaborativo en entornos interactivos de aprendizaje** y controlar el proceso de aprendizaje.
 3. **Mejorar la capacidad de resolver problemas**, mediante el trabajo colaborativo
-

Guías.

En el diseño e implementación de las actividades de aprendizaje, pretendemos **una metodología de trabajo en la que el alumno participa formalmente y de manera activa en la adquisición del conocimiento y en el desarrollo de competencias Geométricas.**

La función del profesor será la de intentar modular y guiar el proceso. Así, el profesor **es quien realiza parte de la tarea que el estudiante todavía no puede manejar y le proporciona soporte en forma de sugerencias o ayuda**, basadas en una diagnosis correcta del nivel actual del alumno en cuanto a destrezas o dificultades. Se trata de trabajar de un modo colaborativo de resolución de problemas de profesor y alumnos, en el que el soporte se modifica gradualmente hasta que los alumnos se hacen cargo de lo suyo y finalmente la ayuda del profesor desaparece.

En el ámbito de la educación, consideramos el trabajo cooperativo, como un conjunto de estrategias (docentes y discentes) y de herramientas tecnológicas, encaminado a implantar y fomentar el trabajo en grupo entre los alumnos con la finalidad de optimizar la adquisición de conocimientos y capacidades personales pretendidos.

En la definición de aprendizaje colaborativo se incide en una característica fundamental de la colaboración: ñ..donde cada miembro del grupo es responsable tanto de su aprendizaje como del de los restantes miembros del grupoð

Se busca que los alumnos se comprometan con su propio aprendizaje y aprendan junto a otros a aprender, que sea su responsabilidad el que su compañero de grupo se desarrolle, y donde el éxito del grupo completo depende de los individuales aportes de cada uno de sus miembros.

El proceso seguido es, en general, el siguiente:

Se plantea una actividad de iniciación, en ella **se pide al alumno que haga una construcción** con Cabri Géomètre (u otro software de geometría dinámica), que tome medidas, que manipule la figura, **que trate de tomar conciencia de una propiedad geométrica que se da en la misma**, que no debe depender de la figura concreta realizada, sino que deberá ser válida para un conjunto de figuras (**sustitutivamente se le da un applet** con el enunciado de la actividad que evita la necesidad de construir la figura correspondiente). Esta propiedad no se le da de forma explícita, sino que se espera que la obtenga por manipulación. **Una vez obtenida, se le pide que la exprese con su propio vocabulario** y particular sintaxis, **y que haga una demostración que resuelva y justifique la propiedad geométrica.**

Aquí **se realiza un diálogo entre el alumno y el profesor** (que puede ser electrónico) de autorización, mediante la que se va poco a poco puliendo la respuesta hasta llegar a una comprensión por parte del alumno del concepto de resolución correcta, de los elementos que la componen y del tipo de expresión adecuada para explicitar la solución requerida.

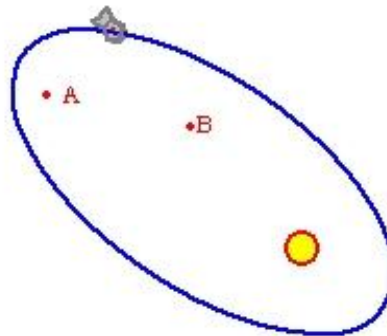
Una vez que el alumno ha comprendido la esencia de resolución del problema y de una justificación válida, la forma de desarrollarla y ha adquirido algunas estrategias de resolución, en una **segunda fase**, se proponen **actividades a desarrollar mediante discusión entre todos** en el [Foro](#) establecido al efecto. En este caso lo que se pretende es que, mediante la discusión entre todo el grupo-clase de la propuesta, mediante el trabajo colaborativo, se pueda llegar a una resolución y demostración más completa y elaborada.

Observación: La primera fase, de establecer una solución a priori, puede llevarse a cabo en pequeño-grupo (dos o tres alumnos) trabajando de forma cooperativa y proponer al grupo-clase su respuesta para ser replicada bien en la propia clase, bien en el [Foro de discusión](#).

Práctica 1.

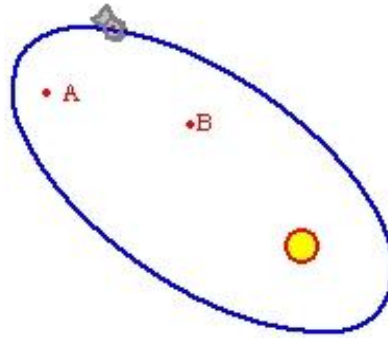
Enunciado de la actividad para los alumnos:

- Un cometa describe una órbita alrededor del Sol como la de la figura.
- En el mismo plano de la órbita, hay dos satélites artificiales fijos A y B encargados de estudiar al cometa.
- En cada momento estudia al cometa el satélite que está más próximo.
- ¿Podrías decirnos en qué zona de la órbita estudia al cometa el satélite A y en qué zona el satélite B?
- Razona y justifica tu respuesta



Observación: El gráfico de la derecha -applet de Java- es dinámico como verás, si haces click dentro de la figura se mueve y si haces click de nuevo se detiene.

Si no puedes ver el gráfico dinámico a continuación tienes el mismo pero estático.



Lee atentamente el enunciado de la actividad y contesta enviando tu respuesta al [Foro de discusión](#).

Cuestiones a resolver por el estudiante del Master:

En la actividad que se presenta, determinar:

1. Las variables didácticas* que puede gestionar el profesor.
2. Alguno de los procedimientos posibles que pueden utilizar los alumnos para resolver la actividad.
3. ¿Qué conocimientos matemáticos permiten resolver a los alumnos la situación.
4. ¿Qué posibles estrategias pueden poner los alumnos en funcionamiento para resolver la situación?
5. Modificar alguna de las variables didácticas en el enunciado de la actividad.
6. Qué razones matemáticas justifican el cambio realizado?

* Variable didáctica: es una variable de la situación que gestionada por el profesor, provoca cambios cualitativos en los procedimientos del alumno, es decir, modificaciones en su aprendizaje

Referencias bibliográficas.

Alsina, C.; Fortuny, J. M., y otros (1997). *¿Por qué Geometría? Propuestas didácticas para la ESO*. Madrid: Síntesis.

Atienza, E. (1999). *Propuesta de evaluación del texto escrito en Enseñanza Secundaria*. Tesis Doctoral. UB.

Bereiter, C.; Scardamalia, M. (1992). Two models of classroom learning using a communal database, en Dijkstra, S.; Krammer, M. y Merriënboer, J. (Eds.), *Instructional models in computer-based learning environments* (pp. 229- 261). Berlin: Springer-Verlag.

Canale, M. (1995) De la competencia comunicativa a la pedagogía comunicativa del lenguaje en *Competencia comunicativa*. Madrid: Edelsa.

Cobo, P; Fortuny, J.M. (2005). El sistema tutorial AgentGeom y su contribución a la mejora de las competencias de los alumnos en la resolución de problemas de matemáticas. *Actas del IX Simposio de la SEIEM*. Córdoba: Servicio de publicaciones UCO y SEIEM.

Depover, C.; Giardina, M.; Marton, P. (1998). *Les environnements d'apprentissage multimédia*. Francia: L'Harmattan, Série Références.

Fortuny J. M.; Jiménez, J. (2000). *Teletutorización Interactiva en Matemáticas para asistencia hospitalaria*. Barcelona: Proyecto TIMAH. PIE.

Gutiérrez, A. (2005). Aspectos metodológicos de la investigación sobre aprendizaje de la demostración mediante exploraciones con software de geometría dinámica, en Maz, A.; Gómez, B.; Torralbo, M. (eds.), *Actas del 9º Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)*, (pp. 27-44). Córdoba: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Córdoba.

Hyde, R. (1996), "Matemáticas y lenguajes: un estudio sobre la descripción de patrones geométricos por parte de niños" en *Matemáticas y lenguajes. Perspectivas Lógica, Semiótica, Social y Computacional. ICME 8*, Sevilla: Servicio de Publicaciones de la SAEM Thales.

Lomas, C.; Osoro, A.; Tusón, A. (1997), *Ciencias del lenguaje, competencia comunicativa y enseñanza de la lengua*, Barcelona: Paidós.

Marcos, G. (2008), *Un modelo de análisis de competencias matemáticas en un entorno interactivo*. Tesis doctoral. Universidad de La Rioja.

Mason, J.; Burton, L. ; Stacey, K. (1988). *Pensar matemáticamente*. Madrid: Labor-MEC.

MEC (2006). *Decreto de contenidos mínimos para la ESO*. RD 1631/2006. BOE Nº 5 del 5/1/2007.

Morgan, C. (1998). *Writing Mathematically. The Discourse of Investigation*. Londres: Falmer Press.

Murillo, J. (2001). *Un entorno interactivo de aprendizaje con Cabri-actividades aplicado a la enseñanza de la geometría en la ESO*. Tesis doctoral. UAB.

Murillo, J. ; Marcos, G. (2009), "Análisis de las competencias geométricas y comunicativas en un entorno interactivo de aprendizaje". *Revista Enseñanza de las Ciencias*. ISSN 0212-4521, Vol. 27, Nº 2, 2009 , pags. 241-256.

NCTM (2000). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Traducción y edición realizada por SAEM THALES (Sevilla, 2003).

Nesher, P. (2000), Posibles relaciones entre lenguaje natural y lenguaje matemático. *Matemáticas y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional*, pp. 109-124. España: Graó

Niss, M. (1999). Competencies and Subject Description. *Uddanneise 9*, pp. 21-29.

OCDE/PISA (2001). *Proyecto internacional para la producción de indicadores de rendimiento de los alumnos*, OCDE Versión en español editada por Secretaría General Técnica, Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, INCE.

Planas, N. (2002). Nociones sociales recontextualizadas en Educación Matemática: el caso de la competencia comunicativa. *Actas del VI Simposio de la SEIEM* (pp. 175- 185).

Polya, G. (1982), *Mathematical Discovery*, Wiley, USA.

Powell, A.; López, J. (1995). A escrita como veículo de aprendizagem da matemática: Estudo de um caso. *Boletín GEPEM 33*. Río de Janeiro.

Powell, A. (2001). Captando, examinando e reagindo ao pensamento matemático. *Boletín GEPEM 39*. Río de Janeiro.

Rico, L. (2004). Evaluación de competencias matemáticas. Proyecto PISA/OCDE 2003. *Investigación en Educación Matemática, 8º Simposio de la SEIEM*, pp. 89-102. U. da Coruña.

Rico, L. (2006). Las competencias matemáticas en el informe PISA 2003: el caso de la geometría. *II Escuela de Educación Matemática Miguel de Guzmán: En torno a la geometría de Miguel de Guzmán*. Recuperable en: www.galega.org/emdg/web

Sfard, E. A. (1997), “Learning Mathematics Through Conversation: Is It as They Say? A Debate, for The Learning of Mathematics”, en Nesher, P. (2000).

ESTUDIO EXPLORATORIO SOBRE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS GEOMÉTRICOS POR ALUMNOS DE 1º DE BACHILLERATO

M^a del Rosario Ruiz de Cenano Macián, Gregoria Guillén Soler (*)

I.E.S. Districte Maritim. Valencia, Universidad de Valencia

Resumen

Este trabajo se desarrolla desde la resolución de “problemas reales prácticos” en los que determinados sólidos son los conceptos geométricos que modelan la realidad a la que se hace referencia en el problema. El uso de fórmulas trigonométricas y/o del teorema de Pitágoras para hallar determinadas relaciones numéricas entre los elementos de las formas implicadas es también una constante en todos los problemas que se proponen. La experimentación, que se ha llevado a cabo con estudiantes del primer curso de bachillerato de ciencias, intenta analizar la repercusión que tienen, en la resolución de problemas geométricos, el uso del ordenador y la inclusión, en el currículo de los alumnos, de la asignatura de dibujo técnico, tanto en la resolución de problemas concretos como en su generalización.

Abstract

This paper is developed within the resolution of " actual practical problems ", where certain solids are the geometric concepts that shape the reality involved in the problem. The use of trigonometrical formulae and / or of the Pythagoras's theorem to find certain numerical relations between the elements of the implied forms is also a constant in all the proposed problems. The experimentation, which has been carried out with first year high school science's students, tries to analyze the repercussion that the use of the computer and the incorporation, in the curriculum of the pupils, of the subject of technical drawing, have in the resolution of geometric problems, both in the resolution of concrete problems and in his generalization.

Ruiz, M.R., Guillén, G. (2011). Estudio exploratorio sobre la resolución de problemas geométricos por alumnos de 1º de bachillerato. En M.M. Moreno, N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los Grupos de Investigación de la SEIEM* (pp. 59-70). Lleida.

Presentación

Este estudio forma parte del trabajo de investigación del Master Universitario de Investigación en Didácticas Específicas. Siguiendo la línea de trabajos de investigación realizados en el departamento de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Valencia, en el ámbito de la Geometría, concretamente en el campo de los cuerpos geométricos y en el ámbito de la resolución de problemas de matemáticas en los sistemas educativos, se ha realizado un estudio exploratorio con el fin de encontrar objetivos para una posterior investigación.

En este estudio nos hemos formulado las siguientes cuestiones: ¿Los alumnos adquieren suficientes habilidades y son competentes para aplicar los conocimientos adquiridos en clase en la resolución de problemas geométricos que pertenecen al mundo real? ¿Cursar la asignatura de dibujo técnico influye en las estrategias que usan al resolver estos problemas? ¿Facilita la resolución del problema? ¿El uso del ordenador influye en las estrategias que usan al resolver estos problemas? ¿Facilita la resolución del problema?

A partir de estas cuestiones proponemos las siguientes hipótesis teóricas a contrastar con nuestra experimentación:

H1: Los alumnos son capaces de resolver problemas geométricos del mundo real aplicando los conocimientos adquiridos en clase.

H2: Cursar la asignatura de dibujo técnico facilita la elaboración de los modelos gráficos de determinados problemas.

H3: El uso del ordenador modifica la actuación de los alumnos al resolver determinados problemas.

En este trabajo sólo vamos a centrarnos en el análisis que hemos realizado de los problemas utilizados en el estudio y en algunas observaciones generales que hemos obtenido en la experimentación realizada. Por ello presentamos el análisis realizado para dos de los problemas utilizados y las observaciones y conclusiones generales extraídas a partir de la resolución de uno de ellos. Como hemos indicado, es un estudio exploratorio en curso del que no disponemos aún de datos que puedan refutar o corroborar las hipótesis de partida.

Fundamentos teóricos y metodológicos.

Nuestro trabajo se sitúa en dos líneas de investigación del Departamento de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Valencia. Éstas centran la atención en el proceso de enseñanza/aprendizaje de las matemáticas a través de la geometría de los sólidos y en la resolución de problemas. Trabajos que hemos

utilizado como referentes fundamentales han sido Guillén (1991, 1997, 2010), Puig (1996), Puig y Cerdán (1988), Polya (1945, 1954) y Schoenfeld (1985). Al centrar la atención en la modelización, también hemos considerado los trabajos de Lesh & Zawojewski (1992) y Salett & Hein (1997).

Como marco metodológico hemos utilizado los Modelos Teóricos Locales (MTL) de Eugenio Filloy (1999). Este marco teórico nos permite describir la fenomenología que surge alrededor de una problemática concreta en el proceso de enseñanza/aprendizaje de las matemáticas de una manera exhaustiva. Son cuatro los componentes contemplados por los MTL: Modelo de competencia, Modelo de actuación/cognición, Modelo de enseñanza y Modelo de comunicación. A partir de la experimentación determinaremos observaciones que reinterpretaremos después como elementos de estos 4 componentes del MTL.

Otro referente del estudio se encuentra en el currículo de Matemáticas de la enseñanza secundaria no obligatoria, especialmente el correspondiente al primer curso de bachillerato.

Diseño y desarrollo de la experimentación

En la experiencia han participado dos grupos de alumnos de primer curso de bachillerato de ciencias del IES Districte Maritim de Valencia; uno de los grupos estaba formado por 21 alumnos y el otro por 19.

La experiencia ha consistido en la resolución de los cuatro problemas de geometría que se muestran en el cuadro 1. En la selección de los problemas tuvimos en cuenta, por un lado, que estuvieran relacionados con diferentes aspectos de la vida real; por otro, que involucraran sólidos para modelizar el problema y que éstos fueran diferentes. En concreto, aparecen un prisma triangular, una pirámide recta de base cuadrada, un pequeño rombicuboctaedro, un cubo y una esfera. Asimismo, consideramos que todos los problemas pudieran resolverse utilizando proporcionalidad, el teorema de Pitágoras o la trigonometría plana.

Problema nº 1. Se desea construir una rampa de acceso para minusválidos, de 1,20 metros de ancho, como alternativa a una escalera de 1 metro de altura. La pendiente máxima permitida es del 8 %. Responde a las preguntas siguientes y justifica todas las respuestas:

- a) ¿Qué longitud mínima debe tener la rampa?
- b) ¿Qué volumen de cemento se precisará para construirla?

Problema nº 2. Un arquitecto diseña la construcción de una escuela. Su plano incluye una torre sobre la que se apoya un tejado con forma de pirámide recta de base cuadrada. El lado del cuadrado mide 10 metros. El arquitecto piensa que el tejado quedará bonito si la altura de la pirámide es de 5 metros. Sabe también que

para que el drenaje del agua de lluvia sea adecuado se requiere una inclinación de las caras laterales de la pirámide de 60° por lo menos. Además, se recubren sus caras laterales con cinc. Responde a las preguntas siguientes y justifica todas las respuestas:

a) ¿Qué superficie de cinc se necesita para recubrir todas las caras laterales del tejado de la torre?

b) Con las medidas pensadas por el arquitecto para que resulte bonito el tejado, ¿Será correcto el drenaje del agua de la lluvia?

Problema nº 3. Un fabricante de lámparas recibe el encargo de diseñar unos faroles con forma de pequeño rombicuboctaedro. En su almacén dispone de cajas de embalaje de forma cúbica cuyo lado mide 20 cm. ¿Cuál es el tamaño máximo que pueden tener las aristas de los faroles para introducirlos en las cajas? Justifica la respuesta.

Problema nº 4. Un faro se encuentra a la orilla del mar y mide 20 metros de altura. ¿A qué distancia de la costa podrá ser visto por las barcas de los pescadores? Justifica la respuesta.

Cuadro 1

En la experimentación se han realizado dos tipos diferentes de tareas: tareas de aula y tareas de laboratorio; estas últimas se han dividido a su vez en grupales e individuales.

Respecto a las tareas de aula, indicaremos que uno de los grupos ha trabajado en su aula habitual y el otro lo hizo en una de las aulas de informática. En el primer grupo al que nos referimos, los alumnos han dispuesto de dos sesiones, de cincuenta y cinco minutos cada una, para resolver por escrito los cuatro problemas planteados, bien de forma individual o bien por parejas. En el otro grupo, dado que los estudiantes disponían de ordenadores, además de resolver los problemas por escrito, se les ha pedido que utilizaran la hoja de cálculo para obtener una generalización de dos de los problemas y se les permitió buscar información en Internet. En estas sesiones los alumnos han trabajado individualmente y dispusieron de sesiones suficientes para que todos pudieran concluirlos problemas.

Las tareas de laboratorio también fueron diferentes en cada una de las dos clases. En la primera se seleccionaron dos grupos, uno formado por tres alumnos que habían resuelto satisfactoriamente los problemas y otro formado por cuatro alumnos que no habían sabido solucionarlos; se les propuso que resolvieran los problemas en grupo. En la otra clase se realizaron entrevistas individuales a seis estudiantes en las que se les pidió que explicaran como habían resuelto los problemas.

En relación con la actuación de la profesora cabe aclarar que en las sesiones de aula del grupo que trabajaba en su aula habitual, ésta respondía a toda la clase en general a las cuestiones que formulaban los estudiantes, lo que ayudaba a encaminar a los demás. En el otro grupo, las respuestas se daban localmente, permitiendo que los estudiantes siguieran caminos distintos.

En las sesiones de aula, la profesora dejó libertad de interpretación, mientras que en las sesiones de laboratorio intervenía orientando a los estudiantes para que terminaran aquellos problemas que no habían sabido resolver.

Los datos de la experimentación se obtuvieron por diferentes medios. Por un lado, dispusimos de las hojas donde los estudiantes habían resuelto los problemas. También dispusimos de los archivos digitales donde los estudiantes que trabajaron en el aula de informática guardaron los ejercicios resueltos utilizando una hoja de cálculo. Así mismo, las sesiones de aula y de laboratorio fueron grabadas en vídeo y se recurrió también a la toma de notas por parte de la profesora para recoger otra información que se estimó relevante.

Análisis de los problemas

Siguiendo el estudio de Puig (1996), hemos analizado los problemas utilizados en nuestra experimentación, elaborando para cada uno de ellos el espacio de problemas asociado desde la perspectiva de un resolutor competente. En este trabajo indicamos como ejemplo el análisis realizado de los problemas 1 y 3.

Estos problemas serán expresiones algebraicas en la que las letras que aparecen designan la incógnita del problema y unas cantidades que se consideran dadas. Puig (1996) indica que la solución de un problema de este tipo se puede obtener aplicando una versión del método cartesiano (MC), que describe de la siguiente manera:

Hallar una relación entre la incógnita, las cantidades dadas y otras cantidades y expresarlas mediante una ecuación.

Si el número de incógnitas auxiliares es uno menos que el de ecuaciones, resolver el sistema. Si no lo es, volver a a).

La figura 1 representa la forma en que esta versión del método cartesiano se transforma en un esquema generador de problemas en el espacio de problemas.

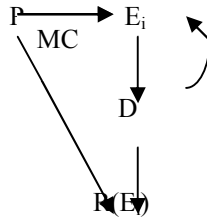


Figura 1

Los E_i son los problemas que corresponden al paso a), D es el problema de decisión correspondiente al paso b) y $R(E_i)$ corresponde al problema de resolver las ecuaciones escritas como resultados de los problemas E_i . Si se incorpora una figura auxiliar para facilitar la resolución, el problema P se transforma en el problema P_{FA} .

Aplicando este esquema al problema 1, y ayudándonos de la figura 2, vemos que el problema de calcular el volumen de la rampa se transforma en el problema de calcular su longitud horizontal.

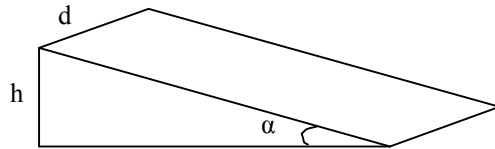


Figura 2

Para encontrarla, podemos utilizar la trigonometría, la proporcionalidad o el teorema de Pitágoras. Podemos resolver el problema utilizando la siguiente secuencia:

E_T : Hallar la relación entre la incógnita x y otras cantidades: $\text{tg}(\alpha) = h / x$

O la alternativa

E_P : Hallar la relación entre x y otras cantidades: $\frac{1}{x} = \frac{8}{100}$

Resolver la ecuación obtenida.

La figura 3 ilustra el espacio de problemas asociado.

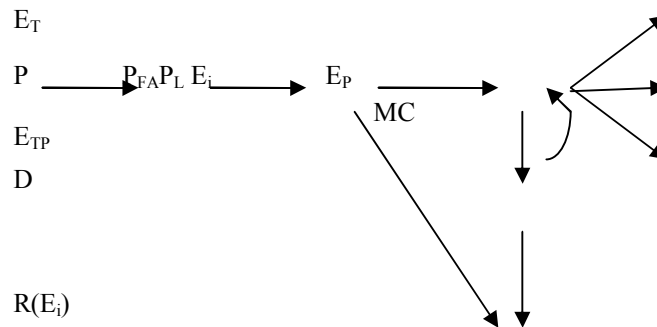


Figura 3

Cuando el esquema de la figura 1 lo aplicamos al problema 3, encontramos dos métodos de resolución que se corresponden con las figuras 4 y 5. En ellas aparece un octógono regular inscrito en un cuadrado, que sería la proyección sobre el plano del pequeño rombicuboctaedro dentro de un cubo.

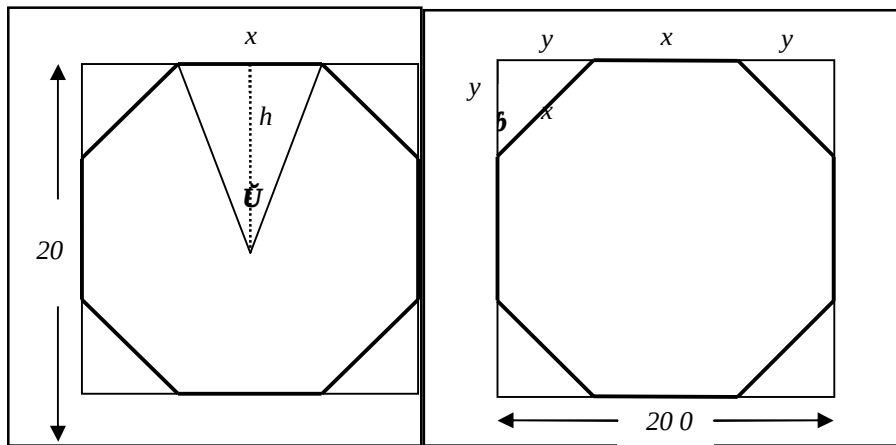


Figura 4

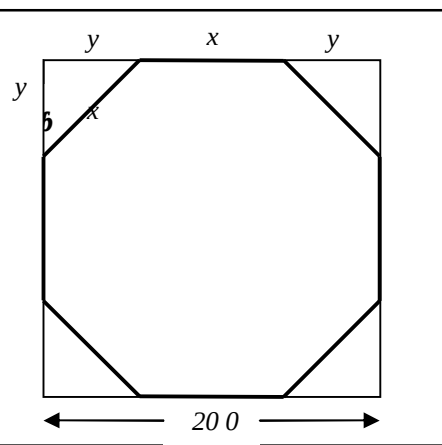


Figura 5

El primero método de resolución surge de una sugerencia heurística: buscar un problema relacionado. Observando la figura 4, un resolutor competente puede relacionar este problema con el de hallar el lado de un octógono regular inscrito en una circunferencia de radio r . Por este método el problema se resolvería siguiendo la siguiente secuencia:

E_T : Hallar una relación entre la incógnita x y las otras cantidades encontradas:

$$\operatorname{tg} \alpha / 2 = \frac{x / 2}{h}$$

A_1 : Hallar el ángulo interior del triángulo obtenido al dividir el octógono en 8

$$\text{partes: } \alpha = 360/8$$

A_2 : Hallar la relación entre la altura h de ese triángulo y el lado L del cuadrado: $h = L/2$

b) Resolver la ecuación obtenida

Un segundo método surge utilizando la variable auxiliar y que aparece en la figura 5. En esta ocasión aparecen dos formas de relacionar las variables x e y que darán lugar al planteamiento de ecuaciones distintas; una consiste en utilizar el teorema de Pitágoras y la otra en usar alguna razón trigonométrica del ángulo β , cuyo valor es de 45° . La secuencia derivada sería:

E_A : Hallar la relación entre x e y : $x + 2y = 20$

E_{TP} : Hallar la relación entre x e y : $x^2 = 2y^2$

O la alternativa

E_T : Hallar la relación entre x e y : $\tan 45 = y / x$

Resolver el sistema de ecuaciones

En la figura 6 hemos representado el espacio de problemas asociado.

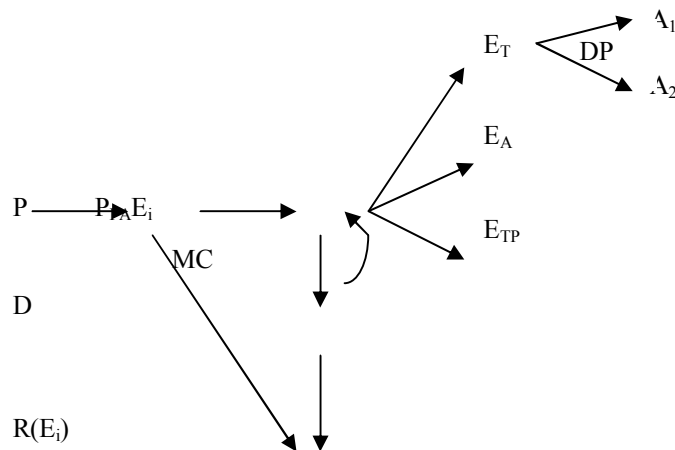


Figura 6

Análisis de las actuaciones de los alumnos. Observaciones y conclusiones.

Al igual que López y Guillen (2009), las sesiones grabadas en vídeo se transcribieron, y este material, junto el obtenido por otros medios, se dividió en extractos, considerando éstos como fragmentos de texto del profesor y/o los estudiantes que reflejaran una idea que se consideraba de interés. Se numeraron éstos y a partir de ellos se hicieron observaciones. A continuación indicamos, como ejemplo, observaciones obtenidas en relación con el problema 1.

Éstas las hemos distinguido según que correspondan a la lectura del texto o a las estrategias que usan.

En la lectura del problema, se hicieron diferentes interpretaciones para dos conceptos, la longitud de la rampa y la pendiente de la rampa. Por ejemplo, algunas preguntas que hicieron los estudiantes fueron: *¿La longitud de la rampa se refiere a la longitud horizontal o a la inclinada?* *¿Qué significa que la pendiente de la rampa es del 8%?*

Cabe señalar que al determinar la longitud de la rampa, un 40% de los estudiantes calcularon la longitud horizontal y un 60% calcularon la longitud inclinada.

Para el concepto de pendiente encontramos cuatro interpretaciones diferentes. Una de ellas sería la interpretación que asociamos a un resolutor experto: la pendiente de la rampa corresponde a la tangente trigonométrica del ángulo que forma la superficie inclinada de la rampa con la horizontal. La segunda interpretación surge del concepto de proporcionalidad, indicando que por cada 100 metros de desplazamiento en horizontal por la rampa, el desplazamiento vertical es de 8 metros. La tercera interpretación puede expresarse de la siguiente manera: *El 100% corresponde a la máxima pendiente posible, que es 90°, por lo tanto, el ángulo que forma la rampa con la horizontal es el 8% de 90, luego $\alpha = 7.2^\circ$* . La cuarta interpretación sigue un razonamiento similar y puede expresarse de la siguiente forma: *Como los ángulos de un triángulo suman 180°, entonces el ángulo que busco es el 8% de 180, es decir, $\alpha = 14.4^\circ$* .

En relación con las estrategias que usan, cabe señalar: las estrategias empleadas al calcular la longitud de la rampa dependen del concepto de pendiente reflejado. Así, los alumnos que han interpretado la pendiente como una proporción, calculan la longitud horizontal de la rampa mediante una regla de tres y luego calculan la longitud inclinada utilizando el teorema de Pitágoras. Los demás comienzan calculando el ángulo de inclinación de la rampa y, a partir de ahí, utilizan las razones trigonométricas del seno y el coseno para calcular las longitudes inclinada y horizontal de la misma, respectivamente.

Las estrategias utilizadas para calcular el volumen de la rampa van asociadas a los diferentes objetos geométricos que pueden contemplarse a la hora de resolver esta parte del problema. Una tercera parte de los alumnos que han resuelto este apartado ha interpretado que la rampa es un prisma de base triangular y las otras dos terceras partes han interpretado que la rampa es la mitad de un octaedro.

Una última observación se refiere a las creencias de los estudiantes en relación a lo que se debe determinar al resolver problemas de trigonometría. Así, algunos de los alumnos que utilizaron la proporcionalidad para resolver el problema, lo finalizan calculando el ángulo de inclinación de la rampa, aunque no se halla pedido, utilizando alguna razón trigonométrica.

Al considerar los diferentes contextos de la experimentación, cabe señalar otras observaciones en relación con este problema. Los estudiantes que no tuvieron dificultad para resolver el problema en el contexto de clase, tampoco la tuvieron para realizar una generalización de éste con la hoja de cálculo. Los que no supieron resolverlo en clase tampoco pudieron encontrar la generalización con la hoja de cálculo ni obtuvieron ayuda utilizando Internet. Por otro lado, haber cursado la asignatura de dibujo técnico no pareció repercutir en la realización del dibujo correspondiente a este problema ya que todos ellos intentaron hacer un dibujo de la situación y, dado que la rampa es muy familiar para los estudiantes, no tuvieron dificultades para representarla.

Conclusiones extraídas de la resolución del problema 1 son las siguientes:

1. La mayoría de los estudiantes asocian el concepto de longitud de la rampa a la longitud inclinada si bien la construcción de una rampa en muchos casos viene condicionada a la longitud horizontal.
2. Los alumnos no están familiarizados con el concepto de pendiente expresada en tantos por cien. Esto es una muestra de la distancia que hay entre el mundo real y la actividad escolar; ya que en las señales de tráfico podemos encontrar avisos de precaución por tener la carretera una pendiente alta y ésta viene expresada en tantos por cien.
3. Las dos concepciones erróneas de pendiente prueban que los estudiantes asocian la pendiente con el ángulo de inclinación en lugar de con su tangente trigonométrica y que recurren a su lógica particular para suplir su falta de conocimientos.
4. El cálculo del ángulo de inclinación de la rampa cuando no es necesario muestra la identificación que hacen los estudiantes entre problema trigonométrico y ángulo.

5. De la resolución de este problema no se puede concluir que la hoja de cálculo facilita o dificulta la resolución de este problema en general, ya que los estudiantes parten de una fórmula conocida, como es la del volumen de un prisma, para calcular el volumen de cemento necesario para construir una rampa de una medida dada. Como el proceso ha ido de lo general a lo particular, no encuentran dificultad en volver a generalizar y tampoco se ha observado que la hoja de cálculo haya creado dificultades nuevas.

Referencias bibliográficas

- Filloy, E. y cols. (1999). *Aspectos teóricos del álgebra educativa*. México D.F.: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Generalitat Valenciana (2008). Decreto 102/2008, de 11 de julio, del Gobierno Valenciano, por el que se establece el currículo del bachillerato en la Comunitat Valenciana, DOGV, 5806.
- Guillén, G. (1991). *Poliedros*. Matemáticas: cultura y aprendizaje. Madrid: Síntesis.
- Guillén, G. (1997). *El modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos. Observación de procesos de aprendizaje*. Tesis doctoral. (Publicada en 1999 en la Col·lecció: *Tesis doctorals en Microfitxes*). Universitat de València. Valencia.
- Guillén, G. (2010). ¿Por qué usar los sólidos como contexto en la enseñanza/aprendizaje de la geometría? ¿Y en la investigación? en Moreno, M; Estrada, A.; Carrillo, J. y Sierra, T. (eds). *Investigación en Educación matemática XIV*, Lleida: SEIEM, ediciones de la Universitat de Lleida, pp.21- 68.
- Lesh, R. & Zawojewski, J. (1992). Problem solving and modelling. En Grows, D. A., ed., 1992, *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. (Macmillan:New York, NY), págs. 763-803.
- López, L. y Guillén, G. (2009). La exploración con espejos y la enseñanza de la geometría en la Educación Secundaria Obligatoria. Sobre competencias de los alumnos y sus procesos cognitivos. Estudio exploratorio. En Murillo, J.; González, M.T. y González, M.J. (Eds.). *Investigación en Educación Matemática. XIII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)*, págs. 273-283. Santander.

- Polya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton University Press: Princeton, NJ. (Traducción castellana de Julián Zugazagoitia, *Cómo plantear y resolver problemas*. Trillas: México, 1965).
- Polya, G. (1954). *Mathematics and Plausible Reasoning*. 2 vols. Princeton University Press: Princeton, NJ. (Traducción castellana de José Luis Abellán, *Matemáticas y razonamiento plausible*. Madrid: Tecnos).
- Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas*. Madrid Síntesis.
- Puig, L. y Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares*. Madrid: Síntesis.
- Salett, M.S. y Hein, N. (1997). Modelo, modelación y modelaje: métodos de enseñanza-aprendizaje de matemáticas. *Epsilon*, N° 38, pags. 209-222
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Orlando, FL: Academic Press.

BUSCANDO CLAVES PARA EL ESTUDIO DE LA RESOLUCIÓN POR INSIGHT DE PROBLEMAS GEOMÉTRICOS

Francisco Sánchez López, Maria Lluïsa Fiol Mora
Universidad Autònoma de Barcelona

Resumen

Actualmente, entre otros modelos de aprendizaje, la enseñanza escolar de la geometría se sustenta en un aprendizaje reproductivo (Wertheimer, 1959; Mayer, 1986) que promueve la interiorización de estrategias, habilidades y destrezas en situaciones problemáticas que guardan cierta similitud. En el caso de la geometría, Luis Rico (2006) pone un especial énfasis, entre otros indicadores relevantes en el informe Pisa 2003, en la resolución de problemas originales o de insight. Basándonos en diversos modelos teóricos (Hadamard, 1949; Olhsson, 1984; Davidson y Sternberg, 1986) concebimos el insight (Sequera, 2007) como aquel momento de inspiración y perspicacia intuitiva dentro del aprendizaje creativo que nos guía a la comprensión súbita del problema. Desde un análisis cualitativo, planteamos un estudio de casos, realizando una descripción e interpretación de las estrategias llevadas a cabo por estudiantes de la educación secundaria escolar en la resolución de cuatro problemas geométricos de insight perceptivo.

Abstract

Currently, among other models of learning, teaching school geometry is based on a memory learning (Wertheimer, 1959, Mayer, 1986) that promotes the internalization of strategies, abilities and skills in problematic situations that bear some similarity. In the case of geometry, Luis Rico (2006), among other relevant indicators seen in PISA 2003, emphasizes especially in the resolution of insight problems. Relying on several theoretical models (Hadamard, 1949; Olhsson, 1984, Davidson and Sternberg, 1986) we understand insight (Sequeira, 2007) as the time of inspiration and intuitive into the creative learning which leads us to the sudden understanding of the problem. From a qualitative analysis, we propose a case study, by the description and interpretation of the strategies carried out by students of secondary school education in the resolution of four problems of geometric perceptive insight.

Sánchez, F., Fiol, Ll. (2011). Buscando claves para el estudio de la resolución por insight de problemas geométricos. En M.M. Moreno, N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los Grupos de Investigación de la SEIEM* (pp. 71- 81). Lleida.

Marco conceptual

La enseñanza escolar actual y concretamente la enseñanza de la geometría, se orienta preferentemente y de forma cotidiana hacia un aprendizaje reproductivo, que consiste generalmente en que los alumnos tienen que interiorizar una serie de algoritmos, estrategias y destrezas que posteriormente deben ser reproducidas en aquellos problemas que guardan cierta similitud con el contexto inicial de aprendizaje. Esta forma de aprendizaje que fue ya identificada por la Gestalt, - aplicar destrezas o conocimientos adquiridos previamente-, es conocida (Wertheimer, 1959) como *aprendizaje reproductivo*, otros autores como por ejemplo Mayer (1986) la llamaron *memoria mecánica*.

Por otra parte, Rico (2006) en su artículo *Las competencias matemáticas en el informe PISA 2003: el caso de la geometría* comenta, dos aspectos especialmente interesantes desde el punto de vista de la resolución de problemas por insight:

a) en primer lugar, la tercera clase de problemas se define como *Razonamiento, argumentación, intuición y generalización para resolver problemas originales*.

b) y en segundo lugar entre los indicadores para evaluar esta tercera clase de problemas geométricos, figura la creatividad.

Así que en el informe PISA 2003, se pone énfasis en evaluar las capacidades de los estudiantes que pueden ayudarlos a desenvolverse y resolver situaciones problemáticas originales y creativas, o sea que se pone un mayor énfasis en la evaluación de problemas productivos.

Hemos pensado que desde la didáctica de la matemática podemos abordar esta problemática a partir de investigar el pensamiento productivo, estrategias de resolución que se originan de manera espontánea, mediante el análisis, estudio y observación de los estudiantes frente a la resolución de problemas “*de no resolución tipo*” o formal, también conocidos como problemas de insight, que promueven y facilitan la utilización de ideas originales e innovadoras así como las estrategias de resolución creativas.

Existen diferentes modelos teóricos (Hadamard, 1949; Olhsson, 1984; Davidson y Sternberg, 1986) que intentan explicar el concepto de insight. Nosotros concebimos el insight coincidiendo con Sequera (2007) como aquel momento de inspiración donde la perspicacia intuitiva guía de forma significativa al momento del eureka y la vivencia del *aja!* conduciendo a una estrategia efectiva en la resolución del problema.

Concretamente, nos centraremos en el estudio del insight perceptivo a partir de la resolución de problemas. Los problemas de insight perceptivo se caracterizan por requerir en alguna de sus posibles resoluciones, una cierta componente creativa, original e innovadora promovida a partir de habilidades de visualización. Consideramos que la visualización así como la creación de imágenes, diagramas visuales, etc podría estar potencialmente relacionada con el hecho de tener éxito con las estrategias de resolución de este tipo de problemas.

Metodología

Elección de problemas de insight

Estimamos que hemos consultado unos 75 libros (Gardner, 1983, Plasencia, 2000; Grabarchuk, 2009, etc), de los que hemos seleccionado 50 problemas geométricos que se caracterizan por requerir en alguna de sus posibles resoluciones, una cierta componente creativa, original e innovadora contextualizada en un ámbito visual.

Los criterios de selección considerados han sido:

- a. Los problemas deben promover el pensamiento productivo, discontinuo y creativo (Mann, 2005).
- b. Se requiere de habilidades de visualización (Del Grande, 1990) como la identificación visual entre otras.
- c. Inicialmente los problemas deben generar un cierto obstáculo. (Wertheimer, 1959; Hadamard, 1949; Zarya, 2008)
- d. Tenemos presente la categorización de Sternberg (1986) y una adaptación de la taxonomía de Weisberg (1996).

En la clasificación inicial establecimos tres categorías:

- a) *Problemas de reestructuración de áreas y puzzles.*
- b) *Problemas de reestructuración de líneas y puntos.*
- c) *Problemas de representación perceptual y conceptual.*

Estas tres categorías, engloban diferentes problemas que se caracterizan todos ellos porque están enmarcados en ámbitos originales y *al menos una de sus posibles resoluciones* requiere un método visual; son precisamente las estrategias utilizadas en los métodos visuales contextualizados en ámbitos novedosos y creativos las que nos interesa estudiar.

Prueba Piloto

La prueba piloto se ha efectuado a 20 estudiantes de tercer curso de ESO de un IES del Vallés (Barcelona) distribuidos en 4 grupos de 5 participantes. La prueba piloto ha estado estructurada en tres fases:

- a) resolver 5 problemas de insight en 30 minutos*.
- b) realizar un cuestionario individual de preguntas abiertas
- c) realizar una entrevista grupal.

Estrategia de análisis de los problemas

Nuestra estrategia de análisis es próxima a planteamientos cualitativos pudiéndose clasificar como un estudio de casos; nos interesa analizar, comprender y describir los indicios y estrategias geométricas de insight que emplean los estudiantes.

En la estrategia de análisis básicamente hemos empleado herramientas cualitativas: un análisis descriptivo y un análisis interpretativo.

Nos interesa analizar, comprender y describir representaciones, indicios, habilidades visuales y posibles argumentaciones en el proceso de exploración de un problema de insight perceptivo y en general, impresiones que involucren una nueva forma de aproximarnos a una resolución que sea potencialmente significativa.

El problema de Presmeg y la solución de Pol

El problema que se presenta a continuación ha sido adaptado de la versión propuesta por Presmeg (1986) en el artículo publicado en “For the Learning of Mathematics” **:

Sabiendo que el área del cuadrado ABCD es cuatro unidades cuadradas y que E y F son los puntos medios de los segmentos AB y CD, encontrar el área de AECF.

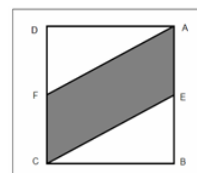


Figura 1

* Se posibilitaba la utilización de lo que llamamos tarjetas heurísticas (solo una en cada problema) con la intención de ampliar el campo de posibilidades resolutorias.

** Traducción realizada por Ricardo Barroso Campos. Universidad de Granada.

De entre las diversas estrategias y métodos de resolución en este problema, nos interesaremos por el método visual, ya que puede posibilitar el insight perceptivo. Siguiendo la taxonomía de Weisberg (1996) clasificaríamos este problema como híbrido, por aceptar diversas formas de resolución.

Análisis descriptivo

A continuación presentamos una solución del problema, según las aportaciones que explicita Presmeg (1986) en su estudio de casos citando el caso de Paul R., quien mantuvo que el paralelogramo AECF tenía área dos. Paul R. argumentó su solución explicando que consiguió ver que el paralelogramo AECF tenía área dos a partir de poder percibir previamente que el rectángulo AEFD tenía área dos por ser la mitad del cuadrado original. Es en este momento donde tiene lugar la ocurrencia del insight perceptivo, cuando la perspicacia intuitiva y los procesos de visualización se combinan súbitamente de forma eficaz para plantear una solución significativa. Para darse cuenta de que el paralelogramo AECF tenía área dos, “Paul R., explicó que *ñdeslizóñ el paralelogramo AECF hacia el rectángulo AEFDñ* (Presmeg, 1986) moviendo mentalmente el triángulo ECF a la posición del triángulo AFD y comprobando que ambos triángulos eran iguales. Posteriormente una operación de transitividad y de adición mental corroboró que los triángulos ECF y AFD, o sea el paralelogramo AECF constituye la mitad del cuadrado original.

Análisis interpretativo

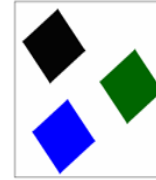
La solución al problema dada por Paul, R. está basada principalmente en la combinación selectiva (Davidson y Sternberg, 1986) mediante la fragmentación de las superficies integrantes en el problema, hasta encontrar una reconfiguración que nos proporcione la solución.

Observamos que el insight perceptivo, a partir de esta estrategia visual de resolución, viene supeditado por una combinación óptima de habilidades de visualización (Del Grande, 1990): desde la identificación visual, donde el estudiante es capaz de fragmentar el cuadrado en otras figuras con identidad propia independiente del contexto, como el paralelogramo AECF o los triángulos ECF y AFD, el reconocimiento de posiciones y relaciones entre las figuras geométricas intervinientes así como la discriminación visual para llegar a corroborar la equivalencia entre los triángulos ECF y AFD y posteriormente el paralelogramo AECF con la mitad del cuadrado original. Concretamente el insight en esta resolución viene producido cuando el estudiante es capaz de visualizar la imagen del triángulo ECF en movimiento y contrastar la igualdad con el triángulo AFD. Presmeg (1986) explicita con gran énfasis la importancia de estas imágenes que llama *dinámicas* en los métodos visuales de resolución de problemas.

El Problema de Grabarchuk y la solución de Damián

Exponemos ahora una adaptación del problema original de Grabarchuk (2009) realizado en nuestra prueba piloto:

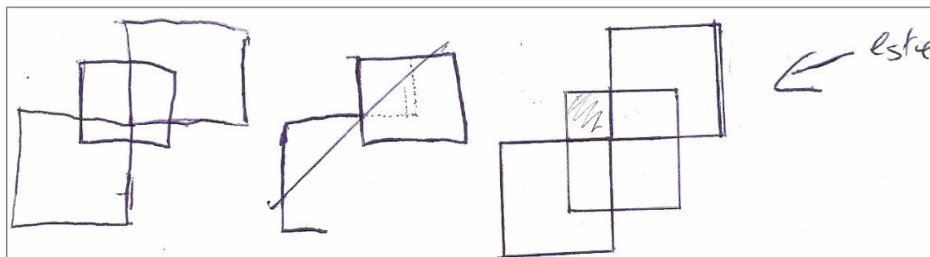
Empleando estos tres cuadrados de cartulina no translúcida que pueden rotarse y suponerse, se tienen que formar cuatro cuadrados (no necesariamente del mismo tamaño). Dibuja como lo consigues.



Observamos que este es un problema de insight puro con reestructuración (Weisberg, 1996). Nuevamente volvemos a hacer referencia a las imágenes dinámicas (Presmeg, 1986) en esta estrategia de resolución. Distinguimos dos aspectos necesarios según Davidson y Sternberg (1986), por un lado la fase de codificación selectiva y por otro lado la fase de combinación selectiva.

Análisis descriptivo

De los cinco estudiantes de tercer curso de ESO que realizaron este problema, tan sólo dos resolvieron el problema correctamente a partir de una estrategia visual que les permitió “ver” la solución correcta. Ninguno de los estudiantes requirió la estrategia heurística que se ponía a su disposición, señal que estaban concentrados e inmersos en el problema queriendo resolverlo por sí solos. Damián planteó la siguiente solución:



A la pregunta que se le formuló en el cuestionario individual: ¿Qué enunciado te ha costado más comprender? Damián respondió:

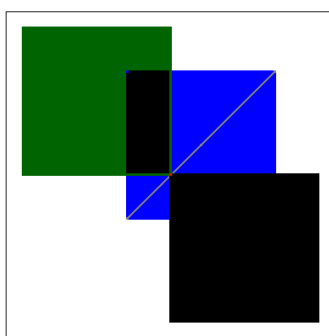
“El de los cuadrados me ha costado un poco hasta entender lo que tenía que hacer”

Observamos que después de un período de preparación donde el alumno discriminó la información que no era relevante pudo llegar a comprender el objetivo del problema:

ñProbandò diferentes conjuntos hasta encontrarloò

Análisis interpretativo

A partir de la resolución “acertada” que explicita Damián, suponemos que probablemente fue en el período de incubación (Guzman, 1991) donde escogió la estrategia de superponer dos cuadrados a un tercero descartando otras configuraciones posibles no acordes con el objetivo del enunciado. Finalmente consiguió el eureka! al visualizar mentalmente las imágenes dinámicas correspondientes (Presmeg, 1986), es decir el movimiento de dos de los cuadrados superponiéndolos a un tercero, en la ubicación adecuada; haciendo coincidir dos de los vértices, con cualquiera de los puntos de la diagonal del tercer cuadrado.

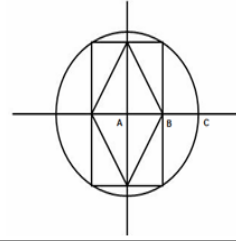


En un primer diagrama visual, parece que aun no acaba de ser consciente de la solución hallada, probablemente por no identificar los cuatro cuadros requeridos en el problema. Nos preguntamos si ¿Ha podido ayudar el tachar la segunda figura como indicación heurística de la diagonal del tercer cuadrado? Finalmente no es hasta la tercera representación visual, cuando Damián se da cuenta (insight perceptivo) que ha encontrado la solución requerida por el enunciado, es decir consigue identificar visualmente los cuatro cuadrados (Del Grande, 1990), aunque solo ha sombreado uno de ellos y ha mantenido transparencias.

El problema de Gardner y la estrategia de Laura

Exponemos una versión adaptada del problema original de Gardner (1983) realizado en nuestra prueba piloto:

En el centro del parque de la villa hay una zona circular, donde juegan los niños. En esta zona circular el ayuntamiento ha diseñado un estanque de forma rómbica. Si sabemos que entre A y B hay 5 metros, y entre B y C hay 4 metros, ¿Cuánto mide el lado del estanque?



Observamos que este es un problema de insight puro sin reestructuración (Weisberg, 1996), por aceptar una única estrategia de resolución basada en dos ideas clave. La primera consiste en enfatizar acerca de que información es realmente relevante en el enunciado, es decir la codificación selectiva que establece Davidson y Stenberg (1986) en la resolución de problemas de insight, identificando visualmente las diferentes figuras que forman parte del diagrama visual que se propone junto con el enunciado del problema. En esta fase del problema es importante reconocer el estanque en forma de rombo con respecto a las otras figuras geométricas que aparecen en el problema.

La segunda idea clave en que se basa la resolución, es la comparación selectiva (Davidson y Stenberg, 1986) que sucede cuando se consigue discernir la relación espacial y de posición que mantiene el estanque de forma rómbica con el resto de figuras geométricas (rectángulo y circunferencia) posibilitada a partir de las habilidades de visualización: reconocimiento de posiciones y relaciones espaciales. Concretamente el insight perceptivo viene facilitado, a partir de triangular que relación espacial mantiene el lado del estanque respecto a tres figuras geométricas: rombo, rectángulo y circunferencia. La identificación y el reconocimiento de posiciones geométricas, guiado por nuestra perspicacia intuitiva, puede facilitarnos la exploración de la representación mental de la imagen patrón (Presmeg, 1986) en la búsqueda de esta relación según la figura geométrica asociada: el lado del rombo, la diagonal del rectángulo, el radio de la circunferencia.

Análisis descriptivo

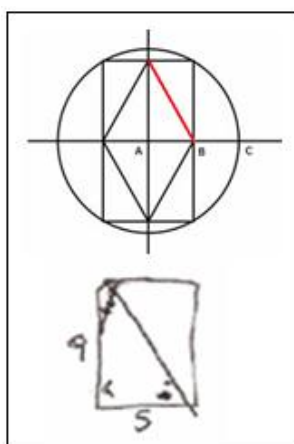
Los cinco estudiantes a los que se les presentó este problema, coincidieron en la entrevista grupal en que:

- “El enunciado no se entendía muy bien.ð
- ñ No entendía lo que se tenía que hacer para empezar a hacer el problema.ð
- ð Era muy difícil empezar a hacer el ejercicio.ð

Una característica propia de los problemas de insight perceptivo: es el bloqueo inicial que producen en los esquemas mentales de trabajo de aquellos estudiantes, que no están acostumbrados a este tipo de problemas.

Observamos que aunque los 5 estudiantes realizaron diversos diagramas en sus resoluciones, ninguno de ellos explicitó formalmente la visualización de la relación implícita existente entre el lado del rombo, la mitad de la diagonal el rectángulo y el radio de la circunferencia.

Laura identificó la diagonal del rectángulo con el lado del rombo del estanque, que se pide en el problema. Llegado este punto, prolonga el cateto del triángulo rectángulo o la mitad de la diagonal mayor del rombo, lo que le permite saber cuanto vale y esto le permitió poner en marcha uno de los mecanismos escolares tradicionales cuando se identifica un triángulo rectángulo, la aplicación del teorema de Pitágoras: *¿No se si lo he resuelto bien. He pensado en una forma de resolver este tipo de problemas que nos enseñaron en clase?*



Análisis interpretativo

Somos conscientes de las dudas que transmite Laura en su explicación, hecho que evidencia el no haber realizado las fases de verificación y reflexión (Sequera, 2007) en cuanto a las estrategias que utilizó en la resolución. Una vez más somos testigos de como el aprendizaje reproductivo, las estrategias y metodología escolares si no se aplican eficazmente pueden suponer un obstáculo significativo ante aquellos problemas originales e innovadores que requieren de una cierta perspicacia intuitiva. En nuestro caso cuando Laura identificó el triángulo rectángulo, dejó de buscar otras posibles relaciones espaciales como por ejemplo el

lado del estanque con la circunferencia, y este motivo imposibilitó el insight perceptivo, requerido para la solución.

Preguntas al lector

Preguntas que nos sugieren el análisis de estos problemas:

- a) si un cambio en el estilo de redacción de los enunciados de estos problemas podría facilitar la comprensión de los estudiantes y sus estrategias de resolución?
- b) seguro que habéis intentado resolver los problema, ¿qué tipo de estrategia visual preferente habéis utilizado?



Referencias bibliográficas

Davidson, J.E.; Sternberg, R.J. (1986). *Conceptions of Giftednes*, Cambridge University. New York.

Gardner, M. (1983). *Inspiración (ajá!)*, Labor. Barcelona.

Grabarchuk, P. (2009). *Juegos de ingenio mensa*, Tutor. Barcelona

Gutiérrez, A. (1991). Procesos y habilidades en visualización espacial, *Memorias del Tercer Congreso Internacional sobre investigación en educación Matemática*, Valencia.

Guzmán, M. (1996). *El rincón de la pizarra. Ensayos de visualización en análisis Matemático*, Pirámide. España.

Guzman, M. (1991). *Para pensar mayor*. Labor. Barcelona.

Hadamard, J. (1949). *The psychology of invention in the mathematical field*, University Press. Princeton. (Reprinted by Dover Publications, New York, 1954.)

Mann, E.L. (2005). *Mathematical Creativity and School Mathematics: Indicators of Mathematical Creativity in Middle School Students*. Dissertation, University of Connecticut. Colorado.

Mayer, R.E. (1986) *Pensamiento, resolución de problemas y cognición*, Paidós. Barcelona.

Perelmán, I. Ya (1975) *Problemas y experimentos recreativos*, Mir. Moscu.

- Poniachik, J. (2007) *Inteligencia instantánea*, Ediciones de mente. Barcelona.
- Plasencia, C. I. (2000) *Análisis del papel de las imágenes en la actividad matemática. Un estudio de casos*, Tesis doctoral. Universidad de la Laguna. Tenerife.
- Presmeg, N. C. (1985). *The role of visually mediated processes in high school mathematics: A classroom investigation*. Unpublished Ph.D. dissertation, University of Cambridge.
- Presmeg, N. C. (1986). Visualisation in high school mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 6(3), 42-46.
- Presmeg, N. C. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education*, pp. 205–235. Netherlands: Sense Publishers. Rotterdam.
- Rico, L. (2006). Las competencias matemáticas en el informe PISA 2003: el caso de la geometría. En II Escuela de Educación Matemática Miguel de Guzmán: *En torno a la geometría de Miguel de Guzmán*, pp. 9-12.
- Sequera, E.C. (2007). *Creatividad y desarrollo profesional docente en matemáticas para la educación primaria*, Tesis doctoral. Universidad de Barcelona. Barcelona.
- Zarya, Y.; Kouropatov, A. (2008). Non-standard problems for gifted mathematics students: heuristic or spontaneous. En Projects and Ideas, *Proceedings of the 5th International Conference on Creativity in Mathematics and the Education of Gifted Students*, pp.339-341. The Center for Educational Technology. Tel Aviv, Israel.
- Weisberg, R. W. (1996). Prolegomena to theories of insight in problem solving: A taxonomy of problems. In R.J. Sternberg & J. E. Davidson (Eds.), *The nature of insight*, pp. 157-196. MA: MIT Pres. Cambridge.
- Wertheimer, M. (1959). *Productive thinking*, Harper and Brothes. New York.

DIFICULTADES EN EL RAZONAMIENTO DEL ALUMNADO DE 2º DE ESO RELACIONADAS CON EL CONCEPTO DE MEDIDA DE LAS MAGNITUDES GEOMÉTRICAS: LONGITUD Y ÁREA

María Sanmiguel Suárez, M^a Jesús Salinas Portugal
Universidad de Santiago de Compostela

Resumen

La presente comunicación está integrada dentro de un proyecto de investigación más amplio realizado en relación con el concepto de medida de las magnitudes geométricas Longitud, Área y Volumen de un grupo de alumnado de 2º de ESO. Presentamos en este informe el proceso realizado así como el análisis de los resultados obtenidos y las conclusiones extraídas para el caso de las magnitudes Longitud y Área.

Abstract

This communication is integrated inside a wider research project related to study the concept of measure of the geometric measurements Length, Area and Volume, that had a group of students from Second Level of ESO. We present here the process that we followed as well as the analysis of the obtained results and the conclusions extracted for the case of the measurements Length and Area.

Sanmiguel, M., Salinas, M. J. (2011). Dificultades en el razonamiento del alumnado de 2º de eso relacionadas con el concepto de medida de las magnitudes geométricas: longitud y área. En M.M. Moreno, N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los Grupos de Investigación de la SEIEM* (pp. 83- 98). Lleida.

Introducción

El proyecto de investigación del que expondremos una parte se realizó dentro del programa de doctorado del Departamento de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Santiago de Compostela. Entre las razones de elección del tema destacamos la constatación de ciertas dificultades que persisten en el alumnado y en el profesorado con respecto a aspectos didácticos relacionados con contenidos de Geometría, Medida y sus interconexiones. Nos pareció adecuado realizar el estudio con alumnado de 2º de ESO puesto que según el currículo oficial vigente en ese momento, en este curso se comenzaba a tratar el cálculo de volúmenes con una mayor complejidad y se daban por afianzadas la asimilación del concepto de longitud y superficie. Asimismo, la consulta de diversos autores (como Alsina, C., Burgués, C., Fortuny, J.M., 1987; Guzmán, 1993; Torre, 2001 o Sánchez, 2004) ha resaltado una serie de dificultades del profesorado para afrontar la enseñanza de conceptos geométricos y de medida tanto por inexistencia de una formación didáctica adecuada en este sentido, como por la pervivencia de cierto rechazo de origen histórico hacia la enseñanza de la propia Geometría. Por ejemplo, Vecino (2003: 302) explica: “Los intentos emprendidos por diversos colectivos institucionales para mejorar la enseñanza de la Geometría, de manera que se recuperase del olvido intencional al que la comunidad didáctica la había relegado en la década de los sesenta, no parecen haber dado los resultados didácticos apetecidos”.

El Objetivo principal del proyecto de investigación era: Analizar y clasificar las dificultades que un grupo de alumnado de 2º de ESO presenta ante la medida de las magnitudes geométricas: longitud, área y volumen.

En base a dicho objetivo nos habíamos planteado tres preguntas de investigación:

- 1) ¿Qué tipo de dificultades manifiestan los alumnos de 2º de ESO en la medida de las magnitudes geométricas?
- 2) ¿En qué magnitud presentan más dificultades?
- 3) ¿Cuáles son las posibles causas que las producen?

Sin embargo en este informe nos ceñiremos a presentar lo relativo a las magnitudes de longitud y área.

Dificultades

Dificultades en relación a la enseñanza y adquisición de contenidos de Geometría y Medida.

Tras un análisis de la literatura relacionada, resumimos la información obtenida alrededor de tres grandes aspectos:

Dificultades derivadas del devenir histórico de la Geometría y aquellas que suponen un paralelismo entre la historia y la didáctica de la Medida.

Si bien desde antiguo la Geometría ocupó un destacado puesto en la enseñanza, siendo la recopilación de los “Elementos” de Euclides una obra de enorme influencia didáctica durante siglos, imprime un carácter de tipo lógico y deductivo que según Alsina, C., Burgués, C., Fortuny, J.M. (1987) acentúa su divorcio con la Aritmética y en cierto modo, con la Medida práctica. A pesar de que la aparición en el s. XVI de la Geometría Analítica conlleva una nueva tendencia a unir ambas vertientes, los mismos autores señalan que a nivel educativo no es totalmente aceptada. Posteriormente la reforma formalista de la “Matemática Moderna” en el siglo XIX, tendrá según los citados autores unas negativas consecuencias en la enseñanza. De hecho Guzmán (1993: 3) afirma que bajo este movimiento “la geometría elemental y la intuición espacial sufrió un gran detrimento”.

En el caso de la Medida, Chamorro (2003) fundamenta dificultades de su didáctica, a través de hechos históricos. El largo tiempo que históricamente se ha tardado en llegar a un sistema universal de medida es semejante a la fuerte resistencia que durante mucho tiempo ofrece el alumnado hacia el empleo de las unidades convencionales. Se señala además cómo el empleo de instrumentos numerizados dificulta la comprensión del concepto de magnitud de medida, llevando a su aritmetización, es decir, identificación entre “medida” y “número”.

Dificultades debidas a la metodología empleada. Las englobamos en cuatro apartados:

a) Derivadas de una presentación ostensiva (Chamorro, 2003). Se caracterizan por una introducción precoz de las nociones matemáticas y de un modo meramente perceptivo. En consecuencia el alumnado presenta errores ligados a una presentación estática de figuras (con frecuencia siempre en la misma posición) y a un uso abusivo del dibujo que fomenta la identificación de figura con su contorno (Castelnuovo, 1963); también Chamorro (2001) critica el uso del dibujo como técnica predominante en el caso de la medida. Actividades prácticas de estimación de la medida no suelen enfatizarse suficientemente en la práctica docente, según afirma el NCTM (2000). Investigaciones recientes como la realizada por Towers y Hunter (2010) proponen cambios en la actitud del profesor: la interrelación en la clase, así como la atención a ciertas “señales”: vocabulario matemático empleado, estrategias que emplean y discusiones sobre su idoneidad por parte del propio alumnado, reflexión sobre las argumentaciones incorrectas que ofrecen.

b) Derivadas de una temprana introducción del lenguaje algebraico. Según Martínez y Rivaya (1989) se tiende a construir la Geometría a partir del lenguaje

algebraico en detrimento de una Geometría de “búsqueda intuitiva”, término acuñado por Alsina y otros (1987: 43). Conlleva una falta de variedad de técnicas de resolución y la tendencia del alumnado a “emplear fórmulas memorísticamente” (Dickson y otros, 1984). Esta tendencia es corroborada por estudios recientes como el realizado con alumnado de 12 años por Kordaki y Potari (1998: 305) quien para evitarla y “no permitirles usar las fórmulas del cálculo de áreas y otras herramientas de medida convencionales” se decide proponer al alumnado cuestiones de medida menos tradicionales. Pero aún así, en una de las actividades decidieron prohibirles expresamente el empleo de fórmulas.

c) Originadas por una aritmetización de la Geometría y de la Medida. En el caso de la Geometría se trata de la tendencia a identificarla con el cálculo de áreas de figuras en el plano y con el cálculo de volúmenes en el espacio, tal como señala Vecino (2003). Para el caso de la Medida, Chamorro (2003) explica que consiste en tender a sustituir magnitudes por números, con falta de suficientes experiencias necesarias para la conceptualización del sentido de magnitud y de su medida. Profundizando un poco más, aparecen estudios que además demuestran la tendencia de alumnado entre 12-15 años a emplear mecánicamente modelos lineales en la resolución del cálculo de longitudes y áreas, sin atender a su idoneidad o no. (Bock, D. y otros, 1998)

d) Derivadas de una algoritmización de la Medida. Chamorro (2003) las describe como metodologías de carácter abstracto debido a un trabajo exclusivamente formal del cambio de unidades. Conlleva errores como que el alumnado no explicita las unidades al expresar resultados o las confunda. La mayoría de los libros de texto empleados, según exponen Olmo y otros (1993) sobreentienden que el alumno ya descubrió por sí mismo el concepto de magnitud y suelen pasar a su medida. Análogamente en su investigación, Boulton-Lewis, G.M. y otros (1996) ponen en entredicho la eficacia de las metodologías y secuencias curriculares propuestas para la adquisición de la medida de la longitud, proponiendo una discusión sobre las mismas.

Obstáculos de origen cognitivo y epistemológico. Los agrupamos en tres apartados:

a) Adquisición de la conservación de las magnitudes. Su adquisición para cada tipo de magnitud no parece ir ligada a una edad fija, sino que también influyen las experiencias respecto de ellas (Lovell, 1984). La autora K. Hart (citada por Olmo y otros, 1993) a través de sus experiencias, cuestiona la secuencia propuesta por Piaget de que primero se adquiere para la longitud, luego para el área y por último para el volumen. Sí existe acuerdo en general con el carácter tardío de la comprensión de la conservación del volumen.

b) Confusión entre perímetro y área. Para Dickson y otros (1984) resulta uno de los conceptos más difíciles de inculcar, puesto que en él aparecen profundamente

implicados conceptos matemáticos. Además se afirma que en este caso la metodología puede dificultar la aclaración de esta confusión.

c) El paso de las estructuras aditivas a las multiplicativas. Es para Olmo y otros (1993) uno de los obstáculos cognitivos y epistemológicos que produce dificultades más persistentes. La estructura multiplicativa supone un pensamiento formal que muchos alumnos aún no alcanzaron. Se ve corroborado en investigaciones más actuales; como señalan en sus conclusiones Kordaki y Potari (1998: 313) “la mayoría de los estudiantes no eran capaces de conectar las unidades de área estándar, con las unidades estándar de longitud; o no podían entender el tamaño del área de un rectángulo conocidas sus dimensiones”.

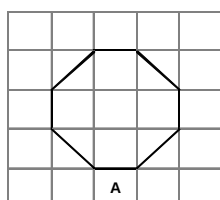
Metodología

Se lleva a cabo un estudio exploratorio descriptivo de carácter cualitativo. Expondremos a continuación lo relativo a dos campos conceptuales: Medida de la Longitud y de la Superficie. Para su estudio, seleccionamos una serie de ítems dentro de la Bibliografía consultada, interesándonos que estuviesen ya baremados y tratasen los siguientes conceptos básicos en la medida de ambas magnitudes.

Para el análisis de la Medida de la Longitud hemos elegido un ítem empleado por Hart (1981), para estudiar la habilidad del alumnado al comparar dos segmentos. La autora hace hincapié en las serias implicaciones que su concepción errónea, conllevaría en la comprensión del Teorema de Pitágoras:

Ítem 1: La siguiente figura de ocho lados, está dibujada sobre papel cuadriculado y la cuadrícula forma cuadrados de 1 cm. de lado. Llamemos A a la figura. Rodea con un círculo la respuesta que pienses que es correcta: La distancia recorrida al darle a la figura A una vuelta completa esé

A) 8 cm. B) Más de 8 cm. C) Menos de 8 cm. D) No se puede decidir



Para el análisis de la Medida de la Superficie se escogen tres Ítems (nº2, nº3 y nº4)

Ítem 2: Si corto un cuadrado A en tres piezas y coloco las piezas sin solaparse para hacer una nueva figura B como en el dibujo; rodea con un círculo la respuesta que pienses que es correcta:

- A) La figura A tiene mayor área.
 B) La figura B tiene mayor área.
 C) Las figuras A y B tienen igual área.
 D) No se puede saber si un área es o no es mayor.



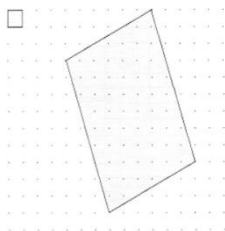
Lo seleccionamos en Hart (1981) para estudiar la adquisición de la conservación de la superficie; en una reflexión posterior sobre los resultados obtenidos por esa autora, Olmo y otros (1993) resaltan cómo incluso alumnado de 13 años (con el que nosotros hemos realizado el estudio), no han alcanzado este concepto.

Ítem 3: *Calcula el área del triángulo A, sabiendo que el área del rectángulo es de 20 cm^2 .*



Ha sido obtenido de la encuesta de enseñanza secundaria APU (Assessment of Performance Unit, 1980). Con él tratamos de ver las dificultades de nuestro alumnado para calcular la medida de una superficie sin darles previamente unas dimensiones lineales. Se busca ver qué tipo de razonamientos y estrategias emplean (esperando que usasen estrategias de descomposición y comparación de superficies) y su comprensión de las relaciones geométricas.

Ítem 4: *En la siguiente figura, la unidad de medida de superficie es el cuadradito sombreado. ¿Podrías determinar cuál es el área del cuadrilátero sombreado, midiendo con esta unidad?. Dicho de otra forma, ¿a cuántos cuadraditos equivale la superficie de la figura sombreada?*



Con él de nuevo tratamos la superficie como magnitud unidimensional para ver si los alumnos emplean razonamientos distintos a los tradicionales. Obtenido de Cajaraville y otros (2003); los autores resaltan que sus resultados demostraron escasez de estrategias de descomposición-recomposición en rectángulos. Otros autores como Olmo y otros (1993) explican cómo, ante ítems semejantes aparece la dificultad añadida de tener que contar unidades no enteras.

Resumimos los aspectos a tratar mediante los ítems escogidos, en la siguiente tabla:

MAGNITUD	CAMPO CONCEPTUAL	ÍTEM
Longitud	Estimación. Conservación tratada de manera indirecta.	Ítem 1: Comparación indirecta de la longitud de dos segmentos.
Superficie	Conservación ante una transformación de descomposición-recomposición.	Ítem 2: Comparación directa de la superficie de dos figuras.
	Medida de la superficie, entendida esta como magnitud unidimensional. Estrategias de comparación.	Ítem 3: Figura dada sin aportar medidas de dimensiones lineales, sólo aportando la medida global de la superficie de la figura.
	Medida de la superficie, como magnitud unidimensional. Estrategias de recomposición-estimación.	Ítem 4: Figura aportando otra figura dada como unidad de medida.

Tabla 1: Distribución de ítems respecto de los campos conceptuales

Análisis de resultados

a) Análisis global

	Llegan a la solución		No llegan a la solución		En blanco	
	F_i	%	F_i	%	F_i	%
Ítem n°1	13	28%	34	72%	0	0%
Ítem n°2	35	74%	8	17%	4	9%
Ítem n°3	10	21%	16	34%	21	45%
Ítem n°4	11	23%	32	68%	4	9%

Tabla 2: Porcentajes globales de la prueba

Únicamente el Ítem n°2, relativo a la conservación de la superficie por descomposición-recomposición, es resuelto correctamente por la mayoría del alumnado. Aparece un fracaso generalizado y llamativo en la resolución de los restantes ítems. Sorprende especialmente el caso del Ítem n°1 porque ningún alumno lo dejó en blanco, de lo que deducimos que era visto como factible. Los Ítems n°3 y n°4 (cálculo de la medida del área) aunque requerían técnicas menos tradicionales, ofrecieron muchas dificultades.

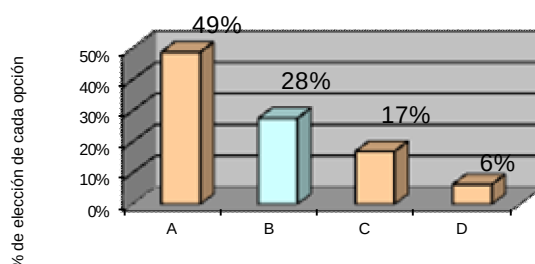


Figura 1: Resultados generales del Ítem n°1

Presentamos el análisis de los dos Ítems más llamativos a nuestro juicio (n°1 y n°3):

b) Análisis de resultados del Ítem n°1

Observando los porcentajes de respuestas para cada opción del ítem vemos cómo ningún alumno lo dejó en blanco, pero a su vez presenta unos resultados muy bajos. Las respuestas incorrectas (A, C y D) fueron seleccionadas por un 72% del alumnado. Resumen de la descripción y clasificación de las respuestas en este Ítem nº1:

SOLUCIÓN	TIPO DE RAZOAMIENTO QUE EMPLEA	Caracterización	Nº	%
1. Elige a opción correcta (opción B)	1.1. Geométrico: emplean expresamente propiedades de los elementos geométricos, comparándolos	Emplean vocabulario adecuado y se dan cuenta correctamente de la diferencia de longitudes.	6	13%
	1.2. Intuitivo	Mencionan o señalan sobre la propia figura los lados que miden más que 1 cm.	5	11%
	1.3. Aritmetización del problema	Reconocen la diferencia de longitudes de esos dos segmentos, pero lo argumentan dando valores numéricos aproximados	2	4%
2. Elige una de las opciones incorrectas: Problemas con la conservación de la longitud	2.1. Elige opción C: “diagonal < lado”	2.1.1. Confusión área-perímetro	3	6%
		2.1.2. Aritmetización errónea	3	6%
		2.1.3. Se basan en la percepción/intuición, sin argumentar.	1	2%
	2.2. Elige opción A: “diagonal = lado”	2.2.1. Confusión “posición-medida”	22	47%
		2.2.2. Argumentan aritmetizando el problema	2	4%
	2.3. Elige opción D: “no se puede resolver”	2.3.1. Se basan en la falta de valores numéricos (buscan Aritmetización)	1	2%
		2.3.2. Confusión lingüística enunciado	2	4%
			47	100%

Tabla 3: Esquema de la clasificación de los razonamientos empleados en el Ítem nº1

Estas categorías no están totalmente desconectadas entre sí, pero hemos tratado de buscar la característica predominante en cada caso, que exponemos a continuación:

1. Respuestas que eligen la opción correcta (B): ningún alumno explica por qué el segmento que es diagonal de la cuadrícula mide más que el lado de la misma. Reconocen este hecho y como mucho lo mencionan empleando los términos “diagonal”, “cruzar en diagonal”, etc. Subdividimos en tres tipos las argumentaciones correctas:

1.1. Razonamientos de tipo geométrico: Usan vocabulario y relaciones geométricas. Por ejemplo Daniel: *ñPorque la diagonal mide más que el lado (1 cm.)ð*, o también Ana, que explica *“Sería más de 8 cm. porque las líneas que cruzan los cuadraditos en diagonal son más largas que 1 cm.ð*, marcando en la figura “+1” en vez de “>1.

1.2. Razonamientos de tipo intuitivo: Solamente mencionan la existencia de lados que miden más de 1 cm. sin emplear argumentos con vocabulario geométrico. Es el caso de Jorge: *ñPorque hay lados de la figura que miden más de 1 cm.ð*

1.3. Aritmetización del problema: Reconoce el hecho de que la diagonal es mayor que el lado y emplean este vocabulario, pero resuelven recurriendo a la asignación de valores numéricos a la diagonal, más o menos aproximados: 2cm.; 1,5cm. Es el caso de Antonio: *ñPorque cada diagonal mide 1,5 cm. y el lado de un cuadrado es de 1 cm. y son 4 diagonales + 4 ladosð*

En este apartado recalcamos la tendencia a la aritmetización, puesto que tratan de dar valores numéricos como estrategia de resolución del problema; carecen de otras estrategias de tipo geométrico que les permitan comparar longitudes.

2. Respuestas en las que eligen una de las opciones incorrectas (A, C o D): indican la existencia de dificultades en la adquisición de la noción de conservación de la longitud. Distinguimos aquí tres tipos de estrategias:

2.1. Elige la opción C (diagonal < lado): distinguen la diferencia de longitudes entre la diagonal y el lado del cuadrado, pero piensan erróneamente que el segmento diagonal mide menos que el lado. Hemos encontrados tres subtipos de respuestas:

2.1.1. Confusión área-perímetro: razonamientos en los que se mezclan unidades de medida de superficie y de longitud. Santiago: *ñMide menos de ocho porque una cuadrícula mide 1 pero algunas están divididas a la mitadð*

2.1.2. Aritmetización con asignación numérica errónea: asignan valores a los segmentos. Poca familiaridad con las propiedades geométricas. Diego: *ñPorque*

pienso que sumando todos los lados da menos de 8 cm.
 $1+1+1+1+0,5+0,5+0,5+0,5 = 6$

2.1.3. Razonamiento de tipo perceptivo-intuitivo, sin argumentaciones: perciben que la diagonal posee menor longitud que el lado. Juan: *“Debido a que es un octógono y algunas cuadrículas miden 1 cm.”*

2.2. Eligen la opción A (diagonal = lado): Dificultades conservación. Dos subgrupos:

2.2.1. Argumentos que confunden la posición de dos líneas con su longitud: Se fijan en el hecho de que todos los lados se inscriben en cuadrados 1x1. Por ejemplo Miriam: *“Porque cada recta que tiene la figura es mucho para ser 1 cm y poco para ser 2 cm, entonces a mi me pareció que la medida más correcta es 1,5cm., entonces la multipliqué por 8 que son los lados que tiene la figura y me dio 12 cm. [1,5·8=12,0 es la distancia recorrida al dar una vuelta completa]”*

2.2.2. Aritmetización del problema, sin argumentación razonada: asignan el mismo valor a todos los lados afirmando, sin explicar, que entonces el contorno mide =8 cm.

2.3. Elige la opción D (“no se puede resolver”): Encontramos dos tipos de respuestas:

2.3.1. Intentan resolverlo por aritmetización pero se sienten incapaces, les faltan datos. Carla: *“Porque no se sabe cuánto mide el medio cuadrado”*

2.3.2. Confusión lingüística en el enunciado del Ítem, al emplear términos como “vuelta”, asociados por estos alumnos sólo a figuras circulares. Denota falta de interconexión y abstracción, quizás vinculada al desenvolvimiento cognitivo en estas edades. Jorge: *“Porque solamente se le puede dar a los círculos una vuelta completa y esto no es un círculo sino otro tipo de figura”*

c) Análisis de resultados del Ítem nº3

Un alto porcentaje de alumnado (45%) lo deja en blanco, es decir, lo considera difícil.

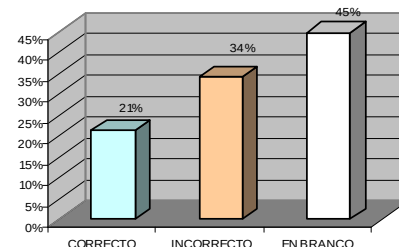


Figura 2: Resultados generales del Ítem nº3

Resumen de los razonamientos empleados:

SOLUCIÓN	TIPO DE RAZONAMIENTO	Caracterización	Nº	%
1. Llega a la solución correcta	1.1. Geométrico-intuitivo	1.1.1. Emplea expresamente propiedades de los elementos geométricos	1	3%
		1.1.2. Tiene la intuición correcta, pero se expresa con poca propiedad	4	15%
	1.2. Algebraico-abstracto	Relacionan comprensivamente la fórmula del rectángulo y del cuadrado	3	12%
	1.3. Algebraico-concreto (Aritmetización)	Asignan valores numéricos a las dimensiones lineales y aplican fórmulas	2	8%
2. Llega a una solución incorrecta	2.1. Algebraico	Emplean una ecuación mal planteada	2	8%
	2.2. Algebraico concreto (Aritmetización incorrecta)	2.2.1. Fórmula posterior correcta	4	15%
		2.2.2. Operaciones o fórmulas incorrectas	2	8%
		2.2.3. Busca aritmetizar, “le faltan datos”	5	19%
	2.3. Confusión Área-Perímetro	Emplean la raíz cuadrada como “mitad” o le dan el valor del área al perímetro.	3	12%
			26	100%

Tabla 4: Esquema de la clasificación de los razonamientos empleados en el Ítem nº3

Explicamos a continuación con mayor profundidad la clasificación realizada:

1. Razonamientos que llevaron a una respuesta correcta:

1.1. De tipo geométrico-intuitivo. Los dividimos en dos grupos:

1.1.1. Comprenden las propiedades geométricas y se expresan con propiedad. Caso de Víctor: *“¿Porque el área de un triángulo inscrito en un rectángulo es la mitad de este?”*

1.1.2. Reconocen la relación geométrica pero apenas argumentan. Miguel: *“El triángulo es la mitad del rectángulo. $20:2 = 10$ ”*

1.2. De tipo algebraico-abstracto: Mayor comprensión del lenguaje algebraico pues resuelven la cuestión a nivel general, comparando la fórmula del área de ambas figuras. Aunque no lo mencionan, reconocen que las dos tienen la misma base y altura.

1.3. De tipo algebraico-concreto: Aritmetizan, asignando valores numéricos a la base y a la altura, bastante coherentes. Así se sienten capacitados para emplear la fórmula y sustituir. Sólo resuelven un caso particular, denotando poca abstracción. Convierten el problema en uno típico: “Calcular el área conocidas las dimensiones lineales”.

2. Razonamientos que llevaron a una respuesta incorrecta:

2.1. De tipo algebraico: Tratan de plantear una ecuación, algunas más elaboradas que otras, pero se equivocan pues al no estar familiarizados con el trabajo con dos incógnitas asignan la misma letra a valores distintos.

Es el caso de Diego, el único que trata al área como incógnita (magnitud unidimensional) pero por falta de herramientas algebraicas no consigue la ecuación correcta: *“ $20 \cdot x \cdot x = x$; $- x \cdot x \cdot x = 20$; $- 3x = 20$; $x = 20/(3) = 5,97$ ”*

2.2. De tipo algebraico-concreto, con aritmetización incorrecta: Tras asignar valores numéricos erróneos a base y altura, aplican las fórmulas. Según éstas, distinguimos:

2.2.1. Aritmetización incorrecta pero posterior fórmula correcta: Por ejemplo Pablo que asigna (incorrectamente) altura 2 cm. y base 8 cm., aunque luego calcula el área del triángulo a través de su correspondiente fórmula ($A=b \cdot a/2$), con lo que obtiene 8 cm².

2.2.2. Aritmetización incorrecta con posterior fórmula u operaciones incorrectas: Emplean fórmulas, relaciones erróneas, u operaciones a modo de fórmulas “inventadas”

2.2.3. No resuelve al no conseguir aritmetizar: Sólo escriben la fórmula que emplearían si tuviesen los datos de las dimensiones lineales. Carolina: *“No se puede hacer, creo, porque faltan datos. Si no, haría Área = $b \cdot a/2$ y ya me daría la respuesta”*

2.3. Confusión Área-Perímetro: El uso de ciertas argumentaciones o el tratar de obtener el área del triángulo calculando la raíz cuadrada del área del rectángulo.

Denota dificultades en el lenguaje matemático e incomprensión de las operaciones aritméticas al confundir “mitad” de una cantidad con su “raíz cuadrada”. Es el caso de David, quien considera que es la base quien mide 20 ”cm”, cuando este dato correspondía al área.

O la simple operación empleada por David B.: Estos alumnos parecen identificar el problema con aquellos en los que, por ejemplo, se les daba el área de un cuadrado, y se les pedía la longitud del lado.

Conclusiones

En general la prueba tuvo un alto porcentaje de error, especialmente en relación a la medida de la longitud y del área en el caso del cálculo de ésta cuando las dimensiones lineales de la figura eran desconocidas (Ítems expuestos). Aunque estos aspectos eran de carácter elemental y básico, observamos que no están todavía adquiridos por la mayoría de estos alumnos de 2º de ESO. Ello nos provoca una reflexión en dos sentidos. Por una parte, el desarrollo cognitivo en el que se encuentran se corresponde todavía más al estadio de las operaciones concretas: gran necesidad de razonar asignando valores numéricos y no mediante otras técnicas o argumentos más abstractos. Por otra, también resaltamos una escasa familiaridad con aspectos intrínsecos a la medida de la longitud y de la superficie, lo que puede estar estrechamente relacionado un tipo de enseñanza carente de auténticas situaciones de medida a través de las que desarrollar nuevas estrategias de resolución como la comparación de magnitudes, la estimación, la descomposición-recomposición de figuras,... técnicas que difícilmente aparecieron.

Se han presentado bastantes casos de dificultades con la expresión matemática y la comprensión del significado de las operaciones (confusión entre “doble de” y “cuadrado de”; o el uso de la “raíz cuadrada” para obtener un área menor), así como casos de confusión entre las unidades de medida de perímetro y de área.

Respecto del Ítem nº1, relacionado con la medida de la longitud, pudimos comprobar que la gran mayoría presentó dos tipos de tendencia: la aritmetización del problema (consecuencia por un lado del estadio de desarrollo cognitivo de este alumnado, pero también de metodologías bajo las que la medida de la longitud se ve reducida a números y comparación de los mismos y la confusión entre perímetro y superficie). Respecto a la confusión perímetro-superficie en un 45% del alumnado, a pesar de su dificultad intrínseca, también las metodologías empleadas de tipo “ostensivo” y en exceso ligadas al dibujo, pueden no haber contribuido a su superación. En consecuencia, nos encontramos con que una gran parte del alumnado no ha adquirido la conservación de la longitud, y subrayamos la apreciación de Hart (1981) sobre sus serias implicaciones de cara a la comprensión del Teorema de Pitágoras.

En cuanto a los ítems relacionados con la medida de la superficie, destacamos la escasez de estrategias aparte de la tendencia a la aritmetización y a la algebrización. En el Ítem nº3 no sólo sorprende el hecho de que fuese considerado difícil (45% de respuestas en blanco) sino cómo las estrategias de aritmetizar o algebrizar son además poco acertadas en general. Un 12% presenta de nuevo la confusión área-perímetro. En general este ítem pone de manifiesto una baja comprensión a nivel geométrico que puede estar ligada a metodologías con escasez de actividades y estrategias variadas y con poca manipulación y reflexión sobre los elementos geométricos.

Referencias Bibliográficas

- Alsina, C., Burgués, C., Fortuny, J.M. (1987). *Invitación a la didáctica de la geometría*. Madrid: Síntesis.
- Assessment of performance unit (APU). (1980). *Mathematical Development. Secondary Survey Report*. London: HMSO.
- Bock, D. De, Verschaffel, L. y Janssens, D. (1998). "The prenominance of the linear model in secondary school student's solutions of word problems involving length and area of similar plane figures", en *Educational Studies in Mathematics*, vol 35, p. 65-83
- Boulton-lewis, G.M., Wilss, L.A., Mutch, S.L. (1996). "An analysis of young children's strategies and use of devices for length measurement", en *The journal of Mathematical Behaviour*, vol 15, p. 329-347.
- Cajaraville, J.A., Fernández, M.T., Labraña, P.A., Salinas, M.J., de la Torre, E., y Vidal, E. (2003). *Avaliación do currículo de matemáticas no 2º ciclo da E.S.O.* Santiago de Compostela: Servizo de publicacións e Intercambio Científico Campus universitario sur. Universidade de Compostela.
- Castelnuovo, E. (1963). *Didáctica de la matemática moderna*. México: Trillas.
- Chamorro, C. (2001). "Las dificultades en la enseñanza-aprendizaje de las magnitudes en educación primaria y ESO", en Chamorro (ed.) *Dificultades del Aprendizaje de las Matemáticas*. Madrid: MEC, p. 81-124
- Chamorro, C. (2003). "Las magnitudes multilíneas: la superficie y el volumen", en Chamorro (ed.) *Didáctica de las matemáticas para Primaria*. Madrid: Pearson Educación, p. 221-272
- Dickson, L., Brown, M. e Gibson, O. (1984). *El aprendizaje de las matemáticas*. Barcelona: Labor.
- Guzmán, M. de (1993), *Tendencias Innovadoras en Educación Matemática*. Madrid: Editorial Popular.

- Hart, K.M. (1981), "Measurement", en K.M. Hart ed. *Children's Understanding of Mathematics: 11-16*. London: John Murray, p. 9-22
- Kordaki, M., Potari, D. (1998), "Children's approaches to area measurement through different contexts", en *The Journal of Mathematical Behaviour*, vol 17, p. 303-316.
- Lovell, K. (1984). *Desarrollo de los conceptos matemáticos y científicos en los niños*. Madrid: Morata.
- Martinez, A., Rivaya, F.J. y otros (1989). *Una metodología activa y lúdica para la enseñanza de la Geometría*. Madrid: Síntesis.
- N.C.T.M. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston VA. USA. (Traducción al castellano: Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES (2003) . *Principios y estándares para la Educación Matemática*. Granada)
- Olmo, M.A. del, Moreno, M.F. e Gil, F. (1993). *Superficie y volumen. ¿Algo más que el trabajo con fórmulas?*. Madrid: Síntesis
- Sanchez, J.C. (2004) "¿Por qué las matemáticas básicas cambian? Claves para entender las renovaciones curriculares", en *Educación y futuro: revista de investigación aplicada y de experiencias educativas*, nº 11, p.161-170
- Torre, E. de la (2001) "Que geometría queremos para a educación primaria e que geometría queremos para os mestres", en *Gamma* nº1, p.21-26
- Towers, J., Hunter, K. (2010) "An ecological reading of mathematical language in a Grade 3 classroom: A case of learning and teaching measurement estimation", en *The Journal of Mathematical Behaviour*, vol 29, p. 25-40.
- Vecino, F. (2003) "Didáctica de la Geometría en la Educación Primaria", cap 11, en Chamorro, M^a. C (coord), Llinares, S., Ruiz Higuera, M^a.L., Belmonte, J.M., Vecino Rubio, F. *Didáctica de las matemáticas para primaria*. Madrid: Pearson Education.

GRUPO:

**CONOCIMIENTO Y DESARROLLO
PROFESIONAL DEL PROFESOR (CDPP)**

Coordinador: **José María Cardeñoso**, Universidad de Granada

APORTACIONES, IDEAS Y VISIÓN DE CONJUNTO, DESDE
EL GRUPO DE TRABAJO DE LA SEIEM CONOCIMIENTO Y
DESARROLLO PROFESIONAL DEL PROFESOR DE
MATEMÁTICAS (CDPPM).

Cardeñoso, J.M.

“APRENDER A MIRAR CON SENTIDO” SITUACIONES DE
ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS.

Callejo, M.L.; Valls, J. y Llinares, S.

FORMACIÓN DEL PROFESORADO Y CONOCIMIENTO
MATEMÁTICO PARA LA ENSEÑANZA EN LA TRANSICIÓN
DE PRIMARIA A SECUNDARIA.

Figueiras, L.; Deulofeu, J.; Martínez, M.; Pujol, R.; Moreno, M.;
Giné, C.; Fernández, S. y Azcárate, C.

APORTACIONES, IDEAS Y VISIÓN DE CONJUNTO, DESDE EL GRUPO DE TRABAJO DE LA SEIEM CONOCIMIENTO Y DESARROLLO PROFESIONAL DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS (CDPPM)

[José M^a Cardenoso](#)
Universidad de Granada

Resumen.

En esta escrito se presenta, la síntesis de las aportaciones en el grupo de trabajo CDPPM, así como la visión de conjunto que se puede aportar actualmente, como expresión del trabajo investigativo en el campo del saber, desarrollo y formación de profesores de matemáticas en España.

Abstract.

In this paper we present the summary of contributions in the working group CDPPM and the picture which can currently provide, as an expression of research work in the field of knowledge, development and training teachers of mathematics in Spain.

Cardenoso, J.M. (2011). Aportaciones, ideas y visión de conjunto, desde el grupo de trabajo de la SEIEM: Conocimiento y Desarrollo Profesional del Profesor de Matemáticas (CDPPM). En M.M. Moreno, N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los Grupos de Investigación de la SEIEM* (pp. 101- 109). Lleida.

Aportaciones a las sesiones: primera debate

En una primera sesión, Salvador Llinares nos presenta a debate y discusión, la aportación que lleva por título *“Aprender a observar situaciones de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas”* (Callejo, Valls y Llinares,)

En dicha sesión, desde la Universidad de Alicante, se presenta una estrategia formativa para el aula de profesores de matemáticas, centrada en generar entornos de aprendizaje, para que estos estudiantes aprendan lo que Mason (2002) ¹ denomina “The Discipline of Noticing”.

Y parafraseando a los autores de esta aportación, comparten que esta disciplina implica los siguientes pasos:

- (a) identificar acontecimientos significativos para el aprendizaje (reflexión sistemática) en la clase de matemáticas,
- b) reconocer la toma de decisiones del profesor y las posibles alternativas en la enseñanza de las matemáticas, identificándolas y nombrándolas
- (c) aprender a ‘observar con intención’ y
- (e) validar las observaciones con otros.

Tenemos que considerar que sus autores parten de la hipótesis de que el uso de lecciones de matemáticas video-grabadas o registros de lecciones en documentos escritos pueden constituir un buen punto de partida para desarrollar competencias profesionales en los estudiantes para profesores como son la competencias para interpretar las lecciones de matemáticas, como denominan genéricamente sus autores, a un grupo de competencias que incluye la observación de un aula de educación matemática².

Afirman que en el *Área de Didáctica de la Matemática* del *Departamento de Innovación y Formación Didáctica* de la Universidad de Alicante han diseñado entornos de aprendizaje basados en vídeo-clips y en la metodología de casos como

¹ Mason, J. (2002). *Researching your own practice. The Discipline of noticing*. Londres: Routledge Falmer.

²Llinares, S. (2009). Learning to "notice" the mathematics teaching. Adopting a socio - cultural perspective on student teachers' learning. En A. Gomes (ed.) *Elementary Mathematics Education - EME 08* (pp. 31 - 44). Braga, Portugal: Universidade do Minho - Fundação para a Ciência e a tecnologia.

una forma de dar una respuesta a la situación anterior³. Los video-clips se seleccionan para problematizar diferentes situaciones de la enseñanza de las Matemáticas, favoreciendo que los estudiantes reconozcan aspectos concretos mediante la formulación de una o dos preguntas y argumenten sus observaciones usando conocimiento de Didáctica de la Matemática.

Por último, nos comparten que están en un proceso investigativo, donde se plantean como foco la evolución del discurso de los estudiantes, a través del análisis de sus registros de interacciones de los profesores en formación. Los cuales se obtienen del chat cuando, para tratar de “validar sus observaciones” e interpretaciones el video-clip, los estudiantes para profesor, interaccionan entre sí a través de un debate virtual. Considerando que el objetivo de los entornos de aprendizajes es que los estudiantes desarrollen la habilidad de “observar con intención” (Discipline of Noticing) y construyan conocimiento útil para enseñar matemáticas.

Los autores aseveran que el uso de estos entornos en la formación inicial ha mostrado que la interacción y la reflexión sobre registros de la práctica, ayuda a los estudiantes a generar una visión más compleja de las situaciones de enseñanza-aprendizaje⁴. Sin embargo, algunas preguntas de investigación que se plantean son:

- ¿Cómo los estudiantes para profesor aprenden a reconocer acciones y eventos significativos en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas?
- ¿Qué papel desempeña la interacción con otros en el desarrollo de la habilidad de “observar con intención” (Discipline of noticing)?

Aportaciones a las sesiones: segundo debate

En una segunda sesión, Jordi Deulofeu y Lourdes Figueiras nos presenta a debate y discusión, la aportación que lleva por título *Formación del profesorado y conocimiento matemático para la enseñanza en la transición de primaria a secundaria* (Figueiras, L.; Deulofeu, J.; Martínez, M.; Pujol, R.; Moreno, M.; Giné, C.; Fernández, S.; Azcárate, C.).

En ella se realiza una presentación inicial y un taller-discusión posterior, alrededor del proyecto focalizado en la *Continuidad del aprendizaje matemático entre las etapas de Primaria y Secundaria* (Investigadores del grupo: Lourdes

³ Valls, J.; Callejo, M.L., & Llinares, S. (2008). Dialécticas en el diseño de materiales curriculares y entornos de aprendizaje para estudiantes para maestro en el área de Didáctica de la Matemática. *Publicaciones*, 38, 89 - 103.

⁴ Callejo, ML.; Valls, J.; Llinares, S. (2007). Interacción y análisis de la enseñanza. Aspectos claves en la construcción del conocimiento profesional. *Investigación en la Escuela*, 61, 5-21.

Figueiras (IP), Carmen Azcárate, Jordi Deulofeu, Sainza Fernandez, Cèlia Giné, Mario Martínez, Mar Moreno, Romà Pujol). Donde nos comparten en qué consiste el proyecto y cuál es el marco teórico, siempre desde la perspectiva del profesor.

Su taller presenta al análisis y debate de una propuesta de forma de análisis de una tarea escolar, desde la presentación de un ejemplo de una tarea de aula (propuesta de tarea y realización de la misma de un alumno), dándonos sugerencias para el análisis y discusión sobre el mismo.

Y, parafraseando a sus autores decir que, las tareas que presentan para la discusión en este grupo de trabajo, se enmarcan en una línea de investigación incipiente del grupo PREMAT en el ámbito de la formación del profesorado, cuya finalidad es diagnosticar y analizar aquellos factores que, desde la instrucción, facilitan una mejora de la continuidad en la competencia matemática de los estudiantes desde la educación primaria a secundaria. Consideramos que este tipo de investigaciones pueden contribuir a minimizar efectos derivados de procesos de transición tales como el fracaso académico o el abandono del interés por el conocimiento matemático.

Nos presentan la siguiente situación, que han seleccionado para la discusión en el grupo el siguiente episodio (CEIP PC14-06-2010)

“Se ha propuesto el siguiente problema a estudiantes de sexto de primaria:

Con los números 4, 5, 6, 7, 8, 9 se pueden formar números de tres cifras sin repetir ninguno.

a) ¿Qué par de números se puede escribir de manera que su resta sea tan grande como sea posible?

b) ¿Qué par de números se puede escribir de manera que su resta sea tan pequeña como sea posible? (Vicens Vives, 6º Primaria)

Después de pensar el problema, una niña escribe la siguiente respuesta en la pizarra:

$$\begin{array}{r} 987 \\ -456 \\ \hline 531 \end{array} \quad \begin{array}{r} 789 \\ -654 \\ \hline 135 \end{array}$$

Si fueses el maestro o maestra, ¿cómo continuarías la clase?”

La sesión se organizó de acuerdo a la siguiente pauta, aunque como casi siempre nos faltó tiempo para recorrerla:

1. Discutir y resolver el problema prescindiendo de su contextualización en el aula.

2. Dar una interpretación de la solución propuesta por la alumna.
3. Proponer una trayectoria hipotética de enseñanza.
4. Puesta en común.

Fruto del trabajo y discusión en pequeño grupo, surgieron intereses diferenciados, que con distinto grado de interés, para el seminario CDPPM, evidenciaron la gran confusión, aun reinante, al respecto de este campo de investigación. Esto no fue óbice para que se avanzara y concluyera aspectos de sumo interés, así como dejar en evidencia la gran dificultad que conlleva consolidar una visión coherente para el análisis del episodio.

Nos hacen la consideración de que se trata de un trabajo en su estadio inicial que continua con el análisis de otros episodios similares, con la finalidad de proponer un posible modelo de análisis de dichos episodios con una doble finalidad: por un lado profundizar en el fenómeno de la transición desde la perspectiva del profesorado, teniendo en cuenta, entre otros aspectos, su actuación en el aula frente a situaciones contingentes como la presentada, y por otro proporcionar actividades para la formación del profesorado tanto inicial como permanente.

Finalmente, nos comparten que una de las fases del proyecto de investigación incluye el seguimiento durante dos cursos académicos del profesorado asignado al mismo grupo de estudiantes de sexto de primaria y de primero de secundaria en tres escuelas públicas de educación primaria y sus institutos de secundaria asociados. Se ha propuesto para esta fase de la investigación un diseño cualitativo, interactivo en el sentido que consiste en un estudio en profundidad, con técnicas de observación y de entrevista cara a cara para recoger los datos en sus escenarios naturales.

Aportaciones desde las sesiones: Visión de conjunto de la investigación sobre el CDPPM

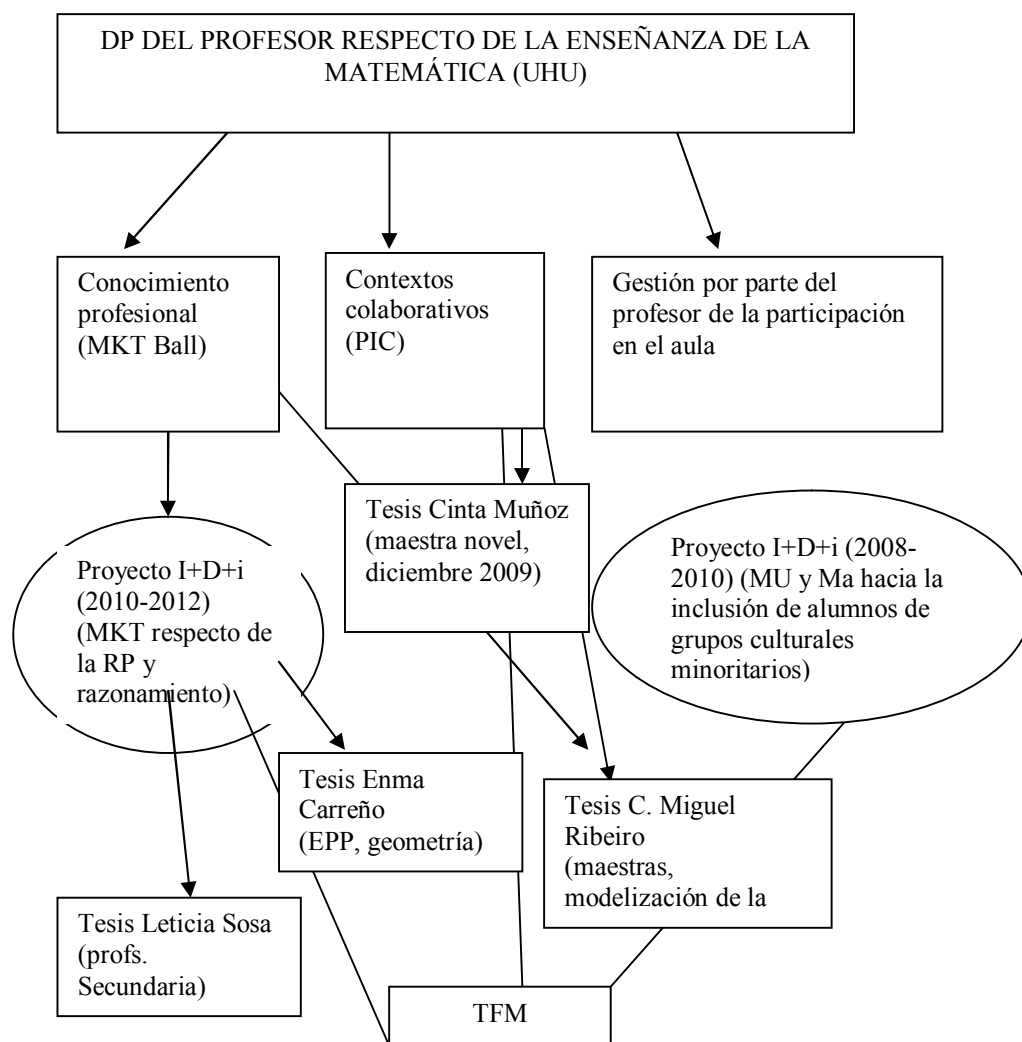
Una sugerencia de José Carrillo, solicitando de los asistentes, miembros de la SEIEM, que se nos aporte información, del conocimiento que tienen por parte, sobre Proyectos de investigación, relativos al grupo, en que se esté trabajando actualmente, surgieron los datos aportados por algunos miembros de la Sociedad, pertenecientes a las Universidades de Huelva, Alicante, Granada, Salamanca, Santiago de Compostela y Jaén.

Toda esta información la he intentado organizar en un mapa único, pero siendo incapaz de producirlo con cierta coherencia, me limito a compartir literalmente lo aportado, desde cada universidad.

Se ha de considerar que esta información es incompleta y esta expresada, en su aportación original, con diversos lenguajes. He intentado respetar lo compartido, entendiendo que al lector interesado le resultará fácil contactar con dichos grupos de trabajo e informarse en detalle, sobre las perspectivas, líneas, agendas y marcos de investigación con los que cada cual atiende, investiga y aporta conocimientos testados al campo del saber profesionalizado del profesor de matemáticas. Por lo que espero que se me perdone la pobreza de esta primera imagen, pero desde aquí me ofrezco a la recién elegida nueva coordinadora, Lourdes Figueiras, de la Universitat Autònoma de Barcelona, a mejorarlo en un futuro cercano, tal vez como síntesis del posible encuentro del Grupo de trabajo CDPPM de la SEIM, antes del próximo Simposio. Este encuentro puede dirigirse a compartir los problemas de investigación en proceso actualmente, modelo que se sigue, por ejemplo en las sesiones bianuales del CERME europeo.

Este potencial encuentro, puede estar enfocado a compartir las cuestiones y preguntas de investigación que se están dirigiendo actualmente en España, que tengan su interés en aportar conocimiento investigativo sobre algún aspecto particular del conocimiento del profesor, o sobre cuestiones que identifican tanto la identidad como los hitos en el desarrollo del profesional de la educación matemática escolar. Será también pertinente aquellas cuestiones que se particularicen en cómo se elabora y evolucionan el conocimiento profesional del profesor, en un cierto marco de formación de profesores.

Presentamos el mapa que los compañeros de Huelva aportan de sus focos de interés investigativo, los proyectos subvencionados y los trabajos que se originan



Desde la universidad de Alicante nos aportan cinco líneas prioritarias de investigación

Aprender el conocimiento necesario para enseñar matemáticas

Tecnología en la Formación de Profesores de matemáticas

Construcción del Conocimiento matemático

Resolución de Problemas y TIC

Coordinación cognitiva en geometría

Identidad y Desarrollo Profesional

Comprensión del conocimiento matemático

Desde la Universidad de Granada, donde hay varios grupos que comparten este interés investigativo, aunque difieren en los puntos de vista donde se posicionan sus miembros, para realizarla.

Así, solamente referido al grupo PNA, se trabajan las siguientes líneas de trabajo:

Formación de profesores: Tesis de P. Gómez (2009), tesis de J. L. Lupiáñez (2009) y el DEA de A. Rojas (2010)

Proyecto CODIMA (Rico, Flores, Gómez, Lupiáñez, González-López)

TEDs-M

Líneas donde en la actualidad trabaja en dos Memorias fin de Master (Web del Departamento, http://www.ugr.es/~dpto_did)

También en la Universidad de Granada, el profesor J. D. Godino que dirige el Grupo Teoría Educación Matemática se nos refiere que, en el marco del Proyecto: Enseñanza y desarrollo de competencias matemáticas en futuros profesores de Primaria, se encuentran los DEA de P. Konic (2008), W. Castro (2008), M. Rivas (2009) y también la memoria de master de M. Gonzalo (2009). Estos proyectos siguen activos trabajos que siguen en proceso de elaboración, como tesis doctorales. También existen en proceso diversas memorias de master en didáctica de la matemática (Web del Departamento, http://www.ugr.es/~dpto_did).

Desde esta misma universidad, la profesora M^a L. Oliveras ha dirigido varios DEA y Memorias de master relativas a la línea de etnomatemáticas y formación de profesores. Actualmente todos ellos siguen activos y en proceso de elaboración del informe de investigación, como tesis doctoral (Web del Departamento, http://www.ugr.es/~dpto_did).

Y, por ultimo, desde esta misma sede, el profesor J. M^a Cardeñoso, en relación con la perspectiva con el Proyecto IRES: Investigación en los Ámbitos de Investigación Profesional del docente (AIP) y desde el marco de trabajo del Grupo de investigación DPD de la UCA (Desarrollo Profesional del Docente), del que es miembro, trabaja dentro de la línea de investigación, centrada en detectar las concepciones y/o tendencias de pensamiento de los profesores en formación. Con esta perspectiva, dirige una memoria de master realizada L M. Pérez López que lleva por título *Análisis exploratorio de la organización espacial en profesores en formación* y, en curso la codirección tesis doctoral de A. Moreno, Doctorado de Didáctica de las CC Experimentales de la UGR, en la universidad de Mendoza

(Argentina), sobre las concepciones de los estudiantes para profesor de ciencias y matemáticas, relativas a las nociones base del campo estocástico.

Desde la Universidad de Cádiz, la Profesora Azcárate, desde el Proyecto IRES y desde la dirección del grupo DPD (Desarrollo Profesional del Profesor), trabaja por un lado, en la línea de investigación centrada en el contraste entre la teoría y la práctica del profesor en servicio, donde ha codirigido la tesis doctoral de A. Chamizo, en el seno del plan de doctorado de Didáctica de las CC Experimentales y Sociales de la US, leída en 2010 que lleva por título, *Propuestas metodológicas de profesores noveles de matemáticas: diseño y práctica en secundaria. Estudios de caso*.

También la profesora P. Azcárate, en colaboración con el profesor J M^a Chamoso de la Universidad de Salamanca, trabaja en la línea de investigación centrada en la evolución de los procesos de reflexión de los estudiantes en el aula de formación y, su incidencia en las propuestas de intervención educativas para el aula de matemáticas en primaria. En esta línea se ha en la cual la tesis doctoral de la profesora de educación secundaria M^a J. Cáceres, leída este año 2010 y que lleva por título, *Las reflexiones que los maestros en formación incluyen en su portafolios sobre su aprendizaje didáctico matemático en el aula universitaria*.

Y para concluir, desde la universidad de Santiago de Compostela nos aportan en la línea de Investigación sobre el conocimiento y el desarrollo del profesor de matemáticas (en la perspectiva mantenida por el profesor J. D. Godino) el trabajo de DEA de la profesora M. J. Salinas, y su continuidad como tesis doctora, aún en proceso. A su vez, esta profesora a su vez, ha dirigido la elaboración, como memoria de TIT, del trabajo de L. A. Vidal Conde, titulado *Análisis descriptivo de algunas ideas del profesorado sobre aspectos relacionados con la instrucción del concepto de límite funcional en el aula*.

Podemos añadir la aportación que nos hace el profesor F. J. García García, quien desde la Universidad de Jaén nos comparte su participación en el desarrollo del proyecto PRIMAS (Promoting inquiry in mathematics and science education across europe), aprobado en el 7º Programa Marco de la Unión Europea, actualmente en curso. Este proyecto tiene por objetivo un uso generalizado de la enseñanza basada en la investigación y en la resolución de problemas, con la ayuda de una amplia variedad de acciones de difusión orientadas a “grupos clave” y con un especial énfasis en el desarrollo profesional del profesorado de matemáticas y ciencias en metodologías basadas en la investigación y en la resolución de problemas.

ñAPRENDER A MIRAR CON SENTIDOò SITUACIONES DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

M. Luz Callejo, Julia Valls, Salvador Llinares

Universidad de Alicante

Resumen

Presentamos las características de algunas investigaciones realizadas en la agenda “aprendizaje del profesor de matemáticas” en la Universidad de Alicante en los últimos años. La hipótesis que apoya estos estudios es que los registros de la práctica y las interacciones entre los profesores pueden constituir un buen punto de partida para desarrollar competencias docentes en los estudiantes para profesores. En particular uno de los aspectos de la competencia docente a desarrollar es “ver con sentido”, que se apoya en la idea de “profesional noticing” (Discipline of noticing) (Mason, 2002; Sherin, 2001).

Abstract

We present characteristics of some studies in mathematics teacher learning’ agenda at University of Alicante. The hypothesis underlying these studies is that the practice records of mathematics teaching and learning and the interactions between the teacher students can be a good starting point for developing the mathematics teaching skills. In a specific way, the development of professional noticing (The discipline of noticing) (Mason, 2002; Sherin, 2001).

Callejo, M.L., Valls, J., Llinares, S. (2011). “Aprender a mirar con sentido” situaciones de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. En M.M. Moreno, N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los Grupos de Investigación de la SEIEM* (pp. 111-121). Lleida.

Introducción

La formación de maestros y profesores de matemáticas en la sociedad del conocimiento debería estar centrada en proporcionar conocimiento y ayudar a desarrollar destrezas que permitieran a los futuros profesionales participar en la creación de nuevo conocimiento. Uno de los desafíos importantes a los que se enfrenta el formador de profesores es proporcionar los medios para que los estudiantes para profesor puedan construir y gestionar las ideas de Didáctica de la Matemática necesarias para enseñar matemáticas y generar nuevo conocimiento desde la propia práctica (Hiebert, Morris, Berk & Jansen, 2007; Llinares y Krainer, 2006; Penalva, Escudero y Barba, 2006). Presentamos las características de algunas investigaciones realizadas en la agenda “aprendizaje del profesor de matemáticas” en la Universidad de Alicante en los últimos años apoyadas en la hipótesis de que los registros de la práctica y las interacciones entre los profesores pueden constituir un buen punto de partida para desarrollar competencias docentes en los estudiantes para profesores. En particular uno de los aspectos de la competencia docente a desarrollar es “ver con sentido” que se apoya en la idea de “profesional noticing” (Discipline of noticing) (Mason, 2002; Sherin, 2001).

Los objetivos de la investigación son:

*Analizar el papel de materiales curriculares y de entornos de aprendizaje basados en el uso de videos y las discusiones asincrónicas (debates virtuales) diseñadas ad hoc, para fomentar el desarrollo de los procesos de identificación e interpretación de diferentes aspectos de la enseñanza de las matemáticas en los estudiantes para maestro/profesor, que constituyen aspectos de la competencia docente **mirar con sentido**.*

*Analizar las características de los procesos de construcción del conocimiento sobre la enseñanza de las matemáticas y de las características de la competencia **mirar con sentido** realizado de manera colaborativa por los estudiantes para maestro/profesor.*

A continuación, describimos el diseño, implementación y análisis de entornos interactivos de aprendizaje utilizando registros de la práctica y debates on-line, y el análisis de la relación entre la interacción y la implicación cognitiva sobre las que se apoya los procesos de conceptualización de la enseñanza de las matemáticas.

Diseño de materiales curriculares y entornos de aprendizaje

Los registros de la práctica se han usado para contextualizar la información de la Didáctica de la Matemática que se considera útil para explicar los diferentes

aspectos de la enseñanza de las Matemáticas. El objetivo es caracterizar la manera en que evoluciona el discurso de los estudiantes para profesor. Desde las investigaciones previas sabemos que aprender a conceptualizar la enseñanza de las matemáticas es difícil de desarrollar y depende de las condiciones en las que se constituyen los entornos de aprendizaje para los estudiantes para profesor (Morris, 2006; Masingila & Doerr, 2002; Pea, 2006; Sherin, 2004). En esta agenda nuestro grupo han centrado sus investigaciones en:

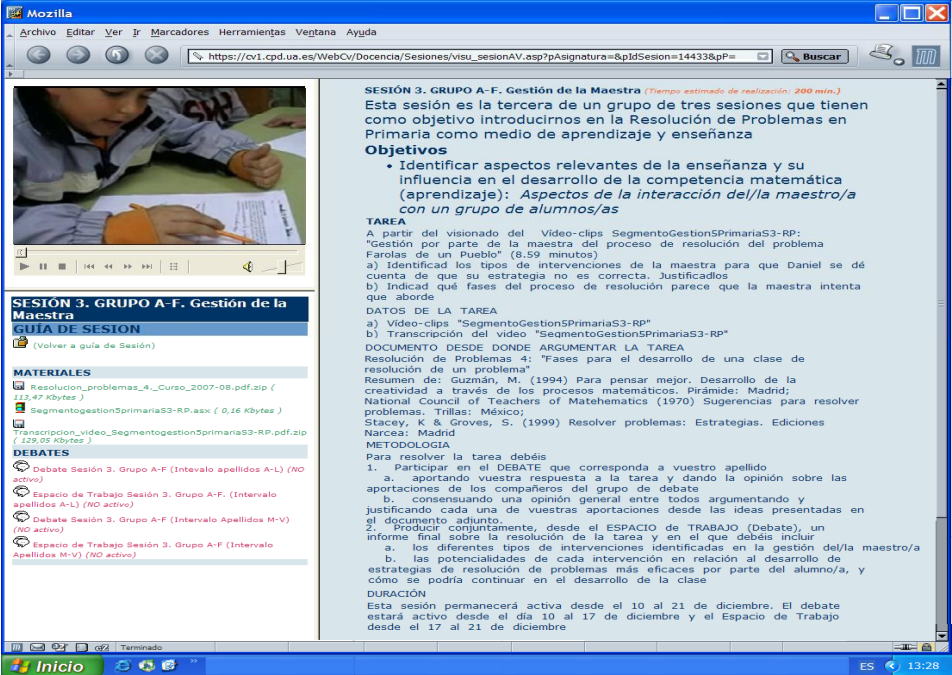
Diseñar, experimentar y analizar materiales curriculares y entornos de aprendizaje interactivos en la web. La característica de estos entornos de aprendizaje es que favorecen la interacción de los alumnos en la resolución de problemas profesionales o estudio de casos a través de debates virtuales.

La aproximación metodológica para realizar este trabajo se basa en **los experimentos de enseñanza** (Callejo, Valls y Llinares, 2007; Design-Based Researcher Collective, 2003; Valls, Callejo y Llinares, 2008). Un experimento de enseñanza contempla un “ciclo de investigación” en tres fases:

Fase 1: Diseño y planificación de la instrucción;

Fase 2: Experimentación en el aula o en un entorno virtual de las tareas diseñadas y Fase 3: Análisis retrospectivo

Para diseñar los entornos de aprendizaje interactivos usamos la herramienta “Sesiones” del Campus virtual de la Universidad de Alicante. Esta herramienta permite construir un espacio-web de interacción social (figura 1) que integra videos, texto y acceso a documentos.



SESIÓN 3. GRUPO A-F. Gestión de la Maestra (Tiempo estimado de realización: 200 min.)

Esta sesión es la tercera de un grupo de tres sesiones que tienen como objetivo introducirnos en la Resolución de Problemas en Primaria como medio de aprendizaje y enseñanza

Objetivos

- Identificar aspectos relevantes de la enseñanza y su influencia en el desarrollo de la competencia matemática (aprendizaje): *Aspectos de la interacción del/la maestro/a con un grupo de alumnos/as*

TAREA

A partir del visionado del Video-clips SegmentoGestionPrimariaS3-RP: "Gestión por parte de la maestra del proceso de resolución del problema Farolas de un Pueblo" (8.59 minutos)

- Identificar los tipos de intervenciones de la maestra para que Daniel se dé cuenta de que su estrategia no es correcta. Justificados
- Indicar qué fases del proceso de resolución parece que la maestra intenta que aborde

DATOS DE LA TAREA

- Video-clips "SegmentoGestionPrimariaS3-RP"
- Transcripción del video "SegmentoGestionPrimariaS3-RP"

DOCUMENTO DESDE DONDE ARGUMENTAR LA TAREA

Resolución de Problemas 4: "Fases para el desarrollo de una clase de resolución de un problema"

Resumen de: Guzmán, M. (1994) Para pensar mejor. Desarrollo de la creatividad a través de los procesos matemáticos. Pirámide: Madrid; National Council of Teachers of Mathematics (1970) Sugerecias para resolver problemas. Trillas: México; Stacey, K & Groves, S. (1999) Resolver problemas: Estrategias. Ediciones Narcea: Madrid

METODOLOGIA

Para resolver la tarea debéis

- Participar en el DEBATE que corresponda a vuestro apellido
 - aportando vuestra respuesta a la tarea y dando la opinión sobre las aportaciones de los compañeros del grupo de debate
 - consensuando una opinión general entre todos argumentando y justificando cada una de vuestras aportaciones desde las ideas presentadas en el documento adjunto.
- Producir conjuntamente, desde el ESPACIO de TRABAJO (Debate), un informe final sobre la resolución de la tarea y en el que debéis incluir
 - los diferentes tipos de intervenciones identificadas en la gestión del/la maestro/a
 - las potencialidades de cada intervención en relación al desarrollo de estrategias de resolución de problemas más eficaces por parte del alumno/a, y cómo se podría continuar en el desarrollo de la clase

DURACIÓN

Esta sesión permanecerá activa desde el 10 al 21 de diciembre. El debate estará activo desde el día 10 al 17 de diciembre y el Espacio de Trabajo desde el 17 al 21 de diciembre

Figura 1. Carátula de la sesión: Gestión de la maestra del proceso de resolución de problemas

Estos entornos de aprendizaje (figura 2) exigen al estudiante:

Visualizar el registro de la práctica.

Leer la documentación teórica desde la Didáctica de la Matemática.

Participar en debates virtuales para intercambiar y consensuar con los compañeros los análisis e interpretaciones del video-clip focalizados por las preguntas planteadas.

Escribir un informe en pequeño grupo sobre lo realizado.



Figura 2. Estructura metodológica del entorno de aprendizaje

Los resultados de las investigaciones realizadas en cada uno de estos contextos ponen de manifiesto que:

el uso de estos entornos privilegian la interacción y la reflexión sobre registros de la práctica ayudando a los estudiantes para maestro/ profesor /asesor generar una visión más compleja de las situaciones de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas;

las características de los entornos de aprendizaje parecen determinar la manera en la que los estudiantes para maestro/profesor/asesor llegan a usar los elementos teóricos desde la Didáctica de la Matemática como instrumentos conceptuales, y

en el caso de los maestros en ejercicio en programas de formación como asesores, la reflexión sobre la propia práctica se convierte en un eslabón importante en la transformación de la información teórica en instrumento conceptual.

La información que estamos reuniendo permite caracterizar la relación entre el diseño y la investigación como aspectos ineludibles del binomio formador de profesores-investigador y aporta conocimiento sobre el proceso de aprendizaje de los estudiantes para profesor en contextos que favorecen la interacción mientras se resuelven problemas profesionales.

Características de los procesos de construcción del conocimiento: interacción y resolución de problemas profesionales

El proceso de construcción del conocimiento tiene significado en el contexto de la acción e interacción conjunta mientras se resuelven problemas (Llinares &

Olivero, 2008). Este proceso de implicación cognitiva toma la forma de un diálogo en el que se proponen soluciones, se realizan añadidos, ampliaciones, objeciones y contrapropuestas desde las aportaciones de los demás (Derry, Gance, Gance y Schlager, 2000; Schire, 2006). En este sentido, la descripción de la calidad de los procesos de comunicación que se generan plantea cuestiones conceptuales y metodológicas. Desde un punto de vista conceptual, Wells (2002) mantiene que:

(a) el discurso debe producir progreso en el sentido de que compartir, cuestionar y revisar opiniones conduce a una nueva comprensión de todos los que participan, pudiendo llegar a ser ésta superior a la comprensión previa;

(b) el contenido de un discurso progresivo debe ser considerado un “artefacto del conocimiento” sobre el que los participantes trabajan colaborativamente para mejorar. Estas hipótesis se apoyan en las teorías que ven el desarrollo del conocimiento mediado por el discurso social y plantean cuestiones en investigación educativa que deben ser exploradas (Wells, 2002):

¿qué formas debe tomar el discurso para considerarlo vinculado a la construcción del conocimiento?

¿qué tipo de condiciones permiten que esto ocurra de esta manera?

Los objetivos de nuestra investigación han tratado de concretar estas cuestiones de la siguiente manera:

¿Cuáles son las características de la manera en la que los estudiantes para maestro/profesor de matemáticas/asesores construyen conocimiento sobre la enseñanza a partir de entornos de aprendizaje diseñados ad hoc.

Las características del proceso argumentativo de los estudiantes para maestro/profesor / asesor se ha relacionado con:

la forma de participar, y

la dimensión cognitiva del contenido del discurso.

Identificadas en cadenas conversacionales (figura 3) consideradas como el conjunto de interacciones vinculadas a una misma temática, que permite conocer alrededor de qué temas y de qué manera los estudiantes para profesor interaccionan (Kumpulainen & Mutanen, 2000).

Los resultados obtenidos ponen de manifiesto que:

Las interacciones entre los estudiantes para profesor parecen potenciarse cuando existe un foco de interés compartido haciendo que se impliquen en actividades conjuntas de identificar y analizar los diferentes aspectos de la enseñanza de las

matemáticas, lo que les permite llegar a compartir un cierto nivel de comprensión de la situación.

El vínculo entre las formas de participar y la calidad cognitiva del discurso generado muestra cómo los estudiantes para profesor instrumentalizan las ideas teóricas de la Didáctica de la Matemática en el análisis de la enseñanza de las Matemáticas, sin embargo no se identifica claramente una relación de causalidad entre la interacción y la construcción del conocimiento.

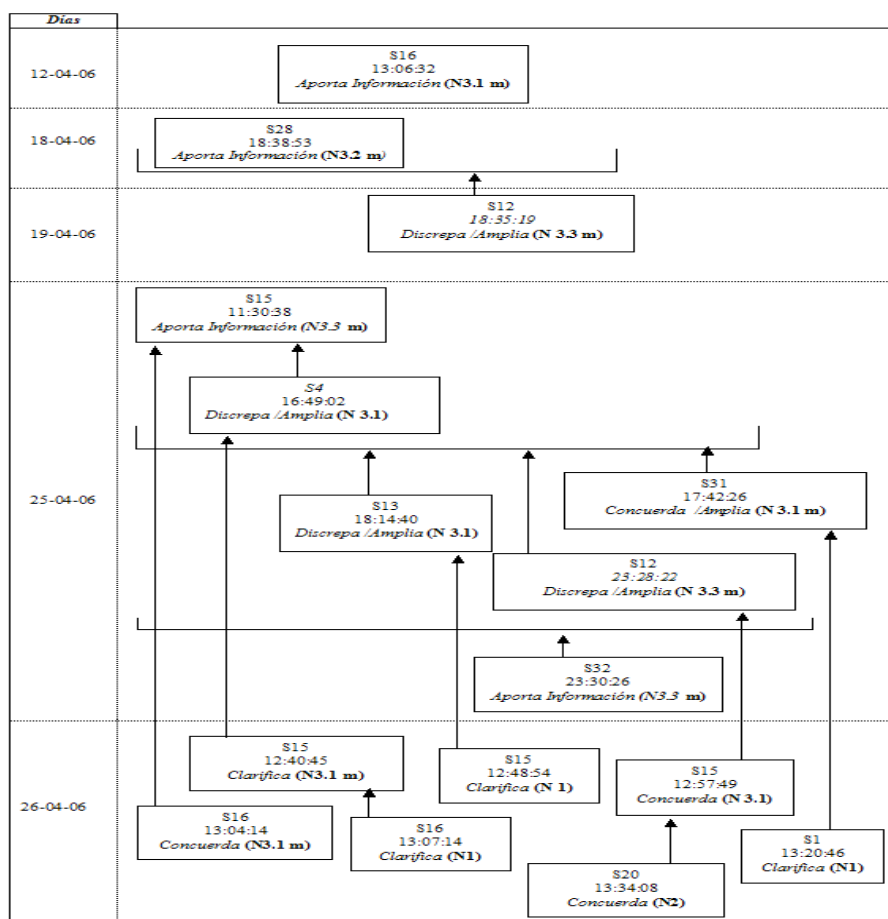


Figura 3. Cadena conversacional identificada en un debate virtual

La interpretación de los estudiantes de la enseñanza de las Matemáticas muestra cómo sus experiencias previas y sus creencias filtran la construcción del discurso.

Estos resultados nos han permitido caracterizar globalmente el comportamiento de los grupos de estudiantes al identificar lo que parece apoyar o limitar la construcción del conocimiento sobre la enseñanza de las Matemáticas y por tanto el desarrollo de la competencia docente “mirar con sentido”. Por otra parte, estos resultados en relación al comportamiento de los grupos también han puesto de manifiesto que no es posible explicar el aprendizaje individual con el tipo de análisis que estábamos haciendo. Esta constatación generó la necesidad de determinar que relaciones existen entre la dimensión personal del aprendizaje y la dimensión social.

Reflexiones finales

El uso de los entornos de aprendizaje diseñados en la formación inicial ha mostrado que la interacción y la reflexión sobre registros de la práctica ayuda a los estudiantes a generar una visión más compleja de las situaciones de enseñanza-aprendizaje (Callejo, Llinares y Valls, 2008) y por tanto lo podemos considerar como evidencia del inicio del desarrollo de la competencia docente “mirar con sentido”.

Las perspectivas socioculturales del aprendizaje desde las que se han generado las ideas que articulan la manera de entender el proceso de construcción del conocimiento en los espacios de interacción social (Greeno, J. & the Middle School Mathematics Through Applications Project Group, 1998; Wells, 2002; Wenger, 1998) definen nuevos aspectos específicos sobre los que hay que indagar para mejorar la comprensión de las relaciones entre las dimensiones personales y sociales del aprendizaje de conocimiento relativo a la enseñanza de la matemáticas. Estos nuevos aspectos nos hacen plantearnos nuevas preguntas de investigación:

¿Cómo los estudiantes para profesor aprenden a reconocer acciones y eventos significativos en el proceso de enseñanza-aprendizaje?

¿Qué características de la interacción con otros se relacionan con el desarrollo de la habilidad de “observar con intención” (Discipline of noticing)?

Reconocimiento.

Este trabajo se inició con el proyecto I+D+i del Plan Nacional de investigación nº SEJ2004-05479 (2005-2007), continuó con el apoyo del proyecto precompetitivo GVPRE/2008/364 de la Generalitat Valenciana (2008), y continúa con el proyecto I+D+i del Plan Nacional de Investigación, EDU2008-04583 (2009-2011).

Referencias bibliográficas

- Callejo, M.L., Valls, J. y Llinares, S. (2007). Interacción y análisis de la enseñanza. Aspectos claves en la construcción del conocimiento profesional. *Investigación en la Escuela*, 61, 5–21.
- Callejo, M.L., Llinares, S. & Valls, J. (2008). Using video-case to learn to “notice” mathematics teaching in asynchronous discussion groups. En O. Figueras & A. Sepúlveda (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of the 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, and the XXX North American Chapter*, Vol. 1, (pp. 233-240) . Morelia, Michoacán, México: PME.
- Design-Based Researcher Collective (2003). Design- Based Research: An Emerging paradigm for Educational Inquiry. *Educational Researcher*, 32(1), 5-8
- Derry, Sh., Gance, S., Gance. L. & Schlager, M. (2000). Toward Assessment of Knowledge-Building Practices in Technology-Mediated Work Group Interactions. En S. Lajoie (Ed.), *Computers as cognitive tools. No more walls. Vol. 2.* (pp. 29-68). Mahwal: Lawrence Erlbaum Associates.
- Greeno, J. & the Middle School Mathematics Through Applications Project Group (1998). The Situativity of Knowing, Learning and Research. *American Psychologist*, 53(1), January, 5-26.
- Hiebert, J., Morris, A., Berk, D. & Jansen, A. (2007). Preparing teachers to learn from teaching. *Journal of Teacher Education*, 58(1), January/February, 47-61.
- Kumpulainen, K. & Mutanen, M. (2000). Mapping the dynamics of peer group interactions: A Method of analysis of socially shared learning processes. En H. Cowie & Van der Aalsvoort (Eds.), *Social interaction in learning and instruction. The meaning of discourse for the construction of knowledge* (pp. 144- 160). Amsterdam: Pergamon-EARLI.
- Llinares, S. & Krainer, K. (2006). Mathematics (student) teachers and teacher educators as learners. En A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education. Past, Present and Future* (pp.429-460). Rotterdam: Sense Publishers.
- Llinares, S. & Olivero, F. (2008). Virtual communities and networks of prospective mathematics teachers: Technologies, interactions and new forms of discourse. En K. Krainer, & T. Wood (Eds.), *The International Handbook of Mathematics Teacher Education. Vol. 3. Participants in Mathematics Teacher Education* (pp. 155-179). Taipei: Sense Publishers

- Llinares, S. & Valls, J. (2009). The building of preservice primary teachers' knowledge of mathematics teaching. Interaction and online video case studies. *Instructional Science*, 37, 247-271.
- Llinares, S. & Valls, J. (2010). Prospective primary mathematics teachers' learning from on-line discussions in a virtual video-based environment. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 13, 177-196.
- Llinares, S., Valls, J. y Roig, A.I. (2008). Aprendizaje y diseño de entornos de aprendizaje basado en videos en los programas de formación de profesores de matemáticas. *Educación Matemática*, 20(3), 59-82.
- Masingila, J.O. & Doerr, H.M. (2002). Understanding pre-service teachers' emerging practices through their analyses of a multimedia case study of practice. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 5(3), 235-263.
- Mason, J. (2002). *Researching your owns practice. The Discipline of noticing*. Falmer: Routledge Falmer.
- Morris, A. K. (2006). Assesing pre-service teachers' skills for analyzing teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 9, 471-505.
- Pea, R. (2006). Video-as-Data and Digital Video Manipulation Techniques for Transforming Learning Science Research, Education and Other Cultural Practices. En J. Weiss, J. Nolan, J. Hunsinger, & P. Trifonas (Eds.) *The International Handbook of Virtual Learning Environments*, Volume II. (pp. 1321-1394). Netherland: Springer.
- Penalva, C., Escudero, I. y Barba, D. (Eds.) (2006). *Conocimiento, entornos de aprendizaje y tutorización en la formación del profesorado de Matemáticas. Construyendo comunidades de práctica*. Granada: Proyecto Sur.
- Prieto, J.L. & Valls, J. (2010). Aprendizaje de las características de los problemas aritméticos elementales de estructura aditiva en estudiantes para maestro. *Educación Matemática*, 22(1), 57-85.
- Rey, C., Penalva, C. y Llinares, S. (2007). Aprendizaje colaborativo y formación de asesores en matemáticas: Análisis de un caso. *Cuadrante*, XV, 95-120.
- Schrire, S. (2006). Knowledge building in asynchronous discussion groups: Going beyond quantitative analysis. *Computers & Education*, 46, 49-70.
- Sherin, M.G. (2001). Developing a professional vision of classroom events. En T. Wood, B.S. Nelson, & J. Warfield (Eds.), *Beyond classical pedagogy: Teaching elementary school mathematics* (pp. 75-93). Mahwah, NJ: Erlbaum.

- Sherin, M.G. (2004) New perspectives on the role of video in teacher education. En J. Brophy (ed.), *Using video in teacher education* (p.1-28). Oxford: Elsevier Ltd.
- Valls, J., Llinares, S. y Callejo, M.L. (2006). Video-clips y análisis de la enseñanza. Construcción del conocimiento necesario para enseñar matemáticas. En Penalva, C., Escudero, I. y Barba, D. (Eds.) (2006). *Conocimiento, entornos de aprendizaje y tutorización en la formación del profesorado de Matemáticas. Construyendo comunidades de práctica*. (pp. 25-48). Granada: Proyecto Sur.
- Valls, J., Callejo, L. & Llinares, S. (2008). Dialéctica en el diseño de materiales curriculares y entornos de aprendizaje para estudiantes para maestro en el área de Didáctica de la matemática. *Revista Publicaciones*, 36, 89-103.
- Wells, G. (2002, 2º ed.). *Dialogic Inquiry. Toward a sociocultural Practice and Theory of Education*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Wenger, E. (1998). *Communities of practice. Learning, meaning, and identity*. Cambridge: Cambridge University Press.

FORMACIÓN DEL PROFESORADO Y CONOCIMIENTO MATEMÁTICO PARA LA ENSEÑANZA EN LA TRANSICIÓN DE PRIMARIA A SECUNDARIA

[Lourdes Figueiras](#), Jordi Deulofeu, Mario Martínez, Romá Pujol, Mar
Moreno*, Celia Giné, Sainza Fernández, Carmen Azcárate
Universitat Autònoma de Barcelona, Universitat de Lleida*

Resumen

En esta comunicación, que se presenta en forma de taller, presentamos el trabajo que estamos realizando sobre la importancia del papel del profesor de matemáticas, y en particular de su conocimiento matemático, en los procesos de transición de la educación primaria a la educación secundaria. En concreto, presentamos una tarea de aula, realizada con alumnos de Primaria (10-11 años), y proponemos su análisis en los siguientes términos: 1. Discusión y resolución del problema, prescindiendo de su contextualización en el aula. 2. Interpretación de la solución propuesta por la alumna. 3. Propuesta de una trayectoria hipotética de enseñanza.

Abstract

In this paper we show, in a workshop form, the kind of work we are doing in relation with the role of the teacher in the transition process from Primary to Secondary Education. In short, we present a mathematical activity posed to primary pupils (10-11 years old) and we propose to discuss it in the following terms: 1. Discussion and solution of the activity. 2. Mathematical interpretation of the solution given by a pupil. 3. Proposal of a hypothetical instructional trajectory.

Figueiras, L. et al.. (2011). Formación del profesorado y conocimiento matemático para la enseñanza en la transición de primaria a secundaria. En M.M. Moreno, N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los Grupos de Investigación de la SEIEM* (pp. 123-133). Lleida.

Introducción y marco conceptual

El fenómeno de la transición de etapa en la educación científica es un proceso complejo que afecta al aprendizaje del estudiante de matemáticas de manera especialmente significativa (Kajander and Lovric, 2005). La transición de Primaria a Secundaria, de Secundaria a Bachillerato o de Bachillerato a la Universidad han sido objeto de investigaciones que se centran en uno o varios elementos característicos y/o influyentes en el proceso de transición, como por ejemplo el currículum (Coad and Jones, 1999) o el género del alumno y el tamaño de la institución de acogida (Ferguson and Fraser, 1998). Además, determinados influjos externos al contexto educativo, como pueden ser la familia, la cultura social, o la desmotivación y otros ligados al momento evolutivo de los estudiantes son igualmente elementos que influyen en la transición de etapa. Según Coad y Jones (op cit.), los elementos no curriculares que influyen en la transición tienen una duración más a corto plazo. Sin embargo, aquellos relacionados con la práctica docente y el aprendizaje son los que más parecen influir en el bajo rendimiento del estudiante a largo plazo. Por ejemplo, en la educación primaria predominan más actividades manipulativas que en secundaria, pese a los beneficios que este tipo de actividades supone en muchos estudiantes de secundaria durante la transición desde la primaria (Howard, Perry y Tracy, 1997).

Por otra parte, encontramos que las investigaciones previas preocupadas por analizar etapas de transición educativa se centran en general en el alumnado y no tanto en el papel que desempeña el docente en dichos procesos de transición. Aunque es evidente la complejidad de relaciones que se establecen entre los factores que pueden influir en este cambio, es interesante preguntarse cuáles de ellos dependen de la práctica docente y profundizar desde aproximaciones teóricas en el fenómeno de la transición de etapa. Consideramos que desde la didáctica de las matemáticas resulta especialmente interesante y necesario estudiar la labor del profesor antes y durante la transición con el objetivo de analizar qué prácticas docentes ayudan al estudiante en este proceso. Así pues, la práctica docente y su impacto en el aprendizaje del estudiante durante la transición serán nuestro objeto de estudio.

La conceptualización del fenómeno *transición* desde la que iniciamos esta investigación no responde a una definición discreta en el tiempo, caracterizada por el momento de paso de un curso académico a otro y desligada de la singularidad del aprendizaje matemático. Se trata de un fenómeno que se gesta en un proceso continuo de crecimiento de la competencia matemática de los estudiantes y manifiesta con más énfasis en momentos determinados. La transición así entendida puede afectar a la continuidad en la competencia matemática de diferentes maneras

y con una intensidad diferente a lo largo de la educación matemática de los estudiantes. La influencia de los factores curriculares y contextuales asociados al paso de un curso académico a otro, o aún más de una etapa a otra, tales como cambio de profesorado, de centro, de proyecto educativo, de organización curricular, de medidas de atención a la diversidad, etc., conducen a pensar que los momentos más críticos y proclives a la aparición de alguna discontinuidad se producirán en las transiciones que Rice (1997) denomina sistémicas, es decir, aquellas transiciones obligatorias dentro del propio sistema educativo, ya que en ellas los cambios son generalmente muy significativos. Será, por lo tanto, especialmente importante prestar atención a estos momentos con el fin de diagnosticar y analizar las discontinuidades que se producen, incluso dentro de una misma etapa educativa. La consideración de un crecimiento continuo de la competencia matemática de los estudiantes y la gradación de las discontinuidades generadas por un proceso de transición a lo largo de la educación matemática serán, por tanto, nuestros anclajes conceptuales de partida.

Las tareas que presentamos para la discusión en este grupo de trabajo se enmarcan en una línea de investigación incipiente del grupo PREMAT en el ámbito de la formación del profesorado, cuya finalidad es diagnosticar y analizar aquellos factores que, desde la instrucción, facilitan una mejora de la continuidad en la competencia matemática de los estudiantes desde la educación primaria a secundaria. Consideramos que este tipo de investigaciones pueden contribuir a minimizar efectos derivados de procesos de transición tales como el fracaso académico o el abandono del interés por el conocimiento matemático.

Investigaciones previas y de actualidad se centran en las repercusiones (académicas o personales) que los procesos de transición tienen sobre la competencia matemática del alumnado, pero existe un vacío en el estudio del profesor y su labor durante estos procesos concretos de transición. En este sentido, son tres las hipótesis que sustentan los objetivos del proyecto:

Existen diferencias importantes relacionadas con la formación matemática del profesorado, tanto de primaria como secundaria, que acentúan las dificultades del alumnado en periodos de transición de etapa. Estas diferencias tienen un carácter fundamentalmente de polarización en la formación pedagógica y matemática, viéndose acentuada la primera en el caso del profesorado de primaria y la segunda en el de secundaria.

Algunos de los factores decisivos que influyen en la ruptura de continuidad en la competencia matemática de los estudiantes y merman la calidad de dicha competencia tienen su origen en la carencia de programas de formación específicos del profesorado que contemplen explícitamente la transición entre etapas.

El profesorado en activo es consciente de la problemática de la transición para el aprendizaje matemático de sus estudiantes, especialmente en las etapas de

educación primaria y secundaria, es activo en la búsqueda de soluciones y muestra interés profesional por programas de acción específicos que permitan la colaboración del profesorado de diferentes etapas educativas.

Una de las fases del proyecto de investigación incluye el seguimiento durante dos cursos académicos del profesorado asignado al mismo grupo de estudiantes de sexto de primaria y de primero de secundaria en tres escuelas públicas de educación primaria y sus institutos de secundaria asociados. Se ha propuesto para esta fase de la investigación un diseño cualitativo, interactivo en el sentido que consiste en un estudio en profundidad, con técnicas de observación y de entrevista cara a cara para recoger los datos en sus escenarios naturales.

En el diseño de la investigación se han contemplado además otros aspectos secundarios que requieren un tipo de investigación más analítica, relacionados con el análisis de conceptos y documentos que describen, por ejemplo, la ordenación curricular en las diferentes etapas o los planes de formación del profesorado. Con esta investigación micro se pretende llegar a un análisis detallado de lo que ocurre en esta transición. El objetivo es conseguir el máximo detalle en la descripción de los puntos de discontinuidad detectados en un estudio piloto que hemos llevado a cabo durante el curso académico 2009-2010.

De las observaciones llevadas a cabo hasta este momento se han seleccionado episodios que han sido considerados especialmente relevantes porque ponen de manifiesto el nivel de conocimiento matemático del profesorado en relación a contenidos que abarcan diferentes niveles educativos. El primer paso de nuestro análisis incluye una descripción exhaustiva de lo que hemos llamado Trayectorias Hipotéticas de Enseñanza: A partir de cada uno de estos episodios procedemos a analizar el contenido matemático de la tarea y las hipotéticas formas de gestión del aula que podrían derivarse de la situación que se plantea. El siguiente paso es concretar dichas trayectorias en el marco específico de la transición que venimos desarrollando.

Contenido de la propuesta

Hemos seleccionado para la discusión en el grupo el siguiente episodio:(CEIP PC14-06-2010)

Se ha propuesto el siguiente problema a estudiantes de sexto de primaria:

Con los números 4, 5, 6, 7, 8, 9 se pueden formar números de tres cifras sin repetir ninguno.

a) ¿Qué par de números se puede escribir de manera que su resta sea tan grande como sea posible?

b) *¿Qué par de números se puede escribir de manera que su resta sea tan pequeña como sea posible?*

La tarea ha sido extraída del libro de texto que utilizan habitualmente (Vicens Vives, 6º Primaria)

Después de pensar el problema, una niña escribe la siguiente respuesta en la pizarra:

$$\begin{array}{r} 987 \\ -456 \\ \hline 531 \end{array} \quad \begin{array}{r} 789 \\ -654 \\ \hline 135 \end{array}$$

Si fueses el maestro o maestra, ¿cómo continuarías la clase?

La sesión se organiza de acuerdo a la siguiente pauta:

1. Discutir y resolver el problema prescindiendo de su contextualización en el aula.
2. Dar una interpretación de la solución propuesta por la alumna.
3. Proponer una trayectoria hipotética de enseñanza.
4. Puesta en común.

A continuación, ofrecemos una primera aproximación, desde nuestra perspectiva, para el análisis de dicho episodio:

Solución del problema

Antes de analizar los aspectos didácticos de la tarea y el significado de las soluciones aportadas por los estudiantes, es preciso conocer bien el problema, hallar sus soluciones y las posibles generalizaciones.

La solución del **apartado a)** (diferencia máxima) es: $987 - 456 = 531$ y coincide con la dada por la alumna de sexto de primaria. La generalización a 6 cifras distintas cualesquiera, $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6$, es: $a_6a_5a_4 - a_1a_2a_3$. A diferencia de lo que sucede en el apartado b), en este caso resulta evidente que el primer número está formado por las tres cifras mayores y el segundo por las tres menores. Si aceptamos que una de las cifras sea 0, entonces puede discutirse si la solución sigue siendo la misma, o bien el segundo número debe ser $a_2a_1a_3$, dado que un número de tres cifras con un cero en las centenas es en realidad un número de dos cifras.

Apartado b) La solución es: $745 - 698 = 47$. Las cifras de las centenas deben tener diferencia mínima (en este caso 1) y además los dos dígitos más pequeños formarán parte del número mayor (el minuendo) y las dos menores del sustraendo. Aunque cualquier par de cifras contiguas tiene diferencia 1, la diferencia mínima

para los números de tres cifras buscados se obtiene cuando elegimos para las centenas las dos cifras centrales (6 y 7), ya que ahora podemos aumentar al máximo el número menor y disminuir el mayor.

Una primera generalización sería para seis cifras consecutivas cualesquiera: $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6$. Ahora la solución es: $a_4a_1a_2 - a_3a_6a_5$. Obsérvese que, sean cuales sean las seis cifras, la diferencia siempre será 47. Para probarlo basta con expresar todos los números en función de a_1 ($a_2 = a_1 + 1$, $a_3 = a_1 + 2, \dots$) y hacer la resta.

La generalización a seis cifras cualesquiera, $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6$, debe contemplar la diferencia entre las cifras. En cualquier caso, habrá como mínimo dos cifras cuya diferencia sea 1. Si sólo hay un par con diferencia 1 estas serán las cifras de las centenas (habría que discutir el papel del 0). Por ejemplo, para las cifras: 0, 2, 3, 5, 7, 9, la solución será: $305 - 297 = 8$. Si hay más de un par con diferencia 1, tomaremos el más próximo al centro: (a_3, a_4) ; si este no es de diferencia 1, tomaremos (a_2, a_3) o bien (a_4, a_5) y si ninguno de estos tienen diferencia 1, tomaremos (a_1, a_2) o bien (a_5, a_6) .

Diferentes procedimientos para resolver el problema

El problema admite también un razonamiento mediante inducción desde las centenas para llegar a la solución que utiliza el algoritmo habitual de la resta y que comienza con la pregunta: ¿Es posible obtener un cero en la posición de las centenas? Esta pregunta lleva a considerar los cinco posibles pares de cifras consecutivas (5,4), (6,5), (7,6), (8,7), (9,8).

El hecho de asegurar un cero en las centenas obliga a no poder obtenerlo también en las decenas. El número que resulte ha de tener el valor más pequeño posible en las decenas asegurándose que “nos llevamos una”, de manera que hay que encontrar la máxima diferencia en valor absoluto entre los dígitos. Así pues, los dos dígitos que ocuparán la posición de las decenas, en los dos números que se substraen serán, respectivamente, 4 y 9.

De la misma manera, el número que resulte ha de tener el valor más pequeño posible en las unidades, asegurándonos que “nos llevamos una” para garantizar que el dígito de las decenas será un 4 y no un 5. Esto conduce a que los dígitos que ocuparán la posición de las unidades, en los dos números que se substraen serán, respectivamente 5 y 8. Este razonamiento deja una única posibilidad para las cifras que ocuparán las centenas, que serán respectivamente 7 y 6. En consecuencia, la pareja de números buscada, que es única, será (745, 698).

Una mirada atenta a la solución obtenida permite buscar algunas regularidades: los valores centrales son los dígitos que aparecen en los extremos. ¿Será así en el caso de cualesquiera seis números consecutivos? Avanzar en este razonamiento conduce a conjeturar que la diferencia mínima será siempre la misma (47) en el caso de seis números cualesquiera, dejando para las centenas los dos valores centrales. ¿Cómo

será el caso de un número más elevado de dígitos? ¿Y de un número de dígitos cualesquiera no necesariamente consecutivos?

Como en cualquier problema interesante, podríamos hacernos otras preguntas, por ejemplo: ¿para qué 6 cifras, la diferencia será menor? ¿Cuántas soluciones hay? ¿Cuál será esta diferencia?

Interpretaciones de la solución propuesta por la alumna de sexto.

Desde nuestro punto de vista, parece claro que la alumna, después de dar la solución correcta para el primer apartado, parte de esta solución para construir la del apartado b. Así, dado que en el caso de la diferencia máxima dio la solución correcta $987 - 456$, en el apartado b) trata de minimizar el primer número de tres cifras que ha construido y maximizar el segundo, dando como solución al segundo apartado: $789 - 654$. Sería interesante analizar si esta solución, bastante habitual, es menos frecuente cuando se aborda directamente la segunda cuestión. Veamos ahora algunas de las interpretaciones dadas por estudiantes de magisterio de primaria, que incluimos aquí como elementos para enriquecer el debate:

Caso A:

La primera operación [que hace el niño] es correcta, ya que si seguimos el orden y a 987 le restamos el número más pequeño que obtenemos con los dígitos que nos dan, sí obtenemos el número más elevado. En este caso el alumno ha utilizado el mismo procedimiento para obtener la resta con el valor más pequeño. Para obtener la resta más pequeña hace falta hacer comprobaciones. Por ejemplo:

$845-796=49$. En este caso no hemos seguido ninguna relación. Simplemente hemos elegido los números teniendo en cuenta que el 8 y el 7 van seguidos y que por tanto no son los que se llevan menos números.

$945-867=78$. En este caso también el resultado es más pequeño que el que proporcionaba el alumno y no se ha seguido ningún proceso. Únicamente se ha de tener en cuenta que para que la resta sea mínima se han de restar los números que son más próximos entre ellos en primer lugar, como el 9 y el 8, el 8 y el 7 etc.

Es necesario dejar muy claro que no restando el mayor número saldrá la mínima resta. También cabe destacar que no hace falta que sigan el orden que se establece y que comprueben con todas las posibilidades que hay.

Caso B

Primero, intento resolver el problema intentando tener la menor diferencia posible entre los números que en la resta corresponden a las centenas, a las decenas, y a las unidades. Sin repetir números, salen estas posibilidades:

$$975-864=111 \quad 895-764=111 \quad 697-581=111 \quad 689-576=111$$

$$589-476=111$$

$$597-486=111 \quad 957-846=111 \quad 795-684=111 \quad 759-648=111$$

$$579-468=111$$

Explicaría que al buscar la resta más grande sí tenemos que encontrar la mayor diferencia posible entre las centenas (en este caso el 9 y el 4) entre decenas (en este caso el 8 y el 5) y entre unidades (7 y 6).

A la hora de encontrar la resta más pequeña, no es suficiente con dar la vuelta a los números. Está bien pensado, pero hemos de hacer ver que sería más efectivo si buscásemos la mínima distancia numérica posible entre las centenas, las decenas y las unidades. Por tanto, convendrá que reste el 9 con el 8, el 7 con el 6 y el 5 con el 4, independientemente del orden. En el resto de posibilidades saldrán números más grandes o bien negativos. Este problema nos permite trabajar la resta y sus propiedades, pero además las combinaciones. Siempre que restemos al 9-8, 7-6, y 5-4, saldrá como resultado 111 y eso nos permite hacer seis combinaciones diferentes.

Caso C

Tendría que saber todas las posibles combinaciones que hay, teniendo en cuenta que no puedo repetir dígitos: [Escribe las 120 posibilidades de manera sistemática]

Si nos fijamos, cada uno de los números es más grande que el que tiene justo delante, de manera que si queremos hacer una resta que nos de como resultado un número lo más grande posible, tomaremos el número más grande de todos y le restaremos el más pequeño. Por tanto $987-456=531$. Esta resta es correcta.

Para que la resta entre dos de estos números sea lo más pequeña posible he de tomar dos números que se encuentren en el centro, es decir, ni de los más grandes ni de los más pequeños, y que estén uno al lado del otro. Por tanto:

¿Cuántos números hay en total? 120 números

¿Qué dos números estarán en la mitad?

a) Los que ocupen la posición 60 y 61: $745-698=47$

b) Los que ocupen la posición 59 y 60: $698-697=1$

Vemos que de las dos soluciones posibles en el b) se repiten los dígitos. Por eso la respuesta correcta es la a). Por tanto, el resultado que da la alumna no es correcto, ya que no entiende el concepto de “mediana”.

Caso D

El primer apartado lo ha hecho muy bien. Si queremos que la resta sea tan grande como sea posible, tenemos que construir el número más grande y el número más pequeño. De esta manera la diferencia será la más grande que se puede conseguir. Con todos los números del enunciado, el número más grande que se puede hacer es 987 y el más pequeño 456. La diferencia es 531. Correcto.

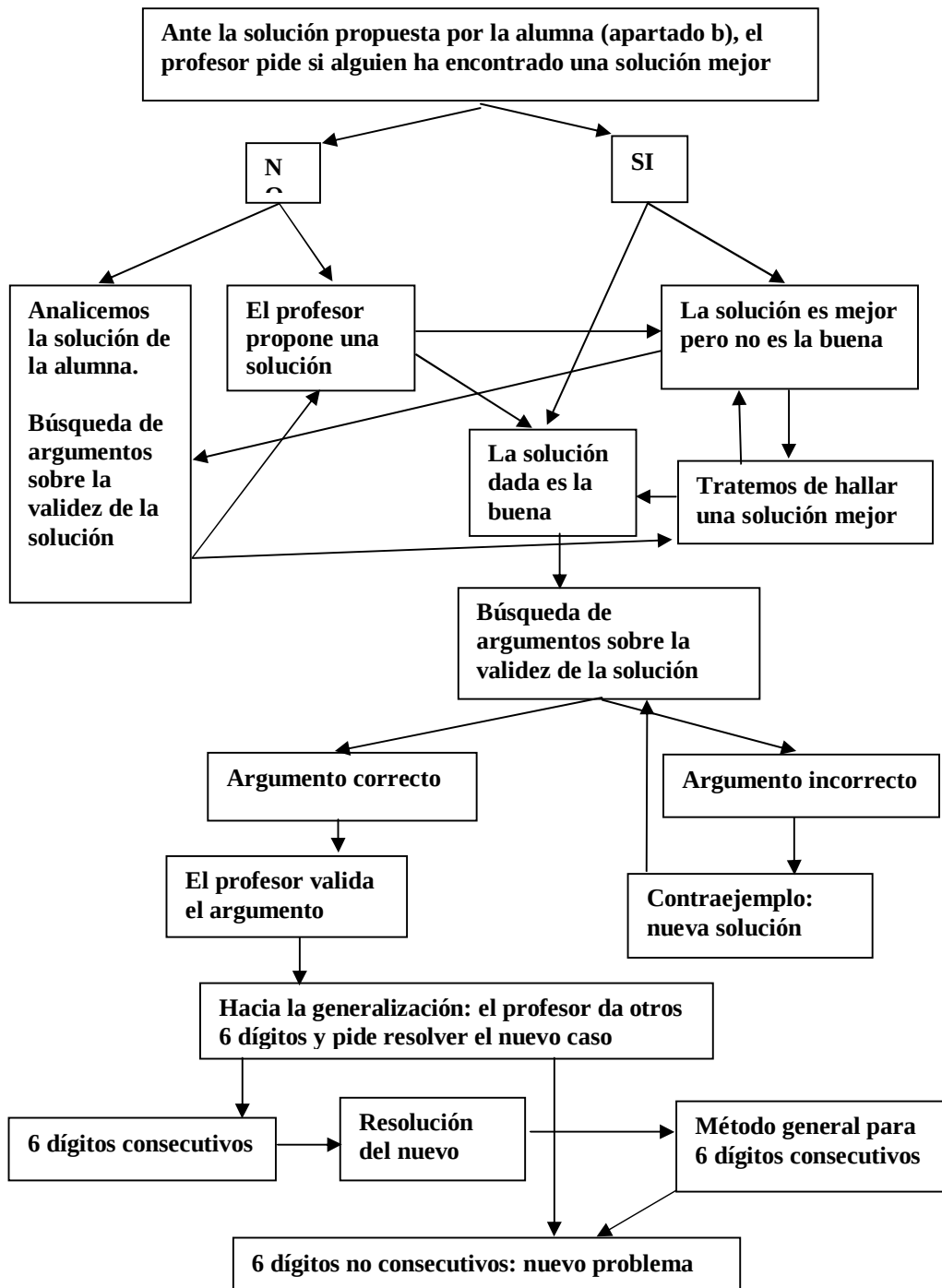
En cambio, en el segundo apartado se ha equivocado. Lo que ha hecho ha sido relacionar que si los números que había utilizado antes daban la diferencia más grande, entonces estos mismos números dados la vuelta darán la diferencia más pequeña, pero no es así.

De esta manera, sé que ha adquirido los conceptos de la resta, pero aún no sabe cómo aplicarlos en problemas. Continuaría la clase haciendo que mis alumnos se fijasen en la pregunta b). Les pediría que criticasen el resultado de su compañera. De esta manera, si un alumno diese la respuesta correcta el mismo la podría explicar a los compañeros, ya que a veces va mejor la explicación de un amigo que de una maestra. Pero el objetivo sería que entendiesen que no se pueden girar estos números, sino que si antes hemos tomado el número más grande y el más pequeño para saber la diferencia máxima (ya que son los números que más alejados están), para hacer la diferencia mínima tendríamos que coger los dos números que se encuentran más cerca. Por ejemplo, en este caso $987-897=90$ o $546-456=90$. Los dos números que estén más cerca darán la diferencia mínima y los más alejados, máxima.

Trayectorias hipotéticas de enseñanza

Sin duda hay distintas posibilidades para continuar la sesión a partir de la solución dada por la alumna al segundo apartado del problema. Suponemos que el maestro conoce la solución del problema y se da cuenta que esta no es la solución correcta y que hay varias que mejoran el resultado.

En el siguiente diagrama tratamos de sintetizar algunas posibles:



Consideraciones finales

Como se comentó en la introducción, se trata de un trabajo en su estadio inicial que continua con el análisis de otros episodios similares, con la finalidad de proponer un posible modelo de análisis de dichos episodios con una doble finalidad: por un lado profundizar en el fenómeno de la transición desde la perspectiva del profesorado, teniendo en cuenta, entre otros aspectos, su actuación en el aula frente a situaciones contingentes como la presentada, y por otro proporcionar actividades para la formación del profesorado tanto inicial como permanente.

Agradecimientos

Este trabajo se ha llevado a cabo en el marco del proyecto EDU2009-07928 del Plan Nacional de I+D+I financiado por el Ministerio de Ciencia e Innovación.

Referencias bibliográficas

Coad, J.; Jones, K. (1999). *Curriculum continuity in mathematics: a case study of the transition from primary to secondary school*. University of Southampton, Southampton: Center for Research in Mathematics Education.

Ferguson, P.D.; Fraser, B.J. (1999) Changes in learning environment during the transition from primary to secondary school. *Learning Environments Research* 1: 369–383.

Howard, P.; Perry, B.; Tracey, D. (1997) Mathematics and manipulatives: Comparing primary and secondary mathematics teachers' views. Publicado en <http://www.aare.edu.au/97pap/howap045.htm>

Kajander, A.; Lovric, M. (2005) Transition from secondary to tertiary mathematics: McMaster University experience. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 36 (2-3), 149-160.

Rice, J.K. (1997) Explaining the negative impact of the transition from middle to high school on student performance in mathematics and science: an examination of school discontinuity and student background variables. Paper presented at the annual meeting of the *American Education Research Association Annual Conference*, Chicago, IL.

GRUPO:

DIDÁCTICA DEL ANÁLISIS (DA)

Coordinador: **Ángel Contreras**, Universidad de Jaén

LÍNEAS DE COHERENCIA Y REDES SISTÉMICAS: UNA APROXIMACIÓN METODOLÓGICA PARA EL ANÁLISIS DE LA COMPRENSIÓN DE PROFESORES DE LOS MACRO OBJETOS $f'(a)$ y $f'(x)$.

Badillo, E. y Azcárate, C.

DESARROLLO DE UN ESQUEMA SOBRE LA RECTA TANGENTE EN UN ENTORNO TECNOLÓGICO.

Boigues, F.J.; Estruch, V. y Orts, A.

EL ANÁLISIS MATEMÁTICO A TRAVÉS DE LAS SITUACIONES REALES PRESENTES EN LOS LIBROS DE TEXTO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA.

Codes, M.; González, M.T.; Monterrubio, M.C. y Delgado, L.

ATLAS.TI COMO HERRAMIENTA DE ANÁLISIS DE LA PRÁCTICA DOCENTE: EL CASO DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL.

Vargas, J.; González, M.T. y Llinares, S.

LÍNEAS DE COHERENCIA Y REDES SISTÉMICAS: UNA APROXIMACIÓN METODOLÓGICA PARA EL ANÁLISIS DE LA COMPRENSIÓN DE PROFESORES DE LOS MACRO OBJETOS $f'(a)$ Y $f'(x)$.

Edelmira Badillo Jiménez, Carmen Azcárate Giménez
Universitat Autònoma de Barcelona

Resumen

Este trabajo se centra en la discusión de dos de las herramientas metodológicas que usamos para el análisis de la comprensión de los macro objetos $f'(a)$ y $f'(x)$ por parte de profesores de matemáticas en ejercicio, en el marco de la teoría APOE. Las redes sistémicas como instrumento de estructuración y organización de la información que nos proporcionaron los cuestionarios y la entrevista con viñetas, nos permitió organizar y mostrar las categorías que emergieron en las respuestas de los profesores. Por su parte, las líneas de coherencia, las consideramos un instrumento potente para visualizar elementos de los esquemas de los profesores en relación a los niveles de comprensión que exhiben del esquema de la derivada, si tenemos en cuenta que el esquema del concepto de derivada está conformado por la coordinación de varios objetos matemáticos.

Abstract

This paper focuses on the discussion of two of the methodological tools we use to analyze the understanding of macro objects $f'(a)$ and $f'(x)$ by practicing mathematics teachers in the context of the theory APOE. Systemic networks as a tool for structuring and organizing the information you provided the questionnaires and interview vignettes allowed us to organize and display the categories that emerged in the responses of teachers. For its part, the lines of consistency, we consider a powerful tool to visualize elements of the schemes of teachers in relation to levels of understanding of the derivative scheme exhibiting, if we consider that the scheme is derived concept formed by the coordination of various mathematical objects.

Badillo,E., Azcárate, C. (2011). Líneas de coherencia y redes sistémicas: una aproximación metodológica para el análisis de la comprensión de profesores de los macro objetos $f'(a)$ y $f'(x)$. En M.M. Moreno, N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los Grupos de Investigación de la SEIEM* (pp. 137-133). Lleida.

Marco conceptual y antecedentes.

Durante los últimos años el área de educación matemática se ha interesado por determinar cuál es el conocimiento didáctico-matemático del profesorado, requerido para enseñar matemáticas. Son muchas las respuestas que se han dado; entre otras: “conocimiento pedagógico” (Moore, 1974), “conocimiento pedagógico del contenido” (Shulman, 1986) y “conocimiento matemático para la enseñanza” (Ball, Lubienski y Mewborn, 2001; Hill et al., 2008).

Dado que la teoría APOE ha mostrado ser útil para describir la construcción por parte de estudiantes de varios conceptos matemáticos (Dubinsky, 1996; Asiala et al., 1996; Baker et al., 2000; Trigueros et al., 2010; Cooley et al., 2007; Sánchez-Matamoros et al., 2006; 2010), consideramos que también podía resultar útil en la comprensión de cómo se estructura el concepto de derivada por parte de profesores de matemática en ejercicio y por esta razón la hemos utilizado como principal referente teórico.

Nuestra propuesta para tratar de describir los niveles de comprensión que exhiben los profesores de matemáticas y caracterizar los conflictos semióticos asociados a dichos esquemas, se apoya en dos referentes teóricos, en primer lugar en la teoría APOE como modelo teórico de la construcción del conocimiento matemático (Dubinsky, 1996; Asiala et al., 1996; Gavilán et al., 2007) y en elementos de los enfoques semióticos para dar cuenta de la importancia de la integración de los significados asociados a los macro objetos $f\tilde{\alpha}(a)$ y $f\tilde{\alpha}(x)$ cuando los profesores se enfrentan a la resolución de situaciones problemas rutinarias y no rutinarias, enunciadas en diferentes contextos, que requieren el uso y la traducción de diferentes representaciones de los objetos matemáticos implicados (Duval, 2006; Badillo, 2003; Badillo et al., 2005).

La opción de centrarnos en la descripción de los niveles de comprensión del esquema de la derivada, pasa por postular explícitamente la siguiente hipótesis: el esquema del concepto de derivada está conformado por la coordinación de varios objetos matemáticos. Concretamente en este estudio nos centraremos en describir el esquema de la derivada como la conexión interna de dos objetos complejos o *macro* objetos, como son: el macro objeto derivada en un punto $f\tilde{\alpha}(a)$ y el macro objeto función derivada $f\tilde{\alpha}(x)$. Estos dos macro objetos, a su vez, son el resultado de la coordinación, consciente o inconsciente, de tres objetos: pendiente de la recta (O_1), límite de las tasas medias de variación (O_2) y razón de cambio (O_3).

La elección de considerar el esquema de la derivada conformado por los dos *macro* objetos $f\tilde{\alpha}(a)$ y $f\tilde{\alpha}(x)$, los cuales a su vez son el resultado de la conexión interna de tres objetos previos (O_1 , O_2 y O_3), la hicimos basándonos en la información que nos proporcionan tres fuentes. En primer lugar, el análisis teórico

inicial del concepto de derivada que nos lleva a la construcción de la descomposición genética del concepto de derivada, la cual toma en cuenta, entre otras cosas, la historia y la epistemología del mismo concepto. En segundo lugar, la información que arrojan las diferentes investigaciones en didáctica de la matemática que se han centrado en el estudio tanto del aprendizaje como la enseñanza del concepto de derivada, las cuales han revelado la complejidad y riqueza que tiene el concepto y las dificultades que tiene la comprensión del mismo cuando un sujeto se enfrenta a la resolución de problemas rutinarios y no rutinarios. Y, finalmente, el análisis preliminar de las respuestas que han dado los profesores que participan en este estudio a los dos instrumentos que diseñamos para analizar su comprensión sobre el concepto de derivada (cuestionario indirecto y viñetas), que han evidenciado diferentes grados de comprensión de los objetos definidos dependiendo del contexto en el que se enuncia el problema y las representaciones semióticas asociadas a dichos problemas.

La coordinación de los *macro* objetos $f'(a)$ y $f'(x)$ en la resolución de problemas rutinarios y no rutinarios enunciados en diferentes contextos, nos permite describir el nivel de comprensión del esquema de la derivada que tienen los sujetos. Para llegar a tener un esquema coherente del concepto de derivada se requiere coordinar dos esquemas previos, uno *algebraico* y otro *gráfico*, los cuales son el resultado de la coordinación de los *macro* objetos $f'(a)$ y $f'(x)$, que requieren a su vez de la coordinación interna de tres objetos: O_1 , O_2 y O_3 (Figura 1).

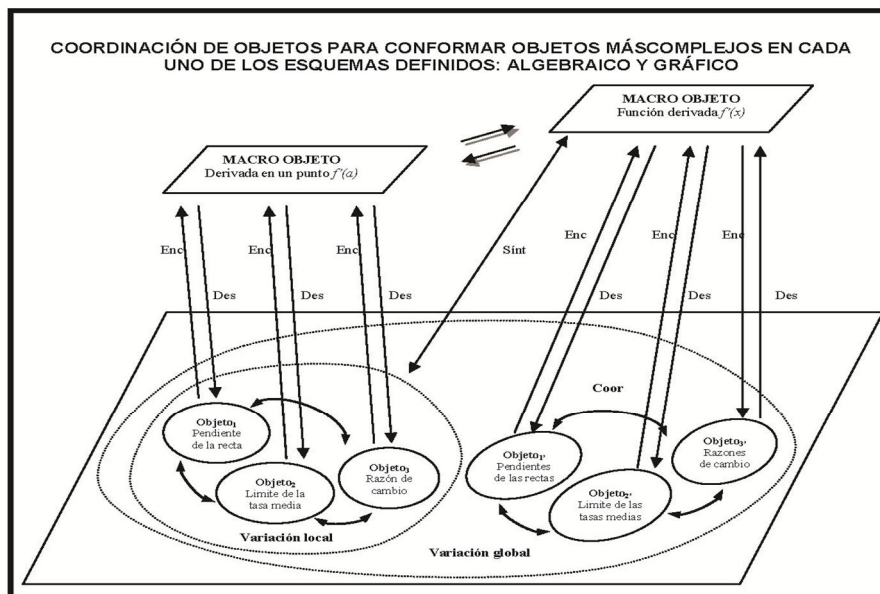


Figura 1. Coordinación de los macro objetos $f'(a)$ y $f'(x)$

En las tabla 1, y 2, presentamos las categorías de cada uno de estos dos esquemas. Para ello, se ha utilizado la descomposición genética que hemos construido para la relación de los *macro* objetos $f\hat{a}(a)$ y $f\hat{a}(x)$. Dicha descomposición genética no se detalla en este trabajo por cuestiones de espacio.

Metodología

Con este propósito diseñamos un instrumento, que hemos denominado *cuestionario indirecto* (ver anexo 1), en el cual se les pedía a los profesores que trataran de explicitar por escrito, lo más detalladamente posible, lo que consideraban que debería responder uno de sus estudiantes que hubiera comprendido el concepto de derivada, como resultado del proceso de estudio que ellos hubieran impartido. Para lo cual, previamente, tenían que resolver los problemas propuestos. Este formato nos permitió acceder indirectamente, de manera integrada y por separado a las formas de conocer el concepto de derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje.

Todos los profesores resolvieron por escrito los problemas propuestos. Para determinar si los datos obtenidos realmente reflejaban el nivel de comprensión del concepto de derivada que tenían los profesores, realizamos una triangulación de datos y les propusimos una entrevista semiestructurada sobre las respuestas del cuestionario. En ese ambiente de intercambio, aprovechamos para presentar un segundo cuestionario, de cinco problemas, en viñetas (ver anexo 2), con el que pudimos indagar directamente, aspectos conceptuales de los *macro* objetos $f(x)$, $f\hat{a}(a)$ y $f\hat{a}(x)$ que nos permitieran validar y contrastar los resultados obtenidos en el primer cuestionario (Badillo, 2003).

NIVEL INTRA	NIVEL INTER	NIVEL TRANS
- No existe una clara coordinación entre los objetos $f'(a)$ y $f'(x)$, lo cual se detecta en las aplicaciones concretas (cuando utilizan el objeto razón de cambio o bien el objeto pendiente de la recta tangente) - Se necesita tener o construir la expresión simbólica de la función para obtener el valor de la derivada en un punto: $ES f'(x) \Rightarrow ES f'(x) X$ - Se tiene una perspectiva proceso de la diferenciación de funciones, lo cual implica que para obtener la expresión simbólica de $f'(x)$ a partir de $f(x)$ se aplican correctamente las técnicas de derivación directa (definición formal del concepto en términos del límite) y de derivación indirecta (reglas de derivación), pero sin justificación alguna de las mismas, y luego para calcular $f'(a)$ se calcula $f'(x)$ en $x = a$ - No existe una coordinación de los objetos: razón de cambio, pendiente de la recta tangente y límite de las tasas medias de variación (O_1, O_2 y O_3) - Dado que los objetos O_1, O_2 y O_3 no están coordinados no han llegado a construir el objeto $f'(x)$ como síntesis de estos tres objetos, lo cual lleva a cometer errores, como por ejemplo: confundir la $f'(x)$ con la expresión simbólica de la recta tangente a la curva en un punto - El objeto razón de cambio sólo se sabe aplicar en situaciones de la cinemática para resolver la velocidad instantánea $\left[\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta e}{\Delta t} \right]$ - En determinados problemas en los que es necesario calcular el límite de las razones de cambio se aplica correctamente tanto las reglas de derivación como la definición de la función derivada en términos de límite. Esto lleva a considerar la posibilidad de que hay una coordinación entre estos dos objetos, pero cuando se les pregunta sobre ésta relación dan respuestas que muestran que no son conscientes de ella o que no la tienen elaboradas	- Dependiendo del contexto de la situación relacionan los objetos $f'(a)$ y $f'(x)$, como elemento y clase - La función derivada se entiende como la función que asocia, a cada valor x del dominio de la función, el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva en ese punto. La pendiente de la recta tangente que es entendida básicamente como el coeficiente de la x en la ecuación de la recta tangente (coeficiente angular) - Dependiendo del contexto de la situación puede darse una coordinación entre los objetos: pendiente de la recta tangente, razón de cambio y límite de las tasas medias de variación. Pero, en otros contextos esta relación no se da - El objeto razón de cambio ahora se puede aplicar a situaciones donde la magnitud que depende del tiempo no es sólo el espacio $\left[\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta e}{\Delta t}; \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta mag}{\Delta t} \right]$ - Se aplican correctamente las técnicas de derivación directa (definición formal del concepto en términos del límite) y de derivación indirecta (reglas de derivación), justificando el uso de las mismas, y aparecen algunas técnicas de aproximación (función <i>pendiente</i>), mostrando una perspectiva objeto de la diferenciación de funciones. - En algunos contextos para calcular el límite de las razones de cambio aplican correctamente tanto reglas de derivación como la definición de función derivada en términos de límite, mostrando una coordinación entre estos dos objetos, pero en determinados casos puede no darse esa coordinación	- El objeto $f'(x)$, según la situación se puede entender como una clase de objetos los cuales son la derivada de la función en cada punto del dominio, o bien como un objeto en el que se pueden realizar nuevas acciones, p. e.: la segunda derivada - La expresión simbólica de objetos $f'(x)$ es el modelo matemático que les permite asociar, a cada punto del dominio, el valor de la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en dicho punto; y obtener el límite de las razones de cambio y el límite de las tasas medias de variación - Independientemente del contexto de la situación se coordinan los tres objetos: pendiente de la recta tangente, límite de las razones de cambio y límite de las tasas medias de variación - El objeto razón de cambio se puede aplicar ahora a situaciones donde se puede considerar las variaciones de dos magnitudes cualesquiera, sin necesidad de limitarse a variaciones donde la variable independiente sea el tiempo $\left[\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta e}{\Delta t}; \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta mag}{\Delta t}; \lim_{\Delta mag \rightarrow 0} \frac{\Delta mag}{\Delta mag'} \right]$ - Se hacen traducciones entre diferentes representaciones de funciones - Se coordinan algunas representaciones de la función y la función derivada y se hacen algunas traducciones entre diferentes representaciones de la función derivada - Se manejan y coordinan justificadamente todas las técnicas directas e indirectas de derivación: utilizando límites, reglas de derivación, ecuaciones diferenciales, y aproximación gráfica y numérica

Tabla 1. Niveles de comprensión del *esquema algebraico* de la derivada

NIVEL INTRA	NIVEL INTER	NIVEL TRANS
- Se tiene una única interpretación de la representación gráfica de la recta tangente a la gráfica de una curva, como el límite de las rectas secantes - Se interpreta gráficamente $f'(x)$ como la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto, y la gráfica de $f'(x)$ se tiende a confundir con la gráfica de esta recta tangente a la gráfica de la función en un punto - Los objetos O_1, O_2 y O_3 son analizados aisladamente en términos de las condiciones analíticas. Más concretamente se puede utilizar la inclinación de la recta tangente para determinar el signo de la derivada de la función en algunos puntos concretos (intuitivamente se aplica el criterio de la primera derivada), pero no se generaliza esta técnica para hacer la representación gráfica de $f'(x)$ - Para obtener la gráfica de $f'(x)$ a partir de la gráfica de la función se requiere hacer las siguientes traducciones y relaciones: $G f(x) \rightarrow ES f(x) \Leftrightarrow ES f'(x) \rightarrow G f'(x)$ - Dado que no hay una coordinación entre los objetos O_1, O_2 y O_3, se tiene dificultad para resolver problemas que involucran el objeto razón de cambio a partir de la información que le proporciona la gráfica de la función. - La interpretación de la derivada como velocidad instantánea le permite saber en una gráfica los puntos en los que la velocidad es máxima, mínima o nula. Sin embargo, sólo lo puede hacer en un punto o varios puntos y no en infinitos puntos (sean intervalos o bien todo el dominio) - En situaciones que involucran razones de cambio se tiende a confundir la variación media con la variación instantánea	- Se tiene dos, o más, interpretaciones de la representación gráfica de la recta tangente a la gráfica de una curva: como el límite de las rectas secantes y como la recta más próxima a la gráfica de la función (curva) en el entorno del punto - Se coordinan el objeto de pendiente de la recta tangente a la gráfica en un punto con el objeto límite de las razones de cambio en un punto, estas últimas aplicadas ahora a la variación de magnitudes diferentes del espacio que dependen del tiempo. - Se maneja con propiedad el criterio de la primera derivada para describir la variación local y global de la función expresada gráficamente, y por tanto, pueden hacer la gráfica de $f'(x)$ a partir de la gráfica de $f(x)$ - Se comienza a distinguir los objetos $f'(a)$ de $f'(x)$, pero dependiendo del contexto de la situación aún se tiene dificultad para diferenciarlos - De manera incipiente y especialmente en los puntos de inflexión se utiliza gráficamente el criterio de la segunda derivada coordinadamente con el criterio de la primera derivada, pero no pueden justificar gráficamente que si $f''(x) > 0$ en un intervalo del dominio de la función, entonces la función es cóncava hacia arriba en dicho intervalo - Pueden obtener la gráfica de $f'(x)$ a partir de la gráfica de la función ($G f(x) \Leftrightarrow G f'(x)$), sin tener que hacer las siguientes traducciones y relaciones: $G f(x) \rightarrow ES f(x) \Leftrightarrow ES f'(x) \rightarrow G f'(x)$ - Se diferencia la variación media de la variación instantánea, en problemas representados en diferentes contextos	- Se coordina los objetos O_1, O_2 y O_3. Por tanto, se puede entender la pendiente de la recta tangente como: - La inclinación de la recta tangente - Límite de las pendientes de las rectas secantes; - Cuando la situación se relaciona con la variación de dos magnitudes cualesquiera, representadas gráficamente, pueden entender que la pendiente de la recta tangente es el límite de las razones de cambio - El objeto razón de cambio es aplicado ahora a la variación de dos magnitudes cualesquiera. - Se agrupa en una nueva función todas las derivadas en cada punto, como el valor de las pendientes de la recta tangente a la gráfica de la función en cada punto del dominio, como el límite de las tasas medias de variación y como el límite de las razones de cambio en cada punto del dominio - Se maneja con propiedad los criterios de la primera y la segunda derivada para describir la variación local y global de la función representada gráficamente. Lo cual le permite hacer las siguientes relaciones entre representaciones de la función y de la función derivada: $G f(x) \Leftrightarrow G f'(x)$; $G f'(x) \Leftrightarrow G f(x)$; $DV f'(x) \Leftrightarrow G f(x)$; $DV f(x) \Leftrightarrow G f'(x)$ - Se discrimina entre aquellas relaciones y propiedades que están incluidas y aquellas que no están incluidas en la coordinación de los tres objetos, demostrando una <i>coherencia</i> en el esquema

Tabla 2. Niveles de comprensión del *esquema gráfico* de la derivada

La selección de las tareas del cuestionario 1 y de las viñetas de la entrevista, se realizó en dos etapas. En la primera, se confeccionó una lista de tareas cuya resolución implicaba la coordinación de los macro objetos $f\tilde{a}(a)$ y $f\tilde{a}(x)$ en contextos algebraicos y gráficos. En la segunda, se reelaboró la muestra de manera que las tareas fuesen similares a las que el grupo de profesores proponían a sus alumnos. Una de las consecuencias de este proceso fue que algunas tareas que se han considerado relevantes en otras investigaciones, no se contemplaron en los instrumentos utilizados – por ejemplo, tareas de construcción de gráficas a partir de ciertas condiciones que cumple la función, algunas de las cuales son sobre discontinuidades (García, Llinares y Sánchez-Matamoros, 2010).

La metodología implementada para el análisis de esta componente del conocimiento profesional, fue la siguiente:

Primera fase:

Elaboración del constructo “niveles de comprensión de los esquemas gráfico y algebraico de la derivada” (Tabla 1 y 2), a partir de la descomposición genética elaborada por los autores, la cual tuvo en cuenta descomposiciones genéticas previas, aportes de la Historia y Epistemología de este concepto y los resultados de una investigación previa (Badillo, 2003).

Segunda fase:

Trascripción literal de la entrevista sobre la justificación del proceso de resolución de los problemas del cuestionario, incorporando la respuesta de cada una de las preguntas del mismo.

Trascripción literal de la entrevista con viñetas.

Primera síntesis de la información: elaboración de unas tablas resumen donde se destacaban los aspectos más significativos en las respuestas de los profesores del concepto de derivada como objeto matemático.

Construcción de las redes sistémicas (Bliss, Monk y Ogborn, 1983), de las respuestas de los profesores a cada uno de los problemas del cuestionario y de las viñetas, a partir de las categorías de los niveles de comprensión del esquema algebraico y gráfico definidos en las tablas 1 y 2.

Triangulación de la información para construir las líneas de coherencia del proceso de resolución (Garbin, 2005; Garbin y Azcárate, 2002). En total construimos tres líneas de coherencias, clasificando los problemas de la siguiente manera:

Línea de coherencia 1: relación entre los objetos pendiente de la recta tangente y razón de cambio en la construcción del *macro* objeto $f\hat{a}(a)$. Se tuvieron en cuenta las respuestas de cada profesor a los problemas: 3 y 4 del cuestionario, y la parte de la entrevista en la que el profesor comentaba estos dos problemas y el problema V de las viñetas.

Línea de coherencia 2: la relación gráfica entre los *macro* objetos $f\hat{a}(a)$ y $f\hat{a}(x)$. Se tuvieron en cuenta las respuestas de cada profesor a los problemas: 1 y 2 del cuestionario, y la parte de la entrevista en la que el profesor comentaba estos dos problemas y el problema IV de las viñetas.

Línea de coherencia 3: la relación algebraica entre los *macro* objetos $f\hat{a}(a)$ y $f\hat{a}(x)$. Se tuvieron en cuenta las respuestas de cada profesor a los problemas: 5 del cuestionario, y la parte de la entrevista en la que el profesor comentaba este problema y los problemas I, II y III de las viñetas.

Determinación del nivel de comprensión de cada uno de los profesores participantes (Tabla 3).

Construcción de las Redes sistémicas

Para cada uno de los problemas de los instrumentos propuestos se realizó una red sistémica que incluye tanto las respuestas por escrito de los profesores al cuestionario como la entrevista posterior con viñetas. A manera de ejemplo ilustraremos el análisis del problema 1 del cuestionario.

Análisis descriptivo del problema 1-C

La red del problema 1-C incluye las respuestas de los tres apartados que lo conforman (Figura 2). Los *aspectos* que definimos para organizar las respuestas de los profesores son:

Los profesores que responden utilizando procedimientos algebraicos a partir de la información que le proporciona el enunciado gráfico, o bien buscando información externa.

Los profesores que responden utilizando procedimientos gráficos sólo a partir de la información que le proporciona el enunciado gráfico.

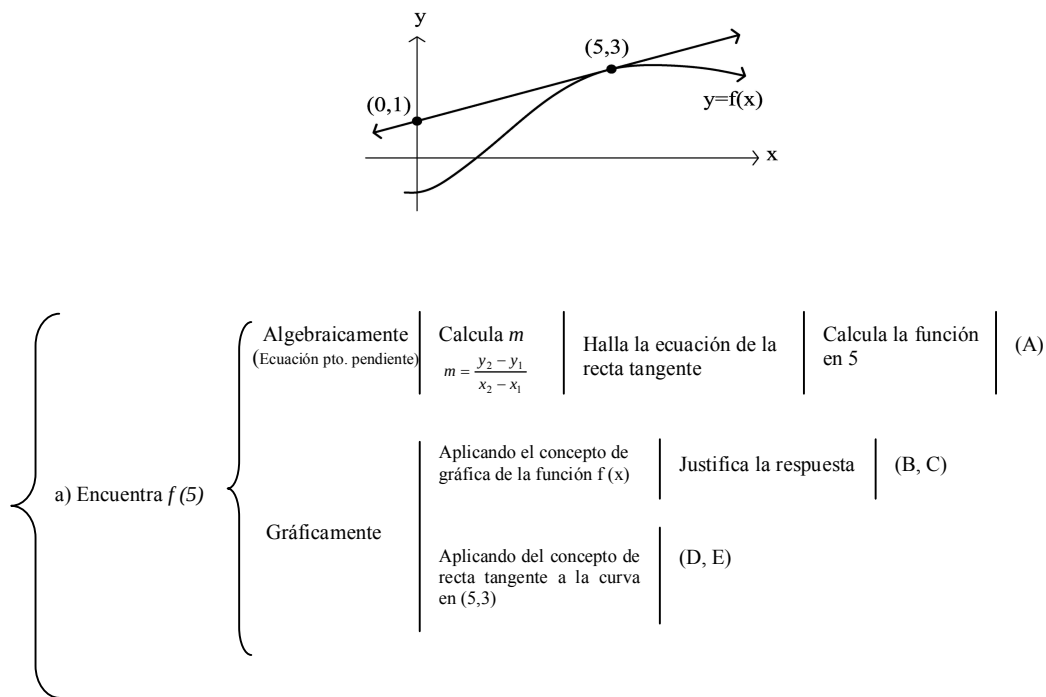
La mayoría de los profesores respondieron a la situación usando sólo la información que le proporcionaba la gráfica del enunciado; sólo el profesor A exhibe, durante todo el proceso de resolución del problema, una perspectiva *proceso* de los *macro* objetos $f(x)$, $f\hat{a}(a)$ y de $f\hat{a}(x)$, donde para calcular el valor de $f\hat{a}(a)$ a partir de la información que le proporciona la gráfica requiere inicialmente encontrar la expresión simbólica que representa la función, o en su defecto la

expresión simbólica de la recta tangente; posteriormente, aplica las técnicas indirecta de las reglas de derivación para calcular $f'(x)$ a partir de la expresión simbólica de $f(x)$; y finalmente, calcula el valor de $f'(a)$ sustituyendo el valor de $x = a$ en la expresión simbólica de $f'(x)$. Es decir, que requiere de elementos externos y la manipulación de procesos algebraicos que incluyen traducciones y relaciones entre los macro objetos $f(x)$ y $f'(x)$: $G f(x) \rightarrow ES f(x) \Leftrightarrow ES f'(x) \rightarrow$.

En términos generales, los profesores respondieron correctamente a la situación y no detectamos ninguna inconsistencia en el manejo de los conceptos que intervienen en el proceso de resolución. A continuación destacaremos algunas de las argumentaciones que dieron para los conceptos en los que se apoya su respuesta:

Para encontrar el valor de $f(5)$ a partir de la información que proporciona la gráfica del enunciado, dos profesores aplican el concepto de gráfica de la función (B y C); dos profesores aplican el concepto de recta tangente a la curva (D y E); y un profesor requiere encontrar la expresión simbólica de la función para luego sustituir el valor de $x = 5$ (profesor A).

Figura 2. Red sistémica del problema 1-C



b) Encuentra $f'(5)$	Algebraicamente (Reglas de derivación)	Usa información de a) (Ecuación de la recta)	Calcula la función derivada: $\frac{dy}{dx} = f'(x)$	Calcula la derivada en un punto $f'(5)$	(A)
	Gráficamente	Calcula la m de la recta tangente con los dos puntos de la gráfica de la recta	Cociente incremental: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = m$	Comprueba, además, hallando la ecuación de la recta con cada	(E)
			Tasa media de variación: $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = m$	No comprueba	(B, C)
c) Calcula $f(5,08)$	Algebraicamente (Por aproximación)	Usa información de a) (Ecuación de la recta)	Calcula la función en 5,08		(A)
		Usa información de a) y b) (concepto de derivada en un punto)	Calcula por: $f'(5) \approx \frac{f(5 + \Delta x) - f(5)}{\Delta x}$		(D, E)
	Gráficamente	Topológicamente (vecindad del punto (5,3))	Explicita el resultado ($\approx 3,02$)		(B)
			No explicita el resultado ($\approx f(5)$)		(C)

Para encontrar el valor de $f'(5)$, cuatro de los profesores calculan el valor de la pendiente de la recta tangente a partir de la información gráfica, sin embargo encontramos que tres aplican el cociente incremental (B, C y E) y uno aplica la tasa media de variación (profesor D). Por su parte, el profesor A, sigue exhibiendo una perspectiva proceso de los macro objetos $f(x)$, $f'(a)$ y $f'(x)$, donde para calcular el valor de $f'(5)$, deriva la expresión simbólica de la recta tangente encontrada en el ítem a) y sustituye el valor de $x = 5$ en la expresión simbólica de la función derivada encontrada.

Dos de los profesores aplican técnicas de aproximación numérica en las que relacionan los macro objetos $f(x)$ y $f\tilde{a}(a)$ para calcular el valor aproximado de la función en el punto de abscisa $x=5,008$ (D y E); mientras que dos de los profesores lo resuelven gráficamente utilizando argumentos topológicos (vecindad del punto (5,3)) a partir de la información de la gráfica; y sólo el profesor A, coherente con la perspectiva proceso de los macro objetos $f(x)$, $f\tilde{a}(a)$ y $f\tilde{a}(x)$ que viene exhibiendo en la resolución de los ítems $a)$ y $b)$, para encontrar el valor de la función en el punto de abscisa $x=5,008$, sustituye el valor de x en la ecuación de la recta tangente encontrada en el ítem $a)$.

Construcción de la línea de coherencia 2: Comprensión gráfica de $f\tilde{a}(a)$ y $f\tilde{a}(x)$.

Las líneas de coherencias son un instrumento de análisis que se elaboran con los datos que proporcionan las redes sistémicas de los problemas que hemos construido para cada una de las categorías definidas (Garbin y Azcárate, 2002). Para elaborarla se tienen en cuenta los conceptos involucrados, la respuesta de los profesores a las situaciones seleccionadas para cada categoría organizadas en las redes sistémicas, y el contexto de las mismas, expresado en los tratamientos y conversiones semióticas implícitas en los procesos de resolución. El análisis y la visualización de la coherencia de las respuestas de los profesores a las situaciones planteadas, atendiendo a los esquemas algebraico y gráfico de la derivada, nos facilitaron la definición de los niveles de comprensión de cada profesor para cada uno de los esquemas en términos de la triada del desarrollo *intra*, *inter* y *trans*. A continuación, a modo de ejemplo presentamos la línea de coherencia (Figuras 3), elaboradas a partir de las respuestas del profesor B a los problemas de la subcategoría comprensión gráfica del objeto $f\tilde{a}(x)$.

La línea de coherencia de la figura 3, nos permite visualizar que el profesor B muestra coherencia en el proceso de resolución de los problemas 1-C, 2-C y IV-v, los cuales se encuentran enunciados en un registro gráfico-verbal. El profesor aborda su solución usando la información que le proporciona el gráfico y en algunos casos la complementa con procesos algebraicos justificados. Las respuestas del profesor B frente a estas situaciones muestran que además hay una consistencia en el manejo de los conceptos implícitos en la resolución de los mismos.

El profesor B en todas las situaciones donde interviene el concepto de función, trabaja con una notación funcional sin referencia a la expresión simbólica de la función, hace traducciones entre diferentes representaciones de la función y de la función derivada, y relaciona la información que le proporcionan gráficamente la función y la función derivada en el análisis monótono. Esto nos permite inferir que tiene una perspectiva objeto del concepto de función.

Problema 1-C	
Respu esta Ítem	Gráficamente
a)	Usando el concepto de función
	B
b)	Gráficamente
	Calcula la m de la recta tangente
	Por el conciente incremental: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = m$
	B
c)	Gráficamente
	Topológicamente
	Explicita el resultado
	B



Problema 2-C
Una es derivada de la otra
Gráficamente
Criterio de 1ª y 2ª derivada
B



Problema IV-v	
Algebraicamente	Gráficamente
Traducción de $G f(x) \rightarrow ES f(x)$ [La gráfica de la función corresponde a $y = x^3$]	Argumentando con criterios de la 1ª derivada
Relación de $ES f(x) \Leftrightarrow ES f'(x)$ [Si $y = x^3 \Rightarrow y' = 3x^2$]	
Traducción de $ES f'(x) \rightarrow ES f''(x)$ [Si $y' = 3x^2$ entonces la gráfica es una parábola]	
B	B

Figura 3. Línea de coherencia del proceso de resolución del profesor B de los problemas 1-C, 2-C y IV-v

Igualmente, consideramos que el profesor B exhibe una perspectiva objeto del concepto $f'(a)$ y del concepto $f'(x)$, puesto que establece, en primer lugar, la coordinación entre los objetos derivada de la función en un punto y el objeto pendiente de la recta tangente de la gráfica de la función en ese punto; y en segundo lugar, sintetiza todas las derivadas en un punto en una nueva función que asocia a cada punto del dominio de la función el valor de la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en dicho punto.

Las respuestas a los problemas 1-C, 2-C y IV-v, reflejan que el profesor B puede pensar y tratar con los macro objetos $f'(a)$ y $f'(x)$ utilizando sólo la información que le proporciona la gráfica de la función y, según sea el caso, la información gráfica de la función derivada. Más concretamente, en la respuesta que da al ítem b) del problema 1-C, se aprecia la relación entre los objetos derivada en un punto y pendiente de la recta tangente, puesto que entiende que para cada punto a en el dominio de la función f , el valor de $f'(a)$ es la pendiente de la recta tangente a la gráfica en el punto $(a, f(a))$. Por otra parte, para calcular el valor de la pendiente de la recta tangente usa el cociente incremental de la función, es decir desencapsula el objeto tasa media de variación. Por tanto, encontramos que el profesor B coordina y desencapsula los objetos pendiente de la recta tangente a la gráfica función y la tasa media de variación para encontrar el valor de la derivada en un punto.

Otro aspecto que podemos inferir de la justificación a la respuesta anterior, complementándola con la respuesta que da al ítem c) del problema 1-C, es que el profesor B, maneja varias interpretaciones de la recta tangente. Por un lado, es la recta más próxima a la gráfica de la función (curva) en el entorno del punto, y por otro se deja entrever la interpretación de la recta tangente como límites laterales (referencia al límite del cociente incremental).

Igualmente, el profesor B relaciona y coordina los macro objetos derivada en un punto y función derivada en la resolución de problemas enunciados gráficamente; aplicando justificadamente los criterios de la primera y segunda derivada para describir la variación local y global de la función representada gráficamente. Esto le permite manejar una variedad, tanto de traducciones entre representaciones de los conceptos de función y función derivada, como de relaciones entre representaciones de los conceptos de función y de la función derivada. Por ejemplo, en el problema 2-C hace correctamente tanto las traducciones entre representaciones del concepto de función ($G f(x) \rightarrow DV f(x)$) y de la función derivada ($G f'(x) \rightarrow DV f'(x)$), como las relaciones entre $f(x)$ y $f'(x)$ del tipo: $G f(x) \Rightarrow G f'(x)$ y $G f'(x) \Rightarrow G f(x)$, llegando a la solución correcta del mismo.

El profesor B considera este segundo problema, al igual que el 1-C, como una situación no rutinaria, teniendo en cuenta la actividad que realiza en el aula. Cree

que es un problema complejo, que difícilmente sus estudiantes podrán resolver correctamente, puesto que requiere del dominio y comprensión gráfica de los conceptos de función, derivada en un punto y función derivada. Este dominio implica la aplicación de los criterios de la primera derivada y segunda derivada en el análisis local y global, es decir, la síntesis del análisis de la variación de la función punto a punto en el análisis de la variación de la función en un intervalo, o en todo el dominio de la función.

Finalmente, el problema IV-v, al igual que el 2-C nos permite ubicar la comprensión de la función derivada que tiene el profesor B, en términos de la perspectiva objeto. En su respuesta inicial a esta situación, da una argumentación basada en aspectos algebraicos de la relación entre la función y la función derivada. En primer lugar, hace una traducción entre representaciones de la función, coordinando la gráfica de la función con la expresión simbólica que representa ($G f(x) \rightarrow ES f(x)$). Es decir, que asocia un modelo matemático al prototipo gráfico de la función dada. Una vez asignado el modelo matemático de la función inicial, relaciona la expresión simbólica de la función con la expresión simbólica de la función derivada, a partir de la aplicación de la técnica indirecta de las reglas de derivación ($ES f(x) \Rightarrow ES f'(x)$), y, finalmente, realiza una traducción entre representaciones de la función derivada que le permite encontrar la gráfica de la función derivada que se le pide ($ES f'(x) \rightarrow G f'(x)$). Si bien es cierto que este proceso inicial de resolución nos permite ver la función derivada que maneja el profesor B desde una perspectiva proceso, en la que requiere de la expresión simbólica de la función para encontrar la gráfica de la función derivada, inmediatamente después inicia un segundo proceso de resolución gráfico coordinadamente con el primero, en el que aplica y justifica correctamente los criterios de la primera y de la segunda derivada.

La coordinación que hace el profesor B de los dos procesos de razonamiento para llegar a una respuesta correcta del problema planteado nos lleva a concluir que el profesor B tiene una perspectiva objeto de la derivada en un punto. Por otra parte, el proceso de síntesis del análisis local en un análisis global de la función nos lleva a concluir que también tiene una perspectiva objeto de la función derivada. Por tanto, en general podemos concluir, a partir de las respuestas a los problemas planteados, que el profesor B tiene un nivel *trans* del esquema gráfico del concepto de derivada.

Definición de los niveles de comprensión del esquema de la derivada.

El análisis particular de los cinco casos nos permite ver una pluralidad en los niveles de comprensión que tienen los profesores que participaron en este estudio sobre el concepto de derivada, tal y como se ilustra en la tabla 3.

Nivel del esquema algebraico Nivel del esquema gráfico	<i>INTRA</i>	<i>INTER</i>	<i>TRANS</i>
	<i>INTRA</i>	<i>INTER</i>	<i>TRANS</i>
<i>INTRA</i>	A, E	C	?
<i>INTER</i>			D
<i>TRANS</i>		?	B

Tabla 3. Análisis general de los niveles de comprensión del concepto de derivada que exhiben los profesores.

A manera de conclusión

Este estudio aporta una caracterización *a priori* de los niveles de comprensión del esquema de la derivada, conseguida por la ampliación de la Teoría APOE con aportaciones de enfoques semióticos. Esto nos ha permitido describir el esquema de la derivada como resultado de la coordinación dos esquemas previos, uno *algebraico* y otro *gráfico*, los cuales son el resultado de la coordinación de los macro objetos $f\hat{a}(a)$ y $f\hat{a}(x)$, cada uno de los cuales requiere a su vez cada uno de la coordinación interna de tres objetos (ver Figura 1). Los niveles de la comprensión de los esquemas gráfico y algebraico de la derivada (Tablas 1 y 2), se han construido como resultado, sobre todo, de la descomposición genética del concepto de derivada, que ha sido complementada por el análisis semiótico y por el análisis de las respuestas de los profesores que participan en este estudio.

Los datos empíricos analizados nos ha permitido concluir que: (1) en el conjunto de profesores elegidos, sólo hemos encontrado algunos de los niveles definidos; (2) la riqueza de los resultados nos lleva a validar algunas de las categorías teóricas de los niveles de la doble triada, tales como, *intra-intra* (profesores A y E), *inter-intra* (profesor C), *trans-inter* (profesor D), y *trans-trans* (profesor B); (3) ha quedado cuestionada la viabilidad de otras categorías; entre éstas tenemos el nivel *intra algebraico-trans gráfico* (*intra-trans*) y los niveles *trans algebraico-intra gráfico* (*trans-intra*) e *inter algebraico-trans gráfico* (*inter-trans*). En efecto, llegados a la conclusión de que el nivel de comprensión *intra algebraico-trans gráfico* es imposible que se dé en la realidad. Es decir, no es cognitivamente viable, puesto que la interpretación gráfica de los macro objetos $f\hat{a}(a)$ y $f\hat{a}(x)$ requiere de una complejidad en el manejo del aparato formal de estos

objetos que no se tiene construida en el nivel *intra* algebraico. Mientras que consideramos que el nivel *trans* algebraico-*intra* gráfico es cognitivamente más factible de encontrar, porque está influenciado por la enseñanza tradicional de los conceptos matemáticos, en donde prima la algebrización de los conceptos matemáticos en detrimento de la interpretación gráfica de los mismos. En lo que respecta a los niveles *inter* algebraico-*inter* gráfico (*inter-inter*) e *inter* algebraico-*trans* gráfico (*inter-trans*), podrían ser encontrados, pero en nuestra investigación no surgieron.

En la respuesta de alguno de los profesores, hemos podido constatar de los niveles *intra-intra*, la confusión o la no diferenciación entre los macro objetos $f\hat{\alpha}(a)$ y $f\hat{\alpha}(x)$. Dicha confusión también se observa en mucho de los libros de textos de matemática que usan los profesores que participaron en este estudio (Badillo et al., 2005). Algunos indicadores de esta confusión son: (1) la dificultad en la comprensión gráfica de los macro objetos $f(x)$, $f\hat{\alpha}(a)$ y $f\hat{\alpha}(x)$ de algunos profesores (A, E y C); (2) algunos profesores reproducen inconsistencias con relación a estos macro objetos que han sido reseñadas por investigaciones centradas en el aprendizaje de los mismos, tales como: (a) la confusión de los macro objetos $f\hat{\alpha}(a)$ y $f\hat{\alpha}(x)$ $\bar{I}$ A, E $\bar{I}$; (b) la reducción de la expresión simbólica del macro objeto $f\hat{\alpha}(x)$ a la ecuación de la recta tangente y la gráfica del macro objeto $f\hat{\alpha}(x)$ a la gráfica de la recta tangente (A, E y C); y, (c) la no justificación del uso de las técnicas de derivación directas e indirectas (definición en término del límite y las reglas de derivación) $\bar{I}$ A, E, C y D $\bar{I}$.

Una primera explicación a este fenómeno, no las proporcionar las aproximaciones semióticas que hemos incorporados: la compleja trama de funciones semióticas que deben activarse para comprender los macro objetos $f\hat{\alpha}(a)$ y $f\hat{\alpha}(x)$, es un factor importante para justificar las dificultades en la comprensión de algunos profesores (Font, 2005; Font y Contreras, 2008). En el caso estudiado en el que los profesores explican, simultáneamente, conceptos de Física y Matemática, la complejidad de dicha trama aumenta por la opción prioritaria que hacen los profesores del uso de la notación incremental en las definiciones de $f\hat{\alpha}(a)$ y $f\hat{\alpha}(x)$.

Las categorías teóricas y analíticas adaptadas de la Teoría APOE y los niveles de desarrollo del esquema, nos permiten explicar por qué algunos profesores pueden convivir con la complejidad semiótica asociada a los macro objetos $f\hat{\alpha}(a)$ y $f\hat{\alpha}(x)$ y otros tienen dificultad para hacerlo. El nivel de desarrollo y la coordinación de los esquemas *algebraico* y *gráfico* son las causas que pueden explicar la emergencia de este fenómeno.

Un aporte metodológico es el uso de las redes sistémicas para el estudio del conocimiento profesional del profesor. Estas redes nos permitieron la organización de la información y la definición de las categorías que utilizamos para el análisis de la comprensión que los profesores tienen de los macro objetos $f(x)$, $f\hat{\alpha}(a)$ y $f\hat{\alpha}(x)$.

En este mismo sentido, el diseño de las líneas de coherencia nos ayudaron a la definición y análisis de las categorías que precisamos para la comprensión de los macro objetos $f\hat{\alpha}(a)$ y $f\hat{\alpha}(x)$. Consideramos que estos instrumentos constituyen un aporte relevante de esta investigación para el análisis del conocimiento disciplinar de los profesores de matemática centrados en los procesos de resolución de problemas relacionados con un concepto matemático concreto. Las *líneas de coherencia* son un instrumento con un gran potencial visual que nos ayudó a detectar la coherencia entre los procesos de resolución gráfico o algebraico que utilizaban los profesores al resolver problemas que involucran los macro objetos $f(x)$, $f'(a)$ y $f'(x)$, enunciados en diferentes contextos.

Referencias bibliográficas

Artículos en revistas

- Asiala, M., Brown, A., DeVries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D. y Thomas, K. (1996). A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. *Research in Collegiate Mathematics Education*. 2, pp. 1-32.
- Badillo, E. Font, V. y Azcárate, C. (2005). Conflictos semióticos relacionados con el uso de la notación incremental y diferencial en libros de física y de matemáticas del bachillerato. *Enseñanza de las Ciencias*, Número Extra, pp. 1-6.
- Baker, B., Cooley, L., y Trigueros, M. (2000). A Calculus Graphing Schema. *Journal for Research in Mathematics Education*. Vol. 31, pp. 1-23.
- Clark, J., Cordero, F., Cottrill, J., Czarnocha, B., DeVries, D., St. John, D., Tolias, G. y Vidaković, D. (1997). Constructing a schema: The case of the chain rule? *Journal of Mathematical Behavior*. 16, pp. 345-364.
- Cooley, L. Trigueros, M. y Baker, B. (2007). Schema thematization: a framework and an example. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38 (4), pp. 370-392.
- Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación Matemática*. Vol. 8 (3), pp. 24-41.
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1), 103-131.
- Font, V. y Contreras, A. (2008). The problem of the particular and its relation to the general in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 69, 33-52.

- Garbin S. (2005). Ideas del infinito, percepciones y conexiones en distintos contextos: el caso de estudiantes con conocimientos previos de cálculo diferencial e integral. *Enseñanza de las Ciencias*, 23, (1), pp. 61-80.
- Garbin S. y Azcárate, C. (2002). Infinito actual e inconsistencias: acerca de las incoherencias en los esquemas conceptuales de alumnos de 16-17 años. *Enseñanza de las Ciencias*, 20, (1), pp. 87-113.
- García. M.; Llinares, S. & Sánchez-matamoros, G. (2010). Characterizing thematized derivative schema by the underlying emergent structures. *International Journal of Science and Mathematics Education*, DOI:10.1007/s10763 - 010-9227-2.368.
- Gavilán, J. M., García, M. M. y Llinares, S. (2007). Una perspectiva para el análisis de la práctica del profesor de matemáticas. Implicaciones metodológicas. *Enseñanza de las Ciencias*, 25, (2), pp. 157-170.
- Hill, H. C., Blunk, M., Charalambous, C., Lewis, J., Phelps, G., Sleep, L., & Ball, D. L. (2008). Mathematical knowledge for teaching and the mathematical quality of instruction: An exploratory study. *Cognition and Instruction*, 26(4), 430-511.
- Sánchez-Matamoro, G., García, M. M. y Llinares, S. (2006). El desarrollo del esquema de la derivada. *Enseñanza de las Ciencias*, 18, (3), pp. 355-368.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15, (2), pp. 4-14.
- Trigueros M. y Martínez-Planell, R. (2010). Geometrical representations in the learning of two-variable functions. *Educational Studies in Mathematics*, 73 (1), pp. 3-19.

Libros

- Azcárate, C. (1990). *La velocidad: introducción al concepto de derivada*. Tesis doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona.
- Badillo, E. (2003). *La Derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matemática de Colombia*. Tesis doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona.
- Ball, D., Lubienski, S. T. y Mewborn, D. S. (2001): „Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers’ mathematical knowledge”, en V. Richardsin (ed.): *Handbook of Research on Teaching*, Washington, D.C., EEUU. American Educational Research Association, pp.433-456.

Moore, T.W. (1974): *Introducción a la Teoría de la Educación*. Madrid. Alianza Editorial.

Piaget, J. y García, R. (1982). *Psicogénesis e historia de las ciencias*. México D.F.: Editorial Siglo XXI (4ª edición).

Artículos en Actas o Proceedings:

Font, V. (2005), Una aproximación ontosemiótica a la didáctica de la derivada en A. Maz, B. Gómez y M. Torralbo (eds): *Investigación en Educación Matemática. Noveno Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* pp. 109-128. Córdoba: Universidad de Córdoba.

ANEXO 1. EVALUACIÓN DEL CONCEPTO DERIVADA

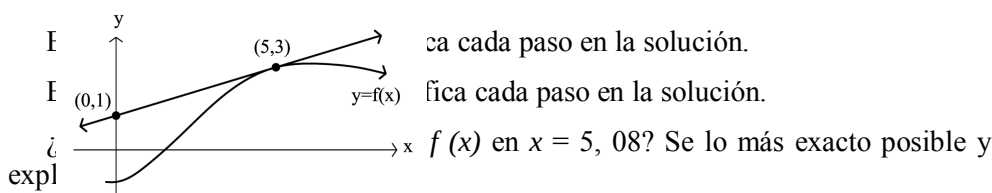
“Esta es la evaluación realizada por un profesor de matemática de secundaria para examinar el grado de comprensión del concepto de *derivada* por parte de sus estudiantes, después de haber terminado la unidad didáctica relacionada con este concepto. Tu colaboración consiste en tratar de explicitar por escrito, lo más detalladamente posible, lo que consideras que debe responder uno de tus estudiantes después de haber estudiado el concepto de derivada, para afirmar que éste comprende y maneja el concepto de derivada”.

NOMBRE:

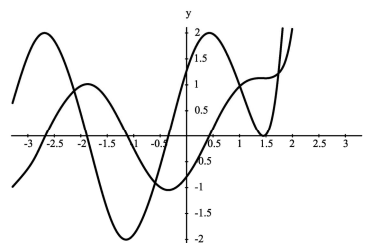
CURSO: _____

FECHA:

1. La recta L es tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto (5,3)

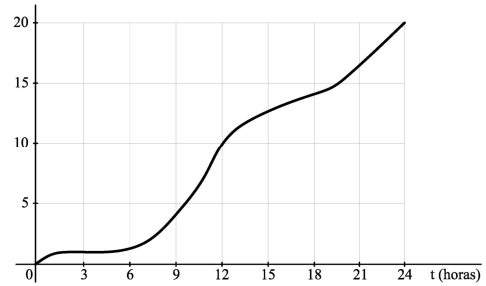


2. Compara las gráficas de las dos funciones de detalladamente si una de ellas es la función derivada respuesta.



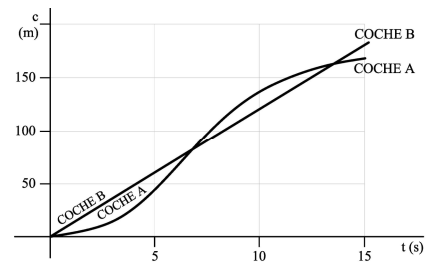
3. El Hotel Alps tiene 156 habitaciones. Su consumo de agua caliente es bastante elevado. La función $Q: t \rightarrow Q(t)$, cuya gráfica aparece junto a ese enunciado, nos da el total de agua caliente consumida desde medianoche (0 horas), hasta las t horas.

- a. ¿Cuál fue el consumo total de agua a lo largo de...
- b. ¿Cómo es el consumo de agua caliente entre las...
- c. ¿Qué es mayor, la cantidad de agua caliente que...
- d. ¿Cuándo crees que se estaba consumiendo...
- e. ¿Cuánta agua se está consumiendo a las 7:00...



4. El siguiente gráfico representa el movimiento de dos coches durante 15 segundos. Haz una descripción comparada de su movimiento.

- a. ¿Qué crees que ocurre en el punto *P* de la gráfica?
- b. ¿Cómo son las velocidades de los dos coches en respuesta.
- c. ¿Crees que en algún momento los coches A y B tienen la misma velocidad? ¿Por qué?
- d. ¿Cuándo crees que el coche A tiene mayor velocidad? Justifica tu respuesta.



5. Halla la pendiente y la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función:

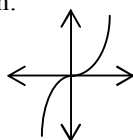
$$f(x) = 3x^2 - 2x \text{ en el punto de abscisa } 2.$$

Anexo 2. Viñetas para la entrevista

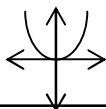
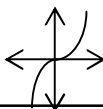
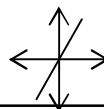
I	II	III
¿Qué es una derivada? Definelo o explícalo como desees	¿Qué significa que la derivada de la función $y = x^2$ sea la función $y = 2x$? Explica y justifica la solución.	Usando sólo una calculadora, puedes conseguir un método para calcular el valor aproximado de la derivada de $f(x) = 4^x$, en $x = 2$. Explica y justifica la solución.

IV

Si tienes el gráfico de la siguiente función:



Escoge la función derivada que le corresponde entre los gráficos de las funciones representadas a continuación:

I. ☐II. ☐III. ☐

Justifica la respuesta escogida y por qué la no-elección de las otras dos opciones.

V

Observa las siguientes gráficas:

Gráfica I: Indica el punto de la gráfica donde la pendiente de la recta tangente es máxima (positiva) y el punto donde es mínima (negativa). Indica también los puntos donde es cero.

Gráfica II: Indica el punto de la gráfica donde la velocidad del móvil es máxima (positiva) y el punto donde la velocidad del móvil es mínima (negativa). Indica también dónde vale cero.

Gráfica III: Indica el punto de la gráfica donde la función crece más deprisa y el punto donde decrece más rápidamente. Indica los puntos donde la tasa instantánea de variación es cero.

Nota: Utiliza los siguientes indicadores para señalar los puntos de las gráficas:

$\boxed{+}$

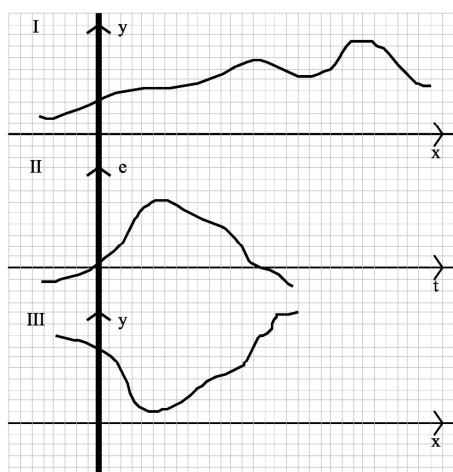
Para valores mayores (de crecimiento más rápido)

$\boxed{-}$

Para valores menores (de decrecimiento más rápido)

$\boxed{0}$

Para valores nulos



DESARROLLO DE UN ESQUEMA SOBRE LA RECTA TANGENTE EN UN ENTORNO TECNOLÓGICO

[Francisco José Boigues](#), Vicente Estruch, Abilio Orts (*)

Universidad Politécnica de Valencia, IES Guadassuar

Resumen

En este trabajo presentamos las bases de una investigación cuyo objetivo es el análisis de la comprensión de la recta tangente en un entorno de aprendizaje tecnológico. En primer lugar, exponemos la descomposición genética que hemos establecido para la recta tangente, teniendo en cuenta la teoría APOS y el análisis de una serie de textos que son referencias comunes en Bachillerato y en estudios de Ingeniería. El esquema, que queremos estudiar en el contexto de bachillerato y de primer curso de grado en Ingeniería, va en la línea que siguen los libros analizados y se basa en el enfoque de considerar la recta tangente como el límite de una sucesión de rectas secantes que tienen en común el punto de tangencia. Se muestran los esquemas que hemos establecido para que los estudiantes los desarrollen usando diversas funciones de MATLAB[®] (génesis instrumental) que, sobre todo, se mueven dentro del registro gráfico.

Abstract

We present an early research that aims to analyze the understanding of the tangent line in a learning environment where students can use CAS. First, we will expose the genetic decomposition we have set for the tangent line, taking into account the APOS theory, and the analysis of books which are commonly used in high schools and initial courses of Engineering. The scheme we want to study in high school and first year of Engineering context is in the line followed by the books analyzed before, and it is based on the approach of the tangent line as the limit of a sequence of secant straight lines with the same point of contact. Next we will show the diagrams we have set to be developed by students, using several (mainly graphical) MATLAB[®] functions (instrumental genesis).

Boigues, F.J., Estruch, V., Orts, A. (2011). Desarrollo de un esquema sobre la recta tangente en un entorno tecnologico. En M.M. Moreno, N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los Grupos de Investigación de la SEIEM* (pp. 161-171). Lleida.

Introducción

Uno de los tópicos en el campo de la educación matemática es el análisis del pensamiento matemático avanzado (Artigue, Batanero y Kent, 2007) que adquiere determinadas peculiaridades si las matemáticas se conciben básicamente como una herramienta de análisis para otras disciplinas científicas.

La incorporación de los sistemas de cálculo simbólico (CAS) a la práctica docente está abriendo nuevos espacios a los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. La capacidad de visualización, así como las diferentes opciones de manipulación gráfica que ofrecen los asistentes matemáticos pueden ayudar a mejorar la comprensión de los conceptos matemáticos (Boigues, Estruch y Llinares, 2010). Además, los manipuladores simbólicos permiten crear marcos instrumentales que favorecen la interactividad entre el estudiante y el conocimiento matemático. Recordemos que, para algunas teorías de tipo cognitivo, la construcción del conocimiento matemático se inicia con cierta manipulación física o mental de la realidad, por tanto los sistemas simbólicos de cálculo pueden facilitar dicha manipulación.

La noción de recta tangente es un concepto nuclear del cálculo, con una génesis histórica muy rica, que ha sido en ocasiones el motor para la construcción y el desarrollo de las matemáticas. Una comprensión adecuada y completa de la noción de recta tangente proporcionará a los estudiantes una herramienta que puede facilitar el proceso de modelización de numerosos fenómenos que son objeto de estudio en otras materias.

El trabajo que presentamos es una parte de una investigación más extensa que aborda el desarrollo de un esquema sobre la recta tangente en un entorno tecnológico. Mostraremos una propuesta de construcción de la recta tangente en un entorno tecnológico para estudiantes de bachillerato y primer curso de grado de carreras técnicas, que tendrá que ser validado a partir del análisis de una serie de actividades.

Génesis histórica

Un estudio histórico de los métodos y procedimientos que se han utilizado para abordar la noción de recta tangente puede ayudar, sin duda, a plantear propuestas de comprensión útiles dado que nos permite conocer las dificultades epistemológicas que pueden afrontar los estudiantes.

Etapas de los clásicos griegos:

Los primeros vestigios de lo que hoy conocemos como recta tangente se remontan a la época griega. Durante la Edad de Oro (300 a 200 a.C.) destacan Arquímedes y Apolonio. Este último, autor de la obra *Cónicas*, propone un concepto de recta tangente estático, presentándola como la recta que toca a una cónica en un único punto P , de forma que no es posible trazar otra recta pasando por P e incluida entre ambas (recta tangente y cónica), es decir, se trata de la línea recta de contacto más cercano. En cambio, Arquímedes calcula la tangente a una espiral identificando la dirección de la tangente con la dirección instantánea del movimiento. Estas dos tradiciones, la estática y la dinámica, se mantendrán a lo largo de la historia.

Etapas del precálculo:

Descartes propuso sustituir la definición de recta tangente como recta de contacto más cercano, pues esta era válida para las secciones cónicas estudiadas por los griegos pero resultaba problemática para el creciente número de curvas que iban apareciendo, por una declaración equivalente a la afirmación de que la tangente es la posición límite de la secante. Fermat, y posteriormente Maclaurin y Lagrange, adoptaron esta definición. Descartes reduce el problema de la determinación de la tangente a una curva a la construcción de una tangente a un círculo (Boyer, 1986).

A continuación, Fermat utiliza su método para obtener máximos y mínimos al cálculo de la recta tangente (Kline, 1992). Sea PT la tangente buscada a la curva por el punto P . Llamamos subtangente a la longitud TQ (ver figura 1). Fermat obtiene dicha subtangente a partir de la cual se obtiene T y TP .

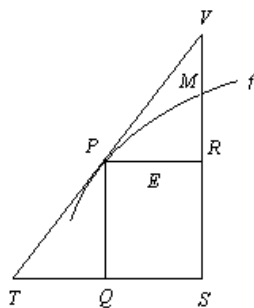


Figura 1.- Triángulo de Fermat

Sea QS un incremento de longitud E de TQ . Entonces por semejanza de triángulos ($TPQ \sim PRV$) se cumple:

$$\frac{TQ}{PQ} = \frac{E}{VR}$$

Pero VR es prácticamente MR (al ser E pequeño el punto sobre la tangente estará aproximadamente sobre la curva), por lo que:

$$\frac{TQ}{PQ} = \frac{E}{MS - PQ}$$

Si llamamos $f(x)$, como en nuestra notación moderna, a PQ , se tiene que

$$\frac{TQ}{f(x)} = \frac{E}{f(x+E) - f(x)}$$

y despejando TQ llegamos a

$$TQ = \frac{Ef(x)}{f(x+E) - f(x)}$$

Por último, Fermat divide numerador y denominador por E y, haciendo $E \rightarrow 0$, obtenemos la subtangente TQ que determina unívocamente, junto con el punto P , la tangente buscada. En esencia, lo que obtiene Fermat es una expresión equivalente (sin utilizar el concepto de límite) a la expresión

$$\lim_{E \rightarrow 0} \frac{f(a+E) - f(a)}{E}$$

Sin embargo, este procedimiento de Fermat solo lo podía aplicar a curvas de la forma $y=x^n$.

Posteriormente Barrow, cuyo método sería seguido por Newton y Leibniz, considera una curva como el límite de un polígono cuyos lados son infinitamente pequeños, y afirma que el lado del polígono infinitamente pequeño se convierte, en el límite, en la tangente a la curva. Este procedimiento, que generaliza el de Fermat, es prácticamente idéntico al que se utiliza en nuestro cálculo diferencial salvo en la notación empleada. Como los autores anteriores, su método es válido para funciones del tipo $f(x,y)=0$, donde f es un polinomio. Barrow considera el triángulo (ver figura 2) formado por un segmento de la recta tangente (hipotenusa) y dos longitudes infinitamente pequeñas e y a (catetos). Puesto que estas longitudes son infinitamente pequeñas podemos considerar, por aproximación, que el punto $(x-e, y-a)$, que está sobre la recta tangente, también lo está sobre la curva, por lo que se cumplirá la ecuación siguiente: $f(x-e, y-a)=f(x, y)=0$. En esta ecuación se pueden simplificar todos los términos en los que no aparezca alguna potencia de e o a . A continuación, Barrow elimina las potencias de e y a de exponente mayor que

uno y los productos de ambos factores infinitamente pequeños (por ser despreciables frente a e y a). Así, únicamente quedan términos que dependen de e y a . De esta expresión podemos despejar el cociente a/e que, por construcción, es la pendiente de la recta tangente. Y, de esta forma queda determinada la recta (Durán, 1996).

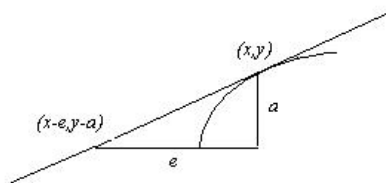


Figura 2.- Triángulo de Barrow

Etapas del nacimiento del cálculo:

Newton y Leibniz son considerados los fundadores del cálculo. Sus principales aportaciones son: 1) Frente a los razonamientos particulares de los matemáticos anteriores, Newton y Leibniz desarrollan un método general para el cálculo de la variación de una variable con respecto al tiempo (Newton) o la diferencial de una variable (Leibniz). Con ello, crearon una teoría general, aplicable a todas las funciones tanto algebraicas como trascendentes (Boyer, 1986), donde tenían cabida tanto los problemas de tangentes como los de máximos y mínimos, y otros. 2) El reconocimiento claro y contundente de que los problemas de tangentes y cuadraturas son recíprocos. Además, dotaron de mayor contenido analítico y generalidad a los resultados parciales que, en este sentido, había presentado Barrow.

Las teorías de Newton y Leibniz difieren claramente en su concepción. Para Newton una curva es generada por el movimiento de un punto y su fluxión es la variación en el fluir de dicha curva. Para Leibniz una curva es entendida como una poligonal de lados infinitesimales y la diferencial es el cociente de los catetos en el triángulo característico asociado en cada segmento de la curva. Así, en la teoría de Newton juega un papel fundamental la idea de límite (cantidades evanescentes que se van desvaneciendo) y en la de Leibniz lo hacen las cantidades infinitesimales que no es posible eliminar usando el concepto de límite. De hecho, Leibniz trata la idea de curva como una cantidad infinitesimal. En este sentido, Leibniz estudia el orden y la magnitud de estas cantidades infinitesimales (Durán, 1996).

A principios del siglo XIX, con la aparición del concepto de límite, se formalizan los conceptos que hasta ese momento se utilizaban de forma poco rigurosa (incrementos evanescentes, cantidades infinitamente pequeñas, etc.). A

ello contribuyeron las aportaciones realizadas, entre otros, por Cauchy y sobre todo, Weierstrass. Así, el cálculo infinitesimal se convertía en análisis matemático.

Marco Conceptual y antecedentes

El marco teórico adoptado en este trabajo es la teoría APOS, que nos ofrece un modelo sencillo de análisis de la comprensión en el pensamiento avanzado matemático. Además, manejaremos algunas de las aportaciones teóricas de la génesis instrumental.

La teoría APOS es un intento de aplicar la abstracción reflexiva de Piaget a la comprensión de tópicos avanzados en matemáticas (Dubinsky, 1991). Así, se concibe la comprensión como un proceso de creación, por parte del individuo, de elementos cognitivos que son caracterizados como *acciones, procesos y objetos*. Los diferentes elementos cognitivos relacionados con una determinada noción son organizados, de manera estructurada, formando los *esquemas*. Con la noción de triada introducida por Piaget y García (1983), APOS plantea tres etapas en el desarrollo de un esquema: *intra*, *inter* y *trans*. Otra de las componentes teóricas que ofrece APOS es la *descomposición genética* de una noción, que es una descripción detallada de las construcciones mentales que se espera que un individuo realice al formar su esquema de una noción matemática concreta.

Junto a la teoría APOS, adoptamos uno de los marcos teóricos de referencia en los estudios que consideran el uso de la tecnología, la génesis instrumental, que conjuga aspectos cognitivos con antropológicos (Artigue, 2007). Uno de los puntos básicos de esa teoría es la diferencia entre *artefacto* e *instrumento*. *Artefacto* se identifica con la herramienta propiamente e *instrumento* cuando con el artefacto se establece una relación significativa entre el usuario y la tarea a realizar. El proceso por el que un artefacto se convierte en instrumento, llamado *génesis instrumental* (Drijvers et al., 2010), consiste en la formación en el estudiante de esquemas instrumentales entendidos como formas estables de tratar determinadas tareas. Estos esquemas instrumentales pueden ser *esquemas de uso*, que son aquellas formas generales directamente relacionadas con el artefacto mientras que los *esquemas de acción instrumental* están relacionados directamente con la actividad a realizar con el artefacto.

Aunque son muchos los estudios que han abordado la comprensión de la recta tangente, a continuación resaltaremos aquellos que están más vinculados con nuestro enfoque. Uno de los primeros trabajos a resaltar es el de Orton (1983) que señala las dificultades que encuentran los estudiantes no tanto en el cálculo de la derivada sino en su comprensión conceptual. Por su parte, Azcárate (1990) aporta la idea de esquema conceptual como elemento para analizar una determinada noción matemática. En Font (1999) se resalta el papel que tienen las diversas representaciones en la comprensión de la derivada, siendo la pendiente de la recta

tangente una de esas representaciones. En Baker, Cooley y Trigueros (2000), la comprensión se concibe como la capacidad de coordinar las distintas representaciones, siendo una de ellas la noción de recta tangente. Finalmente en lo que respecta a la caracterización de las etapas de desarrollo en la construcción de la derivada, se resalta la tangente como uno de los elementos a tener en cuenta (García, Llinares y Sánchez-Matamoros, 2010).

Es común en los trabajos analizados el destacar la recta tangente como un elemento a tener en cuenta en la comprensión de la derivada. No obstante, pensamos que sería importante completar dicha visión con otra con mayor autonomía respecto a la derivada, en la que se conciba a la recta tangente como la mejor aproximación lineal a una función, a nivel local, y describir los esquemas que los estudiantes desarrollan cuando manejan un entorno tecnológico.

Descomposición genética de la recta tangente

Para la descomposición genética que detallamos a continuación, hemos tenido en cuenta diferentes fuentes (Boigues, 2010). Por un lado, se tiene el significado institucional. Así, a través de la génesis histórica y de un análisis de libros de texto (Contreras et al., 2003) concebimos la recta tangente como la mejor aproximación lineal a una función en el entorno de un punto (en concordancia con la idea de Barrow y Leibniz), cuyo cálculo se obtendrá hallando el límite de una sucesión de rectas secantes. En segundo lugar, en lo que respecta a otras propuestas de descomposición genética sobre la recta tangente, la mayoría de ellas se refieren principalmente a la noción de derivada y consideran la recta tangente como una aplicación o consecuencia pero no el objeto principal del estudio. Además, obviamente, hemos tenido en cuenta también la experiencia docente del grupo investigador. Mostramos en tabla I la propuesta de descomposición genética que se ha establecido para la noción de recta tangente.

Tabla I.- Propuesta de descomposición genética para la noción de recta tangente

NOCION DE RECTA TANGENTE	
A1	Dada una función $f(x)$ y un punto de la gráfica $P(a, f(a))$ se realiza la acción de ampliar (zoom) la gráfica de $f(x)$ en el punto P .
A2	Interiorización como proceso de A1.
	Encapsulamiento como objeto de A2, que asocie a toda gráfica

A3=A	localmente a una forma lineal.
B1	Dada una función $f(x)$ y un punto de la gráfica $P(a, f(a))$ se realiza la acción de dibujar una recta secante que una el punto P con otro punto $Q(a+h, f(a+h))$ relativamente próximos.
B2	Formar una sucesión de rectas secantes manteniendo fijo P y variando la posición del punto, Q , que va acercándose a P .
B3	Interiorización de B2 como proceso.
B4=B	Encapsulamiento como objeto de B3.
ARB	Identificar la tendencia de B como la mejor aproximación a A.

Génesis instrumental

Los esquemas instrumentales que hemos fijado para las diversas actividades que los estudiantes deben realizar son los siguientes:

a) Esquemas de uso: acceder a una dirección de internet que le permitirá usar la función zoom y la función rectas secantes.

b) Esquemas de acción instrumental:

1.- Función zoom:

Hay que introducir como entradas:

Los coeficientes del polinomio de tercer grado, siguiendo el orden de las potencias de x de mayor a menor, que definirá la función, $f(x)$, a estudiar.

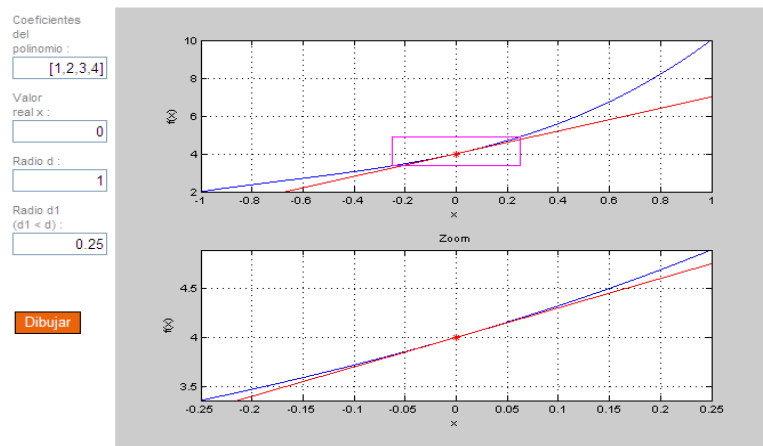
El valor x_0 donde se estudia localmente la función.

El radio, d , de un intervalo inicial (x_0-d, x_0+d) para el que se representará la función.

El radio, $d1$, $d1 < d$, de un intervalo (x_0-d1, x_0+d1) encajado en el anterior, que define una ventana sobre la que se realiza

Como salida obtenemos dos gráficos:

El primero será la representación gráfica de $f(x)$ en el intervalo (x_0-d, x_0+d) sobre el que destaca, en magenta, una ventana cuya ampliación (zoom) da lugar al segundo gráfico que aparece enmarcado también en magenta.



2.- Función recta tangente:

Hay que introducir como entradas:

Los coeficientes del polinomio de tercer grado, siguiendo el orden de las potencias de x de mayor a menor, que definirá la función, $f(x)$, a estudiar.

El valor x_0 real tal que $(x_0, f(x_0))$ es el punto de tangencia, común a las rectas secantes a construir.

El valor real h , que determina un intervalo inicial (x_0, x_0+h) .

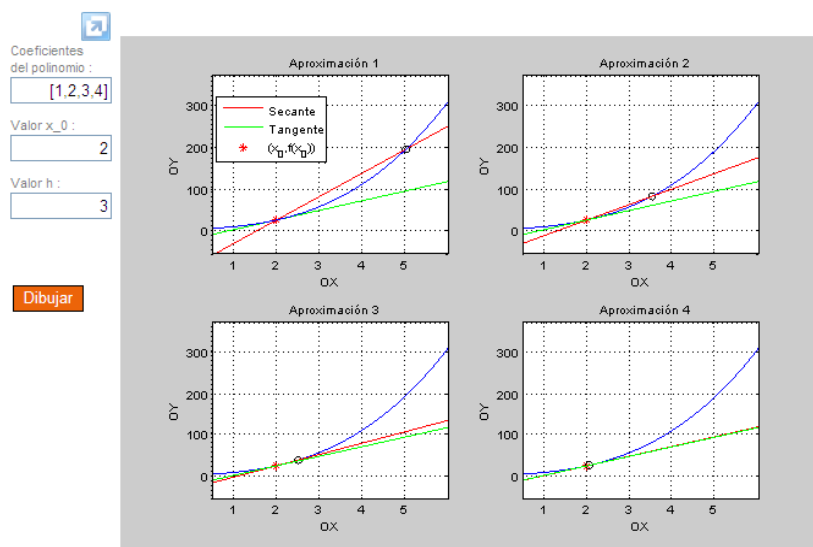
Como salida obtenemos cuatro gráficos que son aproximaciones sucesivas a la recta tangente mediante rectas secantes (rojo) con un punto en común. En todos ellos aparece la gráfica de la función $f(x)$ (azul) y la recta tangente a $f(x)$ (verde) en el punto $(x_0, f(x_0))$.

En la "Aproximación 1" se tiene la recta secante a la gráfica de $f(x)$ en los puntos $(x_0, f(x_0))$ y $(x_0+h, f(x_0+h))$.

En la "Aproximación 2" se tiene la recta secante a la gráfica de $f(x)$ en los puntos $(x_0, f(x_0))$ y $(x_0+(h/2), f(x_0+(h/2)))$.

En la "Aproximación 3" se tiene la recta secante a la gráfica de $f(x)$ en los puntos $(x_0, f(x_0))$ y $(x_0 + (h/3), f(x_0 + (h/3)))$

En la "Aproximación 4" se tiene la recta secante a la gráfica de $f(x)$ en los puntos $(x_0, f(x_0))$ y $(x_0 + (h/10), f(x_0 + (h/10)))$.



Desde el marco teórico adoptado, con esta investigación pretendemos identificar e interpretar las diferentes construcciones cognitivas, fijadas en la descomposición genética, así como los esquemas instrumentales que los estudiantes ponen en juego mientras resuelven una serie de cuestiones relacionadas con la recta tangente en un entorno tecnológico. Como consecuencia de ello nos plantearemos, en su caso, revisar la propuesta de descomposición genética de la recta tangente realizada, y proponer aquellos cambios en la descomposición que puedan aportar una mejora en el diseño de la instrucción.

Referencias bibliográficas

Artigue, M.; Batanero C.; Kent, P. (2007), Mathematics thinking and learning at post secondary level. In Fr. Lester (ed.), Second Handbook of research on Mathematics Teaching and learning. NCTM-IAP; Charlotte, NC, 1011-1045.

- Azcárate, C. (1990). La velocidad: introducción al concepto de derivada. Tesis doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona.
- Baker, B.; Cooley, L.; Trigueros, M. (2000). A Calculus graphing Schema. *The Journal for Research in Mathematics Education*, 31(5), 557-578.
- Boigues, F. J.; Estruch, V.; Llinares, S. (2010). El papel de sistemas de cálculo formal en la comprensión de las matemáticas: el caso de la integral definida. *Modeling in Science Education and learning*. Vol. 3(1), 3-18.
- Boigues, F. J. (2010). Una propuesta de descomposición genética para la integral definida en estudiantes de ingeniería. En A. Contreras y L. Ordoñez (Eds.), *jornadas de investigación en didáctica del Análisis Matemático*. (pp. 42-77). Universidad de Jaén.
- Boyer, C. (1986). *Historia de la matemática*, Alianza. Madrid.
- Contreras y colaboradores (2003). Análisis de manuales de 1º y 2º de bachillerato, en cuanto a los conceptos básicos del Cálculo infinitesimal derivada e integral, bajo la perspectiva de los obstáculos epistemológicos. Proyecto de investigación del Instituto de Estudios Giennenses. Jaén.
- Drijvers, P, et al. (2010). Integrating Technology into Mathematics Education: Theoretical perspectives. En C. Hoyles y J.B. Lagrange (Eds). *Mathematics Education*, pp. 89-132. New York: Springer.
- Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall (Eds.), *Advanced Mathematical thinking*, pp. 95-123. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Durán, A. (1996). *Historia, con personajes, de los conceptos del cálculo*, Alianza. Madrid.
- Font, V. (1999). *Procediments per obtenir expressions simbòliques a partir de gràfiques. Aplicacions a les derivades*. Tesis doctoral. Universitat de Barcelona.
- Garcia, M., Llinares, S. y Sánchez-Matamoros, G. (2010). Characterizing thematized derivative Schema by the underlying emergent structures. *International Journal of Science and Mathematics Education*(on line). Taiwan.
- Kline, M. (1992). *El pensamiento matemático: Desde la Antigüedad a nuestros días* (vol. 1), Alianza. Madrid.
- Orton, A. (1983). Students' understanding of differentiation. *Educational Studies in Mathematics*, 14, 235-250.
- Piaget, J.; García R. (1983/1989). *Psicogénesis e Historia de la Ciencia*, Siglo veintiuno editores. Madrid.

EL ANÁLISIS MATEMÁTICO A TRAVÉS DE LAS SITUACIONES REALES PRESENTES EN LOS LIBROS DE TEXTO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

[Myriam Codes Valcarce](#) (*), M^a Teresa González Astudillo, M^a Consuelo Monterrubio Pérez, M^a Laura Delgado Martín
Universidad Pontifica de Salamanca, Universidad de Salamanca

Resumen

Los resultados de las investigaciones en didáctica de la matemática, así como las recomendaciones de la legislación vigente, sugieren que, para que se produzca aprendizaje en matemáticas, los alumnos deben establecer conexiones no sólo entre los diferentes contenidos de matemáticas, sino también con contenidos relativos a otras áreas de conocimiento y con la vida cotidiana. Los libros de texto actuales muestran una amplia variedad de actividades que debe realizar el alumno, pero la mayoría de ellas están descontextualizadas. En esta comunicación presentamos qué relaciones se establecen entre los conceptos de Análisis Matemático, diferentes ámbitos de la vida cotidiana, y otras ciencias como la Física, la Química o la Economía. Para ello hemos analizado libros de texto de cuatro editoriales de gran difusión en los niveles educativos de segundo ciclo de secundaria y bachillerato.

Abstract

Results of research in mathematics education, as well as the recommendations of the new legislation, suggest that to learn mathematics, students must not only establish connections between different mathematical content, but also with other areas content and everyday life knowledge. The current textbooks show a wide variety of tasks that must be solved by students, but most of them are out of context. In this paper we present what relations are established between the concepts of mathematical Analysis, different areas of daily life, and other sciences such as physics, chemistry or economics. We analyzed four textbook publishers widespread in different levels of upper secondary school.

Codes, M. et al. (2011). El análisis matemático a través de las situaciones reales presentes en los libros de texto de educación secundaria. En M.M. Moreno, N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los Grupos de Investigación de la SEIEM* (pp. 173-186). Lleida.

Antecedentes.

Las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas se han explicado, a menudo, haciendo referencia a la distancia entre el conocimiento personal de los alumnos y el conocimiento formal y abstracto de las matemáticas. De hecho, incluso los educadores matemáticos y los libros de texto muestran el conocimiento matemático como un cuerpo de conocimientos independiente, alejado de la propia experiencia de los alumnos, pero que se les debe comunicar a éstos. Esto constituye una de las fuentes de falta de comunicación entre los profesores y los alumnos (Gravemeijer, 2008).

Para salvar este escollo, en el RD 1631/2006 de 29 de diciembre por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la educación secundaria obligatoria se describe lo que se entiende por **competencia matemática** que deben desarrollar los alumnos de este nivel educativo, siendo uno de los aspectos que más se destaca la habilidad para relacionar los contenidos matemáticos tanto con la vida cotidiana como con el mundo laboral; así se indica que: “su desarrollo [de la matemática] en la educación obligatoria se alcanzará en la medida en que los conocimientos matemáticos se apliquen de manera espontánea a una amplia variedad de situaciones, provenientes de otros campos de conocimiento y de la vida cotidiana”. Sin embargo, tradicionalmente la enseñanza de las matemáticas se ha realizado de forma exclusivamente centrada en la exposición del profesor, descontextualizada, organizada en torno a los conocimientos teóricos, con pocas relaciones con la vida de los alumnos e inconexa, puesto que los alumnos no son capaces de relacionar unos contenidos con otros, bien de la propia matemática o de otras áreas de conocimiento. Como resultado, los alumnos suelen memorizar las fórmulas y los algoritmos necesarios para resolver los ejercicios que propone el profesor, sin dotarlas de significado y, por lo tanto, sin comprenderlas.

Todo esto es debido tanto a la ausencia de una formación didáctica de los profesores de matemáticas, como a la falta de recursos adecuados para que se produzca un aprendizaje significativo. En cuanto a los profesores, aunque su formación matemática es muy sólida, no poseen los recursos necesarios para diseñar situaciones de aprendizaje que permitan a los alumnos relacionar unos contenidos matemáticos con otros, con las actividades cotidianas, con otras materias, o con la vida laboral (Moreno, 2005; Pinto y González, 2004) y este desconocimiento hace que los profesores utilicen casi exclusivamente como único recurso en las aulas el libro de texto (Pinto y González, 2008).

Pero, hasta ahora, en los libros de texto, las matemáticas han aparecido de forma compartimentalizada, con pocas referencias a la vida cotidiana, con situaciones poco realistas y que no incitan a la participación activa de los alumnos como ha sido constatado en diversas investigaciones realizadas sobre los libros de texto

publicados anteriormente a la Ley Orgánica de Educación (LOE), concretamente en González (2002) y Monterrubio (2007).

El modelo de análisis de textos escolares de Matemáticas propuesto por Monterrubio y Ortega (2009) propone prestar atención a las conexiones que se establecen en los textos, precisamente porque es necesario contemplar la relación de las Matemáticas con otras áreas, con la vida real y con las propias Matemáticas para poder conseguir los objetivos propuestos en el currículo de Matemáticas de la Comunidad de Castilla y León, establecido por el DECRETO 52/2007 de 17 de mayo, entre los que se pueden destacar los siguientes:

2. Aplicar con soltura y adecuadamente las herramientas matemáticas adquiridas a situaciones de la vida diaria.

8. Identificar las formas planas o espaciales que se presentan en la vida diaria y analizar las propiedades y relaciones geométricas entre ellas, adquiriendo una sensibilidad progresiva ante la belleza que generan

13. Integrar los conocimientos matemáticos en el conjunto de saberes que se van adquiriendo desde las distintas áreas de modo que puedan emplearse de forma creativa, analítica y crítica.

Por otra parte, el establecimiento de las diferentes conexiones constituye un elemento motivador importante lo que, sin duda, se debe tener en cuenta al tratarse de la Educación Secundaria.

Son diversas las investigaciones realizadas en torno al tratamiento que dan los textos al análisis tanto de aspectos locales, para los que se han considerado tres componentes: análisis conceptual, didáctico-cognitivo y fenomenológico (Sierra, González y López, 1999; 2003; González, 2002), como para el análisis en aspectos más globales, ya que en la tesis de González (2002) se ha diseñado un instrumento de análisis considerando veinte dimensiones clasificadas en cuatro categorías, lo que ha dado lugar a una clasificación en libros expositivos, tecnológicos y comprensivos. Por otra parte, en la tesis de Monterrubio (2007) se presenta una explicación de cada uno de los indicadores de análisis que constituyen el modelo de evaluación de textos escolares creado, con el objetivo de fomentar el análisis desde distintos puntos de vista. En concreto, para el apartado de Conexiones se presentan algunos ejemplos con el fin de guiar al usuario del modelo y facilitar el análisis con diferentes enfoques.

Metodología.

El objetivo que nos hemos propuesto, a partir de los antecedentes expuestos en el apartado anterior es:

Analizar los libros de texto de matemáticas de educación secundaria publicados a partir de la LOE, estudiando las relaciones que se establecen entre las matemáticas, diferentes ámbitos de la vida cotidiana y otras ciencias como la Física, la Química o la Economía, para comprobar si se potencia la habilidad para establecer conexiones entre estos ámbitos según está establecido en el RD1631/2006 de 29 de diciembre.

Se trata de comprobar si los libros de texto proporcionan los recursos necesarios para poder establecer conexiones entre las matemáticas y diferentes ámbitos de la vida cotidiana, otras ciencias u otros ámbitos del conocimiento. Nuestra hipótesis es que los libros no proporcionan estos recursos.

En esta investigación se ha utilizado como metodología el análisis de contenido que se ha realizado siguiendo las siguientes fases:

Selección de los libros de texto a analizar. Se van a analizar libros de texto de 3º, 4º de ESO y 1º y 2º de Bachillerato de la opción de ciencia de cuatro de las editoriales con mayor tirada: ANAYA, Santillana, SM y Edelvives.

Vaciado de los diferentes tipos de situaciones que aparecen en los libros de texto.

Clasificación de dichas situaciones dependiendo de diferentes factores como el contexto, el tópico matemático, las relaciones con otros contenidos, el tipo de actividad propuesta, etc.

Determinación del carácter de cada libro, estableciendo tanto sus potenciales como sus deficiencias.

Una vez seleccionados los libros de texto se consideró que nuestras unidades de análisis iban a ser las actividades de los libros de texto que tuvieran un enunciado verbal que tratara acerca de otras ramas de conocimiento (Física Química, Economía, Historia, Literatura, Educación Física,...) o de la vida diaria. Vila y Callejo (2004) distinguen cinco tipos de actividades:

Ejercicios: se proponen con la finalidad de mecanizar/automatizar determinados procedimientos.

Cuestiones prácticas: son problemas de aplicación pura y se proponen en estrecha relación con los conocimientos matemáticos, tienen como finalidad fijar estos conocimientos mediante una conexión con la vida real o una pseudo aplicación de las matemáticas. Son ilustraciones de procedimientos matemáticos.

Problemas no contextualizados: para utilizar los conocimientos presentados en el aula y desarrollar la capacidad de resolver problemas (Demostrar que si se conocen las áreas de tres de los cuatro triángulos en los que queda dividido un

cuadrilátero mediante sus diagonales, pueden determinarse el área del cuadrilátero).

Situaciones reales: se pretende que el alumnado construya los conocimientos, modelos o procesos matemáticos necesarios para resolver el problema (el problema es el instrumento para indagar en un nuevo campo del conocimiento). Suelen presentarse antes del tema, nunca forman parte de un listado, los enunciados pueden ser imprecisos o abiertos.

Problemas de estrategia: tienen como finalidad el trabajo de elaboración de estrategias y procesos en el sentido amplio del término.

Dado que en los libros de texto no se encuentran situaciones reales tal como están descritas en Vila y Callejo, hemos considerado aquellas que encajan dentro del término cuestiones prácticas.

Las **cuestiones prácticas** destacan el medio en el que un concepto matemático tiene uso regular. Suelen hacer referencia a un medio natural, cultural, científico o social en el que se sitúan los problemas y cuestiones matemáticas. En PISA (MEC, 2006) se clasifican estos contextos a los que hacen referencia los enunciados de las actividades en personales, educativos o laborales, públicos y científicos:

Las situaciones personales están relacionadas con la vida diaria de los escolares. Se refieren a la forma en que un problema matemático afecta a un individuo.

Las situaciones educativas o laborales las encuentra el escolar en un centro educativo o en un entorno de trabajo.

Las situaciones públicas se refieren a la comunidad local u otra más amplia, con repercusiones para la vida pública.

Las situaciones científicas son más abstractas y pueden implicar la comprensión de un proceso tecnológico, una interpretación teórica o un problema específicamente matemático.

Además se distinguen diferentes niveles de complejidad (MEC, 2006) para distinguir las actividades cognitivas que deben poner en práctica los alumnos para resolver cada actividad y que son los siguientes:

Reproducción: reproducción de conocimientos ya practicados y realización de operaciones rutinarias.

Conexiones: integración, conexión y ampliación moderada del material practicado.

Reflexión: nivel avanzado de razonamiento, argumentación, abstracciones, generalizaciones y construcción de modelos para su aplicación a contextos nuevos.

PISA considera la competencia matemática como “la capacidad del individuo para identificar y entender la función que desempeñan las matemáticas en el mundo, emitir juicios fundados y utilizar y relacionarse con las matemáticas de forma que se puedan satisfacer las necesidades de la vida de los individuos como ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos” (MEC, 2006). Basándonos en la obra de Niss (1999) se han distinguido 8 capacidades que configuran la competencia matemática:

Pensar y razonar. Incluye plantear preguntas características de las matemáticas (“¿Cuántas ... hay?”, “¿Cómo encontrar ...?”); reconocer el tipo de respuestas que las matemáticas ofrecen para estas preguntas; distinguir entre diferentes tipos de proposiciones (definiciones, teoremas, conjeturas, hipótesis, ejemplos, condicionales); y entender y manipular el rango y los límites de ciertos conceptos matemáticos.

Argumentar. Se refiere a saber qué es una prueba matemática y cómo se diferencia de otros tipos de razonamiento matemático; poder seguir y evaluar cadenas de argumentos matemáticos de diferentes tipos; desarrollar procedimientos intuitivos; y construir y expresar argumentos matemáticos.

Comunicar. Involucra la capacidad de expresarse, tanto en forma oral como escrita, sobre asuntos con contenido matemático y de entender las aseveraciones, orales y escritas, de los demás sobre los mismos temas.

Modelar. Incluye estructurar la situación que se va a moldear; traducir la “realidad” a una estructura matemática; trabajar con un modelo matemático; validar el modelo; reflexionar, analizar y plantear críticas a un modelo y sus resultados; comunicarse eficazmente sobre el modelo y sus resultados (incluyendo las limitaciones que pueden tener estos últimos); y monitorear y controlar el proceso de modelado.

Plantear y resolver problemas. Comprende plantear, formular, y definir diferentes tipos de problemas matemáticos y resolver diversos tipos de problemas utilizando una variedad de métodos.

Representar. Incluye codificar y decodificar, traducir, interpretar y distinguir entre diferentes tipos de representaciones de objetos y situaciones matemáticas, y las interrelaciones entre diversas representaciones; escoger entre diferentes formas de representación, de acuerdo con la situación y el propósito particulares.

Utilizar lenguaje y operaciones simbólicas, formales y técnicas. Comprende decodificar e interpretar lenguaje formal y simbólico, y entender su relación con el lenguaje natural; traducir del lenguaje natural al lenguaje simbólico / formal, manipular proposiciones y expresiones que contengan símbolos y fórmulas; utilizar variables, resolver ecuaciones y realizar cálculos.

Utilizar ayudas y herramientas. Esto involucra conocer, y ser capaz de utilizar diversas ayudas y herramientas (incluyendo las tecnologías de la información y las comunicaciones TICs) que facilitan la actividad matemática, y comprender las limitaciones de estas ayudas y herramientas.

Además de las competencias matemáticas, en el BOE de 5 de enero de 2007 se enuncian el resto de las competencias que debe adquirir un alumno en ESO que son: competencia en comunicación lingüística; competencia en el conocimiento e interacción con el mundo físico; tratamiento de la información y competencia digital; competencia social y ciudadana; competencia cultural y artística; competencia de aprender a aprender; autonomía e iniciativa personal. Observar si una situación matemática permite o no el desarrollo de esas competencias, es un indicio del tipo de relaciones que se establecen con otras áreas de conocimiento.

A partir de los elementos descritos y de otros aspectos más puntuales como la presencia, tipo y función de las ilustraciones de cada actividad, el lugar en el tema, el contenido de Análisis Matemático, de otras ramas de la matemática o de otras ciencias al que hacen referencia y el tipo de datos que se incluyen en cada situación se ha establecido un sistema de categorías que se presenta en la tabla 1:

Tabla 1: Sistema de categorías.

Categoría	Subcategorías	
Lugar en el tema	Motivación	
	Ejemplo	
	Actividades Aplicadas	
	Actividades de Desarrollo	
	Problemas	
Contexto	Vida cotidiana	
	Público	
	Laboral	
	Científico	
Ilustraciones	(Tipo)	(Función)
	Dibujo	Ornamental
	Tabla	Descriptiva
	Gráfica	Informativa

	Fotografía Construcción geométrica	
Datos	(Tipo)	(Número)
	Numérico Gráfico Tabular Verbal Algebraico	Todos Más Menos Ninguno
Competencias matemáticas	Pensar y razonar Argumentar y justificar Comunicar Modelar Plantear y resolver problemas Representar Utilizar leng. simbólico Utilizar ayudas y herramientas	
Competencias no matemáticas	Comunicación lingüística Interacción con el mundo físico Tratamiento de la información Comp. social y ciudadana Comp. cultural y artística Comp. de aprender a aprender Autonomía e iniciativa personal	
Niveles de complejidad	Reproducción Conexión Reflexión	

Resultados

Para cada actividad se ha completado, inicialmente, una tabla en la que se describen cada uno de los aspectos relativos a las categorías establecidas. A continuación, en la tabla 2 se puede ver una de ellas correspondiente a una actividad de 3º de ESO:

Tabla 2: Ejemplo.

Editorial	SM Pitágoras	1020	p. 178, actividad final
Bloque	Análisis matemático	Tema	10 Funciones lineales y cuadráticas
Lugar en el tema	AD		
Contexto	L altura salto		
	So		
Contenido	Función cuadrática		
Contenido extra	Física, Educación Física		
Estrategia	Traducción gráfica-tabla-expresión		
Ilustración	Dibujo		
	Informativa		
Datos	Todos		
	gráficos		
Competencia matemática	Representar Comunicar Lenguaje simbólico y formal		
Competencia matemática no	Competencia en el conocimiento e interacción con el mundo físico		
Capacidades	Conexión		

Una vez revisada cada una de las actividades, para cada uno de los libros de texto y cada curso se han realizado tablas utilizando el software EXCEL en las que se hace un resumen y se puede ver de forma global el conjunto de todas las actividades de un libro, como se puede ver en la figura 1:

07 PR																		
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
Actividad	Lugar en el tema	Contexto	Forzado	Personalizado	Contenido	Contenido extra matemático	Contenido extra no matemático	Tipo de ilustración	Función de la ilustración	Tipo de ilustración secundaria	Función de la ilustración secundaria	Clase	Tipo de datos	Compet. Matem.	Compet. no Matem.	Niveles de complejidad	Observa	
1	0700p	M	VC	N	So	Representación gráfica	-	G	Informativa	F	Ornament	todos	G	PR, C	INF	Reproducido		
2	0700p	H	E	VC	N	Representación gráfica	-	G	Informativa			todos	G	PR, C	INF	Reproducido		
3	0700p	AA	VC	N	N	Representación gráfica	-	G	Informativa			todos	G	PR, C	INF	Reproducido		
4	0704p	AA	C	N	N	Representación gráfica	-	-	Ciencias de la naturaleza			todos	N	PR, RS	INF	Reproducido		
5	0705p	AA	P	N	N	Representación gráfica	-	G	Informativa			todos	G	PR	INF	Reproducido		
6	0706p	H	E	C	N	Crecimiento	-	G	Informativa	G	Informativa	todos	G	PR	INF	Reproducido		
7	0707p	H	E	VC	N	Mismos y mínimos	-	G	Informativa			todos	G	PR	INF	Reproducido		
8	0708p	AA	VC	N	N	Mismos y mínimos	-	G	Informativa			todos	G	PR	INF	Reproducido		
9	0709p	H	E	C	N	tendencia	-	G	Informativa			todos	G	PR	INF	Reproducido		
10	0710p	H	E	C	N	Periodicidad	-	G	Informativa			todos	G	PR	INF	Reproducido		
11	0710p	AA	VC	N	S	Periodicidad	-	-	-			todos	N	PR, C	INF	Reproducido		
12	0710p	AA	C	N	N	tendencia	-	G	Informativa			todos	G	PR	INF	Reproducido		
13	0710p	AA	E	L	N	N	Continuidad	-	G	Informativa		todos	G	PR	INF	Reproducido		
14	0710p	AA	E	VC	N	N	Continuidad	-	G	Informativa		todos	G	PR	INF	Reproducido		
15	0710p	AA	E	VC	N	N	Continuidad	-	G	Informativa		todos	G	PR	INF	Reproducido		
16	0710p	AA	E	VC	N	N	Continuidad	-	G	Informativa		todos	G	PR	INF	Reproducido		
17	0710p	AA	E	VC	N	N	Continuidad	-	G	Informativa		todos	G	PR	INF	Reproducido		
18	0710p	AA	E	VC	N	N	Continuidad	-	G	Informativa		todos	G	PR	INF	Reproducido		
19	0710p	AA	E	VC	N	N	Continuidad	-	G	Informativa		todos	G	PR	INF	Reproducido		
20	0710p	AA	E	VC	N	N	Continuidad	-	G	Informativa		todos	G	PR	INF	Reproducido		
21	0710p	AA	E	VC	N	N	Continuidad	-	G	Informativa		todos	G	PR	INF	Reproducido		
22	0710p	AA	E	VC	N	N	Continuidad	-	G	Informativa		todos	G	PR	INF	Reproducido		
23	0710p	AA	E	VC	N	N	Continuidad	-	G	Informativa		todos	G	PR	INF	Reproducido		
24	0710p	AA	E	VC	N	N	Continuidad	-	G	Informativa		todos	G	PR	INF	Reproducido		
25	0710p	AA	E	VC	N	N	Continuidad	-	G	Informativa		todos	G	PR	INF	Reproducido		
26	0710p	AA	E	VC	N	N	Continuidad	-	G	Informativa		todos	G	PR	INF	Reproducido		
27	0710p	AA	E	VC	N	N	Continuidad	-	G	Informativa		todos	G	PR	INF	Reproducido		
28	0710p	AA	E	VC	N	N	Continuidad	-	G	Informativa		todos	G	PR	INF	Reproducido		
29	0710p	AA	E	VC	N	N	Continuidad	-	G	Informativa		todos	G	PR	INF	Reproducido		
30	0710p	AA	E	VC	N	N	Continuidad	-	G	Informativa		todos	G	PR	INF	Reproducido		
31	0710p	AA	E	VC	N	N	Continuidad	-	G	Informativa		todos	G	PR	INF	Reproducido		
32	0710p	AA	E	VC	N	N	Continuidad	-	G	Informativa		todos	G	PR	INF	Reproducido		
33	0710p	AA	E	VC	N	N	Continuidad	-	G	Informativa		todos	G	PR	INF	Reproducido		
34	0710p	AA	E	VC	N	N	Continuidad	-	G	Informativa		todos	G	PR	INF	Reproducido		
35	0710p	AA	E	VC	N	N	Continuidad	-	G	Informativa		todos	G	PR	INF	Reproducido		
36	0710p	AA	E	VC	N	N	Continuidad	-	G	Informativa		todos	G	PR	INF	Reproducido		
37	0710p	AA	E	VC	N	N	Continuidad	-	G	Informativa		todos	G	PR	INF	Reproducido		
38	0710p	AA	E	VC	N	N	Continuidad	-	G	Informativa		todos	G	PR	INF	Reproducido		
39	0710p	AA	E	VC	N	N	Continuidad	-	G	Informativa		todos	G	PR	INF	Reproducido		
40	0710p	AA	E	VC	N	N	Continuidad	-	G	Informativa		todos	G	PR	INF	Reproducido		
41	0710p	AA	E	VC	N	N	Continuidad	-	G	Informativa		todos	G	PR	INF	Reproducido		
42	0710p	AA	E	VC	N	N	Continuidad	-	G	Informativa		todos	G	PR	INF	Reproducido		
43	0710p	AA	E	VC	N	N	Continuidad	-	G	Informativa		todos	G	PR	INF	Reproducido		
44	0710p	AA	E	VC	N	N	Continuidad	-	G	Informativa		todos	G	PR	INF	Reproducido		
45	0710p	AA	E	VC	N	N	Continuidad	-	G	Informativa		todos	G	PR	INF	Reproducido		
46	0710p	AA	E	VC	N	N	Continuidad	-	G	Informativa		todos	G	PR	INF	Reproducido		
47	0710p	AA	E	VC	N	N	Continuidad	-	G	Informativa		todos	G	PR	INF	Reproducido		
48	0710p	AA	E	VC	N	N	Continuidad	-	G	Informativa		todos	G	PR	INF	Reproducido		
49	0710p	AA	E	VC	N	N	Continuidad	-	G	Informativa		todos	G	PR	INF	Reproducido		
50	0710p	AA	E	VC	N	N	Continuidad	-	G	Informativa		todos	G	PR	INF	Reproducido		
51	0710p	AA	E	VC	N	N	Continuidad	-	G	Informativa		todos	G	PR	INF	Reproducido		
52	0710p	AA	E	VC	N	N	Continuidad	-	G	Informativa		todos	G	PR	INF	Reproducido		
53	0710p	AA	E	VC	N	N	Continuidad	-	G	Informativa		todos	G	PR	INF	Reproducido		
54	0710p	AA	E	VC	N	N	Continuidad	-	G	Informativa		todos	G	PR	INF	Reproducido		
55	0710p	AA	E	VC	N	N	Continuidad	-	G	Informativa		todos	G	PR	INF	Reproducido		
56	0710p	AA	E	VC	N	N	Continuidad	-	G	Informativa		todos	G	PR	INF	Reproducido		
57	0710p	AA	E	VC	N	N	Continuidad	-	G	Informativa		todos	G	PR	INF	Reproducido		
58	0710p	AA	E	VC	N	N	Continuidad	-	G	Informativa		todos	G	PR	INF	Reproducido		
59	0710p	AA	E	VC	N	N	Continuidad	-	G	Informativa		todos	G	PR	INF	Reproducido		
60	0710p	AA	E	VC	N	N	Continuidad	-	G	Informativa		todos	G	PR	INF	Reproducido		
61	0710p	AA	E	VC	N	N	Continuidad	-	G	Informativa		todos	G	PR	INF	Reproducido		
62	0710p	AA	E	VC	N	N	Continuidad	-	G	Informativa		todos	G	PR	INF	Reproducido		
63	0710p	AA	E	VC	N	N	Continuidad	-	G	Informativa		todos	G	PR	INF	Reproducido		
64	0710p	AA	E	VC	N	N	Continuidad	-	G	Informativa		todos	G	PR	INF	Reproducido		
65	0710p	AA	E	VC	N	N	Continuidad	-	G	Informativa		todos	G	PR	INF	Reproducido		
66	0710p	AA	E	VC	N	N	Continuidad	-	G	Informativa		todos	G	PR	INF	Reproducido		
67	0710p	AA	E	VC	N	N	Continuidad	-	G	Informativa		todos	G	PR	INF	Reproducido		
68	0710p	AA	E	VC	N	N	Continuidad	-	G	Informativa		todos	G	PR	INF	Reproducido		
69	0710p	AA	E	VC	N	N	Continuidad	-	G	Informativa		todos	G	PR	INF	Reproducido		
70	0710p	AA	E	VC	N	N	Continuidad	-	G	Informativa		todos	G	PR	INF	Reproducido		
71	0710p	AA	E	VC	N	N	Continuidad	-	G	Informativa		todos	G	PR	INF	Reproducido		
72	0710p	AA	E	VC	N	N	Continuidad	-	G	Informativa		todos	G	PR	INF	Reproducido		
73	0710p	AA	E	VC	N	N	Continuidad	-	G	Informativa		todos	G	PR	INF	Reproducido		
74	0710p	AA	E	VC	N	N	Continuidad	-	G	Informativa		todos	G	PR	INF	Reproducido		
75	0710p	AA	E	VC	N	N	Continuidad	-	G	Informativa		todos	G	PR	INF	Reproducido		
76	0710p	AA	E	VC	N	N	Continuidad	-	G	Informativa		todos	G	PR	INF	Reproducido		
77	0710p	AA	E	VC	N	N	Continuidad	-	G	Informativa		todos	G	PR	INF	Reproducido		
78	0710p	AA	E	VC	N	N	Continuidad	-	G	Informativa		todos	G	PR	INF	Reproducido		
79	0710p	AA	E	VC	N	N	Continuidad	-	G	Informativa		todos	G	PR	INF	Reproducido		
80	0710p	AA	E	VC	N	N	Continuidad	-	G	Informativa		todos	G	PR	INF	Reproducido		
81	0710p	AA	E	VC	N	N	Continuidad	-	G	Informativa		todos	G	PR	INF	Reproducido		
82	0710p	AA	E	VC	N	N	Continuidad	-	G	Informativa		todos	G	PR	INF	Reproducido		
83	0710p	AA	E	VC	N	N	Continuidad	-	G	Informativa		todos	G	PR	INF	Reproducido		
84	0710p	AA	E	VC	N	N	Continuidad	-	G	Informativa		todos	G	PR	INF	Reproducido		
85	0710p	AA	E	VC	N	N	Continuidad	-	G	Informativa		todos	G	PR	INF	Reproducido		
86	0710p	AA	E	VC	N	N	Continuidad	-	G	Informativa		todos	G	PR	INF	Reproducido		
87	0710p	AA	E	VC	N	N	Continuidad	-	G	Informativa		todos	G	PR	INF	Reproducido		
88	0710p	AA	E	VC	N	N	Continuidad	-	G	Informativa		todos	G	PR	INF	Reproducido		
89	0710p	AA	E	VC	N	N	Continuidad	-	G	Informativa		todos	G	PR	INF	Reproducido		
90	0710p	AA	E	VC	N	N	Continuidad	-	G	Informativa		todos	G	PR	INF	Reproducido		
91	0710p	AA	E	VC	N	N	Continuidad	-	G	Informativa		todos	G	PR	INF	Reproducido		
92	0710p	AA	E	VC	N	N	Continuidad	-	G	Informativa		todos	G	PR	INF	Reproducido		
93	0710p	AA	E	VC	N	N	Continuidad	-	G	Informativa		todos	G	PR	INF	Reproducido		
94	0710p	AA	E	VC	N	N	Continuidad	-	G	Informativa		todos	G	PR	INF	Reproducido		
95	0710p	AA	E	VC	N	N	Continuidad	-	G	Informativa		todos	G	PR	INF	Reproducido		
96	0710p	AA	E	VC	N	N	Continuidad	-	G	Informativa		todos	G	PR	INF	Reproducido		
97	0710p	AA	E	VC	N	N	Continuidad	-	G	Informativa		todos	G	PR	INF	Reproducido		
98	0710p	AA	E	VC	N	N	Continuidad	-	G	Informativa		todos	G	PR	INF	Reproducido		
99	0710p	AA	E	VC	N	N	Continuidad	-	G	Informativa		todos	G	PR	INF	Reproducido		
100	0710p	AA	E	VC	N	N	Continuidad	-	G	Informativa		todos	G	PR	INF	Reproducido		

Figura 1: Datos del libro de ANAYA de 3º ESO.

Para poder realizar una comparación entre los libros de texto se han organizado los datos en porcentajes según la cantidad que haya en el libro correspondiente para cada categoría y se han realizado gráficas comparativas para cada una de las categorías establecidas:

3.ESO.xlsx - Microsoft Excel																																					
InicioInsertarDiseño de páginaFórmulasDatosRevisarVistaAcrobat																																					
Calibri11A A																																					
PegarFuenteAlineaciónPorcentajeFormato condicionalDar formato como tablaEstilos de celdasInsertarEliminar FormatoCeldasAutosumaRellenarOrdenar y filtrarBuscar y seleccionarModificar																																					
I5=CONTAR.SI(SMMultiplo!C2:C62;"L")/B5																																					
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC									
1	Libros	Cantidad	Lugar en el tema										Contexto					Forzado					Personalizado					Contenido extra matemático					Contenido extra no matemático				
2			M	E	AA	AD	P	VC	L	P	C	N	S	N	S	Sa	So	G	A	N	AN	E	HM	CN	CS	EF	ECC	EPV									
3	Anaya	68	3%	21%	19%	57%	0%	57%	4%	10%	28%	88%	12%	87%	7%	3%	3%	1%	24%	0%	0%	0%	0%	28%	3%	0%	0%	0%									
4	SMPitágoras	50	4%	30%	14%	52%	0%	34%	20%	32%	14%	76%	24%	98%	0%	2%	0%	8%	10%	2%	0%	0%	0%	24%	8%	8%	0%	0%									
5	SMMultiplo	61	7%	18%	26%	48%	3%	61%	8%	5%	26%	77%	21%	93%	2%	2%	3%	23%	0%	5%	0%	0%	0%	30%	8%	8%	0%	0%									
6	Santillana	39	3%	21%	26%	44%	8%	49%	26%	13%	13%	62%	38%	90%	0%	8%	3%	13%	23%	3%	0%	3%	0%	18%	5%	0%	0%	0%									
7	Edeivives	60	2%	28%	28%	42%	0%	52%	27%	3%	18%	32%	68%	85%	2%	7%	7%	3%	42%	7%	0%	0%	0%	25%	2%	2%	0%	0%									
8																																					

Figura 2: Datos de 3º ESO.

Por ejemplo, en la gráfica correspondiente a los libros de 3º de ESO, en la categoría correspondiente al contexto, se puede observar que la mayor parte de las actividades de las cuatro editoriales analizadas, se refieren a actividades de la vida cotidiana, mientras que en el resto de los tipos de contexto hay cierta variabilidad según el libro de texto. Así, en el libro de SM de la línea Pitágoras hay una gran

homogeneidad entre los distintos tipos de contexto, manifestándose todos de una forma equilibrada, mientras que, el libro de SM de la línea Múltiplo presenta más actividades de índole científico que laboral o público. En los libros de Santillana y Edelvives hay más actividades de índole laboral que científica y más científicas que públicas. Y el de Anaya presenta un gran número de actividades de tipo científico.

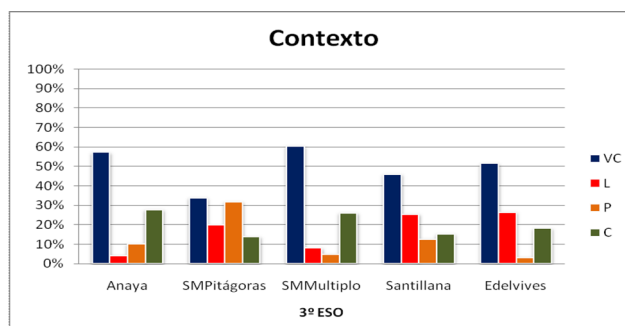


Figura 3: Tipos de contexto en 3º ESO.

En cambio si nos centramos en las actividades de los libros de 1º de bachillerato, podemos observar claramente el cambio efectuado en el tipo de contextos:

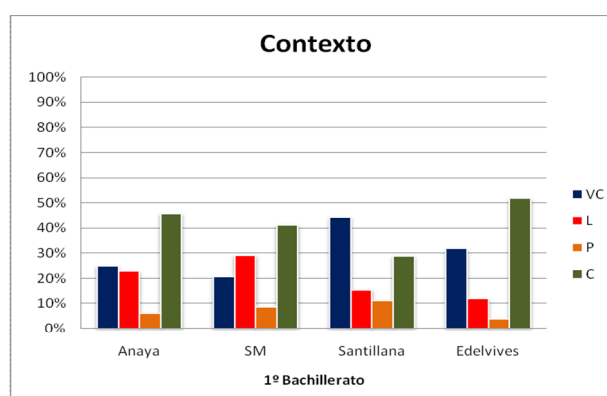


Figura 4: Tipos de contexto en 1º bachillerato.

La mayor parte de las actividades hacen referencia a un contexto científico salvo en el libro de Santillana que siguen predominando las actividades sobre la vida cotidiana. Estas aparecen en segundo lugar en el resto de los libros salvo en SM que dedica un gran número al mundo laboral. Las cuatro editoriales coinciden en dedicarle pocas actividades a aquellas relativas al ámbito público.

Si nos fijamos qué tipo de contextos muestra una editorial en los diferentes cursos, por ejemplo Santillana, tenemos:

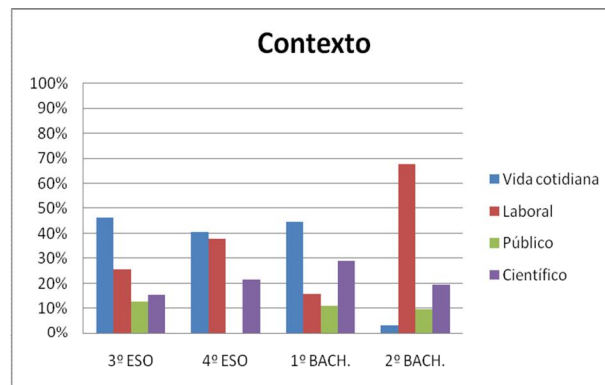


Figura 5: Comparación tipos de contextos por curso.

Vemos que en los tres primeros cursos predominan las actividades relacionadas con la vida pública y en 2º de bachillerato hay un gran número de actividades sobre la vida laboral. Hay muy pocas actividades que incluyan un contexto público en cualquiera de los cuatro cursos y las actividades de tipo científico van aumentando a medida que se progresa de curso.

Conclusiones

En este estudio nos hemos centrados en el análisis de las actividades contextualizadas de los libros de texto. El sistema de categorías que hemos creado nos permite analizar las actividades, destacando sus características para contrastar si reflejan o no la realidad. Aspectos como la relación con el mundo laboral, la vida cotidiana, y otras ciencias, han sido evaluados para cada una de las actividades seleccionadas de los libros de texto. Esto nos ha permitido comprobar el tipo de contextos que se utilizan, las relaciones con otras ciencias, el nivel de complejidad de las actividades, o las competencias matemáticas y no matemáticas que desarrollan.

Los libros de texto muestran diferentes tipos de actividades entre unos cursos y otros. Así, hemos visto como en los libros de tercero y cuarto de la ESO se utiliza en más ocasiones situaciones vinculadas a la vida cotidiana, mientras que en bachillerato abundan más las actividades de carácter científico. También existen diferencias en la utilidad y el tipo de ilustraciones que acompañan el enunciado de las actividades, siendo más frecuentes la de carácter informativo en la secundaria obligatoria que en bachillerato.

Un aspecto importante a destacar es el nivel de complejidad de las actividades, puesto que en su mayoría corresponden a un nivel de reproducción, siendo escasas aquellas que exigen un nivel de conexión o reflexión.

El intento de acercar la realidad al aula por parte de las editoriales analizadas provoca que muchos enunciados resulten demasiado artificiales, lo que difícilmente permiten conseguir el objetivo deseado.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado en el marco del Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación, de la Junta de Castilla y León, ODEN EDU/1728/2009 dentro del proyecto con referencia SA001B10-1.

Referencias bibliográficas

- González, M.T. (2002). *Sistemas simbólicos de representación en la enseñanza del Análisis Matemático: Perspectiva histórica*. Tesis doctoral, Ediciones Universidad de Salamanca. Salamanca.
- Gravemeijer, K. (2008). RME theory and mathematics teacher education. En D. Tirosh y T. Wood *The international handbook of mathematics teacher education, vol 2, Tools and processes in mathematics teacher education*, pp. 283-302, Sense Publishers. Rotterdam.
- MEC (2007) R.D. 1631/2006 de 29 de diciembre. *Boletín oficial del Estado* nº 5 (5-enero-2007).
- Monterrubio, M.C. (2007). *Modelos de valoración de manuales escolares de matemáticas*. Tesis doctoral, Universidad de Valladolid. Valladolid.
- Monterrubio, M. C.; Ortega, T. (2009). Creación de un modelo de valoración de textos matemáticos. Aplicaciones. En M. J. González, M. T. González & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Ecuación Matemática XIII*, pp. 37-53, SEIEM. Santander.
- Moreno, M. (2005). El papel de la didáctica del Cálculo: evolución, estado actual y retos futuros. *Actas del IX Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*, pp. 81-96 SEIEM. Córdoba
- Niss, M. (1999). Competencies and Subject Description, *Uddanneise*, 9, pp. 21-29.
- OCDE. (2006). *PISA 2006: Marco de la evaluación. Conocimientos y habilidades en Ciencias, Matemáticas y Lectura*. Santillana. Madrid.

- Pinto, J.; González, M.T. (2004). La formación de profesores de enseñanza secundaria en España y Méjico. *Simposio iberoamericano de enseñanza de las matemáticas*. Disponible en: [www.iberomat.uji.es/carpeta/comunicaciones/ 64_teresa_gonzalez.doc](http://www.iberomat.uji.es/carpeta/comunicaciones/64_teresa_gonzalez.doc)
- Pinto, J.; González, M.T. (2008). Pedagogical Content Knowledge of a novel teacher: a case from the teaching of graphical representation. En *Proceedings of the 11th International Congress on Mathematical Education (ICME)*. Monterrey, México. Recuperado el 12 de agosto de 2008, de <http://tsg.icme11.org/document/get/477>
- Sierra, M.; González, M.T.; López, C. (1999). Evolución histórica del concepto de límite funcional en los libros de texto de bachillerato y curso de orientación universitaria: 1940-1995. *Enseñanza de las Ciencias*, 17 (3), 463-476.
- Sierra, M.; González, M.T.; López, C. (2003). El concepto de continuidad en los manuales españoles de enseñanza secundaria de la segunda mitad del siglo XX. *Educación Matemática*, 15 (1), pp. 21-49.
- Vila, A.; Callejo, M.L. (2004). *Matemáticas para aprender a pensar: El papel de las creencias en la resolución de problemas*, Narcea. Madrid.

ATLAS TI COMO HERRAMIENTA DE ANÁLISIS DE LA PRÁCTICA DOCENTE: EL CASO DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

Jeannette Vargas Hernández, María Teresa González Astudillo (*), Salvador Llinares Ciscar (**)

Universidad Colegio Mayor de Cundinamarca. Colombia, Universidad de Salamanca (), Universidad de Alicante (**)*

Resumen

En esta comunicación se describe la manera cómo se clasifica y realiza un análisis de primer orden sobre los datos obtenidos en una investigación cuyo objetivo es caracterizar la práctica de los docentes universitarios de precálculo del concepto función exponencial. Para ello se hace uso de ATLAS.ti que permite almacenar todos los datos, codificarlos, categorizarlos y analizar los resultados obtenidos a partir de la noción de modelación de la descomposición genética.

Abstract

This paper describe how to make a first order analysis of data obtained in a research which main goal is to characterize the university teacher practice when he/her is teaching the exponential function. For this, we use ATLAS.ti software that permits to store the data, categorize them. This analytical process help us to analyze data from a theoretical perspective using the notion of modelization of genetic decomposition.

Vargas, J., González, M.T., Llinares, S. (2011). Atlas TI como herramienta de análisis de la práctica docente: el caso de la función exponencial. En M.M. Moreno, N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los Grupos de Investigación de la SEIEM* (pp. 187-199). Lleida.

Introducción

La utilización de las nuevas tecnologías en la investigación educativa ha obligado a los investigadores a perfeccionar los métodos a seguir así como la selección de los instrumentos, herramientas y técnicas más adecuadas para conseguir los objetivos planteados. Si repasamos las diferentes fases de una investigación: selección de sujetos, metodología a aplicar, el diseño de instrumentos, la recogida de datos,...en cada uno de esos momentos se ha logrado que las nuevas tecnologías formen parte del proceso investigador como ayuda o enriquecimiento de dicho proceso. Así nos han permitido:

- Acceso a los sujetos objeto de investigación a través de diversos medios: páginas web, correo electrónico, redes sociales,...
- Diseño de una metodología de aula innovadora que implique el uso de las TIC.
- La recogida de los datos mediante audiograbadoras digitales, de cámaras de vídeo, cámaras web o software de captura de pantallas (Codes, 2009)
- Modificar el centro de interés, por ejemplo, el análisis de los gestos realizados por los alumnos cuando resuelven un problema matemático no habría sido posible sin el uso de cámaras de vídeo.

En general, cuando se habla de metodología cualitativa, el trabajo del investigador se ha caracterizado por ser bastante artesanal, teniendo que superar grandes dificultades para estructurarlo y sistematizarlo, en definitiva, es un trabajo muy complejo que requiere mucho tiempo y reflexión por parte del investigador.

A partir de la década de los 90, fueron apareciendo herramientas informáticas como ayuda para facilitar el análisis de datos cualitativos que conforman lo que hoy en día se conoce bajo las siglas CAQDAS (Computer Assisted Qualitative Data Analysis). Los investigadores han sido reacios a usar estos programas debido al uso lineal y las restricciones que imponían. Pero hoy en día, muchas de estas barreras han sido superadas y encontramos programas que pueden apoyar a los investigadores en las diferentes fases de la investigación y que pueden ser clasificados en diversas categorías según su uso:

- Los de asistencia a la transcripción: SOUNDSCRIBER, TRANSANA
- Los orientados a la lógica como AQUAD
- Los que permiten análisis de contenido TESTQUES
- Los que ayudan al análisis ATLAS/ti, NUDIST, QDAMiner, NVivo, MaxQDA.

Es importante señalar que la aplicación de estos paquetes se debe asumir con atención, criticidad y reflexión (Farias y Montero, 2005), generando un acercamiento centrado en las necesidades del investigador o del tema.

Atlas.ti como recurso para el análisis de datos

El programa ATLAS.ti fue desarrollado en Berlín mediante un proyecto de colaboración entre el departamento de Psicología de la Universidad Libre de Berlín y Thomas Muhr y se sigue perfeccionando en nuestros días. Se usa como medio de almacenamiento, categorización, codificación y estructuración de los datos obtenidos en una investigación a través del diseño de diagramas, mapas y redes. Permite el almacenamiento de los datos en un único lugar (*unidad hermenéutica*) a partir del que se va a hacer el análisis. Posteriormente, se segmentan, se asignan códigos a cada segmento incluyendo comentarios y anotaciones (*memos*) y se forma así una base relacional de datos a partir de los que el programa genera redes semánticas (*networks*) para que finalmente sean interpretados por el investigador.

Los objetos o elementos que constituyen el programa son:

- *Documentos primarios*: documentos de texto, gráficos, sonoros o visuales situados en el disco duro. El programa no los modifica ni los guarda sino que almacena referencias a ellos.
- *Citas*: fragmentos de los documentos primarios seleccionados por su significación en relación con la investigación. Puede ser una cadena de texto, un gráfico, una imagen, ...
- *Códigos*: indicadores de conceptos o expresiones que se van asignando a las citas seleccionadas.
- *Notas (memos)* textos breves con ideas asociadas a algunos de los elementos
- *Familias*: conjunto de objetos que comparten una cualidad, pueden ser familias de códigos, de documentos primarios, etc. Se suelen usar como filtros en la búsqueda de los miembros de algún objeto.
- *Redes*: están compuestas por nodos y relaciones creados a través de un editor específico. Los nodos pueden ser cualquiera de los objetos del programa y las relaciones son los nexos establecidos entre esos nodos.

Todos los objetos llevan datos sobre la fecha y hora de su creación e incluso, si nuestro trabajo es en equipo, se pueden distinguir las aportaciones de los distintos miembros del equipo.

Ejemplo de uso en una investigación sobre la práctica profesional del profesor de matemáticas: El caso de la enseñanza de la función exponencial

En esta comunicación se pretende mostrar un ejemplo del proceso de análisis de datos en el caso de una investigación sobre la práctica docente en torno a la función exponencial.

Para indagar sobre la forma como se construye en el aula el concepto de función exponencial, se han utilizado ciertas herramientas conceptuales e informáticas. En cuanto a la primera adoptamos el constructo modelación de la descomposición genética (Gavilán, 2005) generado a partir de la teoría APOS (Dubinsky, 1991) para explicar la práctica del docente entendida como “una descripción de los mecanismos de construcción que el profesor modela, de la secuencia de estas modelaciones y de la organización de las relaciones que establece entre dichos mecanismos a través del uso de diferentes *instrumentos* de la práctica”. Y, en relación con el segundo aspecto, optamos por utilizar el programa ATLAS.ti para llevar a cabo el proceso de análisis de la práctica de los docentes.

Esta investigación es un estudio de casos de dos¹ docentes universitarios de precálculo con una experiencia profesional de 15 y 10 años respectivamente. Los instrumentos utilizados para la recogida de datos de cada sesión de aula correspondientes a la enseñanza de la función exponencial fueron: una entrevista inicial sobre la planificación, un audio y videograbación de las sesiones correspondientes a la implementación y una entrevista final, por cada sesión, de contraste entre el investigador y cada docente.

Los videos junto con las grabaciones de voz tanto de las clases como de las entrevistas fueron transcritos en su totalidad e incorporados a una unidad hermenéutica del programa. Es importante señalar que el programa es solamente una ayuda para el investigador, puesto que, en definitiva, tiene que ser él mismo quien debe ingresar tanto los documentos, como los videos, grabaciones de voz y demás datos que requiera para establecer relaciones de acuerdo con los objetivos planteados. La siguiente imagen (figura 1) del documento² 20 muestra una parte de la entrevista posterior a la sesión 5, que ya forma parte de la *Unidad Hermenéutica* de ATLAS.ti :

¹ En esta comunicación sólo se va a hacer referencia a uno de los casos, el docente que se ha denominado caso 1.

² La numeración de los documentos es asignada automáticamente por el programa y puede ser reordenada según lo considere el investigador. En nuestro caso el orden definido por la investigadora fue: primero las 15 sesiones de clase y luego una a una las entrevistas del caso 1 seguidas de las entrevistas correspondientes al caso 2 y finalmente las entrevistas iniciales. Por lo tanto el documento 20 corresponde a la entrevista 5 realizada al caso 1 sobre una sesión de clase.

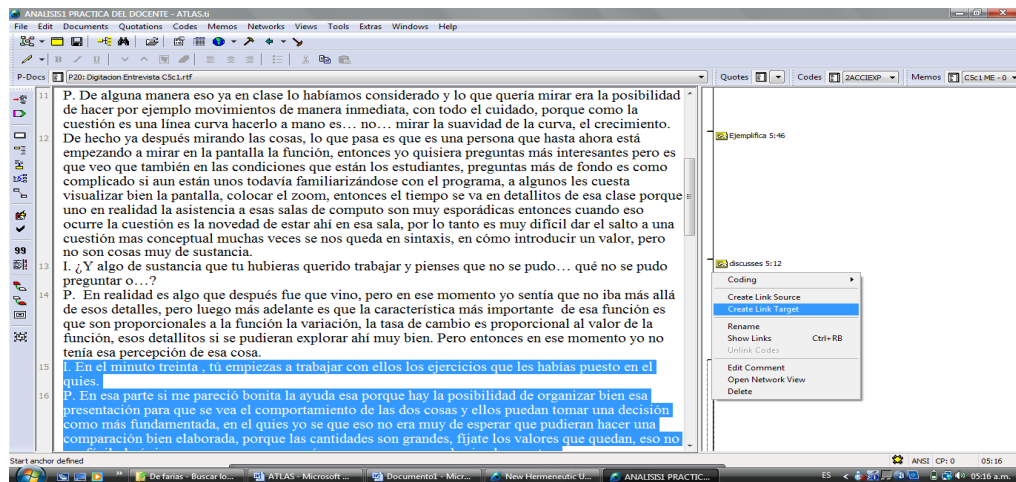


Figura 1. Extracto de una entrevista.

Después de realizar por un lado las transcripciones y por otro, a nivel más teórico, la descomposición genética³ de la función exponencial, se generaron categorías relacionadas con las sucesivas fases de dicha descomposición a las que se les asignaron códigos y una descripción de su significado. Dichos códigos, por lo tanto, se refieren a los mecanismos que modela el docente: interiorización⁴, coordinación⁵, encapsulación⁶, inversión⁷, generalización⁸. A partir de esa codificación se fueron seleccionando los segmentos significativos en relación con las categorías previamente establecidas. Esto permitió observar los mecanismos de construcción que el profesor propicia para que sus estudiantes construyan el conocimiento en cada sesión de clase (Gavilán, J.M.; García, M. & Llinares, S. 2007).

³ Una descomposición genética es un conjunto estructurado de construcciones mentales, las cuales pueden describir cómo el concepto puede ser desarrollado en la mente de un individuo (Asiala et al., 1996).

⁴ La repetición y la reflexión sobre las acciones permiten caracterizar el mecanismo de interiorización (Dubinsky, 1996) entendido como “traducción de una sucesión de acciones materiales a un sistema de operaciones interiorizadas” (Beth y Piaget 1966, p. 206).

⁵ Coordinación: A partir de dos o más procesos se construye un nuevo proceso.

⁶ Encapsulación: Transformación de un proceso en objeto.

⁷ Inversión: Una vez que existe un proceso internamente, es posible para sujeto pensar en él en reversa, no necesariamente en el sentido de deshacerlo, sino como un medio de construir un nuevo proceso que consista de *revertir* el proceso original.

⁸ Generalización: Aplicación de un esquema en situaciones diferentes a los usos previamente construidos.

En esta comunicación, por razones de extensión, sólo vamos a hacer referencia a tres de esos mecanismos: generalización, inversión y coordinación. Un ejemplo de un segmento de una clase ya codificado se puede ver a continuación:

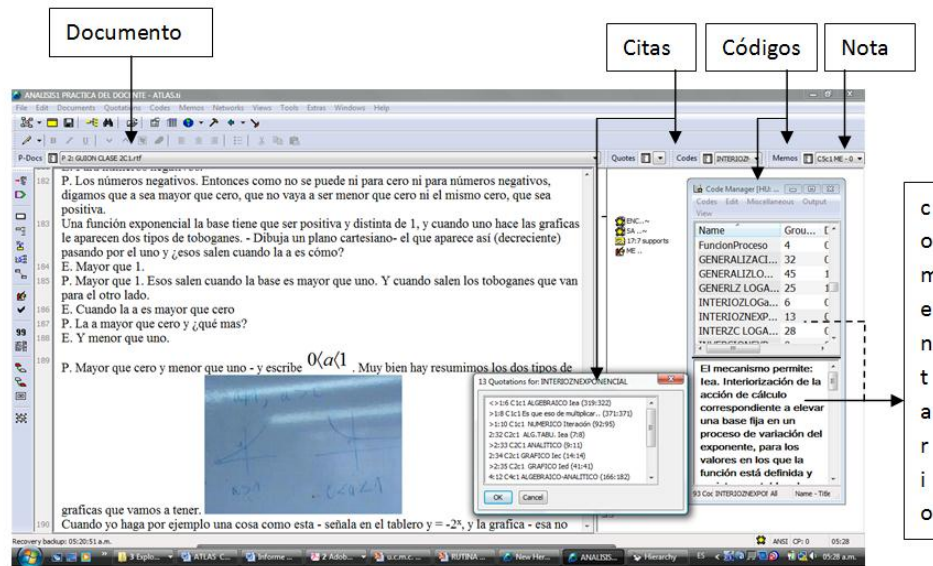


Figura 2. Información de pantalla sobre documentos en ATLAS.ti

En esta investigación se han establecido los códigos de acuerdo con los cuales va a clasificar los segmentos de clase con anterioridad al análisis propiamente dicho, pero se puede hacer sobre la marcha a medida que se van revisando los datos obtenidos en la investigación.

El programa también permite incorporar un comentario sobre cada uno de los códigos que, en nuestro caso, corresponde a la interpretación e indicadores de cada mecanismo, por ejemplo, alguno de los códigos que se asignaban fueron los relativos al mecanismo de generalización y el comentario incluido por la investigadora se refiere a la concreción de este mecanismo en relación con la función exponencial, que incluye:

Mecanismo: Generalización

La generalización de la función exponencial objeto $f(x) = b^x$ por diversas transformaciones, relacionando los diferentes parámetros de la representación algebraica con sus efectos en la representación gráfica (*Gea*).

Aplicación de la generalización anterior a los procesos de solución de ecuaciones exponenciales (*Geb*).

Utilización de la función exponencial en diferentes contextos: crecimiento de poblaciones, decaimiento, temperatura e interés compuesto, comportamiento radiactivo (*Gec*).

A partir de la codificación, la investigadora interpreta las acciones de los docentes y, guiada por las intenciones que estos últimos han manifestado en las entrevistas, asigna el mecanismo Generalización y luego dentro de cada cita o segmento el código *Gea*, *Geb* o *Gec* según corresponda a las acciones marcadas en el segmento. Se procede de forma similar asignando cada uno de los mecanismos que forman parte de la descomposición genética del concepto de función exponencial a diferentes segmentos. Este proceso se realiza de una forma ágil permitiendo establecer relaciones y vínculos entre los diferentes documentos que constituyen los datos. De esta manera se pueden vincular los segmentos de las clases con las afirmaciones del docente durante las entrevistas.

Para observar estas relaciones y vínculos entre los segmentos de la entrevista y las sesiones de clase se puede utilizar la herramienta *hierarchy*. A continuación se presenta un ejemplo que corresponde a la segunda entrevista realizada al docente. Los encabezados de la forma [17:--] corresponden a la entrevista que fue guardada como documento 17 y los encabezados [2:--] indican que se refieren a la sesión de clase número dos. Así [17:6] es el sexto segmento de dicha entrevista aparece relacionado con el noveno segmento de la sesión de clase [2:9] al cual se le asigna el *código* correspondiente al mecanismo de interiorización de la función exponencial y tiene un *memo* anexo que la investigadora escribió el 30 de octubre del año 2009.

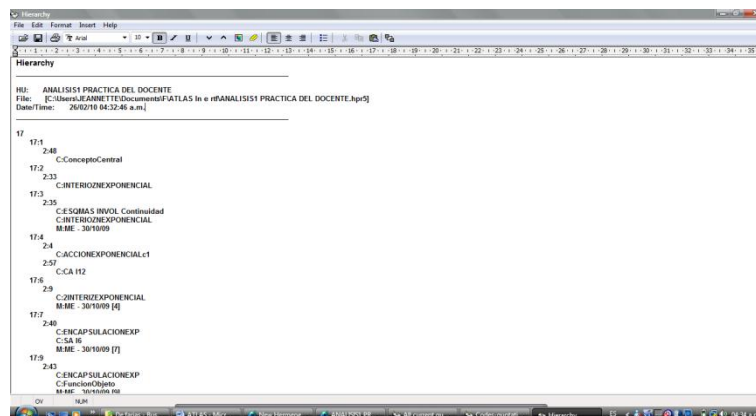


Figura 3. Jerarquía entre vínculos de segmentos de diferentes documentos.

Los *memos* que la investigadora ha asignado a algunos *códigos* pueden corresponder al análisis o a diversos comentarios sobre las razones de la codificación, aclaraciones o elementos que se podrían considerar para profundizar en un análisis con mayor grado de profundidad.

Los nexos entre segmentos de las entrevistas y segmentos de las sesiones de clase también pueden ser observados en pantalla. En la siguiente imagen (figura 4) el docente durante la tercera entrevista explica por qué escogió en su sesión de clase [3:14] esa construcción del número e y qué pasos pretende que los estudiantes comprendan al igual que aquellos que considera secundarios.

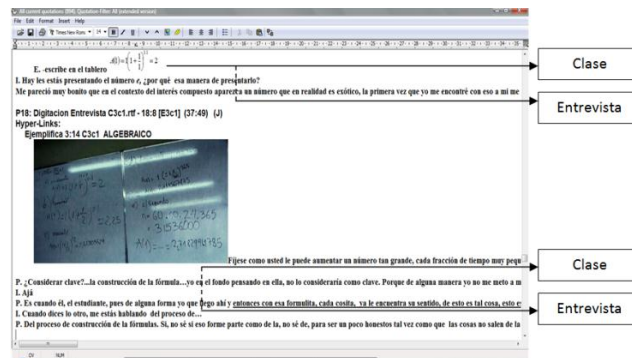


Figura 4. Nexos entre segmentos de entrevista y sesión de clase.

Una vez el investigador procede a codificar las sesiones de clase, identificando segmentos o citas a los que asigna códigos y subcódigos y estableciendo memos cuando lo considera necesario, es posible visualizar la información de diferentes maneras: tal como aparece en las figuras anteriores o mediante un editor especial, una especie de pizarra a la que podemos incorporar cualquiera de los objetos que se han mencionado. Estas redes permiten profundizar en las relaciones entre los datos que se van obteniendo.

En la siguiente imagen (figura 5) aparece una red o esquema que permite mostrar una característica relevante del programa de análisis seguido como es la de establecer relaciones entre diferentes tipos de datos. Este ejemplo se apoya en la construcción del concepto de función logaritmo como inversa de la exponencial. De acuerdo con Wieleitner (1932), Euler fue el primero que vio en la logaritimación una de las dos operaciones inversas de la elevación de potencias, con lo cual se hizo posible aplicar a los logaritmos procedimientos algebraicos. :

*dato valorem quocunque affirmativo ipsius y, conveniens datibur valor pisius z, ut fit $a^z = y$; iste autem valor ipsius z, quatenud tanquam Functio ipsiys y spectatur, oari solet LOGARITHMUS ipsius y*⁹ (Euler, p. 73).

Por otro lado, los resultados de investigaciones en educación matemática advierten que los itinerarios académicos para la enseñanza de estas funciones están

⁹ Dado un valor afirmativo cualquiera de y vendrá dado el valor de z conveniente para que sea $a^z = y$; este valor de z contemplado en cuanto función de y , suele llamarse LOGARITMO de y .

ligados inicialmente al conocimiento de la función exponencial y el estudio posterior¹⁰ de la función logarítmica como su inversa, adquiriendo así la exponencial un papel intermediario (De Faria, 2006; Berezovski, 2004; Kastberg, 2002). El esquema que nos presenta el programa en relación con este mecanismo de inversión de la función exponencial para obtener la logarítmica, es el siguiente:

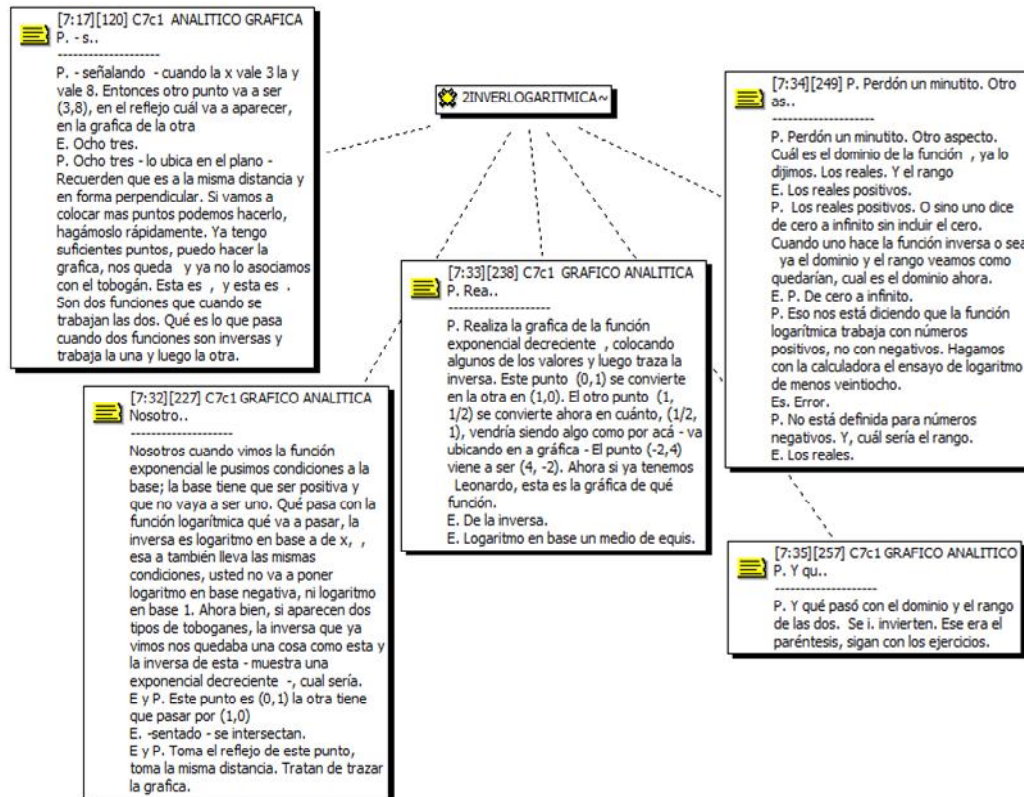


Figura 5. Inversión de la función exponencial como mecanismo de construcción de la logarítmica.

En este caso (figura 5) se han identificado diferentes segmentos para construir la función logarítmica a partir de la función exponencial, cuando se construye la gráfica de la función logarítmica [7:17], para calcular su corte con el eje y [7:32], estudiar su crecimiento [7:33] o determinar el dominio y el rango [7:34] y [7:35].

Este análisis de primer orden permite, no sólo realizar la triangulación de todos los datos recogidos: video de clase, voz de clase, entrevistas con el docente, sino

¹⁰ Justo al contrario que la génesis histórica, puesto que inicialmente surgieron los logaritmos para el trabajo de cálculos en Astronomía con números grandes, mientras que la función exponencial es bastante más tardía (Vargas y González, 2007).

también la triangulación del análisis puesto que varios investigadores pueden trabajar sobre la misma *Unidad Hermenéutica* y a partir de una descomposición genética establecida (o categorización previamente establecida), segmentar la clase individualmente, asignar códigos y discutir las coincidencias de codificación para validar cada categoría asignada. Dicha segmentación de la clase permite caracterizar la práctica de cada docente ya sea por su presencia frecuente o por su ausencia, por ejemplo, en el caso del docente 1 se ha comprobado que modela el mecanismo de interiorización, como se puede ver en la siguiente figura, pero no el de coordinación que no aparece en ningún momento:

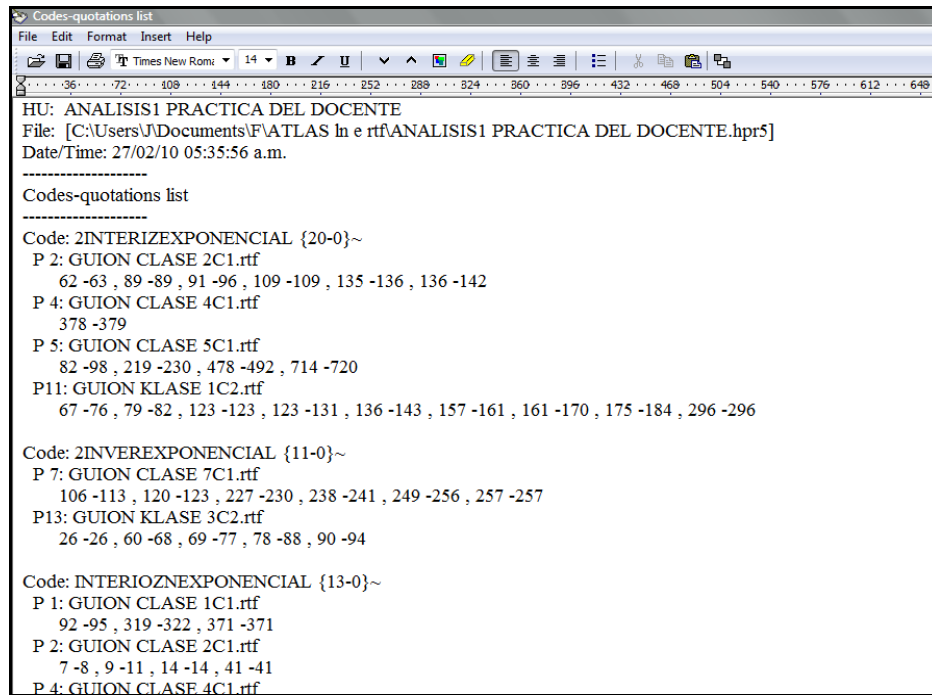


Figura 6. Mecanismo de interiorización

Al indagar en los diferentes informes que permite crear ATLAS.ti se pudo advertir efectivamente una ausencia *del mecanismo de coordinación entre los procesos de interiorización Iee y Ief* que puede ser debida a que el profesor se ha centrado en la reflexión sobre ciertas características de la gráfica de la función exponencial como son cuándo es creciente o decreciente, el corte con el eje x o la

existencia de una asíntota (proceso *lee*) pero no ha reflexionado sobre la tasa de variación¹¹ de la función (proceso *lef*).

Aún cuando este análisis de primer orden ya permite establecer cierta caracterización, es necesario poder comparar la descomposición genética previamente elaborada por los investigadores con la modelación de la descomposición genética que presenta cada caso y para ello es necesario reconstruir el proceso que ha seguido el docente a lo largo de todas las sesiones de clase, por lo tanto, si en el análisis de primer orden se descompuso la clase por mecanismos ahora se va a recomponer en el análisis de segundo orden.

Conclusiones

Con el programa *ATLAS.ti* el proceso de análisis de entrevistas, grabaciones de audio y video se logra concretar con las redes conceptuales que ayudan al investigador en la interpretación de los resultados y avanzar hacia el logro de los objetivos de investigación.

La clasificación de los datos y los nexos que se establecen pueden ser editados con *ATLAS.ti* en diferentes formatos; cada uno de ellos favorece o enriquece un aspecto del análisis, así se puede editar bloques por mecanismo y mediante su lectura supervisar la codificación, como también los listados de cada código, lo que permite un mayor control de un vasto número de documentos en tiempos reducidos logrando de esta manera economizar tiempo en labores mecánicas que se puede dedicar para lograr mayor profundidad del análisis de cada caso.

Los investigadores en Educación Matemática han venido actualizando sus dominios metodológicos mediante el uso adecuado de los paquetes tecnológicos. Sin embargo, su empleo no se ha generalizado, lo cual puede incentivarse con la posibilidad de recurrir a paquetes tecnológicos desde el inicio de la formación de investigadores.

Referencias

Asiala, M. et al. (1996) A framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. *Research in Collegiate Mathematics Education*, 2(3), pp.1-32.

¹¹ Este proceso es importante en relación con la función exponencial porque estas funciones se pueden caracterizar porque su razón de cambio es proporcional al valor de la función en ese punto (Thompson, 2008).

- Berezovski, T. (2004). *An inquiry into high school students's understanding of logarithms*. Thesis. Simon Fraser University. Canada.
- Beth, E.W. & J. Piaget (1996) *Mathematical Epistemology and Psychology*. Reidel. Dordrecht.
- Codes, M. (2009). *Análisis de la comprensión de los conceptos de serie numérica y su convergencia en estudiantes de primer curso de universidad utilizando un entorno computacional*. Tesis doctoral. Universidad de Salamanca. Salamanca
- De Faria, (2006) Ingeniería Didáctica en: *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*. 1(2), pp. 1-9.
- Dubinsky, E. (1991) Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall (ed.) *Advanced mathematical thinking*, pp. 95-126, Reidel. London
- Dubinsky, E. (1996) Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación Matemática*, 8(3), pp. 24-41.
- Euler, L (1748) *Introductio in Analysin infinitorum* Lausanne: Marcum Michaellem Bousquet y socios. (Edición facsimil editada por SAEM: Thales y la Real Sociedad Matemática española).
- Farias, L. y Montero, M. (2005). De la transcripción y otros aspectos artesanales de la investigación cualitativa. *Internacional Journal of Qualitative Methods*, 4(1) p. 7.
- Gavilán, J.M. (2005). *El papel del profesor en la enseñanza de la derivada. Análisis desde una perspectiva cognitiva*. Tesis doctoral. Universidad de Sevilla. Sevilla
- Gavilán, J.M.; García, M. & Llinares, S. (2007). La modelación de la descomposición genética de una noción matemática. Explicando la práctica del profesor desde el punto de vista del aprendizaje de los estudiantes. *Educación Matemática*, 19(2), pp. 5-39.
- Gavilán, J.M.; García, M. & Llinares, S. (2007). Una perspectiva para el análisis de la práctica del profesor de matemáticas. Implicaciones metodológicas. *Enseñanza de las Ciencias*, 25 (2), 157-170.
- Kastberg, S. E. (2002). *Understanding Mathematical Concepts: The case of the Logarithmic Function*. Thesis. University of Georgia. Georgia.

- Thompson, P. (2008) Conceptual analysis for mathematical ideas: some spadework at the foundations of mathematics education. In O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano & A.Sépulveda (Eds.), *Proceedings of the Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol 1, pp. 45-64). Morélia, Mexico: PME. Disponible en <http://patthompson.net/PDFversions/2008ConceptualAnalysis.pdf>.
- Vargas, J. y González, M.T. (2007) Segmentos de la historia: la función logarítmica. *Matemática: Enseñanza Universitaria*, 15(2), 129-144
- Wieleitner, H. (1932). *Historia de las Matemáticas*, Editorial Labor. Barcelona.

GRUPO:

**DIDÁCTICA DE LA ESTADÍSTICA,
PROBABILIDAD Y COMBINATORIA (DEPC)**

Coordinador: **Juan Jesús Ortiz de Haro**, Universidad de Granada

LAS TABLAS DE CONTINGENCIA: UN OBJETO SEMIÓTICO COMPLEJO.

Cañadas, G.; Arteaga, P. y Batanero, C.

ESTUDIOS SOBRE LOS PROBLEMAS TERNARIOS DE PROBABILIDAD CONDICIONAL DE NIVEL N_0

Edo, P.I. y Huerta, P.

INSTRUMENTOS DE MEDICIÓN DE ACTITUDES HACIA LA ESTADÍSTICA: LA ESCALA EAEE PARA PROFESORES.

Estrada, A.

CREENCIAS SOBRE LA ALEATORIEDAD DE FUTUROS PROFESORES DE EDUCACIÓN PRIMARIA.

Mohamed, N. y Ortiz, J.J.

MODOS FUNDAMENTALES DE RAZONAMIENTO ESTADÍSTICO EN EGRESADOS DE LICENCIATURA EN PSICOLOGÍA EDUCATIVA.

Pérez, C.; Batanero, C. y Contreras, J.M.

LA COMPRENSIÓN DE LA NOCIÓN DE VARIACIÓN ESTADÍSTICA DE ESTUDIANTES DE SECUNDARIA.

Sánchez, E. y Orta, J.A.

ERRORES Y DIFICULTADES DE ESTUDIANTES DE PSICOLOGIA EN RELACIÓN A INTERVALOS DE CONFIANZA Y CONTRASTE DE HIPÓTESIS.

Vera, O. y Díaz, C.

LAS TABLAS DE CONTINGENCIA: UN OBJETO SEMIÓTICO COMPLEJO

Gustavo Cañadas, Pedro Arteaga, Carmen Batanero
Universidad de Granada

Resumen

Las tablas de contingencia son un instrumento importante de resumen de la información, aprendizaje de conceptos y análisis de datos, no obstante diversas investigaciones describen las dificultades de los estudiantes en su lectura, juicios de asociación y cálculo de probabilidades a partir de las mismas. En este trabajo analizamos los objetos matemáticos implícitos en dichas tareas, usando algunas ideas del Enfoque Onto- Semiótico. La finalidad es contribuir a explicar los errores descritos, mostrando la complejidad de las tablas de contingencia. También informaremos de una investigación en curso que pretende analizar la comprensión informal de tablas de contingencia en estudiantes que ingresan en Psicología y la comprensión formal que alcanzan como consecuencia de la enseñanza recibida en la asignatura de Análisis de Datos.

Abstract

The contingency tables are an important instrument to summary the information, learning concepts and data analysis, nevertheless diverse investigations describe the student difficulties in their reading, association trials and probability calculation when are using them. In this work we analyze the mathematical implicit difficulties in these tasks, using some ideas of the Onto-Semiótico focus. The purpose is to contribute to explain the described errors showing the complexity of the contingency table. We will also inform of an research in course that seeks to analyze the informal compression of contingency tables in first year students of Psychology and the formal compression that reach as consequence of the received teaching in the Analysis of Data subject.

Cañadas, G., Arteaga, P., Batanero, C. (2011). Las tablas de contingencia: un objeto semiótico complejo. En M.M. Moreno, N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los Grupos de Investigación de la SEIEM* (pp. 203-214). Lleida.

Introducción

Las tablas de contingencia pueden utilizarse para comunicar información y como instrumento de análisis de datos, así como para retener en la memoria una gran cantidad de información en forma eficiente (Cazorla, 2002). Tienen un papel esencial en la organización, descripción y análisis de datos, al ser un instrumento de transnumeración, forma básica de razonamiento estadístico que proporciona nueva información, al cambiar de un sistema de representación a otro (Wild y Pfannkuch, 1999). En la enseñanza, ayudan a visualizar conceptos y relaciones abstractas difíciles de comprender (Postigo y Pozo, 2000).

A pesar de su supuesta simplicidad no es un tema tan sencillo como aparenta. Una revisión de investigaciones sobre comprensión de tablas de contingencia muestra tres grupos diferenciados de dificultades: a) Dificultades en la lectura (Curcio, 1989); b) Estrategias y concepciones erróneas en los juicios de asociación (Batanero, Estepa y Godino, 1991; Estepa, 1993; Estepa y Batanero, 1995; Batanero, Estepa, Godino y Green, 1996; Batanero, Godino y Estepa, 1998) y c) Conflictos en el cálculo de probabilidades a partir de tablas (Díaz y de la Fuente, 2005).

Para tratar de explicar esta complejidad, en este trabajo analizamos los objetos matemáticos implícitos en una tabla de contingencia, los contrastes relacionados con las tablas de contingencia y en las medidas de asociación, así como en el cálculo de probabilidades en tablas de contingencia.. Este será un primer paso de una futura investigación que pretende evaluar la comprensión formal e informal de dicho objeto en estudiantes de Psicología.

Marco teórico

En este trabajo se analizarán recursos didácticos que se manejan en textos que incluyen el estudio de tablas de contingencia. Para ello se utilizan nociones teóricas relacionadas con el Enfoque Ontosemiótico (EOS) desarrollado por Godino y su equipo de colaboradores (Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007 y otras publicaciones). Más concretamente, el trabajo se centra en las prácticas matemáticas involucradas en el análisis de tablas de contingencia y problemas relacionados.

La actividad matemática y objetos ligados a ellas

En este enfoque teórico, se entiende por “práctica matemática” cualquier actuación realizada por alguien y encaminada a la resolución de problemas matemáticos, lo que incluye la comunicación de la solución obtenida, su validación

o su generalización a otros contextos y problemas (Godino, 2002; Godino y Batanero, 1994).

Según esto, las prácticas que se derivan de la actividad matemática pueden ser específicas de una persona o propias de una Institución o conjunto de personas interesadas en resolver el mismo tipo de situaciones problemáticas. El hecho de pertenecer a una Institución supone el uso de unas prácticas sociales que suelen estar condicionadas por los instrumentos disponibles en la misma así como por sus reglas y modos de funcionamiento.

En el estudio de las matemáticas interesa considerar los “tipos” de situaciones problemáticas, en relación con los sistemas de prácticas de las personas, más que centrarse sólo en una práctica particular de un problema concreto. Así, la respuesta a la pregunta ¿qué es el objeto matemático “tabla de contingencia”?, sería: el sistema de prácticas que realiza determinada persona –significado personal –, o compartidas en una Institución –significado institucional-, para resolver un tipo de situaciones-problemas en los que interviene la tabla de contingencia. Es decir, los significados dependen de los contextos, social y de los sujetos, lo que lleva a lo relativo de su carácter.

En el marco teórico citado existe una tipología básica de significados. Respecto al significado institucional se puede hablar de significado global (o significado de un objeto en el sentido más amplio en una Institución), significado referencial (aquel que se refiere a una enseñanza o investigación), significado pretendido (el que se pretende enseñar), significado implementado (el que se logra enseñar) y significado evaluado (el que corresponde a la parte que se evalúa). Respecto a los significados personales se tienen los tipos, global (totalidad del sistema de prácticas de alguien, en relación con un objeto matemático), declarado (las prácticas que se expresan en pruebas de evaluación) y logrado (de las prácticas manifestadas, aquellas que son conformes con la pauta institucional) (Godino, 2002). En nuestro trabajo nos interesamos por el significado de la tabla de contingencia dentro de la institución “enseñanza en psicología” (sería nuestro significado referencial). En nuestra futura investigación, dentro de la tesis doctoral se definirán los significados implementados y evaluado.

Cuando se realiza, interpreta y evalúa una práctica matemática, se activa una configuración (o sistema de objetos) constituido por situaciones-problemas, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos, cuya taxonomía según es la siguiente (Godino, Batanero y Font, 2007):

Situaciones-problemas: aplicaciones extra-matemáticas, ejercicios, problemas, acciones que inducen una actividad matemática. En este caso el problema puede ser el estudio de asociación entre variables cualitativas, por ejemplo.

Lenguajes: términos, expresiones, notaciones, gráficos que se utilizan para representar los datos del problema, las operaciones que hacemos con ellos, los objetos matemáticos que se utilizan y la solución encontrada. En el estudio de las tablas de contingencia el lenguaje gráfico tiene un peso muy importante, aunque también se usa el lenguaje verbal, simbólico e incluso icónico al trabajar con ordenador.

Conceptos- definición: En las prácticas que se llevan a cabo para resolver un problema matemático se usan implícita o explícitamente objetos matemáticos, de los cuáles el alumno ha de recordar o aplicar la definición. Por ejemplo, los estudiantes usarán implícitamente los objetos: probabilidad simple, compuesta y condicional, independencia, asociación, frecuencia simple y compuesta, etc..

Proposiciones o enunciados sobre relaciones o propiedades de los conceptos que igualmente se han de emplear al resolver problemas matemáticos. Por ejemplo, cuando los estudiantes tienen que recordar que si dos variables son independientes el coeficiente de asociación tiene un valor igual a cero.

Procedimientos: Serían los algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo que los estudiantes han aprendido durante la enseñanza previa y que aplican al resolver el problema. En nuestro caso, varios tipos específicos de contraste de hipótesis, así como otras técnicas más intuitivas.

Argumentos: Serían los enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos o bien la solución de los problemas. Pueden ser deductivos, inductivos, formales o informales.

Godino, Batanero y Font (2007) proponen la existencia de redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas que relacionan entre sí los seis tipos de categorías anteriores y forman *configuraciones* que se clasifican en:

Epistémicas: cuando se trata de objetos institucionales. La configuración epistémica es el conjunto de objetos matemáticos que intervienen en la resolución de las actividades. Dentro de esta se distingue la previa y la emergente.

Cognitivas: cuando se refieren a objetos personales.

Relaciones entre objetos: función semiótica

Otro aspecto de interés en este trabajo es el de función semiótica (Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007). Los autores proponen bajo tal denominación, la correspondencia entre un antecedente y un consecuente, establecida por un sujeto, ya sea persona o Institución, y sirve para resaltar los procesos de interpretación que se llevan a cabo en la actividad matemática y en los que a veces pueden aparecer desajustes (conflictos) de interpretación entre alumnos y profesor.

Un objeto matemático, por ejemplo, una tabla de contingencia, al expresarse por escrito o verbalmente, lleva a establecer una función semiótica. La correspondencia entre antecedente y consecuente suele estar implícita, aunque en ocasiones se incluyen instrucciones para la interpretación de los objetos matemáticos. Si las interpretaciones realizadas por los alumnos no son las esperadas por el profesor, se produce un conflicto semiótico.

El antecedente –expresión- y consecuencia –significado- de una función semiótica no se limitan a conceptos y el lenguaje asociado sino que abarcan toda la ontología de objetos matemáticos u organizaciones de éstos en entidades más complejas, como sistemas conceptuales o teorías. Así, cada recurso se puede descomponer en partes, en las que hay implícitos diferentes objetos matemáticos. Mediante el análisis se intentará poner de manifiesto estos objetos, así como las dificultades que los estudiantes pueden tener al utilizarlos.

Tablas de contingencia como objeto matemático

En muchos estudios estadísticos se suele estar interesado en más de un carácter latente en la población. Esto implica querer dar respuesta a la pregunta de la relación que existe entre ambas. En ciertos casos se puede dar una fórmula que exprese una en función de la otra, son los fenómenos deterministas. En los casos en que no es posible dar esta fórmula, se puede representar pares de valores de las dos variables, mediante puntos en un sistema cartesiano. Entonces esta representación la llamamos nube de puntos o diagrama de dispersión y nos sirve para observar relaciones directas o inversas, y creando aproximaciones por rectas o parábolas por ejemplo.

Otras veces, alguna de las variables no es numérica. En el análisis de la relación de dos variables pueden existir tres tipos de estudios, según el tipo de variables implicadas (Batanero y Díaz, 2008):

Dos variables o más cualitativas, donde abarcaremos el problema mediante tablas de contingencia. Pero estos métodos pueden generalizarse a varias variables que pueden ser estudiadas, por ejemplo, por los modelos logarítmicos lineales.

Dos variables cuantitativas, donde si están relacionadas hablaremos de correlación y regresión, esta última puede ser lineal o curvilínea. En el caso de varias variables cuantitativas se puede estudiar la correlación múltiple o parcial y la regresión múltiple o multivariante.

Una variable cualitativa y la otra cuantitativa, que se puede tratar de varias maneras diferentes, como usando el test T de diferencia de medias o analizando la diferencia de las dos medias. La generalización a varias variables conduce a los modelos de Anova, Ancova y Manova.

En este trabajo nos centramos específicamente en el estudio de la relación entre dos variables cualitativas, es decir, las tablas de contingencia. A continuación analizamos este objeto matemático.

Problemas que dan origen a las tablas de contingencia

En gran cantidad de estudios estadísticos cogemos datos de cada individuo sobre dos variables estadísticas. Usualmente llamamos: X , a una de las variables con valores $x_1, x_2, \dots, x_r$; y la otra variable llamamos Y , con valores $y_1, y_2, \dots, y_c$. A partir de estos datos bivariantes se presentan varios tipos de problemas, que originarán, primero el concepto de Tabla de contingencia y otros relacionados con ellas, así como diversos procedimientos y representaciones.

P1. *Resumir la información obtenida de un conjunto de observaciones bivariantes de modo que se visualicen posibles relaciones entre las variables.* El primer problema surge al tratar de representaciones en forma condensada un listado de datos bivariantes. La forma habitual de ordenar la información puede ser en forma de *tabla de doble entrada* (también llamada tabla de contingencia). Para construirla, situamos los valores de las variables en la primera fila y columna de la tabla y en cada casilla de frecuencia, cuando hay pares repetidos (Figura 1). De este modo comenzamos extendiendo el concepto de frecuencia absoluta y relativa al caso bivalente. Siendo f_{ij} la *frecuencia absoluta* con la que aparece el par (x_i, y_j) ; y siendo h_{ij} la *frecuencia relativa* de este mismo par de valores.

Figura 1

	y_1	...	y_c	
x_1	f_{ij}			$f_{1.}$
...				...
x_r				$f_{r.}$
	$f_{.1}$	...	$f_{.c}$	n

Figura 2

	y_1	...	y_c	
x_1	$P(X=x_i, Y=y_j)$			$P(X=x_1)$
...				...
x_r				$P(X=x_r)$
	$P(Y=y_1)$	...	$P(Y=y_c)$	1

Una vez organizada la tabla, cuando tratamos de estudiar la relación o asociación entre dos variables cualitativas. Aparecen dos nuevos problemas, dependiendo del tipo de relación que se quiera analizar. Teniendo que atender a dos hipótesis principalmente: *contraste de homogeneidad* y *contraste de independencia*

P2. *Cálculo de probabilidades asociadas a valores específicos de una o las dos variables.* Podemos obtener las probabilidades puntuales de cada una de las variables o también es posible tener la probabilidad de ocurrencia simultánea de un caso de X y otro de Y (Figura 2).

Además es inmediato el cálculo de las probabilidades condicionadas con sólo dividir la probabilidad conjunta entre la probabilidad a la que condicionamos. Es decir:

$$P(X=x_i / Y=y_j) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(Y = y_j)}$$

Una vez organizada la tabla, cuando tratamos de estudiar la relación entre dos variables cualitativas, aparecen dos nuevos problemas, dependiendo del tipo de relación que se quiera analizar. Teniendo que atender a dos hipótesis principalmente: *contraste de homogeneidad* y *contraste de independencia*.

P3. Contraste de homogeneidad. A veces la variable X representa una población subdividida en r subpoblaciones, donde hemos tomado una muestra de cada subpoblación, y cada individuo lo clasificamos con una variable Y . Siendo p_{ij} una proporción que, en la población x_i tiene $Y=y_j$ de valor, queremos realizar una inferencia para ver si, a partir de las muestras observadas se puede inferir que las subpoblaciones son semejantes. Para llevar a cabo esta inferencia, se realiza un contraste de hipótesis, siendo las hipótesis, nula y alternativa, en el contraste de homogeneidad las siguientes:

$$H_0 \equiv p_{1j} = p_{2j} = \dots = p_{mj} \text{ para todo } j$$

$$H_1 \equiv \text{al menos dos de estas proporciones son diferentes.}$$

Con el resultado del contraste sabremos si las muestras provienen de poblaciones con iguales o diferentes distribuciones de probabilidad, dando la posibilidad de combinar resultados si son homogéneos.

P4. Contraste de independencia. En este caso nos interesa la asociación o relación existente entre dos variables de una misma población. Diremos que las variables cualitativas son *independientes* cuando la probabilidad de ver una categoría de una variable no está influenciada por tener otra categoría en un mismo individuo. Podemos tener tres tipos de tablas: independencia total, asociación perfecta y asociación parcial.

P5. Definir una medida de la intensidad de asociación entre las variables. En caso de que en alguno de los problemas P3 o P4 hayamos llegado a la conclusión de que las variables están asociadas, se plantea un nuevo problema, consistente en definir una medida del grado o intensidad de la asociación entre las mismas.

P6. Ajuste de un modelo matemático que permita estimar la frecuencia de aparición de cada categoría de una variable, dada una categoría de la otra. En caso de que en el problema P5, la asociación encontrada sea suficientemente fuerte, se plantea el problema de encontrar un modelo que permita predecir la variable

dependiente en función de la independiente, es decir una generalización del problema de regresión numérica. Mediante los modelos logarítmicos lineales se resolverá este problema 6.

Representaciones y procedimientos

Existen gran variedad de representaciones, verbales, simbólicas, tabulares y gráficas. Las representaciones verbales incluyen todas las palabras utilizadas para referirse a la tabla y sus componentes, como “tabla de contingencia”, “tabla cruzada”, “tabla de doble entrada”.... Las representaciones simbólicas y tabulares se han presentado en los apartados anteriores. También hay una gran variedad de gráficos con los que mostrar datos presentados en tablas de contingencia como son: diagrama de barras adosadas, diagrama de barras apilado, gráfico de mosaico ó gráfico tridimensional

No hay ningún método que cubra todos los problemas planteados en apartados anteriores y para todos los tipos de tablas de contingencia. Así que mencionaremos algunos de los métodos más usuales, que podemos clasificar en varios apartados:

a) PR1. Contrastes de hipótesis:

PR1.1. Contraste de homogeneidad.

PR1.2. Otra manera de calcular la diferencia de subpoblaciones en un caso de homogeneidad.

PR1.3. Contraste para tablas 2x2.

PR1.4. Prueba exacta de Fisher.

PR1.5. Contraste de independencia.

b) PR2. Cálculo de medidas de asociación.

PR2. 1. Medidas de asociación.

PR2.1. Medidas de asociación en datos nominales (tabla 2x2).

PR2.2. Medidas de asociación para tablas rxc.

P2.2.1. Medidas basadas en el estadístico Chi-cuadrado.

P2.2.2. Medidas basadas en la reducción proporcional del error.

Conceptos y propiedades relacionados con el análisis de tablas de contingencia

Como hemos visto aparecen muchos conceptos y propiedades en los procedimientos ligados a la resolución de los problemas planteado, que podemos clasificar en varios apartados:

Conceptos y propiedades ligados a la clasificación doble o tabla de contingencia

Tanto de la misma tabla de contingencia, como de los procedimientos descritos para trabajar con ella surgen diferentes conceptos y propiedades que describimos a continuación:

La *variable estadística bidimensional*, o variable que describe en conjunto de pares de valores obtenidos en un experimento. Asociada a ella aparece la *distribución bidimensional* y las frecuencias asociadas, como *frecuencia absoluta* doble (f_{ij}) y la *frecuencia relativa* doble (h_{ij}), tienen la relación (1)

$$(1) \quad h_{ij} = f_{ij} / n$$

A partir de la tabla de contingencia (Figura 1), podemos obtener *variables unidimensionales*. Si sumamos por columnas las frecuencias obtenemos como valor de la variable $Y = y_j$, que resulta independiente de la variable X , llamándose *distribución marginal de Y*. Análogamente sumando por filas se obtiene la *distribución marginal de X*. La frecuencia marginal de una cierta variable, es la frecuencia de esa variable sin tener en cuenta ninguna otra.

Otra distribución unidimensional que se puede obtener, es la *distribución de X condicionada para $Y=y_j$* , extensible a la variable Y condicionada a X . Si tomamos $h(x_i/y_j)$ como la *frecuencia relativa condicional* del valor x_i entre los valores que presenten el carácter y_j se obtiene (2)

$$(2) \quad h(x_i/y_j) = \frac{f_{ij}}{f_{.j}} = \frac{h_{ij}}{h_{.j}}$$

Análogamente se tiene:

$$h(y_j/x_i) = \frac{f_{ij}}{f_{i.}} = \frac{h_{ij}}{h_{i.}}$$

Como consecuencia se tiene la igualdad siguiente;

$$h_{ij} = h(x_i/y_j) h_{.j} = h(y_j/x_i) h_{i.}$$

Conceptos y propiedades ligados al estudio de la asociación y homogeneidad en tablas de contingencia

En los problemas de asociación es importante estudiar la *dependencia e independencia* de las variables. Las cual ya podemos realizar sabiendo las distribuciones condicionadas. Así que diremos que X e Y son *independientes* cuando se cumpla:

$$h(x_i/y_j) = h_{i.}$$

Esto significa que la distribución de X no cambia al condicionar por cualquier valor de Y . Otras propiedades de interés son:

$$h_{ij} = h_{i.} h_{.j} \quad \text{para todo } i, j$$

$$h(y/x_i) = h_{.j} \quad \text{entonces } Y \text{ no depende de } X$$

$$f_{ij} = \frac{f_{i.} f_{.j}}{n} \quad \text{para calcular las frecuencias teóricas en caso de independencia}$$

Una propiedad interesante de las tablas de contingencia $r \times c$, con $r, c > 2$, es la posibilidad de subdividir la tabla de contingencia en subtablas 2×2 , basándonos en el teorema de la aditividad. Haciendo posible calcular la prueba χ^2 para cada una de ellas. El uso de χ^2 trae el problema de que la suma de variables aleatorias independientes no es exactamente igual al valor del estadístico (Ato y López, 1996).

Conceptos y propiedades ligados al cálculo de probabilidades

Cada una de las variables estadísticas analizadas da origen a una variable aleatoria latente y por tanto la variable estadística doble, da origen a la variable aleatoria bidimensional y su distribución.

Como hemos visto, en el cálculo de probabilidades, aparecen las probabilidades conjuntas, simples y condicionales. Una vez obtenidas las probabilidades puntuales, conjuntas y condicionadas, es posible la comprobación del teorema de la probabilidad total y teorema de Bayes, que mostramos a continuación

$$\text{T. probabilidad total} \rightarrow P(Y) = \sum_{i=1}^n P(X_i)P(Y/X_i)$$

$$\text{T. de Bayes} \rightarrow P(X_j/Y) = \frac{P(X_j)P(Y/X_j)}{\sum_{i=1}^n P(X_i)P(Y/X_i)}, \text{ con } j=1, \dots, n$$

También podemos estar interesados en las propiedades de simetría (estando interesados en la distribución conjunta de las dos variables o interesados en la distribución condicional de una de las variables dada la otra) e invarianza (siendo deseable en las medidas de asociación que las variables sean invariantes frente a transformaciones de multiplicar filas y columnas por constantes para poder transformar las distribuciones marginales de la tabla en otras diferentes).

Argumentos

En el análisis de tablas de contingencia se usan principalmente tres tipos de argumentos:

Argumentos deductivos, pues todos los procedimientos descritos se basan en deducciones de propiedades o relaciones entre conceptos;

Argumentos empíricos: pues también las conclusiones de los diversos contrastes utilizan datos obtenidos de experimentos estadísticos

Razonamientos de tipo estadístico (contrastos). De hecho el contraste de hipótesis, aunque básicamente es de tipo deductivo, puede considerarse un tipo de razonamiento específico que combina deducción y razonamiento empírico, junto con ciertos criterios de toma de decisión.

Conclusiones sobre el significado referencial de la tabla de contingencia

Aunque esta es sólo una primera revisión, que habrá que ampliar en el futuro, es ya visible la gran complejidad de este objeto matemático, aparentemente simple y para el cual se dispone de un tiempo muy limitado de enseñanza, tanto en Psicología como en otras titulaciones. Vemos además, que algunos de los procedimientos que involucra – los contrastes de hipótesis- son a su vez objetos muy complejos que fueron analizados en investigaciones previas (Vallecillos, 1999). Todos estos indicadores apoyan el interés de enfocar una investigación específica sobre la didáctica de las tablas de contingencia.

Referencias bibliográficas

- Ato, M. y López, J.J. (1996). *Análisis estadístico para datos categóricos*. Madrid: Síntesis Psicología.
- Batanero, C., Estepa, A. y Godino, J. D. (1991). Estrategias y argumentos en el estudio descriptivo de la asociación usando microordenadores. *Enseñanza de las Ciencias*, 9(2), 145-150.
- Batanero, C., Estepa, A., Godino, J. y Green D. R. (1996). Intuitive strategies and preconceptions about association in contingency tables. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(2), 151-169.
- Batanero, C. y Díaz, C. (2008). *Análisis de datos con Statgraphics*. Departamento de Didáctica de la Matemática.
- Batanero, C., Godino, J. D. y Estepa, A. (1998). Building the meaning of statistical association through data analysis activities. *Research Forum*. En A. Olivier y K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (v.1, pp. 221-236, con discusión en pp. 237-242). University of Stellenbosch.

- Cazorla, I. (2002). *A relação entre a habilidades viso-pictóricas e o domínio de conceitos estatísticos na leitura de gráficos*. Tesis Doctoral. Universidad de Campinas.
- Curcio, F. R. (1989). Developing graph comprehension. Reston, VA: N.C.T.M.
- Díaz, C. y de la Fuente, E.I. (2005). Conflictos Semióticos en el Cálculo de Probabilidades a partir de Tablas de Doble Entrada. *Biaix* 24, 85, 91.
- Estepa, A. (1993). *Concepciones iniciales sobre la asociación estadística y su evolución como consecuencia de una enseñanza basada en el uso de ordenadores*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.
- Estepa, A. y Batanero, C. (1995). Concepciones iniciales sobre la asociación estadística. *Enseñanza de las Ciencias*, 13(2), 155-170.
- Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, 22 (2 y 3), 237-284
- Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135.
- Postigo, Y. y Pozo, J.I. (2000). Cuando una gráfica vale más que 1000 datos: la interpretación de gráficas por alumnos adolescentes. *Infancia y Aprendizaje*, 90, 89 - 110.
- Vallecillos, A. (1999). *Inferencia estadística y enseñanza: un análisis didáctico del contraste de hipótesis estadísticas*. Granada: Comares.
- Wild, C., y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry (con discusión). *International Statistical Review*, 67(3), 223-265.

ESTUDIOS SOBRE LOS PROBLEMAS TERNARIOS DE PROBABILIDAD CONDICIONAL DE NIVEL N_0

Patricia Isabel Edo Gual, Manuel Pedro Huerta Palau (*)
IES Cueva Santa de Segorbe, Universidad de Valencia

Resumen

En este trabajo presentamos los resultados de una investigación en la que se estudia la influencia de la estructura matemática y el contexto en las dificultades de los problemas ternarios de probabilidad condicional de nivel N_0 . Estas dificultades han sido medidas a través de resoluciones de estudiantes de secundaria, antes y después de una secuencia de enseñanza diseñada con el objetivo de mejorar la competencia de los estudiantes en la resolución de este tipo de problemas.

Abstract

In this piece of work we show the results of a research that studies whether or not, and in what measure, mathematical structure of problems and the contexts in which they are put forward are influential factors on the difficulties of the problems. These problems are ternary problems of conditional probability of Level L_0 . The difficulties are defined and measured through the resolutions of students from secondary school (15-16 years), before and after they follow a teaching approach which its principal aim is to improve students' competences in solving this type of problems, as precursor of competence in solving problems belonging to every level.

Edo, P.I., Huerta, M.P. (2011). Estudios sobre los problemas ternarios de probabilidad condicional de nivel N_0 . En M.M. Moreno, N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los Grupos de Investigación de la SEIEM* (pp. 215-232). Lleida.

Introducción

Este trabajo forma parte de un proyecto más amplio que aborda el problema de la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad condicional, desde la resolución de problemas. El objetivo final de dicho proyecto es el de aportar elementos y bases para un modelo de enseñanza de la probabilidad condicional, capaz de mejorar la competencia de los estudiantes en la resolución de este tipo de problemas.

La investigación que ahora nos ocupa pretende contribuir a este objetivo, mediante el estudio de un tipo particular de problemas ternarios de probabilidad condicional: los problemas de nivel N0 (Lonjedo, 2007), que son aquéllos que no presentan ninguna probabilidad condicional conocida en el enunciado del problema. Los problemas objeto de estudio, además de ser problemas ternarios de probabilidad condicional, tal como los definen Cerdán y Huerta (2007, pág. 4), se caracterizan por ser de enunciado verbal y proporcionar en el enunciado los mínimos datos necesarios para encontrar la respuesta a lo que se pregunta. Esto excluye de la investigación, por ejemplo, aquellos problemas en los que los datos se presentan en el enunciado mediante una tabla de contingencia que organiza, a la vez, sucesos y números y para cuya resolución basta con establecer razones entre las cantidades adecuadas.

Realizaremos, en primer lugar, un estudio teórico de los problemas que hemos llamado de nivel N0. Como consecuencia de dicho estudio obtendremos lo que llamamos casos básicos de problema y, para un caso básico, opciones básicas de pregunta.

El estudio teórico anterior nos permite construir cuestionarios de problemas de este nivel, con los que pretendemos explorar su resolución por estudiantes. En particular, en este trabajo, se observan estudiantes de secundaria resolviendo dichos cuestionarios.

Se diseña, además, un modelo de enseñanza basado en la resolución de problemas en su propio contexto. Este modelo de enseñanza se implementa en un curso de 4º de la ESO, opción B, y sus estudiantes son observados antes y después del proceso de enseñanza.

Lo que mostraremos en este trabajo son resultados parciales del estudio que estamos llevando a cabo, que, en particular, informará sobre el efecto que el modelo de enseñanza ha tenido sobre las dificultades iniciales que estos problemas presentaban antes de la enseñanza a esta muestra de estudiantes.

Antecedentes

El término problema ternario de probabilidad condicional (Cerdán y Huerta, 2007) hace referencia a un tipo particular de problemas de probabilidad condicional de los que hay numerosas muestras en los libros de texto de la educación secundaria (en el anexo todos los problemas son ternarios). Estos problemas involucran a algunas de las 16 probabilidades (4 marginales, 4 intersecciones y 8 condicionales) y 18 relaciones ternarias entre ellas. Dichas probabilidades y el mundo de relaciones en las que están implicadas, quedan representados en el grafo del mundo de los problemas ternarios de probabilidad condicional (Cerdán y Huerta, 2007), que ha resultado ser una herramienta metodológica de gran utilidad para el estudio teórico de estos problemas, desde el punto de vista de su estructura matemática. Fruto de este estudio es la clasificación de los problemas en niveles, categorías y tipos (Lonjedo, 2007; Huerta, 2009) que permite identificar familias y subfamilias de problemas dentro del mundo de los problemas ternarios de probabilidad condicional.

Por otra parte, se han llevado a cabo estudios sobre la influencia que tienen en el proceso de resolución de estos problemas tanto la estructura matemática del problema, como el formato de presentación de los datos numéricos (Huerta y Lonjedo, 2007; Huerta, 2009) y el contexto en el que se sitúa el enunciado del problema (Carles y Huerta, 2007; Huerta, 2009).

Recientemente, hemos profundizado en el estudio de la estructura de datos de los problemas de nivel N0 y hemos iniciado el estudio de las dificultades de estos problemas, a partir de resoluciones de estudiantes de secundaria, observando influencias significativas de la estructura de datos y el contexto sobre las mismas (Carles, y otros, 2009).

En este trabajo abordamos, también, las dificultades de los problemas de nivel N0, pero ahora teniendo en cuenta no sólo la estructura de datos y el contexto sino también el formato de presentación de los datos y los efectos de una unidad de enseñanza, diseñada con el objetivo de minimizar las dificultades iniciales de los problemas y, por consiguiente, elevar el nivel de competencia de los estudiantes en la resolución de estos problemas.

Objetivos

Así pues, los objetivos concretos que nos proponemos en este artículo son los siguientes:

Mostrar el método y los resultados del estudio teórico de los problemas de nivel N0, atendiendo a su estructura de datos o estructura matemática.

Estrada, A. (2011). Instrumentos de medición de actitudes hacia la estadística: la escala EAEE para profesores. En M.M. Moreno, N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los Grupos de Investigación de la SEIEM* (pp. 233-251). Lleida.

Observar a estudiantes de secundaria resolviendo estos problemas, atendiendo a las influencias que la estructura matemática del problema, el contexto al que hace referencia el enunciado y el formato en que se formulan los datos numéricos, tienen sobre las dificultades de los problemas, medidas a partir de las resoluciones de los estudiantes.

Diseñar y experimentar una unidad de enseñanza de la probabilidad condicional, que incluya problemas de nivel N0, y observar el resultado, desde el punto de vista de la influencia de las variables de la tarea antes mencionadas sobre las dificultades de los problemas.

Metodología

El estudio de los problemas

Para el estudio de los problemas de nivel N0, según su estructura de datos, partimos de la clasificación en niveles, categorías y tipos de los problemas ternarios de probabilidad condicional y que da lugar a considerar 4 familias y 20 sub-familias de problemas (Lonjedo, 2007). Los problemas de la familia de nivel N0 no contienen probabilidades condicionales como datos conocidos en el enunciado y, por este motivo, todos ellos han de ser de tipo T1, es decir, se ha de preguntar en el problema por una probabilidad condicional (de lo contrario, no podríamos considerarlos problemas de probabilidad condicional, al no implicar a ninguna probabilidad de este tipo en su enunciado). Como consecuencia de un simple análisis de posibilidades, la familia de los problemas de nivel N0 puede dividirse en tres subfamilias de problemas, que se distinguen sólo por la categoría, es decir por el número de probabilidades marginales que se dan como datos conocidos en el enunciado del problema: ninguna marginal y tres intersecciones (categoría C0), una marginal y dos intersecciones (categoría C1) y dos marginales y una intersección (categoría C2). Esto justifica que, en adelante, nos refiramos a estas subfamilias haciendo mención únicamente a la categoría.

Mediante lecturas analíticas¹ de los problemas en el grafo del mundo de los problemas ternarios de probabilidad condicional (Cerdán y Huerta, 2007) hicimos un análisis de posibilidades para las relaciones que se establecen entre las marginales y las intersecciones que se dan como datos. La consecuencia directa de este análisis es establecer la definición de lo que llamamos casos básicos de problemas, para cada categoría, y la definición de opciones básicas de pregunta para cada caso básico. Con estas nociones en mente, daremos cuenta del primer objetivo de la investigación.

¹ Aquella que sólo presta atención a los datos y las relaciones entre ellos.

Elaboración de los cuestionarios

Para abordar los objetivos dos y tres, diseñamos dos cuestionarios que administramos a 9 estudiantes que cursaban la asignatura de Matemáticas Opción B de 4º de la ESO y que no habían recibido enseñanza previa en probabilidad (ver anexos I, II). Posteriormente, se diseñó y se puso en práctica una unidad de enseñanza de probabilidad condicional en ese mismo grupo de estudiantes, tras lo cual se administró un tercer cuestionario (ver anexo III).

A la hora de diseñar los enunciados de los cuestionarios tuvimos en cuenta tres variables de la tarea (Kulm, 1979): la estructura matemática o estructura de datos del problema, la situación y el contexto en el que se formula y el formato de presentación de los datos.

La estructura matemática venía determinada por la categoría y el caso. La consideración de los casos básicos y las opciones básicas de pregunta, fruto del estudio teórico, resultó ser de gran valor metodológico para el diseño de los cuestionarios.

Por otra parte, consideramos dos situaciones en las que puede formularse el enunciado, que denominamos situación estadística y situación test de diagnóstico. La diferencia entre ambas radica en el hecho de que en la segunda interviene una prueba diagnóstica y en la primera no. Dentro de la situación test de diagnóstico, consideramos dos contextos en los que suelen aparecer pruebas diagnósticas, uno en el área de la salud (Diagsalud) y otro en el área del control de calidad (Diagcalidad). En la primera, lo que se somete a la prueba son personas susceptibles de padecer una enfermedad y en la segunda, lo que se somete a la prueba son piezas fabricadas para determinar si son correctas o defectuosas. Dentro de la situación estadística también consideramos dos contextos, que llamamos estadístico social (Estsocial) y estadístico salud (Estsalud). En el primero, consideramos los sucesos básicos ser chica/ser chico y llevar gafas/no llevar gafas, mientras que en el segundo, intervienen los sucesos básicos tomar antibiótico/no tomar antibiótico y curarse/no curarse de una enfermedad. La principal diferencia que existe entre estos dos contextos es el hecho de que en el Estsalud puede existir una relación de causa efecto entre los sucesos básicos considerados (lo esperable es que un paciente que tome antibiótico se cure), mientras que esto no ocurre en el contexto que hemos llamado Estsocial (no se considera que sea más probable usar gafas o no usarlas por el hecho de ser chica o chico).

Fruto del estudio teórico de los problemas resultó que cada cuestionario debería constar de 6 problemas, uno de cada categoría y caso, formulados en diferentes situaciones y contextos: dos de ellos en el contexto Estsocial, dos en el contexto Estsalud, uno en el contexto Diagsalud y otro en el contexto Diagcalidad. Los

Estrada, A. (2011). Instrumentos de medición de actitudes hacia la estadística: la escala EAEE para profesores. En M.M. Moreno, N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los Grupos de Investigación de la SEIEM* (pp. 233-251). Lleida.

problemas de cada cuestionario eran isomorfos en cuanto a estructura de datos y contexto y sólo se diferenciaban en el orden de aparición y en el formato de datos: frecuencias absolutas para el primer cuestionario, porcentajes para el segundo y probabilidades para el tercero.

La unidad de enseñanza

Como se ha señalado, tras la administración de los dos primeros cuestionarios, se impartió una secuencia de enseñanza de probabilidad condicional en ese mismo grupo de estudiantes. Fue la investigadora la que también ejercía el papel de profesora.

La metodología de enseñanza por la que se optó se caracterizó por estar basada exclusivamente en la resolución de problemas en contexto. Por tanto, se dedicó tiempo a la exploración de los contextos y, aunque se introdujeron herramientas heurísticas (tablas de contingencia y, en menor medida, diagramas en árbol) los problemas se resolvían en el propio contexto, produciendo sentido para cada relación usada y cada nueva cantidad producida. Además, el papel de la profesora fue menos directivo de lo habitual y no se introdujo la tabla de contingencia y los diagramas en árbol hasta que los estudiantes se hubieron enfrentado a los problemas con sus propias estrategias de resolución.

Por otra parte, la propuesta de enseñanza incluía problemas de probabilidad de diferentes tipos, si bien la mayoría eran problemas ternarios de nivel N_0 . Así, se resolvieron problemas de las diferentes categorías y casos y en los cuatro contextos considerados, con los datos expresados en los tres formatos de datos que hemos contemplado.

Esta unidad se desarrolló en 13 sesiones, en la última de las cuales se administró el tercer cuestionario.

Método de análisis de las producciones. Variables

Para el análisis de las producciones de los estudiantes se definieron y observaron una serie de variables, algunas de las cuales hacían referencia al proceso de resolución del problema y otras al producto del mismo, es decir al resultado.

Del proceso de resolución observamos si el problema había sido abordado o no, si el estudiante realizaba una lectura organizada del enunciado usando listas, tablas o árboles, o no organizaba la información de ninguna manera; si realizaba cálculos para producir nuevas cantidades o no; si cometía errores en estos cálculos o no; si hacía cálculos específicos para la obtención de la condicional pedida o no; y si en estos cálculos cometía error o no.

En cuanto al resultado, nos fijamos no sólo en el número que mide la condicional pedida sino también en la descripción que se hace del mismo. Así, observamos si el estudiante daba un resultado o no; si el número dado como medida de la condicional pedida era correcto o no; si éste venía acompañado de una descripción del suceso que mide, y si esta descripción era correcta o incorrecta.

Es un objetivo de la investigación más amplia que sigue en curso, el realizar un análisis exhaustivo tanto del proceso de resolución del problema como del resultado. Sin embargo, a pesar de que hemos observado y codificado todas esas variables a partir de las producciones de los estudiantes, en este trabajo, a la hora de mostrar los resultados, nos hemos centrado sólo en las variables del resultado. A partir de las éstas hemos definimos nuevas variables con el objetivo de medir algunas dificultades de los problemas, que definimos a continuación (Carles y otros, 2009):

$$\text{Dificultad apreciada del problema (DAP)} = 100 - \left(\frac{\text{abordados}}{\text{estudiantes}} \right) \times 100$$

$$\text{Dificultad global del problema (DP)} = 100 - \left(\frac{\text{resultado}}{\text{estudiantes}} \right) \times 100$$

$$\text{Dificultad del problema (DPR)} = 100 - \left(\frac{\text{resultado}}{\text{abordado}} \right) \times 100$$

$$\text{Dificultad de la solución del problema (DSP)} = 100 - \left(\frac{\text{número}}{\text{abordado}} \right) \times 100$$

$$\text{Descripción de la respuesta (DRES)} = \left(\frac{\text{descripción}}{\text{resultado}} \right) \times 100$$

$$\text{Dificultad en la descripción correcta (DDRESC)} = 100 - \left(\frac{\text{descorrección}}{\text{descripciones}} \right) \times 100$$

Para cada problema de cada cuestionario es posible medir el valor que toma cada una de las variables anteriores, si se tienen en cuenta las siguientes medidas:

Estudiantes se mide por el número de estudiantes a los que se les ha administrado la prueba en la que aparece dicho problema.

Abordados por el número de estudiantes que ha abordado dicho problema.

Resultado por el número de estudiantes que ha llegado a dar un resultado.

Número por el número de estudiantes que han dado un resultado en el que el número (probabilidad o porcentaje) es el correcto.

Estrada, A. (2011). Instrumentos de medición de actitudes hacia la estadística: la escala EAEE para profesores. En M.M. Moreno, N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los Grupos de Investigación de la SEIEM* (pp. 233-251). Lleida.

Descripción por es el número de estudiantes que han dado un resultado en el que el número viene acompañado de una descripción del mismo.

Descorrecta por el número de estudiantes que han dado una descripción correcta del resultado.

De las dificultades nos interesaremos en particular por la *dificultad de la solución del problema* (DSP), que es la que está directamente relacionada con la obtención del número correcto para la condicional pedida.

Resultados y discusión

El siguiente gráfico (Gráfico 1) nos permite comparar las dificultades de los problemas de cada prueba, es decir, según el formato de datos:

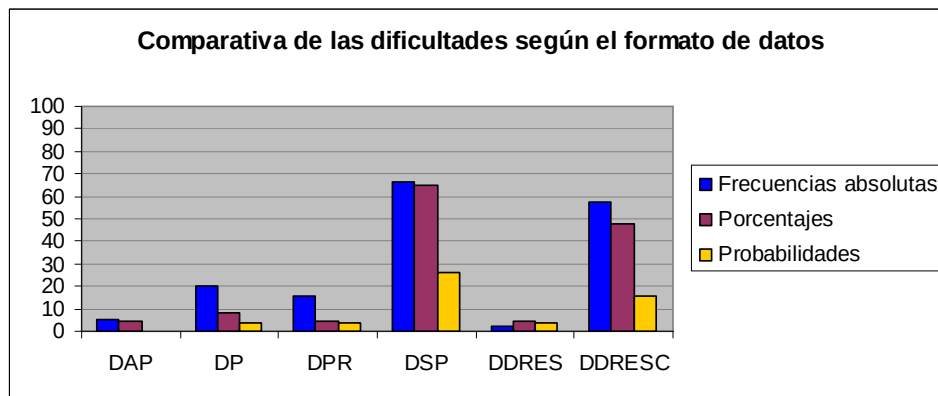


Gráfico 1. Dificultades de los problemas por cuestionario.

Vemos que la dificultad de la solución del problema (la que denotamos por DSP) y la dificultad de la descripción correcta (la que llamamos DDRESC), es decir, las dos que están directamente relacionadas con la obtención del resultado correcto, son las que alcanzan los valores más elevados en las tres pruebas. Llama la atención la drástica disminución de los valores en el tercer cuestionario (una disminución era esperable, ya que el tercer cuestionario se administró justo después de una secuencia de enseñanza encaminada a mejorar la competencia en la resolución de este tipo de problemas). Entre el primer cuestionario y el segundo no se observan grandes diferencias, pero contrariamente a lo esperado, se obtienen valores menores para las dificultades con los datos expresados en porcentajes (segundo cuestionario) que con los datos expresados en frecuencias absolutas (primer cuestionario). Esto puede explicarse por el hecho de que el haber realizado

el primer cuestionario podría haberles proporcionado a los estudiantes cierto aprendizaje de cara a la realización del segundo.

Si tomamos ahora la categoría del problema como variable independiente para el estudio de las dificultades de los problemas en cada cuestionario, es decir, observamos las dificultades por categorías y formato de datos (Gráfico 2), y nos fijamos en la dificultad de la solución del problema (DSP), vemos que existen diferencias importantes.

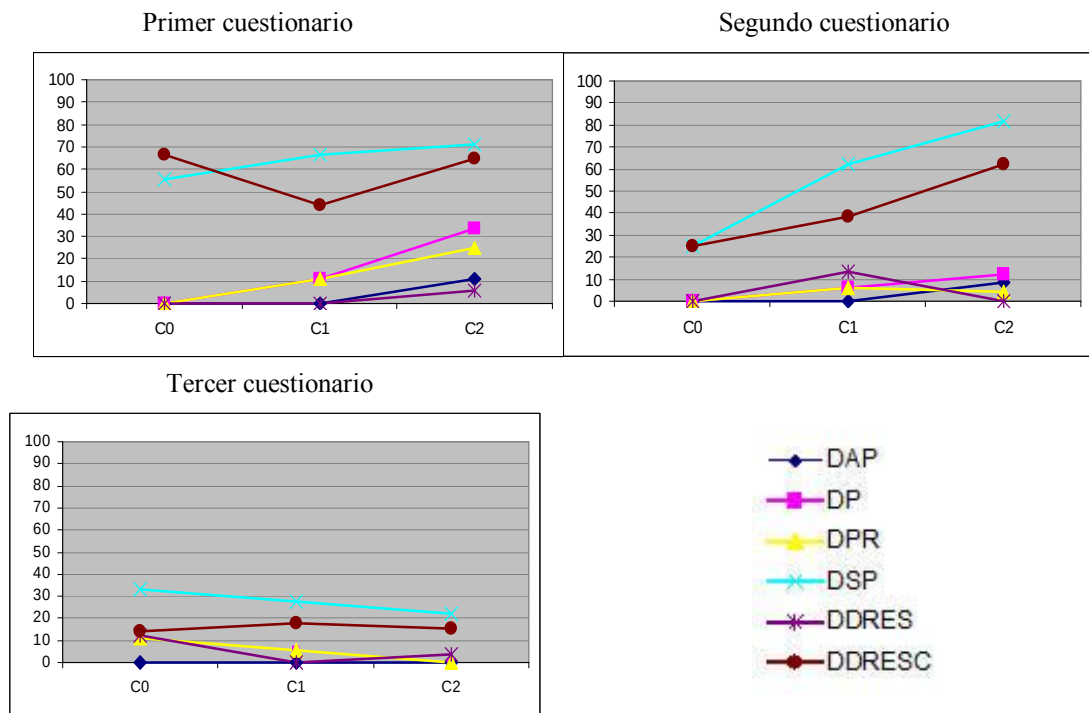


Gráfico 2. Dificultades de los problemas por cuestionario, tomando como variable independiente la categoría.

En el primer cuestionario, la mayoría de las dificultades (y en concreto la dificultad de la solución del problema) aumentan conforme aumenta la categoría, es decir, conforme aumenta el número de marginales como datos conocidos en el enunciado (o lo que es lo mismo, disminuye el de intersecciones). La situación en

Estrada, A. (2011). Instrumentos de medición de actitudes hacia la estadística: la escala EAEE para profesores. En M.M. Moreno, N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los Grupos de Investigación de la SEIEM* (pp. 233-251). Lleida.

el segundo cuestionario es similar. En cambio, en el tercer cuestionario (tras la enseñanza) la influencia de la estructura de datos disminuye y en todo caso, se invierte el sentido de la misma.

Tomando ahora el contexto como variable independiente para el estudio de las dificultades en cada cuestionario (Gráfico 3), observamos que en los dos primeros cuestionarios existen diferencias importantes entre contextos.

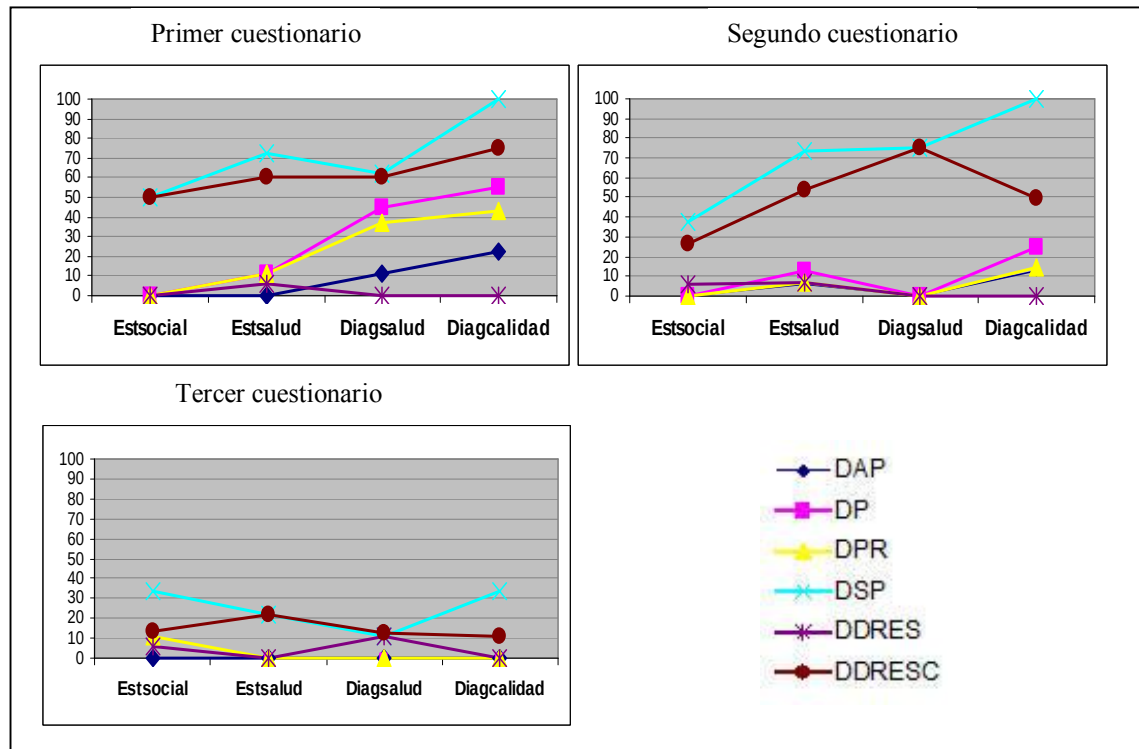


Gráfico 3. Dificultades de los problemas por cuestionario, tomando como variable independiente el contexto.

Si nos fijamos en la dificultad de la solución del problema (DSP) vemos que alcanza su valor más bajo en el contexto estadístico social y el valor más alto en el contexto test de diagnóstico en el control de calidad, para el que alcanza un valor del 100% en los dos primeros cuestionarios, lo que quiere decir que ningún estudiante ha obtenido el resultado numérico correcto para el problema planteado en este contexto.

Para el resto de dificultades, el contexto test de diagnóstico en el control de calidad es también aquél en el que se alcanzan valores más elevados y el estadístico social aquél en el que se obtienen valores más bajos.

Si miramos ahora el correspondiente al tercer cuestionario, observamos que, después de la enseñanza, las diferencias entre los valores de las dificultades para los distintos contextos son mucho menores.

A continuación, compararemos los valores de algunas dificultades (la dificultad apreciada del problema, la dificultad global del problema, la dificultad del problema y la dificultad de la solución del problema) obtenidos en este trabajo, con una muestra de 9 estudiantes, con los valores obtenidos en un estudio realizado en el marco del proyecto más amplio antes mencionado, con 990 resoluciones (Carles y otros, 2009). Puesto que los problemas de este último estaban formulados usando frecuencias absolutas, para la comparativa sólo tendremos en cuenta las resoluciones del primer cuestionario.

En el Gráfico 4 se muestran las dificultades por categorías.

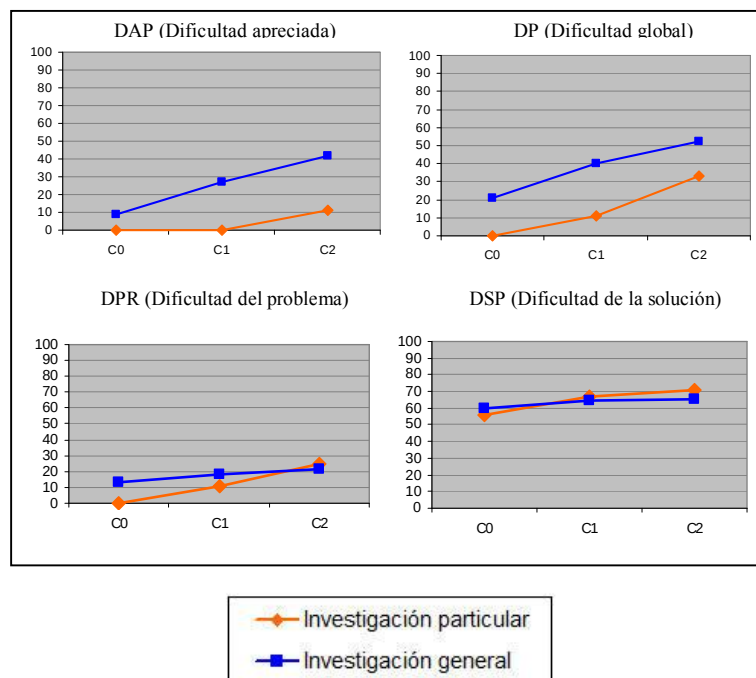


Gráfico 4. Gráfico comparativo (estudio local frente al estudio general) de las dificultades DAP, DP, DPR y DSP, por categorías.

Estrada, A. (2011). Instrumentos de medición de actitudes hacia la estadística: la escala EAEE para profesores. En M.M. Moreno, N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los Grupos de Investigación de la SEIEM* (pp. 233-251). Lleida.

Los valores de las dificultades son, en general, más bajos para la muestra local pero se observa cierto paralelismo entre los resultados.

En la investigación más amplia no se estudió el contexto de diagnóstico en calidad, en cambio, en el estudio local, de los dos problemas formulados en la situación test de diagnóstico, uno se formuló en el contexto de la salud y el otro en el contexto del control de calidad. Para realizar la comparación de los valores de las dificultades por contextos, hemos excluido el problema formulado en el contexto diagnóstico en calidad en la muestra local.

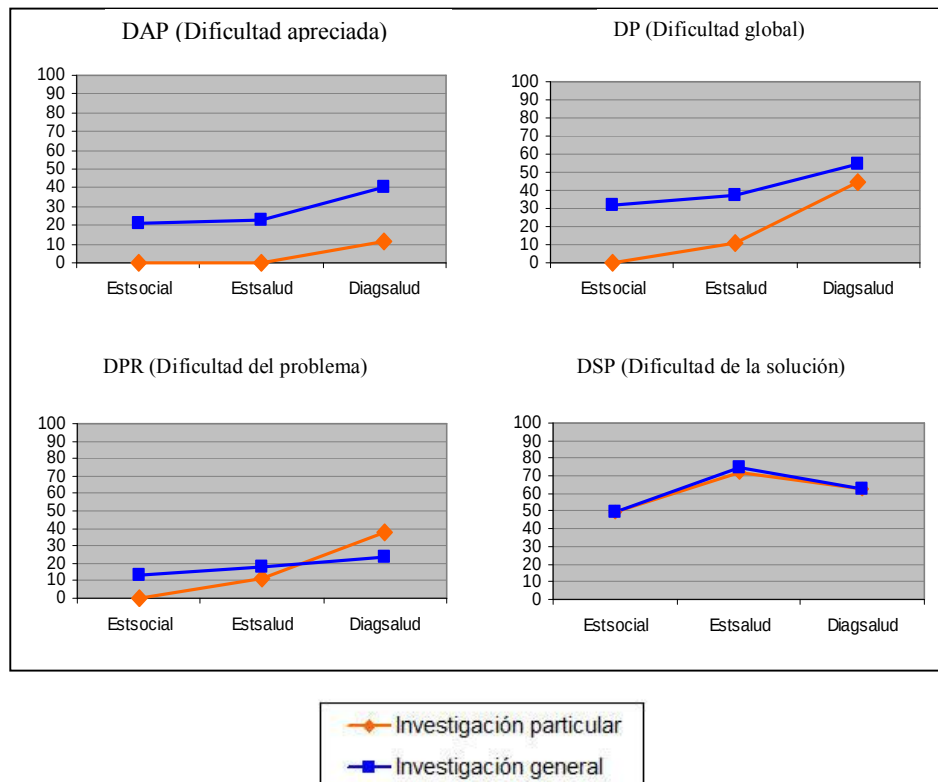


Gráfico 5. Gráfico comparativo (estudio local frente al estudio general) de las dificultades DAP, DP, DPR y DSP, por contextos.

En el Gráfico 5, observamos que el comportamiento de las variables, desde el punto de vista de la influencia del contexto, es similar en ambas muestras, al igual

que ocurría en la comparación con los datos agrupados por categorías. Esto nos puede permitir, en futuros trabajos, considerar a la muestra local como representativa de la del estudio más general, en cuanto a las influencias de las variables categoría y contexto se refiere.

Conclusiones

Los resultados obtenidos apuntan a que, previamente a la enseñanza, la estructura de datos y el contexto influyen en las dificultades de los problemas. En concreto, la dificultad de encontrar la solución numérica correcta del problema (DSP) alcanza sus valores más elevados para el contexto de diagnóstico en calidad y el estadístico salud, y sus valores más bajos en el contexto estadístico social. En cuanto a la influencia de la estructura de datos en dicha dificultad, se observa un aumento de su valor conforme aumenta el número de marginales conocidas en el enunciado del problema (y por tanto, disminuye el de intersecciones). Esto último nos conduce a la conclusión de que a los estudiantes les resulta más fácil “salir de la tabla”, es decir, obtener los valores de las celdas de los márgenes de la tabla (las marginales) a partir de los valores de las celdas centrales (las intersecciones), que “entrar en ella”, es decir, obtener las intersecciones a partir de las marginales.

Sin embargo, una enseñanza caracterizada por: 1) la introducción, en su momento adecuado, de la tabla de contingencia como herramienta heurística para la resolución de esta familia de problemas, 2) la exploración de los contextos y 3) la resolución de problemas variados, tanto en su estructura matemática como en el formato de presentación de los datos numéricos, consigue que los resolutores sean menos sensibles a las influencias sobre las dificultades de los problemas que tenían antes de la enseñanza.

El uso de la tabla supone una traducción del problema original (formulado verbalmente) a un problema situado en un contexto matemático (formulado en lenguaje matemático). Una vez realizada con éxito esta traducción, la resolución del problema es puramente algorítmica, siendo necesario, no obstante, hacer la traducción en sentido inverso (del lenguaje matemático al lenguaje verbal) para responder adecuadamente a la pregunta del problema. Es presumible que la introducción de la tabla durante la enseñanza haya tenido un peso muy importante en la disminución de las dificultades de los problemas y queda pendiente de observación empírica si por sí sola hubiera sido suficiente para contrarrestar la influencia de la estructura de datos, el contexto y el formato de datos. Sin embargo, los resultados obtenidos sugieren la conveniencia de tener en cuenta estas tres variables a la hora de diseñar los problemas para la enseñanza de la probabilidad condicional, si lo que se pretende es que los estudiantes lleguen a ser competentes en la resolución de problemas con diferentes estructuras de datos, formulados en

Estrada, A. (2011). Instrumentos de medición de actitudes hacia la estadística: la escala EAEE para profesores. En M.M. Moreno, N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los Grupos de Investigación de la SEIEM* (pp. 233-251). Lleida.

una variedad de situaciones y contextos y con la información numérica expresada en el formato de datos propio del contexto al que hace referencia el enunciado del problema.

Agradecimientos:

Esta investigación ha sido realizada gracias al apoyo del Proyecto EDU2008-01340 del Ministerio de Ciencia y Tecnología. España.

Referencias bibliográficas

- Carles M.; Cerdán, F.; Huerta M. P.; Lonjedo M. A. y Edo P. (2009). Influencia de la estructura y del contexto en las dificultades de los problemas de probabilidad condicional de nivel N_0 . Un estudio exploratorio con estudiantes sin enseñanza previa. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII*, pp. 173-185. Santander: SEIEM.
- Carles, M.; Huerta, M. P. (2007). Conditional probability problems and contexts. The diagnostic test context, in Pitta-Pantazi, D. & Philippou, G. (eds.) *Proc. Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, CERME 5, 702-710.
- Cerdán F.; Huerta M. P. (2007). Problemas ternarios de probabilidad condicional y grafos trinomiales. *Educación Matemática*, vol. 19, núm. 1, pp. 27-62.
- Huerta M.P. (2009). On conditional probability problem solving research-structures and contexts. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, vol. 4, núm. 3, pp. 163-194.
- Huerta, M.P., Lonjedo, M.A. (2007). The same problem in three presentation formats: Different percentages of success and thinking processes, in D. Pitta-Pantazi & G. Philippou (eds.) *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, CERME 5, 732-741.
- Kulm, G. (1979) The classification of problem research variables. En G. Goldin y C.E. McClintock (Eds.) *Task Variables in Mathematical Problem Solving*, pp.1-22. ERIC.
- Lonjedo, M. A. (2007). *Análisis de los problemas ternarios de probabilidad condicional de enunciado verbal y de sus procesos de resolución*. Tesis doctoral. Universitat de València.

Anexo I. Primer cuestionario.Problema 1

La clase de 4º de ESO está formada por 30 estudiantes entre chicos y chicas. Entre los estudiantes, hay 7 chicas que usan gafas, 10 chicas que no las usan y 8 chicos que tampoco usan gafas. Entre los que usan gafas, ¿qué porcentaje son chicas?

Problema 2

Un centro escolar está formado por 1000 alumnos entre chicos y chicas. Hay 282 estudiantes que usan gafas, 147 chicas que las usan y 368 chicas que no las usan. Entre los chicos, ¿qué porcentaje usa gafas?

Problema 3

Una población de 120 personas sufre una infección en la piel. Unas han sido tratadas con un antibiótico y otras no. 42 personas se han tratado con el antibiótico y se han curado y 48 personas no se han tratado con el antibiótico y no se han curado. En total, se han curado 64 personas. Entre las personas que se han tratado con el antibiótico, ¿qué porcentaje no se ha curado?

Problema 4

Una población de 240 personas sufre una infección en la piel. Unas han sido tratadas con un antibiótico y otras no. Se han curado en total 120 personas, 100 se han tratado con el antibiótico y 84 se han tratado con el antibiótico y se han curado. Entre las personas que no se han curado, ¿qué porcentaje han sido tratadas con el antibiótico?

Problema 5

Una población de riesgo para la tuberculosis de 30 personas se somete a un test para averiguar si padecen de tuberculosis o no. El test puede dar positivo o negativo tanto si se padece como si no se padece la enfermedad. Hay 17 personas que son tuberculosas. Los resultados muestran que había 14 personas a las que el test les resultó positivo. Además, a 7 personas que eran tuberculosas el test les resultó negativo. Entre las personas que no son tuberculosas, ¿a qué porcentaje el test les da positivo?

Problema 6

Un dispositivo comprueba si una pieza para transistores es correcta o defectuosa. Se toma una muestra de 100 piezas recién fabricadas y se prueba con el dispositivo si son correctas o defectuosas. El resultado fue que 95 piezas fueron

Estrada, A. (2011). Instrumentos de medición de actitudes hacia la estadística: la escala EAEE para profesores. En M.M. Moreno, N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los Grupos de Investigación de la SEIEM* (pp. 233-251). Lleida.

correctas, 77 fueron calificadas como correctas por el dispositivo y que 4 piezas fueron defectuosas y el dispositivo las calificó como defectuosas. Entre las piezas calificadas como correctas por el dispositivo, ¿qué porcentaje eran piezas correctas?

Anexo II. Segundo cuestionario.

Problema 1

La clase de 4º de ESO está formada por chicos y chicas. Entre los estudiantes, hay un 15% de chicas que usan gafas, un 37% de chicas que no las usan y un 35% de chicos que tampoco usan gafas. Entre los que usan gafas, ¿qué porcentaje son chicas?

Problema 2

Un conjunto de personas sufre una infección en la piel. Unas han sido tratadas con un antibiótico y otras no. Se han curado un 53% de dichas personas. Un 35% de las personas se han tratado con el antibiótico y se han curado y un 40% de las personas no se han tratado con el antibiótico y no se han curado. Entre las personas que se han tratado con el antibiótico, ¿qué porcentaje no se ha curado?

Problema 3

Una población con riesgo de padecer tuberculosis se somete a un test para averiguar si padecen tuberculosis o no. El test da positivo o negativo para la enfermedad en cualquier caso. Un 57% de las personas eran tuberculosas. Los resultados muestran que hubo un 47% de personas a las que el test les resultó positivo. Además, los resultados mostraron que un 23% de las personas resultaron ser tuberculosas y el test les dio negativo. Entre las personas que no eran tuberculosas, ¿a qué porcentaje el test les dio positivo?

Problema 4

Un centro escolar está formado por chicos y chicas. Hay un 28% de estudiantes que usan gafas, un 15% de chicas que las usan y un 37% de chicas que no las usan. Entre los chicos, ¿qué porcentaje usa gafas?

Problema 5

Un dispositivo comprueba si una pieza para transistores es correcta o defectuosa. Se toma una muestra de piezas recién fabricadas y se prueba con el dispositivo si son correctas o defectuosas. El 95% de las piezas eran correctas, el 77% fueron calificadas como correctas por el dispositivo y el 4% de las piezas eran defectuosas y el dispositivo las calificó como defectuosas. Entre las piezas calificadas como correctas por el dispositivo, ¿qué porcentaje eran piezas correctas?

Problema 6

Una población sufre una infección en la piel. Unas han sido tratadas con un antibiótico y otras no. Se han curado el 53% de las personas, un 42% se han tratado con el antibiótico y un 35% se han tratado con el antibiótico y se han curado. Entre las personas que no se han curado, ¿qué porcentaje han sido tratadas con el antibiótico?

Anexo III. Tercer cuestionario.

Problema 1

Las matemáticas y el inglés se encuentran entre las asignaturas más difíciles de aprobar en la secundaria. En un instituto la probabilidad de que un estudiante apruebe a la vez matemáticas e inglés es de 0,15; la probabilidad de que apruebe matemáticas y no apruebe inglés es de 0,37 y la probabilidad de que no apruebe ninguna de las dos es 0,35.

Los estudiantes que no han aprobado matemáticas, ¿qué probabilidad tienen de aprobar inglés?

Los estudiantes que han aprobado inglés, ¿qué probabilidad tienen de aprobar matemáticas?

Problema 2

Una población con un alto riesgo de padecer SIDA se somete a un test para averiguar si la padecen o no. El test da positivo o negativo en cualquier caso. La probabilidad de que una persona de esta población de riesgo padezca SIDA es de 0,57 y la probabilidad de que dé positivo en el test es de 0,47. Se sabe, además, que hay una probabilidad de 0,23 de que una persona padezca de SIDA y el test le dé negativo.

Las personas que no padecen SIDA, ¿qué probabilidad tienen de dar positivo en el test?

Las personas que dan positivo en el test, ¿qué probabilidad tienen de padecer SIDA?

Problema 3

Un grupo de personas sufre de la conocida gripe porcina. Unas han sido tratadas con el antiviral Tamiflú y otras no. La probabilidad de que una persona se trate con el antiviral y se cure de la gripe es de 0,35 y la probabilidad de que una persona no se trate con el antiviral y no se cure es de 0,40. Además, la probabilidad que tiene una persona de este grupo de curarse la gripe es de 0,53.

Estrada, A. (2011). Instrumentos de medición de actitudes hacia la estadística: la escala EAEE para profesores. En M.M. Moreno, N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los Grupos de Investigación de la SEIEM* (pp. 233-251). Lleida.

Las personas tratadas con el antiviral, ¿qué probabilidad tienen de no curarse?

Las personas no tratadas con el antiviral, ¿qué probabilidad tienen de curarse?

Problema 4

Un dispositivo comprueba si una pieza recién fabricada es correcta o defectuosa. Se toma una muestra de piezas recién fabricadas y se comprueba con el dispositivo si son correctas o defectuosas. La probabilidad de que una pieza sea correcta es de 0,95 y la probabilidad de que el dispositivo califique una pieza como correcta es de 0,77. La probabilidad de que una pieza sea defectuosa y el dispositivo la califique como defectuosa es de 0,04.

Las piezas que son correctas, ¿qué probabilidad tienen de ser calificadas como correctas por el dispositivo?

Las piezas calificadas como correctas por el dispositivo, ¿qué probabilidad tienen de ser correctas?

Problema 5

Una población sufre una infección en la piel. Algunas personas han sido tratadas con un antibiótico y otras no. La probabilidad de que una persona haya sido tratada con el antibiótico es de 0,42. La probabilidad que tiene una persona de curarse de esta infección es de 0,53. Se sabe también que la probabilidad de tratarse con el antibiótico y curarse de la infección es de 0,35.

Las personas que no se han tratado con el antibiótico, ¿qué probabilidad tienen de curarse de la infección?

Las personas que no se han curado, ¿qué probabilidad tienen de no haber sido tratadas con el antibiótico?

Problema 6

La probabilidad de que un estudiante use gafas es de 0,28. La probabilidad de que un estudiante sea chica y use gafas es de 0,15 y de que sea chica y no las use de 0,37. Los estudiantes que son chicos, ¿qué probabilidad tienen de usar gafas?

INSTRUMENTOS DE MEDICION DE ACTITUDES HACIA LA ESTADISTICA: LA ESCALA EAEE PARA PROFESORES

[Assumpta Estrada](#)
Universidad de Lleida

Resumen

La Estadística es un componente importante de la educación escolar en el que los profesores tienen un rol fundamental. En la literatura se han propuesto diversas escalas de actitudes hacia la Estadística entre universitarios pero no se conocen escalas específicas para profesores que sean igualmente válidas en diferentes contextos. En este estudio se revisan diferentes instrumentos de medida para evaluar las actitudes hacia la Estadística y se presenta la escala de Actitudes hacia la Estadística (EAEE) propuesta por Estrada (2002), aplicada en el contexto de profesores en ejercicio y formación en España y se analiza su futura evaluación psicométrica transcultural en distintos países Iberoamericanos.

Abstract

Statistics is an important component of school education in which teachers play a key role. Several attitudes toward the Statistic scales have been proposed in the literature by considering universities samples but specific scales are not known for teachers. In this paper different scales of attitudes are reviewed and we show the psychometric characteristic of the scale of Attitudes toward the Statistic proposed by Estrada (2002).

Estrada, A. (2011). Instrumentos de medición de actitudes hacia la estadística: la escala EAEE para profesores. En M.M. Moreno, N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los Grupos de Investigación de la SEIEM* (pp. 233-251). Lleida.

Introducción

Aunque sabemos que la medida de las actitudes es una tarea difícil pues conlleva conocer lo que realmente una persona siente y valora, la medición y evaluación de actitudes es un capítulo central, tanto para la investigación científica como para la práctica educativa.

Los esfuerzos para mejorar los enfoques metodológicos y los técnicos son actualmente una de las líneas de investigación más acusadas, lo que ha permitido configurar nuevos y más precisos instrumentos de medición. Hay que hacer notar que, hasta tiempos bien recientes, la metodología utilizada en la medida de las actitudes ha sido repetitiva y basada fundamentalmente en un pretendido isomorfismo entre expresión verbal de la conducta y la conducta misma. Las técnicas utilizadas han sido también casi sin excepción los cuestionarios, inventarios, etc., que cumplimentaba el propio sujeto sometido a análisis (subjetivismo) o se interpretaba por el investigador (antropomorfismo) y siempre, en el mejor de los casos, unidireccionales.

En la actualidad, de entre las múltiples técnicas de observación que se conocen (entrevistas, cuestionarios...), el instrumento de medida de actitudes hacia la Estadística que todos los autores consultados utilizan, es la escala de actitud, porque sin olvidar el valor de complementariedad que tienen todas las técnicas para la observación, las escalas son procedimientos que se utilizan para determinar diferencias de grado o intensidad respecto a algún objeto actitudinal. En esencia son mucho más objetivas que otras técnicas y además como indica Gairin (1987, p.155) presentan las ventajas que citamos a continuación:

Permiten el anonimato.

Proporcionan tiempo al encuestado para pensar acerca de las respuestas antes de responder.

Se pueden administrar simultáneamente a muchas personas.

Proporcionan uniformidad, cada persona responde exactamente a la misma pregunta.

En general, los datos obtenidos son más fácilmente analizados e interpretados que los datos extraídos de respuestas orales, respuestas abiertas u otras.

Pueden ser administradas por terceras personas sin pérdida de fiabilidad de los resultados.

Ahora bien, de los cuatro tipos de escala más conocidos (de puntuaciones sumadas ó "Escala de Likert"; de valores escalonados ó "Escala de Thurstone"; de diferencial semántico ó "Escala de Osgood" y acumulativas ó "Escala de

Guttman"), la de Likert es la que siempre se utiliza en este tipo de trabajos, por concentrarse en los sujetos

Este tipo de escala de puntuaciones sumadas está formada por un conjunto de sentencias o proposiciones actitudinales de idéntico valor, a cada una de las cuales los sujetos deben responder matizando el grado de acuerdo o desacuerdo que personalmente tienen con ellas. Al sumar todas las puntuaciones dadas de todas las preguntas de la escala se obtiene la puntuación de la actitud del individuo concreto o de todos los individuos intervinientes frente a un determinado tópico.

La Estadística es un componente importante de la educación escolar en el que los profesores tienen un rol fundamental y las actitudes hacia la materia intervienen en el proceso de enseñanza- aprendizaje (Estrada, 2009). Dedicamos una parte de este estudio a revisar las diferentes escalas de medida existentes en la literatura internacional, presentando sus características psicométricas, así como los factores que las configuran. Pero todas estas escalas, no son específicas para profesores, por ello se presenta la escala de Actitudes hacia la Estadística (EAEE) propuesta por Estrada (2002), aplicada en el contexto de profesores en ejercicio y formación en España y se analiza su futura evaluación psicométrica transcultural en distintos países Iberoamericanos.

Análisis de las escalas de medición de actitudes hacia la estadística.

Existen diferentes instrumentos de medida para evaluar las actitudes hacia la Estadística cada uno de ellos tiene características específicas distintas referidas a aspectos diferentes del constructo, por ello es conveniente analizar por separado cada uno de estos cuestionarios, así como las finalidades para lo que han sido desarrollados.

Inventario de actitudes hacia la estadística de Roberts (SAS)

La primera escala de actitudes hacia la Estadística que aparece mencionada por diferentes autores es el SAS elaborado en 1980 (Roberts y Bilderback, 1980) para suplir las necesidades de medir las actitudes de los estudiantes por parte de los profesores de Estadística.

El instrumento está compuesto por 34 ítems tipo Likert con cinco posibilidades de elección que oscilan entre, totalmente de acuerdo y totalmente en desacuerdo. Para la elaboración de la escala revisan y adaptan varios de los ítems que componen el cuestionario propuesto por Dutton (1954) para medir las actitudes hacia la aritmética. Parte de 50 ítems tipo Likert que reduce después una prueba inicial al suprimir algunas sentencias y revisar otras que presentan baja correlación con la puntuación total de la escala.

La escala inicial se pasa a una muestra de estudiantes de la Penn State University matriculados en un curso de introducción a la Estadística en tres periodos distintos (primavera de 1978, invierno del 79 y primavera del 79). Según los resultados obtenidos la proporción de la varianza explicada por el SAS para predecir las calificaciones de los alumnos varía entre un 10 y un 30 % además tiene una alta consistencia interna con valores de coeficiente alfa entre .93 y .95 en los tres periodos en que se realizó el estudio por lo que a raíz de estos resultados se presenta como una prueba muy fiable.

Posteriormente, Roberts y Saxe (1982) observaron que se daba un cambio positivo en las puntuaciones medias del SAS desde el principio al final de un semestre en un curso de Estadística básico y que las puntuaciones SAS estaban significativamente relacionadas con las notas del curso, habilidades matemáticas básicas, conocimientos estadísticos previos, el ser licenciado, sexo, hasta que punto se desea realizar el curso y la satisfacción que produce el llevarlo a cabo, número de cursos de matemáticas desarrollados previamente, si la elección del curso ha sido libre o por el contrario ha de efectuarse obligatoriamente actitudes hacia las calculadoras y evaluación del profesor.

Por todo ello y según Auzmendi (1992), el SAS se presenta como una escala muy fiable que predice moderadamente el logro y puede por tanto usarse con confianza para medir el rasgo general denominado actitud hacia la Estadística.

La escala de actitudes hacia la estadística (ATS) de Wise

Este nuevo instrumento denominado ATS tiene como finalidad ser utilizado en la medida del cambio actitudinal en estudiantes de Estadística básica. Wise (1985) parte de la crítica del SAS ya que considera que existen dos dificultades en sus ítems. En primer lugar parecen medir el rendimiento de los estudiantes más bien que sus actitudes, en segundo lugar los estudiantes principiantes no pueden responder significativamente a este tipo de sentencias ya que normalmente tienen poca o ninguna experiencia con problemas o conceptos estadísticos. Por tanto y aunque el SAS cubre una importante necesidad de medida del constructo, muchos de sus ítems son del todo inapropiados.

Parece pues evidente que en vista de las dificultades planteadas por el SAS, se necesita una escala alternativa. Para abordar esta necesidad, Wise construye la escala de actitudes hacia la estadística (ATS) con ítems netamente actitudinales que no tienen que ver con el éxito de los estudiantes en resolver problemas estadísticos o en comprender conceptos y además proporciona una medida de las actitudes sostenidas por los estudiantes universitarios hacia los cursos de Estadística básica, es decir del posible cambio actitudinal del primero al último día de clase.

Se clasifican dos dominios diferenciados susceptibles de medición en el ATS: actitudes hacia el curso que están realizando y actitudes de los alumnos hacia el uso de la Estadística en su campo de estudio.

La construcción de la prueba comienza con la elaboración de 40 ítems tipo Likert con cinco posibilidades de elección que oscilan entre totalmente de acuerdo y totalmente en desacuerdo, aproximadamente a la mitad de los ítems se puntúa inversamente al ser formuladas las sentencias negativamente.

La validez de los contenidos la realizaron dos profesores de Estadística básica aplicada a la educación que eliminaron 5 ítems. Otras 5 sentencias se suprimieron debido a bajas correlaciones con el total después de ser suministradas a una primera muestra de sujetos, con lo que el conjunto de ítems queda en 30. Seguidamente 3 profesores de estadística diferente de los anteriores, los comparan con los del SAS. Para ello se combinan al azar los ítems de las dos escalas, en una única lista y se valoran desde el punto de vista de si los estudiantes podían o no responder de una forma válida el primer día de clase. Considerando que un único ítem del ATS fue calificado como no válido por más de un evaluador (y 14 del SAS) y consecuentemente se omitió, se reduce a 29 afirmaciones divididas en dos subescalas:

Una escala de 20 ítems denominada “actitudes hacia el campo de la Estadística” (subescala de campo) que ayuda a medir el valor que se le da a la materia y al uso en su campo de estudio.

Una escala de 9 ítems denominada “actitudes hacia el curso” (subescala curso) para medir las actitudes hacia el aprendizaje de la Estadística y hacia el curso que está realizando.

Los resultados obtenidos al aplicarlos a dos muestras de 92 y 70 alumnos respectivamente, demuestran que tiene una elevada consistencia interna con valores de coeficiente alfa de 0.92 y 0.90 así como fiabilidad test-retest de 0.82 y 0.91 para las dos subescalas. Además también se demostró al aplicar el análisis factorial que cada subescala del ATS proporciona información muy diferente sobre las actitudes hacia la Estadística.

Considerando que Wise (1985) argumenta que la tercera parte de los ítems del SAS no eran válidos actitudinalmente, hubiera sido lógico comparar el ATS que se suponía mejor escala con el SAS pero no lo hizo, simplemente lo validó y después de aplicarlo, concluyó que funcionaba mejor como indicador de actitudes hacia la Estadística.

Roberts y Reese (1987) argumentando que los datos aportados por Wise desafortunadamente no clarifican si tienen características psicométricas diferentes, comparan directamente las dos escalas con el objetivo de ver cual es la más apropiada.

Combinaron al azar los distintos ítems en una nueva escala de 62 sentencias que se dan a 280 alumnos al inicio de un curso de introducción a la Estadística. Los resultados demuestran que las dos escalas no son muy diferentes en sus valoraciones, correlacionan con las mismas variables externas (sexo, edad, curso de matemáticas y de estadística realizados...) y en el mismo sentido, por lo que podemos afirmar que están midiendo las mismas características y en términos de validez predictiva operan ambas de la misma manera. Se concluye que el ATS es esencialmente una variación del SAS pero no una escala significativamente distinta.

Con un planteamiento más didáctico que psicométrico, a mi entender, aparece un año más tarde un estudio similar realizado en la Ohio University por Waters y Martelli (1988) en donde también se comparan ATS y SAS con resultados análogos a los anteriores. En opinión de los autores las actitudes de los estudiantes sobre los cursos de Estadística especialmente si son de iniciación, son a menudo el principal obstáculo para un aprendizaje efectivo por ello el seguimiento y la valoración de las actitudes y de sus posibles cambios permitirán al profesor controlar mejor el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Con este objetivo buscan la mejor escala que les permite valorar el cambio actitudinal y observan que las dos ATS y SAS están altamente relacionadas y son medidas fiables del constructo, poco relacionadas con el sexo ni con los años de estudio, ni con el nivel, aunque si observan cierta relación con la nota del curso y la existencia de un cambio positivo del primer día de curso hasta el último, aunque no era generalizado y por ello propone estudiar si las actitudes del profesor sería una de las causas del cambio.

La escala multidimensional de Auzmendi

A pesar de que las escalas antes descritas ATS y SAS son pruebas fiabilizadas y validadas ampliamente, ambas son americanas y por tanto estos estudios se han realizado en muestras de estudiantes con unas características socioeducativas muy diferentes a las nuestras, razón fundamental que unida al hecho de no haber encontrado ninguna escala específica de actitudes hacia la Estadística en lengua castellana para estudiantes de enseñanzas medias o universitarias, anima a Auzmendi (1992) a crear un nuevo instrumento de medida que se adecue a nuestra realidad social y que contemple la consideración multidimensional de las actitudes hacia las Matemáticas y hacia la Estadística, recogiendo los factores más significativos.

Es el primer trabajo en el que aparece un análisis de las actitudes hacia las Matemáticas, entendiendo éstas, según palabra de la autora, no como un rasgo general y unitario sino como un elemento formado por aspectos diferenciales y específicos.

Parece oportuno señalar como característica curiosa de esta escala, su posible utilización para evaluar las actitudes hacia la Estadística y también hacia las Matemáticas, simplemente con una pequeña modificación de cada ítem y además sirve tanto para estudiantes universitarios como para los de enseñanzas medias.

Respecto a la selección de las dimensiones de la escala se realiza según el criterio de mayor frecuencia de aparición del factor, en una serie de escalas, curiosamente de actitudes hacia las Matemáticas. Los factores escogidos son cinco (utilidad, ansiedad, confianza, agrado y motivación) y se redactan los ítems de la escala adaptando las afirmaciones de los instrumentos de mediada analizados, a cada factor.

Después de un estudio piloto, se seleccionan 40 sentencias (8 por factor) que se someten a un análisis factorial con una muestra de 213 estudiantes universitarios. Se eliminan 15 afirmaciones, con lo que la prueba definitiva resultante consta de 25 ítems que se reparten en los 5 factores básicos que han servido de guía para la elaboración del instrumento de medida.

Las pruebas de fiabilidad y validez ponen de manifiesto que las diferentes subescalas (tantas como factores) que constituyen el instrumento de medida total, así como la prueba en su conjunto, poseen una consistencia interna elevada. Así mismo, para llevar a cabo el estudio de validez se correlaciona la prueba con el SAS de Roberts, obteniendo un valor de 0.86, lo que pone de manifiesto que mide efectivamente el constructo actitudes hacia la Estadística. Con procedimiento análogo confirma la validez multidimensional de las diferentes subescalas.

El cuestionario de actitudes hacia la estadística (SATS)

Según Schau, Stevens, Dauphine y Del Vecchio (1995), los instrumentos de medida de las actitudes hacia la Estadística, hasta ahora descritos, si quieren utilizarse de una manera óptima en docencia y en investigación, deberían de tener una serie de características clave:

Incluir las componentes más importantes de las actitudes.

Ser aplicables con los menores cambios posibles durante todo el curso y en diferentes cursos de Estadística.

Ser cortos, para aplicarlos en poco tiempo y con ítems que midan tanto actitudes positivas como negativas.

Habrían de explicar el desarrollo y validación de la experiencia incluyendo las orientaciones a los alumnos para una aplicación correcta.

Finalmente el análisis de resultados debería utilizar técnicas que conformen el factor dominante (CFA).

Contemplando todas estas características, diseñaron el cuestionario de actitudes hacia la Estadística (SATS) para su construcción utilizaron una variación de la técnica denominada de grupo nominal (NGT) Moore (1987), que consiste en que un panel de jueces compuesto por dos Licenciados, dos alumnos universitarios matriculados a un curso de introducción a la Estadística y dos profesores no vinculados a los anteriores, generan una serie de ítems que representan a su entender actitudes hacia la Estadística.

Estos 92 ítems más 21 provenientes de comentarios realizados por los estudiantes en diferentes cursos, se estructuran por consenso entre los jueces en cuatro componentes: Afectiva, Competencia cognitiva, Valor y Dificultad

La versión piloto, tipo escala Lickert de siete posibilidades, se validó con una muestra de estudiantes (132) entre Licenciados y no Licenciados de la Universidad de Nuevo México y South Dakota utilizando técnicas factoriales. Finalmente el SATS se estructura con los ítems seleccionados, 6 referentes a la dimensión afectiva, 6 a la competencia cognitiva, 9 al valor y 7 para la dificultad.

La validación del cuestionario definitivo compuesto por 28 ítems, se obtuvo correlacionándolo con la escala ATS de Wise obteniéndose relaciones significativas y positivas tanto al nivel de subescalas como a nivel total, por lo que los autores concluyen que el SATS es un buen instrumento multidimensional de medición de actitudes hacia la Estadística. Presentan dos formularios, un formulario “pre” para alumnos que no han realizado un curso de estadística y un formulario “post” que se administrará durante o al finalizar el curso. Los ítems son idénticos, excepto que existen pequeños cambios relacionados con la duración de la valoración, por lo que los dos cuestionarios nos aportan medidas de actitudes hacia la materia en diferentes momentos del proceso de aprendizaje.

Escala de actitudes hacia la estadística de Cazorla y otros (EAE)

Adaptan y validan la escala de actitudes en relación con las Matemáticas de Aiken (1974) traducida y adaptada a Brasil por Brito (1998), en vez de crear una nueva escala como el proceso es largo debido a la multiplicidad de factores que intervienen en las actitudes. En su opinión la escala de Brito presenta una serie de características que justifican su elección. Entre ellas destaca las siguientes: se limita a aspectos afectivos, presenta una alta consistencia interna y estabilidad, sus ítems son pertinentes para la estadística y además está validada en el propio país. Opta por una escala unidimensional, dejando el estudio de otros aspectos o factores y desarrollo de una escala multidimensional para otros trabajos.

Tabla 1. Características de las escalas analizadas

Escalas	S.A.S. (Statistic Attitudes Survey)	A.T.S. (Attitudes Toward Statistic)	Escala de actitudes hacia la Estadística	S.A.T.S. (Survey Attitudes Toward Statistics)	E.A.E. (Escala de actitudes en relación a la Estadística)
Autores	Robert Bilderbak (1980)	Wise (1985)	Auzmendi (1992)	Schau et al. (1995)	Cazorla et al. (1999)
Nº de propuestas	33	29	25	28	20
Nº de alternativas	5	5	5	7	4
Dimensión	No indicada	Bidimensional: Disciplina y Aplicación al área de actuación	Multi- dimensional: Utilidad, Ansiedad, Confianza, Agrado y Motivación	Multi- dimensional: Afectividad, Competencia cognitiva, Valor y Dificultad	Bidimensional Afectivo y Autovalor
Caracterís- ti-cas de la muestra	Alumno de introducción a la Estadística. Univ. Pensilvania	Alumno de introducción a la Estadística. Univ. Centro Oeste. EUA.	Alumnos de todas las carreras en que se estudia Estadística. País Vasco.España	Alumnos de introducción a la Estadística. (33 cursos) Univ. Nuevo Mejico y Dakota del Sur.	Alumno de introducción a la Estadística. Univ. Privada de São Paulo Brasil.
Tamaño de la muestra	Tres muestras N=92, 81, 65	N=92	N=2052	N=1403	N=1154

Confianza	0,93 a 0,95	Campo: 0,92	Total: 0,64 a 0,90	Afectivo:	0,95
Alfa de Cronbach		Disciplina: 0,90	Utilidad: 0,64 a 0,80	0,81 a 0,85	
			Ansiedad: 0,81 a 0,88	Cognitivo:	
			Seguridad: 0,74 a 0,84	0,77a 0,83	
			Agrado:	Valor: 0,80 a 0,85	
			0,79 a 0,83	Dificultad:	
			Motivación:	0,64 a 0,77	
			0,61 a 0,71		
Validez predictiva	Correlación con las notas: 0,33 a 0,54	Correlación con las notas: 0,27	Correlación con el S.A.S.: 0,86	Correlación con la escala A.T.S.: 0,34 a 0,79	---
Validez factorial	---	Dos factores responsables del 49% de la varianza total	5 factores que explican el 60,7% de la varianza total	Coeficiente de ajuste al modelo: 0,97 TLI=0,98	2 factores responsables del 61,2% de la varianza total

La escala es de tipo Likert con 20 ítems, 10 positivos y 10 negativos, cada uno con cuatro posibilidades de respuesta. Asimismo utiliza un cuestionario para obtener informaciones complementarias tales como curso, género, edad, autopercepción de la Estadística, definición de Estadística que utilizara en trabajos posteriores.

Se pasaron escala y cuestionario a 1154 estudiantes matriculados en diferentes áreas de dos Universidades privadas de São Paulo. La consistencia interna es elevada con un coeficiente alfa de Cronbach de 0,95. El análisis factorial confirma que la escala es esencialmente unidimensional ya que el factor dominante justifica (accounting) el 51,5% de la varianza.

Los resultados sugieren que la escala EAE es un buen instrumento para medir las actitudes de los estudiantes hacia la Estadística con el objetivo de que los docentes puedan diseñar estrategias de intervención que les permita conseguir un aprendizaje significativo.

En la Tabla 1 presentamos un resumen de las principales características, así como la validez y la fiabilidad de cada una de las escalas. Un estudio más detallado podemos encontrarlo en Carmona (2004)

En general, todos los instrumentos de medida estudiados son escalas de tipo Likert, la mayoría multidimensionales, compuestos por un número determinado de proposiciones, habitualmente más de veinte y con cinco o siete posibilidades de respuesta, que varían, tal como se ha comentado anteriormente, según el grado de acuerdo del encuestado.

Asimismo, el valor de la actitud es la suma de las puntuaciones de las distintas sentencias, directas o invertidas, según la naturaleza positiva o negativa del ítem correspondiente.

La escala de actitudes hacia la estadística (EAEE) propuesta por Estrada (2002)

Todas las escalas analizadas coinciden en que han sido validadas entre estudiantes universitarios o escolares pero no entre profesores en ejercicio y en formación.

Por ello decidimos construir una escala de actitudes hacia la estadística específica para docentes. La escala de actitudes hacia la estadística (EAEE) se construyó combinando la escala SAS (Roberts y Bilderback, 1980), la Escala ATS (Wise, 1985) ambas consideradas internacionalmente como las más usuales y la española de Auzmendi (1992). Además nuestro interés por los aspectos didácticos de las actitudes hacia la Estadística de los profesores en formación y en ejercicio, nos llevó a considerar los siguientes tipos de componentes de las actitudes:

Componentes antropológicos:

componente social: actitudes relacionadas con la percepción y valoración del papel de la Estadística en el ámbito sociocultural de cualquier ciudadano;

componente educativo: analizaremos en este componente el interés hacia la Estadística y su aprendizaje, la visión de su utilidad para el alumno, su opinión sobre si debiera ser incluida en el currículo y la dificultad percibida;

componente instrumental: se recoge aquí la utilidad hacia otras materias, como forma de razonamiento y como componente cultural

Nuestro propósito al introducir estos componentes fue, además de contemplar todas aquellas cuestiones referentes a la utilidad, formación y multidisciplinariedad de la estadística, recoger también todas aquellas que la relacionan directamente con el trasfondo social, económico y cultural. Por otro lado, tuvimos en cuenta los

componentes pedagógicos clásicos contemplados en investigaciones sobre actitudes como las de Auzmendi (1992), Gil (1999) o Gomez Chacón (2000):

Componentes pedagógicos:

componente afectivo: son los sentimientos personales hacia la Estadística y su estudio, como por ejemplo: agrado-desagrado hacia esta materia, miedo-confianza al iniciar su estudio o al resolver problemas, interés-desinterés por el tema;

componente cognitivo: incluye las concepciones y creencias acerca de la Estadística, comprensión de conceptos, resolución de problemas, así como también su percepción en el mundo de hoy, la ciencia y la escuela;

componente comportamental: es el comportamiento respecto a la Estadística, es la tendencia a la acción, la toma de decisiones, la ayuda a otros compañeros, el uso que se hace de la misma.

En el proceso de elaboración se siguieron las recomendaciones de Osterlind (1989) y Thorndike (1989) y se contemplaron los componentes pedagógicos y antropológicos descritos anteriormente.

En primer lugar, se delimitó el contenido a evaluar, y se especificó el formato de los ítems. Éstos constan de un enunciado y una escala de 5 puntos, que valoran las respuestas desde “muy en desacuerdo” (1 punto) hasta “muy de acuerdo” (5 puntos).

A partir de las tres escalas citadas, se elaboró un primer listado de ítems; seguidamente se realizó una selección contemplando los diferentes componentes pedagógicos y antropológicos y, dando un peso equivalente a cada uno, se fue intentando incluir tanto ítems redactados en forma afirmativa (“la Estadística ayuda a entender el mundo de hoy”), como otros en forma negativa (“en la escuela no se tendría que enseñar Estadística”). Y todo ello para evitar el problema de la aquiescencia (Morales, 1988), por el que algunos sujetos tienden a responder con la forma “de acuerdo” sea cual sea el contenido del ítem.

Se consiguió un listado de 36 enunciados, que se sometieron a un “panel de jueces”, expertos con diferentes perfiles profesionales y que emiten su opinión respecto a la adecuación y univocidad de las sentencias. Después de la valoración, la escala definitiva se reduce a 25 ítems, 14 afirmativos frente a 11 negativos, (ver anexo 1) y cuya distribución según los componentes evaluados por cada ítem es la que aparece en la tabla 2

Tabla 2. Componentes de las actitudes evaluadas en la escala de Estrada

Componentes antropológicos			
Componentes pedagógicos	Social	Educativa	Instrumental
Afectivo	1, 11, 25	7, 12, 23	10, 13, 16, 20
Cognitivo	2, 19, 21	4, 6, 17	3, 24
Comportamental	9, 18	8, 15, 22	5, 14

Dado que los ítems no están redactados en el mismo sentido, todos ellos han sido codificados de modo que una puntuación mayor vaya asociada a una actitud más positiva y viceversa. Hacemos notar que los ítems 1, 6, 9, 11, 14, 15, 19 y 25 tienen un enunciado desfavorable a la actitud que tratamos de medir. Es por ello que, en estos ítems la puntuación otorgada será la contraria al modo usado en el resto de los ítems, es decir, se puntuará con el siguiente criterio (1 = muy de acuerdo, 2 = de acuerdo, 3 = indiferente, 4 = en desacuerdo, 5 = muy en desacuerdo).

Las medias y desviaciones típicas que se reportan para los ítems, se hacen respecto a la puntuación otorgada a la respuesta y en consecuencia siempre se deben interpretar en una escala positiva. Esta decisión se toma, por un lado, para poder tener una escala homogénea de comparación de todos los ítems, en que una media más (o menos) alta indique siempre una actitud más (o menos) positiva, independientemente de si el ítem se redacta con enunciado positivo o negativo. Por otro, en el cálculo de la puntuación total, es necesario que todos los ítems tengan la misma dirección. De esta manera, la puntuación total en actitudes, será la suma de las puntuaciones de los veintidós ítems, y representará la actitud de cada encuestado respecto a la estadística.

Aplicaciones de la escala (EAEE) a profesores en formación y en ejercicio

En Estrada, Batanero y Fortuny (2004) presentamos los resultados de la escala de actitudes EAEE en una muestra de 66 profesores en ejercicio y 74 profesores en formación de la Universidad de Lleida

La actitud hacia la Estadística de profesores en ejercicio y en formación es la variable dependiente, operativizada por medio de la puntuación total de la escala y como variables independientes consideramos ciertas variables personales y escolares: género, especialidad y nivel escolar en que estudió estadística para todo el colectivo; años de docencia en general y en la materia para los profesores en

ejercicio y uso en clase de la Estadística como herramienta multidisciplinar, sólo para los profesores en ejercicio del área de Sociales.

Los resultados obtenidos indican que las actitudes hacia la estadística de los profesores en formación y en ejercicio tienen características muy similares. Asimismo, nuestro estudio sugiere que estas actitudes son, en general, moderadas y positivas con una puntuación de promedio global superior a la posición teórica de indiferencia. La actitud es algo mejor en los profesores en ejercicio, aunque tiende a empeorar con el uso o la enseñanza. No encontramos diferencias por géneros, aunque sí una mejoría en aquellos alumnos que la estudiaron previamente.

La escala se ha aplicado recientemente a una muestra de 148 profesores en ejercicio y formación de Perú. Los Estudios comparativos son importantes para comprender la problemática común entre países y para generar un debate acerca de la importancia de propuestas curriculares contextualizadas. Por ello realizamos este estudio que compara las actitudes hacia la estadística entre profesores españoles y peruanos de educación primaria. (Estrada, Batanero, Bazán, y Aparicio, 2009).

El análisis de ítems realizado desde una perspectiva clásica y usando el modelo de escala de rating (Andrich, 1978) indica que los ítems 3, 23 y 21 no alcanzaron un comportamiento satisfactorio en los diferentes criterios considerados por lo que la escala EAEE, en este estudio comparativo, consta de 22 ítems al excluirse estos tres de correlación ítem total muy baja (Estrada, Bazán y Aparicio, 2010).

A la vista de los resultados obtenidos, podemos afirmar que la actitud de los encuestados respecto a la estadística es positiva en ambos países aunque encontramos que las actitudes son más positivas entre profesores españoles en consonancia con las diferencias de énfasis del currículo de Educación Primaria. Así, estas actitudes con mayor acuerdo en España pueden ser explicadas, en parte, por el mayor trabajo, aunque todavía insuficiente y dependiendo de las universidades (Estrada y Batanero, 2008), en formación de profesores, en currículo y en Didáctica de la estadística en España frente al caso peruano, donde más bien existen nuevos retos por enfrentar, como indica Bazán (2006).

Algunas de las actitudes específicas en las que los profesores de España se diferencian de sus pares peruanos está en tener mayor acuerdo de que la estadística es fácil y que les resultan fáciles y les gusta los problemas de estadística, incluso explicando a sus compañeros. En tanto que persiste la idea entre profesores peruanos de que la estadística es más para personas del área de ciencias.

Adicionalmente encontramos algunas diferencias en determinadas actitudes que sugieren la necesidad de revisar el rol de la estadística en la formación de los profesores de cada país.

Conclusiones y perspectivas de estudio

La evaluación psicométrica transcultural recientemente ha sido señalada como un estrategia de validez transcultural que usando la comparación entre países responde a la pregunta de si un test es “el mismo” en diferentes culturas. Esto es si la medida tiene el mismo significado en los diferentes países bajo consideración. (Estrada, Bazán y Aparicio, 2010).

En este sentido continuamos los estudios comparativos entre profesores en ejercicio y formación de España y Perú y nos proponemos analizar psicométricamente la escala de Actitudes hacia la Estadística (EAEE), resultante del estudio anterior, compuesta por 22 ítems.

Esta versión final de la escala se someterá también a una evaluación de su fiabilidad así como de su dimensionalidad a través de un análisis factorial exploratorio que nos permite indicar si hay evidencias de multidimensionalidad de la escala tal y como fue propuesta en su elaboración.

Los resultados de este estudio nos proporcionaran una escala dirigida a un muestra transcultural y conformada por profesores de escuela, dando alcances importantes sobre las actitudes que estos tienen en la enseñanza que imparten sobre la estadística en ambos países.

Consideramos que análisis futuros, con muestras entre países, pueden confirmar las características de la escala.

En este sentido estamos trabajando en el análisis de las actitudes hacia la estadística en el contexto de la península ibérica y ya se ha realizado un estudio preliminar en Portugal donde se encuestó a 71 docentes del 2º y 3º ciclo de la educación básica portuguesa. El tamaño de la muestra y las características del estudio nos han permitido testar los ítems y el funcionamiento de la escala (Martins, Nascimento y Estrada, 2009). En la actualidad estamos realizando una segunda fase que consiste en recoger cuestionarios adicionales para validar la escala en el universo de los docentes en el 2º y 3º ciclos de la educación básica portuguesa. También nos proponemos el desarrollo de un protocolo de muestreo aleatorio cuidado, para evitar los sesgos en la selección de los profesores de matemáticas portugueses.

Por todo lo expuesto hasta ahora, vemos que es importante el estudio de las actitudes hacia la Estadística, por dos razones: una, los resultados formativos y otra, su influencia en el propio proceso educativo. Pero los alumnos, tal como indican Gal y Ginsburg (1994), ya tienen sentimientos fuertes y definidos hacia la Estadística antes de iniciar su formación y según sean estos sentimientos (positivos o negativos) será el aprendizaje. Es importante valorar las actitudes y creencias de los estudiantes antes de iniciar un proceso de formación, eso implica conocer los

instrumentos de medida que mejor se adapten a cada contexto y nos permitan identificar los factores que intervienen en la configuración de las actitudes. La formación y cambio de actitudes es un proceso largo y costoso, difícil de controlar debido precisamente a la multidimensionalidad del constructo, ahora bien, los beneficios asociados, a unas actitudes positivas, traerán como consecuencia alumnos más motivados por una educación verdaderamente global de la Estadística, destinada a formar a la persona tanto en el ámbito individual como social y de conocimiento.

Agradecimientos

Trabajo apoyado por el Proyecto SEJ2010-14947/EDUC. MCYT-FEDER

Referencias bibliográficas

- Aiken, L.R.Jr. (1974). Two scales of attitude toward mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 5, 67-71.
- Auzmendi, E. (1992). *Las actitudes hacia la matemática estadística en las enseñanzas medias y universitarias*. Mensajero, Bilbao
- Bazán, J. L. (2006). La estadística llega a la escuela en el Perú. En: Gonzales, M., Bazán, J. L., Sánchez, R. (eds). *Coloquios sobre Matemática Educativa 2005, parte 2.*, 87-109. Reporte de Investigación 19. Serie C. Sección Matemática. Pontificia Universidad Católica del Perú
- Brito, M. R. F.(1998). Adaptação e validação de uma escala de attitudes em relação à matemática. *Zetetiké*, 6(9), 109-162
- Carmona, J. (2004). Una revisión de las evidencias de fiabilidad y validez de los cuestionarios de actitudes y ansiedad hacia la estadística. *Statistics Education Research Journal*, 3 (1), 5-28. On line: [http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/serj/SERJ3\(1\)_marquez.pdf](http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/serj/SERJ3(1)_marquez.pdf)
- Cazorla, I. M., Silva, C. B., Vendramini, C., y Brito, M. R. F.(1999). Adaptação e validação de uma escala de attitudes em relação à estatística. *Actas de la Conferência Internacional: Experiências e Perspectivas do Ensino da Estatística*. PRESTA, Florianópolis: Florianópolis.
- Dutton, W. (1954). Measuring attitudes toward arithmetic. *The Elementary School Journal*, 55, 24-31.

- Estrada, A. (2002). *Análisis de las actitudes y conocimientos estadísticos elementales en la formación del profesorado*. Tesis doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona.
- Estrada, A. (2009). *Las actitudes hacia la estadística en la formación de los profesores*. Milenio. Lleida. ISBN: 978-84-9743-284-9
- Estrada, A., Batanero, C y Fortuny, J. M. (2004). Un estudio comparado de las actitudes hacia la estadística en profesores en formación y en ejercicio. *Enseñanza de las ciencias*, 22 (2), 263-274.
- Estrada, A., y Batanero, C. (2008). Explaining teachers' attitudes towards statistics. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.). *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 Conference and IASE 2008 Round Table Conference*. Monterrey: International Commission on Mathematical Instruction e International Association for Statistical Education.
- Estrada, A., Batanero, C., Bazán, J. y Aparicio, A. (2009). As atitudes em relação à estatística em professores: um estudo comparativo de países XIX *Encontro de Investigação em Educação Matemática. Numeros e Estatística:reflectindo no presente, perspectivando o futuro*. Sociedade Portuguesa de Ciencias da Educação. Secção de Educação Matematica.Vila Real, 16 e 17 de Maio de 2009 Estatística: Ensino e aprendizagem. ISBN:978-972-8614-12-6.
- Estrada, A., Bazán, J.L., Aparicio, A. (2010). A cross-cultural psychometric evaluation of the attitude statistic scale estradas's in teachers. . In Chris Reading (Ed.), *Proceedings of 8th International Conference on Teaching of Statistics*. (ICOTS 8). "Data and context in statistical education:Towards an evidence-based society" Ljubljana. Slovenia, 11-16 july 2010. ISBN: 978-90-77713-54-9.
- Gairin, J. (1987). *Las actitudes en educación*. P.P.U., Barcelona.
- Gal, I. y Ginsburg, L. (1994). The role of beliefs and attitudes in learning statistics: towards an assesment framework. *Journal of Statistics Education*, 2 (2). On line, <http://www.amstat.org/publications/jse/v2n2/gal.html>
- Gil Flores, J. (1999). Actitudes hacia la estadística. Incidencia de las variables sexo y formación previa. *Revista Española de Pedagogía*, 214, 567-590.
- Gómez Chacón, I. M.(2000). *Matemática emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático*. Narcea, Madrid.

- Martins, J. A., Nascimento, M.M. y Estrada, A. (2009). Estudio preliminar de las actitudes de profesores portugueses hacia la Estadística. En Cotos,T.R., Mosquero,M.A., Perez, A. (Eds.), actas del IX Congreso Galego de Estatística e Investigación de Operacions (pp. 31-36)..Ourense (España) Del 12 al 14 de Noviembre de 2009). ISBN 978-84-613-6906-5.
- McLeod, D. B. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Macmillan y N.C.T.M.
- Moore, C. M. (1987). *Group techniques for idea building*. Sage, Newbury Park, CA.
- Morales, P. (1988). *Medición de actitudes en psicología y educación*. Universidad de Comillas. San Sebastián.
- Osterlind, S. (1989). *Constructing test items*. Kluwer, Boston.
- Roberts, D. M. y Reese, C. M. (1987). A comparison of two Scales measuring Attitudes Towards Statistics. *Educational and Psychological Measurement*, 47, 759-764.
- Roberts, D.M. y Saxe, J. E. (1982). Validity of a statistics attitude survey: A follow-up study. *Educational and Psychological Measurement*, 42, 907-912.
- Roberts, D. M. y Bilderback, E. W. (1980) Reliability and validity of statistics attitudes survey. *Educational and Psychological Measurement*, 40, 235-238.
- Schau, C., Stevens, J., Dauphine, T. y Del Vecchio, A. (1995). The development and validation of the survey of attitudes towards statistics. *Educational and Psychological Measurement*, 55(5), 868-875.
- Silva, C. B. da, Cazorla, I. M., Brito, M. R. F. (1999). Concepções e atitudes em relação a estatística. *Conferência Internacional: Experiências e Perspectivas do Ensino da Estatística* Florianópolis.
- Thorndike, R. L. (1989). *Psicometría aplicada*. Limusa. México.
- Waters, L. K. y Martelli, T. A. (1988). Attitudes toward statistics: an evaluation of multiple measures. *Educational and Psychological Measurement*, 48, 513-516.
- Wise, S. L. (1985). The development and validation of a scale measuring attitudes toward statistics. *Educational and Psychological Measurement*, 45, 401-405.

Anexo 1

Escala de Actitudes hacia la Estadística de Estrada (EAEE)

- 1.- Me molesta la información estadística que aparece en algunos programas de T.V.
- 2.- La estadística ayuda a entender el mundo de hoy.
- 3.- A través de la estadística se puede manipular la realidad.
- 4.- Es fundamental en la formación básica del futuro ciudadano.
- 5.- Uso la estadística para resolver problemas de la vida cotidiana.
- 6.- En la escuela no se habría de enseñar estadística.
- 7.- Me divierto en las clases que se explica estadística.
- 8.- Los problemas de estadística me resultan fáciles.
- 9.- No entiendo las informaciones estadísticas que aparecen en la prensa.
- 10.- Me gusta la estadística porque me ayuda a comprender más profundamente la complejidad de ciertos temas.
- 11.- Me siento intimidado ante datos estadísticos.
- 12.- Encuentro interesante el mundo de la estadística.
- 13.- Me gustan los trabajos serios donde aparecen estudios estadísticos.
- 14.- Utilizo poco la estadística fuera de la escuela.
- 15.- En clase de estadística nunca entiendo de qué están hablando.
- 16.- Me apasiona la estadística porque ayuda a ver los problemas objetivamente.
- 17.- La estadística es fácil.
- 18.- Me entero más del resultado de las elecciones cuando aparecen representaciones gráficas.
- 19.- La estadística sólo sirve para la gente de ciencias.
- 20.- Me gusta hacer problemas cuando uso la estadística.
- 21.- La estadística no sirve para nada.
- 22.- A menudo explico a mis compañeros problemas de estadística que no han entendido.
- 23.- Si pudiera eliminar alguna materia sería la estadística.
- 24.- La estadística ayuda a tomar decisiones más documentadas.
- 25.- Evito las informaciones estadísticas cuando las leo.

CREENCIAS SOBRE LA ALEATORIEDAD DE FUTUROS PROFESORES DE EDUCACIÓN PRIMARIA

[Nordin Mohamed Maanan](#), Juan Jesús Ortiz de Haro (*)
Profesor de Educación Secundaria, Universidad de Granada ()*

Resumen

En este trabajo presentamos parte de los resultados de un estudio de evaluación del razonamiento probabilístico de futuros profesores de Educación Primaria. Para ello analizamos las respuestas de 283 futuros profesores a dos problemas relacionados con la toma de decisiones, que han sido tomados de Fischbein y Gazit (1984). Analizamos el porcentaje de respuestas correctas y los argumentos utilizados por los participantes, comparando estos resultados con los obtenidos por los niños de 10-14 años en la investigación de Cañizares (1997). Este estudio indica que existen dificultades en la resolución de los problemas planteados por parte de los futuros profesores, encontrando factores subjetivos como la heurística de la representatividad, el efecto de recencia negativa y dificultades en la percepción de la independencia de sucesos que han podido influir en una incorrecta asignación de probabilidades. Concluimos con algunas implicaciones educativas que pueden ser tenidas en cuenta para mejorar nuestra acción didáctica de formación de profesores en el campo de la probabilidad.

Abstract

In this paper we present results from a study oriented to assess the probabilistic knowledge of prospective primary school teachers. We analyze responses from 283 prospective teachers to two problems relate to decision taken from Fischbein y Gazit (1984). We analyze the percentage of correct answers and the arguments given by participants, and compare these results with those obtained by 10-14 years children in Cañizares (1997) research. This study show the prospective teachers' difficulties in solving the problems proposed, in which they apply subjective factors. The representativeness heuristics, the negative recency effect, and an incorrect perception of independence may have influenced the incorrect computation of probabilities. We conclude with some educational implications that can serve to improve the didactic action to train teachers in the field of probability.

Keywords: Probability, teacher's training.

Mohamed, N., Ortiz, J.J. (2011). Creencias sobre la aleatoriedad de futuros profesores de educación primaria. En M.M. Moreno, N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los Grupos de Investigación de la SEIEM* (pp. 253-265). Lleida.

Introducción

La enseñanza de la probabilidad se ha visto reforzada en España por el Real Decreto que establece las enseñanzas mínimas para la Educación primaria (MEC, 2006), donde se incluye un bloque sobre *Tratamiento de la información, azar y probabilidad* desde el primer ciclo. Este documento enfatiza la necesidad de iniciar lo antes posible el estudio de los fenómenos aleatorios y de hacer la enseñanza más activa y exploratoria, suscitando el interés de los alumnos y su valoración de los conocimientos estadísticos para la toma de decisiones. Estas recomendaciones también se recogen en los currículos de otros países (ej., NCTM, 2000; SEP, 2006).

Pero un cambio efectivo de la enseñanza de la probabilidad requiere mejorar la formación de los profesores (Stohl, 2005), pues, sin una formación específica, podrían transmitir a sus estudiantes sus creencias, a veces erróneas (Ortiz y cols., 2006). Un requisito, por tanto, es conocer los conocimientos probabilísticos y las creencias sobre aleatoriedad de los futuros profesores de Educación Primaria.

Problema y objetivos

Debido a la importancia que está adquiriendo la enseñanza de la probabilidad, incluso en los niveles de Educación Primaria, donde el maestro es el encargado de impartir estos contenidos, nos planteamos la cuestión de qué conocimientos de probabilidad tienen los futuros profesores de Educación Primaria sobre problemas elementales de probabilidad, en particular, problemas relacionados con la toma de decisiones y cómo posibles factores subjetivos pueden influir en la asignación de probabilidades.

Pretendemos realizar una evaluación inicial de la capacidad de los futuros profesores de educación primaria para resolver problemas elementales de probabilidad y analizar después las semejanzas o diferencias con los resultados obtenidos por los alumnos participantes en la investigación de Cañizares (1997). En este trabajo presentamos parte de los resultados de un estudio de evaluación del razonamiento probabilístico de futuros profesores de Educación Primaria, completando nuestros anteriores estudios sobre las creencias de los futuros profesores en el ámbito de la probabilidad y su influencia en la asignación de probabilidades (Ortiz y cols., 2006; Ortiz y cols., 2009; Ortiz y cols., 2010). Para ello analizamos las respuestas de 283 futuros profesores de Educación Primaria a dos problemas tomados de Fischbein y Gazit (1984), estudiando los porcentajes de respuestas correctas y los argumentos proporcionados por los alumnos.

Consideramos de interés este tipo de trabajos ya que como indican numerosas investigaciones, que exponemos a continuación, es fundamental tener información de los conocimientos y creencias que sobre el contenido matemático y pedagógico de probabilidad tienen los futuros profesores. A partir de ahí podremos diseñar y

poner en práctica una instrucción adecuada para mejorar la formación probabilística de los mismos. A continuación describimos la investigación previa, la metodología y los resultados obtenidos.

Investigaciones previas

Aunque hay algunos trabajos interesantes sobre el conocimiento que necesitan los profesores para enseñar probabilidad (Fischbein, 1975; Steinbring, 1991 y Kvatinsky y Even, 2002), las investigaciones sobre formación de profesores, en el caso de la probabilidad, son limitadas. A pesar de ello progresivamente se está formando un cuerpo de conocimientos que señala la existencia de concepciones erróneas y dificultades en relación a la probabilidad en este colectivo (Azcarate, 1995, Cardeñoso, 2001; Mickelson y Heaton, 2004; Franklin y Mewborn, 2006; Ortiz y cols., 2006; Ortiz y cols., 2009 y Ortiz y cols., 2010). Otros trabajos muestran que los docentes tenían un conocimiento poco sólido de la probabilidad (Begg y Edwards, 1999; Carnell, 1997; Watson, 2001; Nicholson y Darnton, 2003; Pereira-Mendoza, 2002) y del contenido pedagógico (Haller, 1997; López, 2006 y Dugdale, 2001).

En un estudio para examinar las creencias de 6 profesores de Educación Secundaria sobre el uso de la simulación en clase, Sánchez (2002) encontró que tres profesores manifestaron comprender mejor la variabilidad estadística después de resolver problemas mediante la simulación y solo uno mencionó haber adquirido una mejor comprensión de la probabilidad condicional y la ley de los grandes números. Cuando fueron preguntados sobre la utilidad de la simulación la mayoría expuso ideas relacionadas con el enfoque frecuencial de la probabilidad, pero ninguno refirió el valor de la simulación para la construcción de las ideas de aleatoriedad y distribución por los estudiantes.

Batanero, Godino y Cañizares (2005), como resultado de una investigación realizada con futuros profesores de Educación Primaria, proponen utilizar la simulación para modelizar experimentos reales y como medio para enfrentar a los futuros profesores con sus concepciones erróneas. Concluyen que esta forma de trabajo parece ayudar a la superación de algunos sesgos en el razonamiento de los futuros profesores así como aumentar su interés por la probabilidad y su enseñanza.

Sobre las creencias de los profesores, Gattuso y Pannone (2002) informaron de que los profesores de secundaria ($n=91$) en Italia valoraban el estudio de la estadística, pero pensaban que restaba valor a otros aspectos del currículo de matemáticas, lo cual no es de extrañar. Los profesores italianos también reconocieron su inseguridad sobre cómo enseñar la estadística más correctamente, no por una falta de conocimiento estadístico, sino por no estar preparados con la pedagogía adecuada para enseñar estas ideas.

Por último, en varios estudios (Cañizares, 1997; Cañizares y cols. 1997 y Cañizares y Batanero, 1998), con niños de 10 a 14 años, para determinar la influencia del razonamiento proporcional y de las creencias subjetivas en la asignación de probabilidades a sucesos, los autores señalan que los alumnos, en ocasiones, incorporan con frecuencia conocimientos y creencias que influyen en su asignación de probabilidades en problemas que han sido propuestos para ser resueltos dentro de la norma objetiva (clásica o frecuencial). Consideran que entre los factores subjetivos que pueden influir en la asignación de probabilidades están la percepción de la independencia, cuya aplicación ofrece dificultades a los alumnos (Heitele, 1970; Truran y Truran, 1997); la heurística de la representatividad (Khaneman, Slovic y Tversky, 1982), según la cual el sujeto considera más probable aquel suceso que más se parece al proceso de generación aleatoria, que se percibe como no ordenada y la falacia del jugador o efecto de recencia negativa (Fischbein, 1975) por el que la no ocurrencia de un suceso durante varias extracciones consecutivas aumenta su probabilidad de ocurrencia en próximas extracciones.

Método

Participaron en la investigación 283 futuros profesores de la especialidad de Educación Primaria, estudiantes de la Universidad de Granada. Los datos se han obtenido de las respuestas de los futuros profesores a dos problemas de probabilidad, tomados de Fischbein y Gazit (1984). A continuación reproducimos los dos problemas del cuestionario, que se aplicó antes de la instrucción.

En el *problema 1* se trata de comparar probabilidades de sucesos elementales en experimentos compuestos. Se introducen factores de tipo subjetivo, donde el futuro profesor de Educación Primaria debe reconocer la equiprobabilidad de los sucesos y consideramos que puede manifestarse la heurística de la representatividad, por la cual no se admite como aleatorio las secuencias de resultados ordenados.

Problema 1.- Olivia y Juana van a comprar un billete de lotería y sólo quedan dos números: el 123456 y el 378146. Olivia prefiere jugar con el primero porque dice que es más fácil que en un sorteo resulten los números consecutivos. Juana, por el contrario, opina que la lotería es algo azaroso y, por tanto, el número 378146 tiene más posibilidades de salir. ¿Cuál es tu opinión respecto a lo que piensa Olivia y Juana?

En el *problema 2* se intenta ver la comprensión, por parte de los futuros profesores, de la idea de independencia y también se evalúa la diferenciación entre muestreo con y sin reemplazamiento. Este problema evalúa la creencia en la posibilidad de control sobre los mecanismos aleatorios. La recencia negativa induciría a creer que, puesto que Pedro no ha ganado, sus posibilidades de ganar aumentan en la próxima jugada.

*Problema 2.- Pedro ha participado en una lotería semanal durante los dos últimos meses. Hasta ahora no ha ganado nunca, pero decide continuar pues piensa: **ñ**la lotería es un juego basado en la suerte, a veces gano, a veces pierdo. Yo ya he jugado muchas veces y nunca he ganado. Por lo tanto, estoy más seguro que antes de que ganaré en alguna partida próximað. ¿Cuál es tu opinión sobre el razonamiento de Pedro?*

Los sesgos que trata de detectar este problema están definidos y catalogados en la literatura de Kahneman, Slovic y Tversky (1982), quienes encuentran que se presentan con mucha frecuencia, incluso en personas adultas y con alto nivel cultural.

Estos dos problemas exploran la utilización de sesgos y heurísticas erróneas en los sujetos, todas ellas relacionadas con la idea de independencia, cuya aplicación, como se ha indicado, ofrece dificultades a los alumnos (Heitele, 1970; Truran y Truran, 1997). Se trata de profundizar en los argumentos que aportan los sujetos que manifiestan sesgos tendentes a la representatividad o a la disponibilidad, y establecer si existe alguna relación entre las experiencias previas de los alumnos relativas a los juegos de azar y la manifestación de estos sesgos.

Resultados

Análisis problema 1

Las respuestas de los futuros profesores de Educación Primaria al problema 1, sobre la elección de un billete de lotería entre dos posibles, se han clasificado en las categorías que aparecen en la tabla 1.

Tabla 1. Porcentaje de tipos de respuestas al ítem 2

RESPUESTAS	FUTUROS PROFESORES N=283	ALUMNOS (10-14 AÑOS) N=143
No hay relación (*)	37.8	28.7
Olivia tiene razón	1.1	1.4
Juana tiene razón	34.6	39.2
Suerte/destino	23.3	4.9
Otras	2.5	24.5
NS/NC	0.7	1.4

(*) Respuesta correcta

En ella observamos que la respuesta mayoritaria fue la correcta (37.8%), es decir que no hay relación entre el resultado de obtener un número u otro por el hecho de que sean consecutivos o estén desordenados. Entre las respuestas incorrectas, aparece en primer lugar la respuesta “*Juana tiene razón*” (34.6%) sobre la elección de números no consecutivos, que pone de manifiesto la incidencia de la heurística de representatividad (Kahneman, Slovic y Tversky, 1982) y dificultades en la percepción de la independencia, que coincide con las investigaciones realizadas con profesores en servicio y profesores en prácticas, de Begg y Edward (1999), donde indican que muy pocos comprendían el concepto de independencia y que una mayoría tendía a creer que el orden o el modelo no estaban asociados con la idea de aleatoriedad. Le siguen los que responden que el resultado depende del “*azar, suerte o destino*” (23.3 %), como el alumno 71 que afirma:

que es imposible saber que número va a tocar y por tanto todo depende del azar.

Que es imposible saber qué número va a tocar, y por tanto todo depende del azar.

En la categoría otro tipo de respuestas hay un 2.5% de futuros profesores y ya con el 1.1 % aparecen los que responden que “*Olivia tiene razón*”, al considerar más probable los números ordenados. Si comparamos estos resultados con los obtenidos por los niños de 10 a 14 años, participantes en la investigación de Cañizares (1997), observamos que el porcentaje de respuestas correctas entre los futuros profesores es mayor y que la respuesta mayoritaria entre los niños ha sido la de que “*Juana tiene razón*” (39.2%) al considerar que es más fácil obtener números no consecutivos, lo que pone de manifiesto nuevamente la incidencia de la heurística de representatividad.

La lista de argumentos utilizados por los futuros profesores y sus correspondientes porcentajes queda reflejada en la tabla 2, que presentamos a continuación.

Tabla 2. Porcentaje de argumentos utilizados

ARGUMENTOS	FUTUROS PROFESORES N = 283
Mejor números consecutivos	0.7
Mejor números no consecutivos	34.3
Regla de Laplace (misma probabilidad) (*)	33.2
Idea de suerte, azar	25.8
No contesta	2.1
Otra	3.9

(*) Argumento correcto

En ella observamos que un 33.2 % apoyan su respuesta con un razonamiento correcto, utilizando la Regla de Laplace e indicando que ambos números “*tienen la misma probabilidad*”. Entre los argumentos incorrectos destaca el que admite la ventaja de Juana (34.3%), en la creencia de que el número preferido por ella es más probable al estar desordenado “*mejor números no consecutivos*”, seguido de los que basan su argumento en la idea de azar o suerte (27.2%), como por ejemplo la respuesta del alumno 55 quien afirma “*Pues pienso que la lotería es algo azaroso, es decir, es más fácil que salgan números salteados y no consecutivos. Aunque todo es cuestión de suerte.*” Sólo un 0.6% de los argumentos apuestan por Olivia, debido a la creencia de que el número más probable es el número ordenado “*mejor números consecutivos*”. Por último, aparecen los que dan otro tipo de respuesta (3,9 %), o los que no contestan (2.1 %).

Análisis problema 2

Las respuestas de los futuros profesores de Educación Primaria al problema 2, sobre la participación de Pedro en una lotería semanal durante los dos últimos meses, se han clasificado en las categorías que aparecen en la tabla 3.

Tabla 3. Porcentaje de tipos de respuestas al ítem 3

RESPUESTAS	FUTUROS PROFESORES (N=283)	ALUMNOS (10-14 AÑOS) N=143
No hay relación (*)	36.4	23.1
Recencia negativa	29.7	37.1
Otra	31.4	35.0
NS/NC	2.5	4.9

(*) Respuesta correcta

En ella observamos, que la respuesta mayoritaria de los futuros profesores fue la correcta (37.8%), es decir que “*no hay relación*” entre el resultado del sorteo y el hecho de haber ganado o no en anteriores sorteos. Entre las respuestas incorrectas, hay un alto porcentaje que da otro tipo de respuestas (31.4 %), entre los que destacan los que responden que el hecho de que Pedro gane o no en el sorteo depende del azar o de la suerte (26,5 %), como el alumno 36 que afirma:

Creo que la lotería es una cosa totalmente azarosa, y no hay manera ni forma de saber cuándo va a tocar.

Creo que la lotería es una cosa totalmente azarosa, y no hay manera ni forma de saber cuándo va a tocar.

En segundo lugar aparecen las respuestas que consideran que tiene razón Pedro al afirmar que puesto que no ha ganado todavía ninguna vez, en el próximo sorteo tendrá más probabilidad de ganar, manifestando así el efecto de recencia negativa (29,7 %), que son aquellos tipos de respuestas, según Fischbein (1975), en que el alumno considera más probable el suceso contrario al que ya ha ocurrido. Este sesgo está relacionado con la dificultad de la percepción de la independencia. Si comparamos estos resultados con los obtenidos por los niños de 10 a 14 años, participantes en la investigación de Cañizares (1997), observamos que el porcentaje de respuestas correctas entre los futuros profesores es bastante mayor y que la respuesta incorrecta mayoritaria entre los niños es la que pone de manifiesto el efecto de recencia negativa (37.1%).

La lista de argumentos utilizados por los futuros profesores y sus correspondientes porcentajes queda reflejada en la tabla 4, que presentamos a continuación.

Tabla 4. Porcentaje de argumentos utilizados

Argumentos	Futuros profesores (N = 283)
No depende (Aplicación Laplace) (*)	25.8
Tiene una probabilidad mínima de ganar	4.2
Tiene una mayor probabilidad	21.2
Otros	45.2
No contesta	3.5

(*) Argumento correcto

En ella observamos que solo un 25.8 % apoya su respuesta con un razonamiento correcto, utilizando la Regla de Laplace e indicando que la probabilidad de ganar el sorteo de Pedro no depende de haber ganado anteriormente o no. Entre los argumentos incorrectos destaca el alto porcentaje que hemos encuadrado en la categoría “otros” (45,2%), donde mayoritariamente aparecen explicaciones asociadas con la idea de suerte y azar (37,4 %), como el alumno 107 que afirma: *“La lotería es cuestión de suerte y no por jugar más se van a acertar la infinidad de números que hay por combinar.”* Le siguen, los que argumentan que Pedro *“tiene una mayor probabilidad de ganar”* (21.2 %), porque no lo ha hecho en los sorteos anteriores (efecto de recencia negativa), aunque también hay algunos futuros profesores que argumentan que Pedro *“tiene una probabilidad mínima de ganar”* (4.2 %), ya que no ha ganado anteriormente (efecto de recencia positiva).

Conclusiones

Aunque la mayoría de los futuros profesores de Educación Primaria demuestran una adecuada concepción de la probabilidad, obteniendo resultados mejores que los alumnos de 10-14 años que participaron en la investigación de Cañizares (1997), este estudio indica que existen dificultades en su resolución por parte de algunos futuros profesores.

En el problema 1, sobre la elección de un billete de lotería entre dos posibles, hay un alto porcentaje de futuros profesores que manifiestan la heurística de representatividad (Kahneman, Slovic y Tversky, 1982), mientras que en el problema 2, sobre la participación de Pedro en una lotería semanal durante los dos últimos meses, se ha manifestado el efecto de recencia negativa (Fischbein, 1975) en una gran proporción de ellos. Entre los argumentos incorrectos utilizados por los futuros profesores en los dos problemas, destaca el alto porcentaje de ellos que consideran que los resultados dependen del azar o de la suerte. Todos estos sesgos están relacionados con la dificultad de la percepción de la independencia, que coincide con los resultados de los estudios de Begg y Edward (1999), realizados con profesores.

Según Fischbein (1975), este tipo de sesgos se afianza con la edad y el proceso de enseñanza, lo que parece coincidir con nuestros resultados, ya que los altos porcentajes obtenidos de respuestas y argumentos incorrectos entre los futuros profesores, muestran que estos sesgos siguen fuertemente arraigados entre ellos. Otros factores que pueden influir negativamente en la superación de estos sesgos, es la experiencia limitada de los alumnos en juegos de azar, así como la difusión en prensa de noticias relacionadas con las personas y números ganadores múltiples veces en la lotería, que son un medio ideal para extender el sesgo de la disponibilidad.

Como consecuencia, consideramos que para mejorar la formación probabilística de los futuros profesores de Educación Primaria se debe reforzar su conocimiento probabilístico y tener en cuenta este tipo de concepciones erróneas manifestadas por ellos, proponiendo una muestra de situaciones que permita poner de manifiesto los conflictos y sesgos que conlleva la aplicación del conocimiento estocástico, e intentar corregirlos para evitar que los transmitan a sus alumnos. Para ello se deben seleccionar actividades adecuadas, como resolución de problemas, experimentación con fenómenos reales, utilización de la simulación (Batanero, Godino y Cañizares, 2005) y de paradojas (Contreras y cols., 2010), entre otras, que promuevan un aprendizaje constructivo. Esta formación debe incluir también las componentes didácticas básicas (Batanero, Godino y Roa, 2004)

Agradecimientos

Esta investigación forma parte del Proyecto SEJ2007-60110/EDUC. MEC-FEDER y Grupo FQM-126, Junta de Andalucía y ha sido cofinanciado por el Plan propio de Investigación de la Universidad de Granada: Programa 20.

Referencias bibliográficas

- Azcárate, P. (1995). *El conocimiento profesional de los profesores sobre las nociones de aleatoriedad y probabilidad*. Su estudio en el caso de la educación primaria. Tesis doctoral inédita. Universidad de Cádiz.
- Batanero, C., Godino, J. D. y Cañizares, M. J. (2005) Simulation as a tool to train Pre-service School Teachers. En J. Addler (Ed.), *Proceedings of ICMI First African Regional Conference*. CD ROM. Johannesburgo: International Commission on Mathematical Instruction.
- Batanero, C., Godino, J. D. y Roa, R. (2004). Training teachers to teach probability. *Journal of Statistics Education*, 12. On line: <http://www.amstat.org/publications/jse/>
- Begg, A. y Edwards, R. (1999). *Teachers ideas about teaching statistics*. Paper presented at the combined annual meeting of the Australian Association for Research in Education and the New Zealand Association for Research in Education. Melbourne, Australia.

- Cañizares, M. J. (1997). *Influencia del razonamiento proporcional y de las creencias subjetivas en las intuiciones probabilísticas primarias*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.
- Cañizares, M. J. y Batanero, C. (1998). Influencia del razonamiento proporcional y de las creencias subjetivas en la comparación de probabilidades. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 14, 99-114.
- Cañizares, M. J., Batanero, C., Serrano, L. y Ortiz, J. J. (1997). Subjective elements in childrens' comparison of probabilities. En E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (v.2, pp. 49-56). Lahti.
- Cardeñoso, J. M. (2001). *Las creencias y conocimientos de los profesores de primaria andaluces sobre la matemática escolar*. Modelización de concepciones sobre la aleatoriedad y probabilidad. Tesis Doctoral. Cádiz: Universidad de Cádiz.
- Carnell, L. J. (1997). *Characteristics of reasoning about conditional probability (preservice teachers)*. Unpublished doctoral dissertation, University of North Carolina-Greensboro.
- Contreras, J. M.; Ortiz, J. J.; Diaz, C. y Arteaga, P. (2010). Paradojas como recurso didáctico en la formación de profesores para enseñar la probabilidad. En C. Lara. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (Ed.), *Programa & Libro de resúmenes de la XXIII Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*. Ciudad de Guatemala. Guatemala.
- Dugdale, S. (2001). Pre-service teachers use of computer simulation to explore probability. *Computers in the Schools* 17(1/2), 173-182.
- Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Dordrecht, The Netherlands: Reidel.
- Fischbein, E. y Gazit, A. (1984). Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions? *Educational Studies in Mathematics*, 15(1), 1-24.
- Franklin, C. y Mewborn, D. (2006). The statistical education of preK-12 teachers: A shared responsibility. En G. Burrill (Ed.), *NCTM 2006 Yearbook: Thinking and reasoning with data and chance* (pp. 309-321). Reston, VA: NCTM.
- Gattuso, L. y Pannone, M. A. (2002). Teachers training in a statistics teaching experiment. In B. Philips (Ed.), *Proceedings of the sixth International Conference on the Teaching of Statistics* (On CD). Hawthorn, VIC: International Statistical Institute.

- Haller, S. K. (1997). *Adopting probability curricula: The content and pedagogical content knowledge of middle grades teachers*. Unpublished doctoral dissertation, University of Minnesota.
- Heitele, D. (1975). An epistemological view on fundamental stochastic ideas. *Educational Studies in Mathematics*, 6, 187-205.
- Kahneman, D., Slovic, P. y Tversky, A. (Eds.). (1982). *Judgment under uncertainty: heuristics and biases*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Kvatinsky, T. y Even, R. (2002). Framework for teacher knowledge and understanding of probability. *Proceedings of the Sixth International Conference on the Teaching of Statistics* [CD-ROM], Hawthorn, VIC, Australia: International Statistical Institute.
- López, C. (2006). Stochastics and the professional knowledge of teachers. En A. Rossman y B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics*. Salvador (Bahía) Brasil: International Statistical Institute. CD ROM, en prensa
- Mickelson, W. T. y Heaton, R. (2004). Primary teachers' statistical reasoning about data. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.), *The challenges of developing statistical literacy, reasoning, and thinking* (pp. 353-373). Dordrecht, Netherlands: Kluwer.
- Ministerio de Educación y Ciencia (2006). Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación primaria. Madrid: *Boletín Oficial del Estado*, nº 293.
- N. C. T. M. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston: VA, NCTM.
- Nicholson, J.R. y Darnton, C. (2003). Mathematics teachers teaching statistics: What are the challenges for the classroom teacher? In *Proceedings of the 54th Session of the International Statistical Institute*. Vooburg, The Netherlands: International Statistical Institute.
- Ortiz, J. J. Mohamed, N. y Serrano, L. (2010). Probabilidad frecuencial en profesores en formación. En M. J. González, M. T, González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII*. Santander: SEIEM. CD ROM.
- Ortiz, J. J.; Mohamed, N.; Serrano, L. y Rodríguez, J. (2009). Asignación de probabilidades en profesores en formación. En P. Leston. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 22, (pp. 1545-1554). México D. F. (México). ISBN: 978-607-95306-00

- Ortiz, J. J., Mohamed, N.; Batanero, C.; Serrano, L. y Rodríguez, J. (2006). Comparación de probabilidades en maestros en formación. En P. Bolea, M. J. Gonzáles y M. Moreno (Eds.), *Actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 268-276). Huesca: SEIEM. ISBN: 84-8127-156-X.
- Pereira-Mendoza, L. (2002). Would you allow your accountant to perform surgery? Implications for the education of primary teachers. In B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on the Teaching of Statistics* (On CD). Hawthorn, VIC: International Statistical Institute.
- Sánchez, E. S. (2002). Teachers beliefs about usefulness of simulations with the educational software Fathom for developing probability concepts in statistics classroom. In B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on the Teaching of Statistics* (On CD). Hawthorn, VIC: International Statistical Institute.
- SEP (2006). *Programa de estudio, educación secundaria*. Dirección General de Desarrollo Curricular de la Subsecretaría de Educación Básica de la Secretaría de Educación Pública, México.
- Stohl, H. (2005). Probability in teacher education and development. En G. Jones (Ed.), *Exploring probability in schools: Challenges for teaching and learning*. Dodrecht: Kluwer.
- Truran, J. y Truran, K. (1997). Statistical Independence - One concept or two? Implications for research and for classroom practice. En B. Philips (Ed.), *Papers on statistical education presented at ICME-8* (pp. 87-100). Swinburne University of Technology.
- Watson, J.M. (2001). Profiling teachers competence and confidence to teach particular mathematics topics: The case of chance and data. *Journal of Mathematics Teacher Education* 4(4), 305-337.

MODOS FUNDAMENTALES DE RAZONAMIENTO ESTADÍSTICO EN EGRESADOS DE LICENCIATURA EN PSICOLOGÍA EDUCATIVA

Cuahtémoc Gerardo Pérez López (*), Carmen Batanero Bernabeu, José
Miguel Contreras García

Universidad Pedagógica Nacional (), Universidad de Granada*

Resumen

En este trabajo se describe el análisis de 65 tesis elaboradas por los egresados de la Licenciatura en Psicología Educativa en la Unidad Ajusco de la Universidad Pedagógica Nacional de México. La finalidad del estudio fue estudiar los modos fundamentales de razonamiento estadístico, dentro del proceso de investigación, llevado a cabo por estos estudiantes en sus trabajos y se comparan los resultados con los de Pimenta (2006). La evaluación se centra en cinco modos de razonamiento estadístico fundamentales: reconocer la necesidad de los datos; trasnumeración; percepción de la variación; razonamiento con modelos estadísticos; integración de la estadística y el contexto que conforman el tercer componente del modelo de razonamiento estadístico de Wild y Pfannkuch (1999) y Pfannkuch y Wild (2004).

Abstract

In this work we analyze 65 thesis elaborated by graduates in educational psychology at the National Pedagogical University of Mexico. The purpose of the study was to study the students' fundamental statistical reasoning within the research process carried out by these students in their thesis. Some indicators allow to identify the fundamental modes of statistical reasoning and to compare with the results by Pimenta (2006). In particular, the evaluation focuses on five fundamental statistical reasoning modes: recognizing the need for data; trasnumeration; perception of variation, reasoning with statistical; models integration of statistics and the context. These aspects form the third component of the model of statistical reasoning of Wild and Pfannkuch (1999) and Pfannkuch Wild (2004).

Pérez, C., Batanero, C., Contreras, J.M. (2011). Modos fundamentales de razonamiento estadístico en egresados de licenciatura en psicología educativa. En M.M. Moreno, N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los Grupos de Investigación de la SEIEM* (pp. 267-279). Lleida.

Introducción

Aunque en la actualidad continúa el debate sobre los contenidos pilares en la formación del psicólogo, un elemento común en los diversos currículos de psicología, en México, España y diversos países, es la base científica (De Vega, 2005). Por ello, estos currículos incluyen cursos en los que se revisa los métodos de la psicología científica y las técnicas derivadas de ella. En psicología se acepta la diversidad de procedimientos en la investigación (Seoane, 2005). La actividad profesional del psicólogo consiste en el estudio empírico de casos, individuales o de grupo, lo cual conlleva la recopilación de datos, análisis de los mismos, diseño de una intervención y evaluación de la misma (Carpintero, 2005). El psicólogo debe también saber “investigar” en sentido amplio.

En el reglamento de titulación de Licenciaturas de la Universidad Pedagógica Nacional se establece que la titulación es la fase final de la formación profesional y que la realización de una Tesis de Licenciatura es la forma de evaluar la capacidad crítica, reflexiva y transformadora que los egresados poseen. Asimismo se indica que dicho trabajo es una actividad formativa que permite a los estudiantes poner en práctica los conocimientos y habilidades desarrolladas durante sus estudios (UPN, 2002).

El presente trabajo se orienta a iniciar una evaluación del uso de las herramientas que los estudiantes han adquirido en su formación del área metodológica y estadística en los trabajos de Tesis de licenciatura de la titulación en Psicología Educativa Universidad Pedagógica Nacional en México, D.F. La finalidad, sería evaluar el uso correcto de las técnicas de investigación en los egresados, asegurando, de este modo que han adquirido las competencias necesarias para abordar otras investigaciones en su trabajo futuro.

Razonamiento estadístico y sus componentes

Diversos autores (Moore y Cobb, 2000; Rossman, Chance y Medina, 2006; Scheaffer, 2006) han analizado las diferencias y complementariedades entre el razonamiento matemático y estadístico. Otros han descrito modelos más o menos sofisticados sobre el razonamiento estadístico, siendo el más conocido el de Wild y Pfannkuch (Wild y Pfannkuch, 1999; Pfannkuch y Wild, 2004). En todo trabajo estadístico se lleva a cabo un sistema de procesos interconectados. Los autores describen varios componentes, que usa un estadístico simultáneamente durante su trabajo y que conjuntamente constituyen su modelo de razonamiento estadístico: (a) el ciclo de investigación; (b) los modos fundamentales de pensamiento estadístico; (c) el ciclo de interrogación y (d) disposiciones del estadístico.

Este trabajo hará un análisis centrado en el segundo de los componentes. En este segundo componente, los autores incluyen las siguientes formas fundamentales de razonamiento estadístico:

Reconocer la necesidad de los datos: La base de la investigación estadística es la hipótesis de que muchas situaciones de la vida real sólo pueden ser comprendidas a partir del análisis de datos que han sido recogidos en forma adecuada. La experiencia personal o la evidencia de tipo anecdótico no es fiable y puede llevar a confusión en los juicios o toma de decisiones.

Transnumeración: Los autores usan esta palabra para indicar la comprensión que puede surgir al cambiar la representación de los datos. Al considerar un sistema real desde la perspectiva de modelización, puede haber tres tipos de transnumeración: (1) a partir de la medida que “captura” las cualidades o características del mundo real, (2) al pasar de un listado de datos desordenados a una representación tabular o gráfica que permita extraer sentido de los mismos; (3) al comunicar este significado que surge de los datos, en forma que sea comprensible a otros.

Percepción de la variación: La variación resulta cuando dos o más cosas son diferentes y es característica de la estadística que es concebida por Moore y Cobb (2000) como la ciencia que estudia la variabilidad. La variación aparece en los datos, las muestras, las variables estadísticas y aleatorias, los instrumentos usados, las respuestas obtenidas, etc. La recogida adecuada de datos y los juicios a partir de los mismos requieren la comprensión de la variación que hay en los datos, y de la incertidumbre originada por la variación no explicada. La estadística permite hacer predicciones, buscar explicaciones y causas de la variación y aprender del contexto.

Razonamiento con modelos estadísticos. Cualquier útil estadístico, incluso un gráfico simple puede considerarse como modelo, pues es una forma de representar la realidad. Lo importante es diferenciar el modelo de los datos y, al mismo tiempo, relacionar el modelo con los datos. Aunque en matemáticas también se usan modelos, la semejanza entre modelos y datos es mucho mayor que en el caso de la estadística. Por ello la modelización es más difícil en esta segunda materia.

Integración de la estadística y el contexto: Es también un componente esencial del razonamiento estadístico. Mientras que en matemáticas lo esencial es los conceptos y las relaciones entre ellos, en estadística juega un papel mucho más importante el contexto, de modo que el mismo concepto puede tener diferente significado, dependiendo del mismo.

Antecedentes

La estadística ha jugado siempre un papel destacado en psicología, aunque su uso no siempre ha sido correcto o bien comprendido por los investigadores (Morrison y Henkel, 1970; Batanero, 2000; Batanero y Díaz, 2006; Fernández-Cano y Fernández, 2009). Ello ha ocasionado una situación peculiar, como analizan Díaz y de la Fuente (2004), donde, por un lado, la estadística se usa mal, pero por otro, la obtención de resultados estadísticamente significativos se ha convertido en un requisito frecuente para que los trabajos sean aceptados en las revistas científicas o congresos del área.

Los autores sugieren que esta costumbre ha sido muy criticada, pues algunos investigadores toman la significación estadística como criterio para valorar si una investigación (significativa/no significativa) tiene calidad, sin preocuparse de la significación práctica de sus resultados. Por otro lado, los investigadores se limitan a mencionar el nivel de significación, sin incluir intervalos de confianza para los valores medios de las variables u otra información sobre los efectos producidos (Morrison y Henkel, 1970; Vallecillos, 1994; Borges, San Luis, Sánchez y Cañadas, 2001; Díaz, 2007).

Nuestro trabajo puede también encuadrarse en la investigación de carácter metodológico, que examina el análisis del papel de la estadística y otros métodos en la investigación experimental. En Didáctica de la Matemática son pocos los estudios que se centran en el tema. Torralbo, Fernández, Rico, Maz y Gutiérrez (2003) estudian aspectos conceptuales que se investigan en las tesis doctorales a lo largo de veintidós años y algunas características cuantitativas de las mismas, con el fin de construir una visión general y sistemática de cómo se ha venido abordando la investigación en el área de didáctica de la matemática. Torralbo, Vallejo, Fernández y Rico (2004) analizan las características metodológicas de 135 tesis doctorales de Didáctica de la Matemática producidas en el periodo 1976-1998. Llevan a cabo un estudio mucho más amplio y detallado que en nuestro caso, analizando una serie de indicadores de las tesis, que organizan de acuerdo con las fases de la investigación, del modo siguiente: Ubicación de la Investigación: Definición del problema: Diseño y trabajo de campo: Tratamiento y análisis de los datos: Discusión de los resultados.

Vallejo (2005) realizó el análisis longitudinal de las tesis de doctorado en Educación Matemática defendidas en España de 1975 a 2002. Su objetivo fue describir la evolución del campo de estudio desde el nivel metodológico, cuantitativo y conceptual. La autora revisó 241 documentos, de cuyo análisis concluye, en el aspecto diacrónico-metodológico, que enunciar el problema es un elemento común y frecuente, por lo cual se puede suponer que en el futuro, aparecerá en las tesis de doctorado. Del mismo modo, supone que en los trabajos, se priorizará el planteamiento de objetivos generales sobre los específicos. Se

observó un lento descenso en el planteamiento de hipótesis, pero se puede predecir que en las tesis posteriores se continuará planteándolas.

Hil y Shih (2009) hacen un análisis de la calidad técnica de la investigación estadística publicada en *Journal for Research in Mathematics Education*, en una década (1997-2006). El análisis se hace considerando los criterios propuestos por American Educational Research Association, American Psychological Association, National Research Council on Education y American Statistical Association, indicando que la mayoría de los trabajos revisados carecen de uno o más de esos criterios. Para el análisis se consideran cinco variables, cada una de las cuáles se relaciona con una recomendación para los investigadores: (a) uso del mismo nivel de análisis en todo el trabajo, (b) vinculación de los efectos del tratamiento respecto a los efectos del instructor, (c) inclusión de controles adecuados en los estudios cuasi-experimentales, (d) información acerca de la fiabilidad y validez de los instrumentos y (e) utilización adecuada de las escalas de medición.

Otras investigaciones que se centran en el uso de la estadística son las realizadas por Arteaga (2008) y Batanero, Arteaga y Ruiz (2010). El objetivo de estos trabajos es analizar los gráficos estadísticos elaborados por futuros profesores de educación primaria en el proceso de resolver un Proyecto de Análisis de Datos. Para realizar lo anterior, se define un nivel de complejidad semiótica con lo cual es posible elaborar una clasificación de los gráficos y relacionarla con el nivel de lectura y las conclusiones elaboradas por los estudiantes.

En 2006 Pimenta realizó un estudio exploratorio descriptivo del uso que los estudiantes de segundo ciclo de la carrera Terapia Física hacen de los métodos estadísticos, cuando elaboran su proyecto Fin de carrera. En este sentido, su trabajo es similar al nuestro, aunque los estudiantes son diplomados y no graduados como en nuestro caso. Igual que en nuestro estudio, la realización del proyecto es obligatorio para los estudiantes que se diploman; asimismo, en su trabajo, Pimenta examina sólo una muestra de todos los producidos en el periodo de interés. Para lograr el objetivo revisó 35 proyectos finales, los cuales presentaban algún análisis estadístico de los resultados. Los hallazgos en relación con la forma en que los estudiantes hacen uso de los modos fundamentales de pensamiento estadístico, se presentarán en el apartado de análisis de resultados de la presente investigación, en donde se hará un contraste con lo encontrado en las tesis de licenciatura en Psicología educativa.

Metodología del estudio

Se trata de un diseño descriptivo observacional que comprende la descripción, el registro, el análisis y la interpretación de hechos o procesos. Se consideran las siguientes variables relacionadas con los modos fundamentales de pensamiento estadístico (Wild y Pfannkuch, 1999; Pfannkuch y Wild, 2004): reconocer la

necesidad de datos, transnumeración, percepción de la variación, razonamiento con modelos estadísticos, integración de la estadística y el contexto.

El método de recogida de datos fue la observación directa de los documentos. El instrumento utilizado fue un protocolo de observación, en que se sintetizó los resultados de observación de cada una de las variables, con el objeto de preparar un fichero para el tratamiento estadístico. Se realizó un análisis de contenido y se obtuvieron tablas de frecuencias de resultados.

Muestra

Los egresados de la licenciatura entregaron su versión impresa de la tesis y también se dispone en la página electrónica de la universidad (www.upn.mx). A partir de la revisión se encontró que el 72.5% de las tesis presentan algún tipo de análisis estadístico, lo cual indica la necesidad que estos licenciados tienen de conocimientos estadísticos. De este conjunto se seleccionaron las 65 tesis que se analizaron en este trabajo. Como criterio para seleccionarlás, se consideró que, además de utilizar los procedimientos de estadística descriptiva, se utilizara otro procedimiento de análisis estadístico. La selección tuvo en cuenta la distribución de las tesis por temas y por año en el periodo 2000-2007 (ver tabla 1).

Tabla 1 Frecuencia y porcentaje de trabajos seleccionados por año

Año	Frecuencia	Porcentaje
2000	4	6.2
2001	5	7.7
2002	7	10.8
2003	10	15.4
2004	9	13.8
2005	8	12.3
2006	10	15.4
2007	12	18.5
Total	65	100.0

Resultados

En este apartado se estudian algunos indicadores del razonamiento estadístico del segundo componente de dicho modelo, comparando los resultados con los de Pimenta (2006). Más concretamente, nos centramos en la evaluación de los cinco

modos de razonamiento estadístico fundamentales incluidos en este segundo componente, que se describieron en la revisión teórica.

Reconocer la necesidad de los datos

Sobre este componente se han considerado cuatro indicadores: (a) si el alumno recoge datos personalmente para su tesis; (b) si caracteriza correctamente la población y muestra utilizadas en el estudio; (c) si construye o (d) si usa instrumentos contruidos de recogida de datos. Todas estas categorías se relacionan con la percepción de la necesidad de los datos y fueron usadas por Pimenta (2006).

Tabla 2. Frecuencia y porcentaje de reconocimiento de la necesidad de obtener datos

Necesidad de datos	Sí	Porcentaje
Recogen datos	65	100
Caracteriza correctamente la población y muestra	36	55.4
Construyen instrumentos	53	81.5
Usan instrumentos contruidos	45	69.2

En la totalidad de las tesis analizadas se recogen personalmente datos adecuados para resolver el problema (tabla 2) al igual que en el caso de Pimenta (2006). Un 55% también describe adecuadamente la población muestra, con objeto de reconocer el alcance de su estudio, frente al 85% en Pimenta. La mayoría construye algún instrumento para obtener sus datos, frente al 23% en el estudio de Pimenta, o usan uno ya construido. Todo ello es indicio de que los egresados reconocen la necesidad de recoger datos en sus investigaciones.

Transnumeración

Consideramos que ha habido transnumeración si los alumnos transforman los datos brutos y los representan en una tabla o gráfico estadístico, o si presentan un resumen de los datos adecuado al tipo de problema (tabla 3). Todos estos procedimientos permiten extraer una conclusión no claramente visible de los datos originales. Casi la totalidad de nuestros egresados utiliza tanto tablas, como gráficos para representar sus datos. Hay también un predominio de medidas de posición central, lo que parece indicar que esta idea se comprende mejor que las de dispersión o correlación que se usa con menor frecuencia. Los porcentajes informados por Pimenta (2006) en cuanto al uso de las medidas de tendencia central (70.6) son semejantes a las aquí informadas; no es el caso de las medidas de

dispersión (55.6%). Debe mencionarse que Pimenta hizo la evaluación acerca de la interpretación correcta tanto de las tablas y los gráficos como de los estadísticos.

Tabla 3. Frecuencia y porcentaje de transnumeración

Transnumeración	Sí	Porcentaje
Construyen tablas para organizar y presentar sus datos	61	93.9
Calculan correctamente estadísticos de tendencia central	46	70.8
Calculan correctamente estadísticos de dispersión o correlación	19	29.2
Representan los datos a través de gráficos	53	81.5

Percepción de la variación

Como indicadores en este punto se consideran la clasificación y operacionalización correcta de las variables (implica reconocer variabilidad de las medidas), cálculo de fiabilidad y validez (que implica reconocer variabilidad de los datos) y uso de métodos inferenciales (variabilidad del muestreo). Los egresados reconocen la variabilidad en la muestra pues usan métodos inferenciales en su mayoría (Tabla 4). Sin embargo, son pocos los que explícitamente operacionalizan las variables del estudio, por lo que este punto debe ser considerado en la propuesta educativa.

Mientras muchos hacen consideraciones respecto a la validez de los instrumentos, son pocos los que hacen el estudio de fiabilidad, por lo que parece no reconocerse la variabilidad aleatoria en los datos y sí el sesgo constante. Todo ello sugiere el predominio de la formación determinista del estudiante y la necesidad de reforzar su formación estocástica. En el trabajo de Pimenta (2006) se informa de resultados semejantes, el 91.2% de los estudiantes perciben la variación con alguno de estos indicadores, y no todos tienen claro la incertidumbre de sus resultados.

Tabla 4. Frecuencia y porcentaje de percepción de la variación

Percepción de la variación	Sí	Porcentaje
Se clasifica y operacionaliza las variables	16	24.6
Calculan Fiabilidad	14	21.5
Calculan Validez	35	53.8
Uso de métodos inferenciales	64	84.6

Razonamiento con modelos estadísticos

Hemos considerado al igual que Wild y Pfannkuch (1999) como modelo cualquier método estadístico; de ese modo se supone como indicadores, el uso de los mismos, en general y particularizados, así como su elección y aplicación correcta. Puesto que establecer una hipótesis supone trabajar con un modelo y contrastarlas, implica el uso del modelo de contraste, hemos considerado como otro indicador el establecimiento y contraste adecuado de hipótesis.

Tabla 5. Frecuencia y porcentaje de razonamiento con modelos estadísticos

Razonamiento con modelos estadísticos	Sí	Porcentaje
Uso métodos estadísticos	65	100
Hipótesis correctamente establecidas y contrastadas	26	40.0
Modelos descriptivos	63	96.9
Modelos inferenciales	64	98.5
Correlacionales	19	29.2
Multivariados	18	27.7
Elección y aplicación correcta del modelo	49	75.4

En la tabla 5 se observa que en la totalidad de los trabajos se utilizan los modelos estadísticos. Al clasificarlos por tipo, casi la totalidad son de tipo descriptivo o inferencial, y en uno de cada tres un modelo correlacional o multivariado. Al estudiar la corrección, observamos que el 75%, elige y aplica el modelo estadístico adecuado. En el caso de Pimenta (2006), el 97.1% aplica procedimientos de estadística descriptiva; asimismo, en uno de cada cinco casos se usó la prueba no paramétrica de Wilcoxon (22%), y un porcentaje similar (20%) la *t* de student para muestras pareadas. En casos aislados se usan las pruebas de Kruskal-Wallis, Mann-Whitney, y coeficientes de correlación de Pearson y Spearman. Los estudiantes de Pimenta no consideraron, en general, los supuestos de los métodos aplicados. Esto se hizo notorio al realizar el contraste de hipótesis e incluso al establecer correctamente las hipótesis del estudio, tal como se observó en el 25% los casos del presente estudio.

Integración de la estadística y el contexto

Finalmente analizamos si los egresados son capaces de integrar los resultados estadísticos obtenidos en el contexto de su tesis (Tabla 6). En la mayoría de los

trabajos se presenta esta integración en mayor o menor medida, puesto que en las tesis se plantean correctamente los objetivos en el apartado de método. El diseño también está especificado y en un gran porcentaje correctamente elegido y descrito. El punto más débil es la correcta interpretación; este resultado coincide con lo obtenido por Arteaga (2008). El autor sugiere que la enseñanza de la estadística prepara al estudiante para aplicar los métodos, pero no para obtener conclusiones a partir de ellos, lo cual podría ser un punto para mejorar la enseñanza en nuestra licenciatura.

Tabla 6. Frecuencia (y porcentaje) de integración de la estadística en el contexto

Integración de la estadística en el contexto	Sí	Porcentaje
Objetivos bien planteados	36	55.4
Indican el diseño	52	80.0
Diseño correcto	44	67.69
Interpretación correcta	32	49.2

En el trabajo de Pimenta (2006) la integración de la estadística en el contexto se evalúa a través del uso de graficas, medidas de tendencia central y medidas de dispersión. El autor menciona que en general los estudiantes sí hacen una integración adecuada, aunque como ya se comentó antes, el problema principal radica en la elección adecuada del procedimiento estadístico y su interpretación, como en el presente estudio.

Conclusiones

En este trabajo hemos iniciado una investigación con una componente metodológica, a la vez que con una componente didáctica. Desde el punto de vista metodológico, el trabajo se orienta a iniciar una evaluación del uso de las herramientas que los estudiantes han adquirido en su formación del área metodológica en los trabajos de Tesis de licenciatura de la titulación en Psicología Educativa Universidad Pedagógica Nacional en México, D.F. Desde el punto de vista didáctico, se trata de encontrar criterios para mejorar dicha formación. A continuación exponemos nuestras conclusiones y algunas ideas para seguir la investigación.

El objetivo fue iniciar un estudio limitado de evaluación del uso de las herramientas metodológicas y estadísticas en las Tesis de Licenciatura. Aunque los resultados no son conclusivos, debido al tamaño de la muestra, con los hallazgos

mencionados sí es posible elaborar algunas consideraciones, si bien son limitadas, servirán como base para continuar una posterior investigación.

Esperábamos mejor aplicación de los modos fundamentales de razonamiento estadístico que lo encontrado por Pimenta (2006) pues nuestros alumnos reciben mayor número de cursos estadísticos y metodológicos. Respecto a esta expectativa, observamos en general que el razonamiento estadístico de los egresados en nuestro estudio es mayor de lo supuesto inicialmente, pues en comparación con el estudio de Pimenta (2006), nuestros egresados describen más adecuadamente el tipo de diseño que utilizaron para hacer su trabajo.

Asimismo, hacen mayor uso de instrumentos específicos para obtener sus datos. Esta diferencia es mayor si se compara la cantidad de trabajos en los que se explicita la construcción de instrumentos. En consecuencia, si bien se reconoce la variabilidad de los resultados en porcentajes semejantes, el uso de validez en los trabajos del presente estudio es mayor. Una explicación es que nuestros graduados tuvieron, durante su formación, una cantidad mayor de cursos de metodología que los estudiantes del trabajo de Pimenta (2006); aunque debe mencionarse que los cursos de estadística fueron similares en número, duración y temas abordados. Otro elemento que puede producir la diferencia es el tiempo de trabajo para elaborar la tesis. En el caso de los egresados de psicología, el promedio es un año con tres meses para concluir el trabajo una vez registrado como proyecto de tesis.

Los resultados obtenidos sugieren el interés de continuar esta investigación, ampliando la muestra de tesis revisadas y el tipo de variables consideradas, así como profundizando en el análisis.

Referencias bibliográficas

- Arteaga, P. (2008). *Análisis de gráficos estadísticos elaborados en un proyecto de análisis de datos*. Memoria de Máster. Universidad de Granada.
- Batanero, C. (2000). Controversies around the role of statistical tests in experimental research. *Mathematical Thinking and Learning*, 2(1-2), 75-98.
- Batanero, C., Arteaga, P. y Ruiz, B. (2010). Análisis de la complejidad semiótica de los gráficos producidos por futuros profesores de educación primaria en una tarea de comparación de dos variables estadísticas. *Enseñanza de las Ciencias*, 28(1), 141-154
- Batanero, C. y Díaz, C. (2006). Methodological and didactical controversies around statistical inference. *Actes des 38-ièmes Journées de Statistique*. Paris : Societé Française de Statistique. CDROM.

- Borges, A., San Luis, C., Sánchez, J. A. y Cañadas, I. (2001). El juicio contra la hipótesis nula: muchos testigos y una sentencia virtuosa. *Psicothema*, 13 (1), 174-178.
- Carpintero, H. (2005). El psicólogo que se busca. *Análisis y Modificación de Conducta*, 31(136-137), 189-207.
- De Vega, M. (2005). Psicología científica y práctica profesional del psicólogo. *Análisis y Modificación de Conducta*, 31(136-137), 155-174.
- Díaz, C. (2007). *Viabilidad de la enseñanza de la inferencia bayesiana en el análisis de datos en psicología*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.
- Díaz, C. y de la Fuente, I. (2004). Controversias en el uso de la inferencia en la investigación experimental. *Metodología de las Ciencias del Comportamiento, Volumen especial 2004*, 161-167.
- Fernández-Cano, A. y Fernández, G. I. (2009). *Crítica y alternativas a la significación estadística en el contraste de hipótesis*. Madrid: La Muralla.
- Hil, H. C. y Shih, J. (2009). Examining the quality of statistical mathematics education research. *Journal for Research in Mathematics Education*, 40(3), 241-250.
- Moore, D. S. y Cobb, G. (2000). Statistics and mathematics: tension and cooperation. *The American Mathematical Monthly*, 107, 615-630.
- Morrison, D. E., y Henkel, R. E. (Eds.). (1970). *The significance tests controversy. A reader*. Chicago: Aldine.
- Pfannkuch, M., y Wild, C. (2004). Towards an understanding of statistical thinking. En D. Ben-Zvi & J. B. Garfield (Eds.). *The challenge of developing statistical literacy, reasoning, and thinking*, pp 17-46. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishing
- Pimenta, R. (2006). Assessing statistical reasoning through project work. *Proceeding of the Seventh International Conference on Teaching Statistics*, pp 498-501. Victoria: University of Victoria.
- Rossman, A., Chance, B. y Medina, E. (2006). Some important comparisons between statistics and mathematics, and why teachers should care. En G. Burrill (Ed.). *Thinking and reasoning with data and chance, NCTM 2006 yearbook*, pp. 323-334. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Scheaffer, R. L. (2006). Statistics and mathematics: On making a happy marriage. En G. Burrill (Ed.). *Thinking and reasoning with data and chance: NCTM*

- 2006 yearbook, pp. 309-321. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Seoane, J. (2005). Psicólogos y psicólogos. *Análisis y Modificación de Conducta*, 31(136-137), 139-153.
- Torralbo, R. M., Fernández, C. A., Rico, L., Maz, A. y Gutiérrez, M. P. (2003). Tesis doctorales españolas en educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias*, 21(2), 295-305.
- Torralbo R. M., Vallejo R. M., Fernández, C. A. y Rico, R. L. (2004). Análisis metodológico de la producción española de tesis doctorales en educación matemática (1976-1998). *Relieve*, 10(1), 41-59. Online: www.uv.es/RELIEVE/v10n1/RELIEVEv10n1_3.htm.
- Universidad Pedagógica Nacional (UPN). (2002). *Reglamento general para la titulación profesional de licenciatura de la Universidad Pedagógica Nacional*. Universidad Pedagógica Nacional, Secretaría Académica: Documento Interno.
- Vallecillos, A. (1994). *Estudio teórico experimental de errores y concepciones sobre el contraste de hipótesis en estudiantes universitarios*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.
- Vallejo R. M. (2005). *Estudio longitudinal de la producción española de tesis doctorales en educación matemática (1975-2002)*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.
- Wild, C. y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry (con discusión). *International Statistical Review*, 67(3), 223-265.

LA COMPRENSIÓN DE LA NOCIÓN DE VARIACIÓN ESTADÍSTICA DE ESTUDIANTES DE SECUNDARIA

Ernesto Sánchez, José Antonio Orta

Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México

Resumen

Se informa sobre la percepción y manejo de la noción de variabilidad estadística; en particular, se formula la pregunta ¿Qué nociones estadísticas influyen en la percepción y comprensión de la noción de variabilidad de los estudiantes y cómo? Se realizó un experimento de enseñanza con 50 estudiantes de segundo de secundaria en el que se trabajó, entre otros, con el concepto de variabilidad estadística. Se muestran las respuestas a un problema de tiempos de espera en diversas cadenas de cines, el cual se les administró durante el experimento. El resultado es que para percibir la variabilidad en esta situación problema, los estudiantes deben tener buena competencia en la lectura de gráficas, saber elaborarlas, además de interpretar la media aritmética como representante de un conjunto de datos. Sin embargo, para darle un significado adecuado a la variabilidad es necesario que interpreten la situación en términos de la incertidumbre.

Abstract

Report on the perception and understanding of the notion of statistics variability is hereby given. Specifically, a question is posed: What and how statistical notions are significant to perception and understanding of variability notions of students? A teaching experiment with 50 students of grade 2 of secondary was undertaken, in which the concept of statistical variability was studied, among other statistical concepts. A problem of waiting time in different cinema companies was given to the students. The responses to the problem indicate that in order to perceive the variability in the problem-situation, students should have the ability to read and draw graphs in addition to being able to interpret the mean as a representative of data. However, to give adequately meaning to variability is needed that students consider the problem-situation in a random context.

Sánchez, E., Orta, J.A. (2011). La comprensión de la noción de variación estadística de estudiantes de secundaria. En M.M. Moreno, N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los Grupos de Investigación de la SEIEM* (pp. 281-293). Lleida.

Introducción

Entre los estadísticos y los educadores estadísticos se reconoce cada vez más que la variación es el corazón de la estadística. Moore (1990) ha destacado la omnipresencia de la variabilidad y la importancia de modelarla y medirla en la actividad estadística; Wild y Pfannkuch (1999) propusieron la consideración de la variación como una de los ‘tipos fundamentales de pensamiento estadístico’ mientras que Watson, Kelly, Callingham y Shaughnessy (2003, p. 1) señalan que “la estadística requiere de la variación para su existencia”.

La variación es un concepto muy complejo de manera que no es fácil encontrar en la literatura una definición simple que la abarque. La variación está ligada a muchas ideas estadísticas fundamentales; por ejemplo, para Watson, Callingham y Kelly (2007) la comprensión de la variación se relaciona con la percepción de la incertidumbre, con cambios previstos e imprevistos y con valores atípicos en las situaciones o en los datos. Konold y Pollatsek (2002) recomiendan que en el análisis de datos se consideren conjuntamente el centro (señal) y la variación (ruido), porque ambas ideas son necesarias para darle sentido a los datos. Garfield y Ben-Zvi (2008) observan que “la comprensión de las ideas de dispersión y variabilidad en los datos es una componente clave en la comprensión del concepto de distribución y es esencial para hacer inferencias estadísticas” (p. 203). Wild (2006) sugiere que la noción de distribución “subyace virtualmente a cualquier forma estadística de razonar acerca de la variación” (p. 11). En resumen, un mapa conceptual de la variación tendría que representarse ligado con otros conceptos como incertidumbre, datos, distribución, media aritmética, y con la inferencia estadística. En el presente artículo se pone atención a la relación de la variación con la gráfica de la distribución de los datos y con su media aritmética.

A pesar de su relevancia, el estudio de la variación no se incluye en el currículo de los niveles básicos (y medios) de muchos países, aunque los resultados de la investigación sugieren la posibilidad de desarrollar nociones intuitivas de variación desde edades muy tempranas. Apenas muy recientemente Shaughnessy (1997) alertó sobre la ausencia del tema en el currículo básico de matemáticas y la falta de investigación didáctica sobre variación en contraste con su importancia fundamental dentro de la estadística. Desde la aparición del artículo de Shaughnessy a la fecha ya se ha incluido el estudio de la variación en el currículo de algunos países (Australia, Nueva Zelanda y Estados Unidos) y se han realizado varios estudios sobre el tema. Un número de la revista SERJ de 2004 y parte de otro de 2005 (Statistics Education Research Journal, 3(2) y 4(1)) fueron dedicados a la *Investigación sobre el razonamiento acerca de la variabilidad*.

En el presente trabajo se informa acerca de una parte de un estudio sobre aspectos que influyen en la comprensión de la noción de variación estadística de estudiantes de segundo año de secundaria (13 años); en particular, se exponen las

respuestas de los estudiantes a un problema de comparación de grupos de datos; este problema forma parte de actividades organizadas para responder a la pregunta ¿Qué nociones influyen en la percepción y comprensión de la variabilidad de los estudiantes de secundaria y cómo?

Marco conceptual

Un concepto se comprende “si su representación mental es parte de una red de representaciones. El grado de comprensión está determinado por el número y fuerza de las conexiones” (Hiebert y Carpenter, p. 67). Esta idea implica que en el acto de comprensión de una noción matemática o estadística se reconocen y establecen al menos algunas de sus relaciones relevantes con otros conceptos y procedimientos. La enseñanza debe propiciar experiencias en las que los estudiantes se apropien de las relaciones pertinentes y desechen las relaciones espurias del concepto o procedimiento que están aprendiendo con otros que ya conocen o que están aprendiendo paralelamente. El investigador didáctico y el profesor tienen la tarea de analizar los conceptos e imaginar situaciones que ofrezcan al estudiante la posibilidad de percibir y apropiarse de las conexiones del caso.

Como se ha mostrado en los antecedentes, la noción de variación está relacionada con muchos conceptos estadísticos, de estos se han seleccionado tres que parecen apropiados para la introducción del tema con estudiantes de 8° grado, a saber, la *gráfica* de la distribución de frecuencias de los datos, la *media* y el *rango*. Además, otras dos nociones pueden contribuir a una mejor comprensión de la variación sin que hasta ahora sea claro su idoneidad para ser introducida en el 8° grado; estas son la *desviación media*, como una medida de la variabilidad más precisa que el rango, y la *incertidumbre*, como una noción que ayuda a la interpretación de la variabilidad en determinadas situaciones. Estas cinco nociones están relacionadas entre sí y a su vez se relacionan con otras más elementales.

La variación puede ser percibida y analizada mediante la gráfica de la *distribución de frecuencias* de los datos; sin embargo, para hacerlo se debe tener la habilidad para leerla y construirla. En sí misma, la tarea de elaborar una gráfica es compleja y su aprendizaje involucra sub-habilidades como ordenar y agrupar los datos, calcular las frecuencias, elegir los ejes, definir una escala, etc. Cada una de esas acciones suele presentar dificultades. Se ha observado que la lectura de una gráfica se puede realizar a distintos niveles, que Curcio (1987) definió como: *leer los datos*, *leer entre datos* y *leer más allá de los datos*. La percepción e interpretación de la variabilidad en una gráfica implica leer más allá de los datos.

Por otro lado, la relación entre la variación y la media de un conjunto de datos es importante. Konold y Pollatsek (2004) sugieren que es conveniente considerar en la enseñanza señal (media) y ruido (variación) a un mismo tiempo para lograr

una descripción significativa de los datos. Por ejemplo, sólo la media, o cualquier medida de tendencia central, como representante de un conjunto de datos es insuficiente para ofrecer una imagen aceptable de los datos, pero con ayuda de una medida de variación se obtiene un cuadro de éstos útil para más fines. Watson *et al* (2007) sugieren la “necesidad de considerar el desarrollo de la comprensión de la interacción entre los dos: la esperanza, a menudo expresada en probabilidades de resultados o en la media de un conjunto de datos y la variación, que por varias razones es probable que ocurra de acuerdo al patrón esperado” (p. 84). Algunas situaciones de comparación de grupos de datos, como las que se verán adelante en el presente estudio, ofrecen un ejemplo en el que se revela la insuficiencia de la sola consideración de la media y, a su vez, también muestra que no tendría sentido considerar sólo una medida de variación sin incluir a la media.

El *rango* de un conjunto de datos es la medida más elemental de la variación y por su simplicidad es de fácil comprensión para los estudiantes. La conexión del rango con la distancia que va del dato más pequeño al dato más grande ofrece un recurso para identificar la variación en la gráfica. No obstante, el rango no es suficiente para describir la variabilidad de los datos. La medida de la variabilidad más apreciada por los estadísticos es la *desviación estándar*, sin embargo, ésta es una noción muy difícil para los estudiantes de 8º grado. Una alternativa intermedia es utilizar la *desviación media*, pues es una medida más fina que el rango y su definición, al prescindir de valores cuadráticos, parece más natural que la de la desviación estándar.

Aunque los estudiantes perciban la variación en la distribución de frecuencia de los datos y la calculen ya sea con el rango, con la desviación media o con la desviación estándar, faltaría que la interpreten, que le den un significado apropiado, que puedan derivar alguna consecuencia de haberla percibido y calculado. Una posible dirección para propiciar una interpretación de la variación la sugiere Watson *et al.* (2007) cuando señala que “es probable que la variación se experimente [por los estudiantes] en relación con la incertidumbre...” (p. 84). Tal (2001) explica cuando aborda “El significado de la variación”: *En estadística, la variación que no es explicada es incertidumbre. La variación que explica (o es explicada) es información* (p. 112).

Para que se vea a la variación como incertidumbre o como información se tienen que ubicar los datos en la situación de la que provienen, en términos del modelo de Wild y Pfannkuch (1999) del pensamiento estadístico, se tiene que poner en juego el tipo de pensamiento de “integrar lo estadístico con lo contextual”. Más aún, en algunos casos esto sólo es posible si se realiza un ‘experimento mental’ (Kuhn, 1985), es decir, imaginar una situación que vaya más allá de los datos que sea consistente con los supuestos del problema. Por ejemplo, una distribución siempre se puede interpretarse como un muestreo, es decir, como el sorteo de sus valores, como si éstos estuvieran en una urna. Imaginar este

muestreo en el contexto de la situación del problema puede dar luz sobre el significado de la variación.

Metodología

Participantes

En el estudio participaron aproximadamente 50 estudiantes, un profesor y los autores. Los estudiantes estaban distribuidos en dos grupos de segundo año de secundaria (trece años) de una escuela pública de la Ciudad de México. El profesor tiene 10 años de experiencia y recientemente hizo una maestría en educación matemática; este antecedente fue fundamental para que el profesor comprendiera el objetivo de la investigación y supiera cómo trabajar con el grupo; en particular, cómo llevar la actividad y cómo recoger los datos. Los estudiantes conocían como calcular la media aritmética, la mediana y la moda, además habían organizado datos en tablas de frecuencia.

Instrumentos

En el estudio se diseñaron e implementaron dos instrumentos para obtener datos: una secuencia de enseñanza con hojas de trabajo y una actividad final formada por tres tareas. La secuencia se organizó alrededor de la una actividad de temperaturas que se describe adelante. La actividad final contenía una tarea de comparación de tiempos de espera que se presenta en el cuadro de abajo (figura 1) y cuyas respuestas se analizan en este artículo.

La actividad de las temperaturas. Se diseñó una actividad en la que se investigaría la temperatura corporal de los estudiantes de dos grupos escolares de estudiantes. El problema consistía en saber qué tanto varía la temperatura de las personas, en particular, entre los alumnos de los dos grupos; cada participante pertenecía a uno u otro grupo. La primera parte de esta actividad consistió en la aplicación de un cuestionario con preguntas sobre aspectos generales de la temperatura (ver hoja de trabajo). La pregunta con la que se introdujo el problema es ¿Crees que todas las personas tienen la misma temperatura corporal? La segunda parte de la actividad fue la organización y ejecución de la toma de datos. Se proporcionó un termómetro de mercurio a cada estudiante y se les pidió que obtuvieran su propia temperatura; cada uno anotó en su hoja de trabajo la temperatura obtenida. La tercera parte consistió en la organización, presentación y análisis de los datos: éstos fueron organizados en tablas y gráficas, se calculó la media y se introdujeron y calcularon el rango y la desviación media como medidas de variación. Se determinó en qué grupo hubo más variación de acuerdo a los datos obtenidos y se comentaron posibles causas de la variación.

La tarea de los tiempos de espera en cadenas de cines. En la figura 1 y 2 se presenta una adaptación de una tarea de Shaughnessy et al (2004). Se divide en 2 partes.

1ª Parte: Una costumbre en los cines es mostrar anuncios comerciales y cortos en la pantalla antes de comenzar la película. El tiempo de espera para una película es la diferencia entre la hora de inicio anunciada y la hora real en la que comienza la película. Un grupo de 10 estudiantes investigó el tiempo de espera de tres cadenas de cines, una de la cadena Cinemex, otra de la cadena Cinépolis y por último una de la cadena Multicinemas. Los estudiantes visitaron los cines en horarios y días diferentes cada alumno midió el tiempo de espera en minutos, y lo registró en las tablas que siguen:

Cinemex
12.0
21.0
15.0
15.0
13.0
16.0
16.0
16.0
20.0
18.0

Cinépolis
15.0
15.5
16.0
16.0
16.5
16.5
18.0
16.0
15.5
17

Multicinemas
15.5
17.0
18.0
16.5
16.0
16.5
16.5
15.0
15.0
16.0

En la hoja anexa traza una gráfica para cada tabla

Calcula el tiempo de espera promedio para cada cadena de cines y señálalo con un segmento de recta en la gráfica que construiste.

Figura 1. Primera parte del problema sobre la comparación de tiempos de espera en cadenas de cines.

2ª Parte. A continuación se presentan las gráficas de las distribuciones de los tiempos de espera de las tres cadenas de cines. Obsérvalas y responde las preguntas.

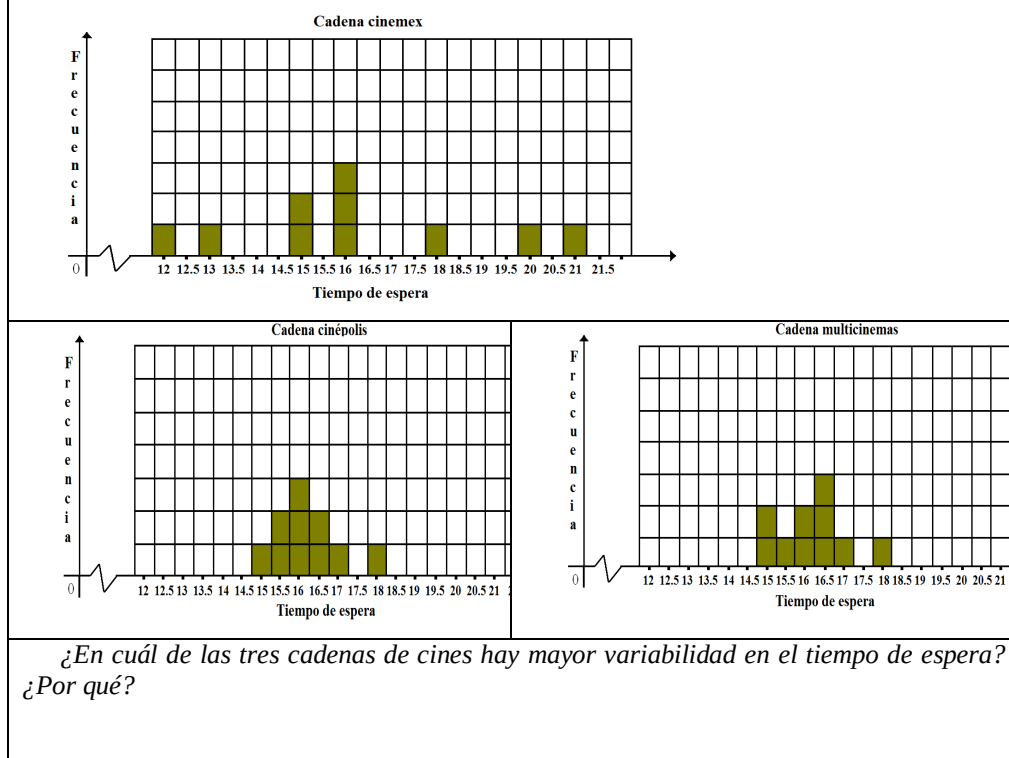


Figura 2. Segunda parte del problema de los tiempos de espera de los cines

Procedimientos

La actividad de las temperaturas se utilizó para que los estudiantes aprendieran aspectos relacionados con la noción de la variabilidad en los datos; en particular, que observaran la variabilidad en la gráfica y que aprendieran a calcular el rango y la desviación media y a interpretarlas como medidas de variabilidad. Esta actividad y la actividad de evaluación se llevaron a cabo en 8 sesiones de 100 minutos cada una.

Para analizar los datos se han buscado patrones o agrupamientos en las respuestas, en particular, en los datos de construcción de gráficas se han organizado las respuestas de acuerdo a una jerarquía basada en el modelo SOLO de Biggs y Collis (1982).

Resultados

Construcción de gráficas

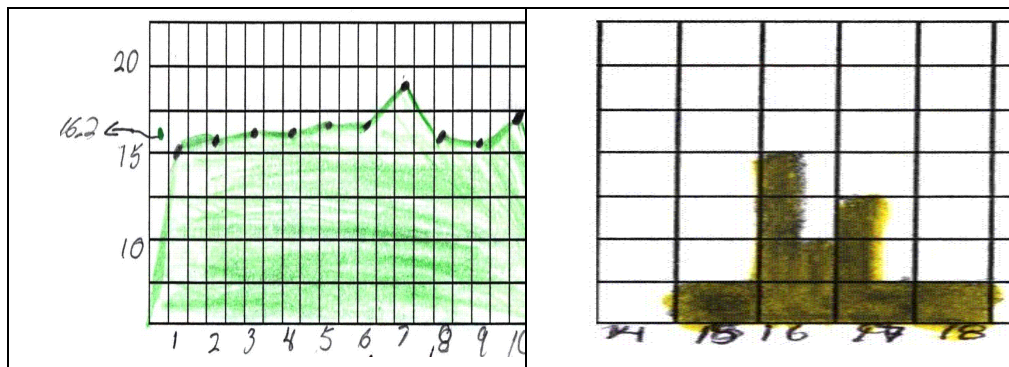
Una manera de percibir la variabilidad en los datos es a través de su gráfica de frecuencias. En seguida se exponen las diferentes formas en que los estudiantes graficaron los datos y se jerarquizan de acuerdo con el marco de referencia SOLO (*Structure of the Observed Learning Outcome*) de Biggs y Collis (1982).

Pre-estructural. En las respuestas de este nivel, se presentan gráficas no agrupadas, colocan los datos en el eje X en el orden dado en la tabla y encima de cada valor una barra proporcional al valor o magnitud del dato. En ocasiones asignan a cada valor su posición en el orden de la tabla y grafican la pareja (posición, magnitud del valor); (30 alumnos dieron respuestas de este tipo).

Nivel Uni-estructural. En este nivel: a) Observan las frecuencias y las representan en la gráfica pero sin considerar el orden de los datos en el eje X, ó b) Ordenan y ubican los datos en el eje X pero no representan adecuadamente las frecuencias. (5 estudiantes dieron respuestas en este nivel).

Nivel Multi-estructural: En este nivel, se consideran las frecuencias y las representan en la gráfica; ordenan y ubican los datos en el eje X, sin embargo, no respetan las magnitudes de las diferencias entre números, por ejemplo, los números 15, 15.5, 16, 16.5, 17, y 18 los colocan de forma equidistante (Respuestas de 7 estudiantes caen en esta categoría).

Relacional: En este nivel se observan las frecuencias y se representan en la gráfica; ordenan y ubican los datos en el eje X y respetan las magnitudes de las diferencias entre números, lo que permite visualizar la variabilidad de los datos (Respuestas de 3 estudiantes caen en este nivel). Ejemplos de las gráficas construidas por los estudiantes se muestran en la figura 2.



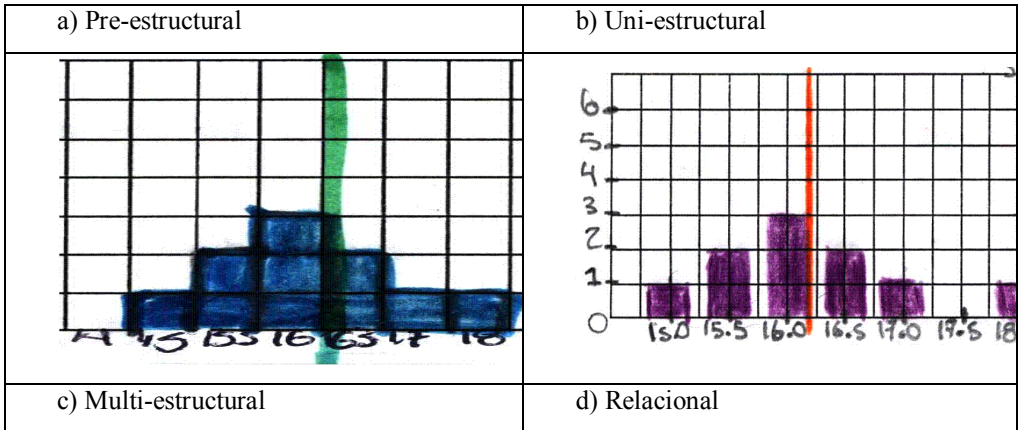


Figura 3. Ejemplos de las gráficas construidas por los estudiantes.

Interpretación de la media aritmética

Después de que los alumnos construyeron las gráficas de los datos, calcularon la media aritmética y la ubicaron en la gráfica, se les pidió que respondieran las siguientes preguntas:

Existe diferencia en el tiempo promedio de espera de las tres cadenas de cines, explica tu respuesta.
Cómo puedes conocer y determinar la variabilidad en los tiempos de espera de las tres cadenas de cines.
En cuál de las tres cadenas de cines hay más variabilidad.

La primera pregunta se refiere al promedio; como la pregunta está inmersa en el contexto de los ‘tiempos de espera’ se podrá observar que varios estudiantes la responden tratando de interpretarla, es decir, le dan algún significado.

Recordemos que el tiempo promedio de espera en los tres casos es el mismo y, por tanto, la respuesta correcta sería que no hay diferencia entre ellos. Las respuestas se agrupan de la siguiente manera: 18 alumnos respondieron que no existe diferencia en el tiempo promedio de espera; 21 que hay diferencia entre el promedio de espera de cada cadena de cines; 3 alumnos no respondieron y uno sólo describió cómo se calcula la media aritmética. En la tabla siguiente se muestran dichos resultados.

Respuestas	Instrucción para calcular la media	No respondió	No existe diferencia en	Si existe diferencia el
------------	------------------------------------	--------------	-------------------------	-------------------------

	aritmética	el promedio	promedio
Número de alumnos que dieron esa respuesta	1	3	18
			21

Figura 5. Respuestas a la pregunta ¿Existe diferencia en el tiempo promedio de espera de las tres cadenas de cines?

En la gráfica anterior vemos que veintiún alumnos respondieron que sí existía diferencia en los tiempos de espera de las cadenas de cine, cuando éste es el mismo en las tres distribuciones (16.2 minutos).

Ocho alumnos al calcular la media aritmética cometieron errores de cálculo y en sus hojas de trabajo anotaron valores diferentes al correcto, lo que los pudo llevar a responder que sí existían diferencias en los tiempos de espera. Cuatro alumnos posiblemente centraron su atención en los valores que se mostraban en la tabla de los tiempos de espera de Cinemex, como por ejemplo, uno respondió *“Sí, porque en el Cinemex el tiempo es hasta de 23 minutos”* (53). Hay nueve estudiantes que no exhiben en sus explicaciones ideas pertinentes al problema. Algunos de ellos incluso calcularon el valor de la media y su resultado fue correcto, no obstante, dijeron que sí había una diferencia en el tiempo promedio de espera, dando explicaciones basadas en su conocimiento personal de las cadenas de cine o explicaciones algo confusas, por ejemplo: *“Sí hay diferencia porque cada cine tiene diferentes cortos”* (26), *“Sí porque cada cine tiene diferente tiempo”* (9), *“Sí porque cada gráfica tiene variabilidad de minutos”* (6).

Lectura de gráficas

En la segunda etapa se les proporcionaron las gráficas bien dibujadas (figura 3) y se les dijo cuál era la media aritmética de cada cadena de cines para evitar respuestas afectadas por errores en la elaboración de la gráfica o en el cálculo del promedio y observar la manera en que aprecian la variabilidad. (Ver figura 2)

En la pregunta *¿En cuál de las tres cadenas de cines hay mayor variabilidad en el tiempo de espera? ¿Por qué?* se esperaba que los alumnos apreciaran visualmente que la cadena Cinemex tenía mayor variabilidad. Sólo uno menos que la mitad indicaron que Cinemex era la cadena con mayor variabilidad en el tiempo de espera (19 de 40); ocho que era Multicinemas, cinco Cinépolis, tres que en las tres cadenas y tres que en ninguna.

En general, las justificaciones de los que eligieron correctamente Cinemex, se basaron en características pertinentes de la gráfica, pero sólo 4 alumnos

mencionaron explícitamente que se basaron en el *rango* (valor máximo menos el mínimo). Ocho mencionaron el tiempo de espera pero sin relacionarlo explícitamente con el rango, por ejemplo: *¿Porque hay mayor tiempo de espera que en las otras?* o *¿Porque está expandido el tiempo de espera?*. Cinco de las respuestas expresan características específicas percibidas en la gráfica de Cinemex ausentes en las otras: *¿Porque los números varían más por ejemplo 13, 21 y en las otras no?* (8), *¿Porque se separan varios tiempos de espera?* (44). Finalmente dos dicen que Cinemex alcanza valores más grandes.

Es interesante observar las respuestas de los dos estudiantes cuyas respuestas fueron clasificadas en un nivel relacional en la tarea de elaborar las gráficas de los tiempos de espera (Fig. 4). Ambos alumnos calcularon la media aritmética y la aplicaron de manera correcta al contexto, además, utilizaron en sus respuestas la palabra variabilidad o el rango. Sin embargo cuando se les preguntó ¿a cuál asistirían?, ambos respondieron que Cinépolis, la explicación de uno de ellos fue “*Porque me gusta más como tienen las cosas aunque este mal eso y no me molesta cuantos cortos saquen?*”; la de la otra fue *¿Porque es menos tiempo de espera y es más famoso?*. En el primer caso el estudiante se basa en el conocimiento personal de la cadena de cines y aclara que ‘aunque esté mal’ (se refiere a la solución formal) él elegiría Cinépolis. La otra, también confiesa que eligió Cinépolis apoyada en ‘que es más famoso’ pero el comentario “porque es menos tiempo de espera” muestra que identifican la variabilidad con la media, ya que lo que se gana eligiendo Cinépolis no es menos tiempo de espera si no menos incertidumbre en la espera. Hay otros estudiantes que tienen la misma confusión, por ejemplo, uno opina que Cinemex tiene mayor variabilidad porque *¿é hay mayor tiempo de espera que en las otras?*.

Discusión y conclusiones

En el proceso de percepción y manejo de la variabilidad de un conjunto de datos, es importante que los estudiantes sean capaces de elaborar y leer gráficos y de interpretar la media aritmética. La adquisición de ambas competencias son a su vez procesos que tienen diferentes niveles de complejidad.

Hemos visto que los estudiantes que muestran buen nivel en la construcción de las gráficas y que pudieron comparar datos basados en la media aritmética, identificaron adecuadamente la cadena de cines con mayor variabilidad y dieron razones basadas en el rango. No obstante, resulta frustrante observar que uno de estos alumnos manifiesta una comprensión aún incompleta de la variabilidad; en efecto, interpreta que mayor variabilidad significa ‘mayor tiempo de espera’. Aunque esta confusión también se presentó en otros estudiantes, tiene interés este caso pues su buen desempeño lleva a preguntarse ¿Qué le faltaba para alcanzar una mejor comprensión de la variabilidad?

Desafortunadamente las evidencias que hasta ahora se tienen en el presente estudio no son suficientes para dar una respuesta plausible. No obstante, podemos conjeturar una explicación: lo que falta es que los estudiantes introduzcan la aleatoriedad en su consideración de la situación, es decir, que sean conscientes que la variabilidad está asociada a la incertidumbre.

En efecto, ningún estudiante saca como consecuencia que la mayor variabilidad en la cadena de cines Cinemex significa que hay más incertidumbre en los tiempos de espera, es decir, que tanto puede haber muy poco tiempo de espera, como puede haber un tiempo regular, como puede ser muy largo. La mayoría lo asocia sólo con esto último, con que puede ser muy largo el tiempo, sin ver las otras posibilidades; de alguna manera se quiere ver en la variabilidad una información fácil de interpretar: mayor variabilidad implica mayor tiempo de espera. En este sentido, se interpreta a la variabilidad como una tendencia, es decir como si fuera el promedio.

Regresando al problema de la relación de la variabilidad con la lectura y elaboración de gráficas y la interpretación de la media aritmética, se puede decir que leer la variabilidad de un conjunto de datos está en el nivel de 'leer más allá de los datos'. También, para comparar la variabilidad entre los conjuntos de datos, la interpretación de la media aritmética como representante de un conjunto es necesaria. Sin embargo, sería apresurado deducir que es necesario adquirir ambas competencias antes de tratar con la variabilidad en el aula. Una alternativa es pensar que ambos niveles, el de comprensión de gráficas y el de la media aritmética, se pueden adquirir simultáneamente con problemas en los que se quiera desarrollar la percepción y manejo de la variabilidad, y conviene hacerlo a través de situaciones de incertidumbre. En la experiencia que estamos realizando y de la cual este artículo informa de una parte, se buscan evidencias de que esto es posible.

Referencias bibliográficas

- Biggs, J. B. y Collis, K. F. (1982). *Evaluating the quality of learning. The SOLO taxonomy (Structure of the Observed Learning Outcome)*. London, UK: Academic Press Inc.
- Curcio, F.R. (1987). Comprehension of mathematical relationships expressed in graphs. *Journal for Research in Mathematics Education*, 18, 382-393.
- Garfield, J. y Ben-Zvi, D. (2008). *Developing Students Statistical Reasoning*, Springer.
- Hiebert, J., Carpenter, T.P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. A Grows (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (66-97), Reston, Va, USA: National Council of Teachers of Mathematics.

- Konold, C. y Pollatsek, A. (2002). Data analysis as the search for signals in noisy processes. *Journal for Research in Mathematics Education*. Vol 33, N° 4, 259-289.
- Kuhn, T.S. 1985). Una función para los experimentos mentales. En I. Hacking (Ed.), *Revoluciones Científicas (17-57)*. México D. F.: Fondo de Cultura Económica.
- Moore (1990). Uncertainty. En L. A. Steen (ed), *On the Shoulders of Giants*, National Academic Press, Washington D. C. USA
- Shaughnessy, J. M., (1997), Missed Opportunities in Research on the Teaching and Learning of Data and Chance. En F. Biddulph; K. Carr (eds) *People in Mathematics Education. Mathematics Education Research Group of Australia*, Waikato, New Zeland, Vol. 1, pp. 177 –197.
- Shaughnessy, J.M., Ciancetta, M., Best, K., Canada, D. (2004). Students' attention to variability when comparing distributions. Artículo presentado en la 82^{va} Reunión del National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). Philadelphia, PA. USA.
- Tal, J. (2001). *Reading between Numbers. Statistical thinking in everyday life*. New York, NY, USA: McGraw-Hill.
- Watson, J. M.; Callingham, R. A.; & Kelly, B. A. (2007). Students' appreciation of expectation and variation as a foundation for statistical understanding. *Mathematical Thinking and Learning*, 9(2), 83-130.
- Watson, J., Kelly, B., Callingham, R., & Shaughnessy, M. (2003). The measurement of school students' understanding of statistical variation. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 34 (1), 1-29.
- Watson, J. M.; Callingham, R.A.; and Kelly, B.A. (2007). Students' appreciation of expectation and variation as a foundation for statistical understanding. *Mathematical Thinking and Learning*, 9(2), 83-130.
- Wild, C. J. (2006). The concept of distribution. *Statistics Education Research Journal*, 5(2), 10-26.
- Wild, C. and Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review*, 67(3), 223 – 265.

ERRORES Y DIFICULTADES DE ESTUDIANTES DE PSICOLOGIA EN RELACIÓN A INTERVALOS DE CONFIANZA Y CONTRASTE DE HIPÓTESIS

Osmar Darío Vera, Carmen Díaz (*)

Universidad Nacional de Quilmes. Buenos Aires. Argentina, Universidad de Huelva ()*

Resumen

En este trabajo presentamos un estudio de evaluación de las dificultades y errores de una muestra de estudiantes de Psicología en relación a la comprensión de los intervalos de confianza y al contraste de hipótesis. La muestra se compone de 143 estudiantes de segundo año de la Universidad de Huelva, que cursaban la asignatura de Análisis de datos II a los que se administró un conjunto de ítems que evalúan la comprensión de estos conceptos, entre otros. Encontramos que los alumnos son capaces de realizar los cálculos para construir un intervalo de confianza para la media, presentando mayores dificultades en la comprensión del significado del intervalo. En relación al contraste de hipótesis, hallamos algunas interpretaciones incorrectas en la asignación de las hipótesis y su discriminación (diferencia entre hipótesis nula y alternativa), nivel de significación y potencia, regiones crítica y de aceptación, así como dificultades con la regla de decisión, que completan otros estudios previos.

Abstract

In this paper, we present an assessment study of the difficulties and misconceptions that psychology students present regarding confidence intervals and hypotheses testing. We worked with a sample of 143 psychology students at the University of Huelva, who followed a course in Data Analysis II. We pass to all students a set of items assessing these concepts. We found an average ability computing a confidence interval (CI) for the mean on a population, but greater difficulties understanding the meaning of CI. According to hypothesis testing, we found some misinterpretations in the assignment and discrimination of hypotheses (between null and alternative hypothesis), level of significance and power, critical and acceptance regions, and decision rule, which complement previous studies.

Vera, O., Díaz, C. (2011). Errores y dificultades de estudiantes de psicología en relación a intervalos de confianza y contraste de hipótesis. En M.M. Moreno, N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los Grupos de Investigación de la SEIEM* (pp. 295-307). Lleida.

Introducción

El trabajo de investigación sobre inferencia estadística, es hoy en día muy amplio, y con gran impacto a nivel internacional (e.g., Batanero, Godino, Vallecillos, & Holmes, 1994; Brewer, 1985; Haller & Krauss, 2002). Estas investigaciones señalan la existencia de dificultades y errores de comprensión y aplicación entre estudiantes e investigadores. En España, la investigación didáctica fue iniciada por Vallecillos con su tesis doctoral (Vallecillos, 1994) que fue un trabajo pionero, y ha sentado bases de una amplia investigación posterior (Díaz, 2007; Alvarado, 2007; Olivo, 2008; Vera, 2008).

En cuanto a los estudiantes de Psicología se refiere, la enseñanza a los mismos plantea especiales problemas didácticos, al no poseer una base matemática tan amplia como estudiantes de otras carreras científicas. Al mismo tiempo, la inferencia estadística, resulta un instrumento importante en la investigación en Psicología, y su necesidad e importancia han ido aumentando durante los últimos años.

Otro motivo que hace relevante el tema es su inclusión en estos últimos años en los estudios oficiales de la carrera Psicología. Es, de hecho, casi imposible para la realidad que vivimos que un profesional de esta especialidad, no haya recibido en su formación al menos un curso de estadística. Santisteban, (1990) analiza distintos programas de las facultades de Psicología en las universidades españolas. En general, y específicamente también para los alumnos de nuestra muestra, el temario que incluye la inferencia estadística es amplio y forma parte de un segundo curso. Asimismo los estudiantes raramente aprecian su utilidad para temas de psicología (Santisteban, 1990).

Carpintero (1989), por otra parte enfatiza que un alumno de Psicología, sobre todo precisa comprender qué es y qué no es estadísticamente significativo y la manera en que esto puede variar de acuerdo con el tamaño de las muestras o con el uso de una prueba con mayor potencia.

Seguidamente, mencionamos dos procedimientos que el estudiante ha de conocer para poder comprender la inferencia estadística. Uno de ellos es el intervalo de confianza y otro el contraste de hipótesis, objetos evaluados en los alumnos y cuyos resultados se presentan en este trabajo.

Aunque los contrastes de hipótesis son un procedimiento muy útil, en múltiples oportunidades han de complementarse (Batanero, 2001). Por ejemplo, si quien diseña un experimento de investigación, conociese de antemano que un par de medias poblacionales μ_1 y μ_2 difieren, la prueba de hipótesis sobre igualdad de medias $\mu_1 = \mu_2$ sería irrelevante. El investigador estaría en este caso interesado en conocer cuál es la diferencia entre dichas medias y por tanto, más interesado en

estimar el valor en un intervalo para la diferencia de medias $\mu_1 - \mu_2$. Esos intervalos son los que se conocen bajo el nombre de intervalos de confianza.

Siguiendo a Olivo (2008), el intervalo de confianza es uno de los procedimientos generales de inferencia estadística. La idea general de intervalo de confianza se particulariza dependiendo del parámetro a estimar (media, proporción, varianza, etc.) y según las condiciones (tipo de distribución muestral, qué se conoce de la misma, etc.). Este autor afirma que son dos puntos los importantes para la correcta comprensión del objeto: el *conocimiento del cálculo del intervalo para su construcción* y su *interpretación*. Otros investigadores (Behar, 2001; Cumming, Williams y Fidler, 2004; Fidler y Cumming, 2005) están avisando que los investigadores y estudiantes, entre ellos los de Psicología, tienen errores conceptuales y no interpretan los conceptos apropiadamente. Behar (2001) elaboró un instrumento en lo que respecta a la evaluación conceptual del aprendizaje sobre intervalos de confianza. El instrumento consta de 71 preguntas y fue contestado por 47 expertos y 297 estudiantes de pregrado; encontrando un gran número de errores en la interpretación. Estas investigaciones nos han llevado a incluir en el análisis de nuestra investigación una evaluación de los errores y dificultades de IC relativo tanto al cálculo como a la interpretación.

Por otro lado, cuando un alumno se enfrenta a una prueba de hipótesis, en primer lugar debe diferenciar la naturaleza de las hipótesis estadísticas, así como conocer la diferencia que hay entre éstas y las hipótesis de investigación. Es Batanero (2000), siguiendo a Chow (1996), nos recuerda estas diferencias. Según estos autores, para diseñar una investigación empírica, además de la hipótesis de investigación, es necesario diseñar una variable dependiente bien definida obtenida a partir de una tarea experimental propuesta a algunos sujetos. Con esta base podemos construir una *hipótesis experimental*, y una implicación de la hipótesis experimental se usará para llevar a cabo el análisis estadístico; se la formulará como *hipótesis estadística alternativa*. Finalmente, el complemento lógico de la hipótesis estadística alternativa se formula como *hipótesis estadística nula*. A nivel estadístico, el alumno ha de diferenciar entre las hipótesis que se plantean en cada fase de la investigación. De la importancia de este análisis surge que la mayoría de nuestros ítems referidos al tema estén relacionados con la asignación de hipótesis (tabla 1). Seguidamente describimos la metodología seguida en esta investigación.

Metodología del trabajo

La muestra estuvo formada por un total de 143 alumnos de segundo año de la Licenciatura en Psicología en la Universidad de Huelva, que cursaban una asignatura de Análisis de Datos II. Esta asignatura se ubica en el segundo curso y primer cuatrimestre. Se concibe como una continuación de “Análisis de Datos en Psicología I”. Al alumno que se matricula en esta asignatura se recomienda que

tengan conocimientos de estadística descriptiva, que comprendan los conceptos básicos sobre el método científico, fases de una investigación científica y diferentes metodologías. El objetivo principal de la asignatura gira en torno a adquirir nuevas habilidades que le permitan el análisis detallado de los datos que se recogen a través de la metodología de investigación en psicología. Uno de los aspectos centrales de la asignatura es el tema de intervalo de confianza como las pruebas de hipótesis, que forman parte de los dos primeros temas de los contenidos de la asignatura.

Cabe señalar también que al final del curso el alumno elaborará un informe de un trabajo desarrollado en forma de una pequeña investigación. Con los datos recogidos por toda la clase, los alumnos por grupos deberán plantear una serie de hipótesis a comprobar, elegir la prueba estadística más acorde para la resolución del problema, y extraer sus conclusiones. El profesor los guía en cuestiones relativas a la formulación de hipótesis, construcción de la base de datos, tratamiento y análisis de los mismos. Finalmente el alumno debe presentar sus resultados en forma de artículo según las normas APA. Por todo ello es que tanto la construcción e interpretación del IC; como la elección, lectura y análisis de resultados de las pruebas de hipótesis son fundamentales para aprobar el curso.

Sobre los objetos descritos en la introducción nos propusimos elaborar un instrumento de evaluación elaborado mediante un proceso de gran rigurosidad. Nuestro primer paso en la elaboración del instrumento ha sido construir un procedimiento para identificar, mediante una definición semántica precisa, el constructo (Martínez Arias, 1995). Puesto que la comprensión de un objeto matemático es un constructo psicológico inobservable, es preciso llevar a cabo una definición detallada de los contenidos que serían evaluados (Batanero y Díaz, 2005).

Para dotar de una mayor objetividad a la definición de nuestra variable, nos hemos basado en un análisis del objeto matemático “análisis de varianza” (ANOVA), lo cual nos permitirá definir el significado de referencia (entendido esto, dentro del marco teórico del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición matemática) (Godino, 2002) de dicho objeto, para esa investigación. Dicho análisis comienza con el estudio de los pre-requisitos necesarios para que el estudiante pueda comprender el tema, siquiera a nivel elemental.

Una vez realizada la definición sintáctica y semántica de la variable, los pasos que hemos seguido en la construcción del instrumento son los siguientes: la construcción de un banco de ítems, análisis a priori de los mismos, elaboración de una tabla de contenido (tabla 1); pruebas piloto de ítems para seleccionar aquellos que nos han servido para la versión definitiva del cuestionario; la valoración de ítems mediante el juicio de expertos, para finalmente revisarlos mejorando la

legibilidad y disminuyendo también la dificultad de algunos ítems, para de esta forma dar la versión definitiva del cuestionario.

La prueba de evaluación finalmente consta de un ítem de comprensión conceptual y otro de comprensión procedimental en cuanto a Intervalos de Confianza se refiere, mientras referidos al Contraste de Hipótesis han sido seis ítems (tabla 1).

Tabla 1. Contenidos evaluados por ítem

CONTENIDOS		ÍTEMS							
		I1	I2	I3	I4	I5	I6	I7	I8
Intervalo de Confianza	Construcción de un intervalo de confianza	X							
	Interpretación del significado de un intervalo de confianza.		X						
Contraste de Hipótesis	Contraste bilateral y unilateral. Asignación de hipótesis			X	X		X	X	
	Hipótesis nula y alternativa. Asignación de hipótesis			X	X	X	X		X
	Errores tipo I y II, nivel de significación y potencia					X	X		
	Cálculo de valor crítico, dado el nivel de significación							X	
	Regla de decisión en un contraste								X

Los estudiantes completaron los ítems como parte de una de las evaluaciones de la asignatura, que tiene un total de 6 créditos (60 horas lectivas), de los cuales la mitad son créditos prácticos. Los ítems aplicados se recogen en la tabla 2.

Resultados y discusión

En este apartado, presentamos los resultados y conclusiones obtenidas con este estudio presentando separado por objeto (IC y CH), y finalmente en forma global a la inferencia estadística. La tabla 3 muestra los porcentajes de respuestas por Ítem.

Tabla 2. Ítems pasados a prueba

Ítem 1. Se toma una muestra de 48 estudiantes con la finalidad de conocer su rendimiento en lectura. Un psicólogo escolar administra un test para evaluarlo, así obtiene una media de 54,7 y desviación típica 5,23. Los límites del intervalo de confianza para la puntuación media poblacional del test administrado, con un nivel de confianza $\hat{\alpha}=0,99$ son:

[53,95 ; 55,45] [42,53 ; 66,87] [52,94 ; 56,46]

$$\frac{S_d}{\sqrt{n}}$$

(Error típico de la media: $\sqrt{\frac{S_d}{n}}$)

Ítem 2. Un investigador ha calculado 1000 intervalos de confianza al 99% para la media poblacional μ . Suponiendo que los datos en los que se basan los intervalos se seleccionan de manera independiente entre sí. ¿Cuántos de estos 1000 intervalos se espera que contengan el valor verdadero de μ ?

Aproximadamente 990 intervalos contendrán el valor de μ

Los 1000 intervalos contendrán el valor de μ

No se puede saber a priori la cantidad de intervalos que se espera que capturen el verdadero valor del parámetro μ .

Ítem 3. Queremos conocer si los sujetos extrovertidos e introvertidos difieren en la puntuación media en autoestima y no disponemos de ninguna información previa. El tipo de hipótesis nula razonable que debo plantear es:

Ho: $\mu_1 \leq \mu_E$ Ho: $\mu_1 \geq \mu_E$ Ho: $\mu_1 = \mu_E$

Ítem 4. De los siguientes pares de afirmaciones, indique cual NO cumple con las reglas para plantear hipótesis estadísticas:

Ho: $\mu \leq 100$; H₁: $\mu > 100$ Ho: $\sigma = 15$; H₁: $\sigma \leq 15$ Ho: $\mu_1 - \mu_2 = 0$; H₁: $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$

Ítem 5. Si en una investigación lees que la potencia de un contraste vale 0,5594, entonces interpretas que:

La probabilidad de rechazar la hipótesis nula siendo falsa vale $(1 - 0,5594) = 0,4406$

La probabilidad de rechazar la hipótesis nula siendo falsa vale 0,5594

La probabilidad de mantener la hipótesis nula siendo falsa vale 0,5594

Ítem 6. Supongamos que conocemos la ‘verdad absoluta’ sobre la eficacia de dos tratamientos (A y B), y sabemos que existen diferencias en la efectividad de ambos para curar la depresión. Un investigador que realice un estudio y parta de la hipótesis ‘no existen diferencias en la efectividad de los tratamientos A y B para curar la depresión’ cometerá un error tipo II cuando:

Concluya que A y B no son efectivos para curar la depresión

Concluya que A y B no difieren en su efectividad para curar la depresión

Concluya que A y B difieren en su efectividad para curar la depresión

Ítem 7. El valor crítico correspondiente a un $\alpha=0,01$ en un contraste unilateral derecho, suponiendo normalidad de los datos es:

-2,33 2,33 3,10

Ítem 8. Cuando realizamos un contraste, la regla de decisión nos lleva a rechazar la hipótesis nula siempre que:

El estadístico de contraste caiga en la región de rechazo

La probabilidad asociada al estadístico de contraste (el nivel de significación) sea menor que el valor de α

Las alternativas a) y b) son correctas

Tabla 3. Porcentajes de respuestas por Ítem (n=143)

Respuesta	Ítem 1	Ítem 2	Ítem 3	Ítem 4	Ítem 5	Ítem 6	Ítem 7	Ítem 8
A	18,9%	29,4%	2,8%	7%	19,6%	4,9%	23,1%	25,9%
B	4,9%	4,9%	5,6%	81,8%	47,6%	62,9%	62,2%	2,8%
C	56,6%	12,6%	90,9%	7,7%	18,9%	17,5%	4,9%	63,6%
sin contestar	19,6%	53,1%	0,7%	3,5%	14%	14,7%	9,8%	7,7%

Intervalos de confianza (IC)

El porcentaje de respuestas correctas en el Ítem 1, en que los alumnos han de recordar y aplicar correctamente la fórmula de cálculo del intervalo de confianza para la media fue del 56,6% (tabla 3), sólo un poco más de la mitad de la muestra lo resuelve correctamente. Aunque no se especifique la distribución, puesto que el tamaño de la muestra es mayor que 30, los estudiantes aplicarían la distribución normal, debiendo leer sus tablas correctamente y encontrar el valor crítico.

Los resultados suponen una capacidad mediana para la construcción de los intervalos estando algo alejados de los resultados de (Olivo, 2008) quien encuentra 79% (n = 252) de respuestas correctas en un ítem similar aunque en su caso no da la fórmula del error típico, mientras que nosotros la damos. También están alejados del porcentaje de respuestas correctas en las pruebas piloto para este ítem, que fueron de 78,3% (n = 93) y 70% (n = 130) lo que supone una mejor capacidad de construcción de los intervalos que los obtenidos en el cuestionario final, a pesar de ser la misma profesora la que explicó el tema a los tres grupos de estudiantes. Observamos también que el resultado obtenido cae incluso fuera del intervalo de confianza del 95% para los ítems correspondientes en la prueba piloto, pues estos intervalos fueron (0,65; 0,79) en un caso y (0,59; 0,81) para el otro. Ello indica un cambio en los conocimientos de la construcción de intervalos de confianza de los estudiantes participantes en el estudio final, respecto a los cursos anteriores.

En cuanto a los distractores, que evalúan respectivamente el uso de la tabla de distribución (pues no se coloca el percentil en los cálculos), y el conocimiento de la desviación estándar para la media (pues la desviación estándar no se divide por la raíz cuadrada del tamaño de la muestra) respectivamente; han sido elegidos por un 18,9% y un 4,9% de los estudiantes. Olivo (2008) haya un 8,3% y 6,7% de fallos para ambos errores, aunque debemos añadir otro 4,4% de alumnos que comete los dos faltas a la vez. En las pruebas piloto, los porcentajes de fallos para distractores

análogos ha sido del 1,1% y 2,2% (n=93); y del 11,5% y 0% (n=130). Se observa cierto desequilibrio en los distractores.

El ítem 2 evalúa la comprensión del significado de un intervalo de confianza. De acuerdo con el porcentaje de respuestas correctas en el ítem 2 (tabla 3) muy pocos alumnos comprenden su definición (29,4%). En las pruebas piloto encontramos resultados similares con un 29,3% (n=93) y 22,3% (n=130) de aciertos.

Olivo (2008) encuentra un 36,5% (n=252) de interpretaciones correctas en un ítem similar en estudiantes de ingeniería. Se debe contemplar que se trata de estudiantes con mayor base matemática que los de nuestra muestra.

Al mismo tiempo Behar (2001, p. 220) en una unidad de medida similar, observa en el grupo de expertos en estadística y el grupo de estudiantes universitarios con alguna instrucción especial en estadística un 48,9 % y 35,7% de aciertos respectivamente.

Un 53,1% en nuestra muestra deja el problema en blanco. Hay que tener en cuenta que si el alumno responde erróneamente, se le baja medio punto en su puntuación final y por ello si éste no está muy seguro prefiere dejarlo sin responder. Este comentario es válido para todos los ítems.

Contraste de Hipótesis (CH)

Un segundo punto analizado son los conocimientos sobre contraste de hipótesis. Sobre este contenido, se incluyen varios ítems. A continuación analizaremos los resultados y la discusión para cada uno de ellos.

El ítem 3, que evalúa la asignación de hipótesis, muestra un 90,9% de respuestas correctas (tabla 3), por lo que ha resultado fácil para los estudiantes, quienes parecen comprender el planteamiento de las hipótesis en un contraste estadístico y la diferencia entre hipótesis estadística nula y alternativa y que la hipótesis nula es siempre la de no diferencia. En las pruebas piloto se encontraron un 93,5%(n=93) y 94,6%(n=130) de respuestas correctas, casi todos los porcentajes coinciden en los tres cuestionarios pasados. Vallecillos (1994) obtuvo un 68,6% (n=436) de respuestas correctas en este ítem en su estudio, donde la pregunta también se hacía en un contexto de aplicación (78.6% (n=70) en los alumnos de Psicología). Puesto que nuestros estudiantes pasaron el cuestionario como parte de una evaluación final de la asignatura, esto explica los mejores resultados en este ítem.

Un 2,8% de nuestros alumnos elige el distractor a) indicando que el alumno confunde las hipótesis nula y alternativa, confusión que se ha encontrado también en la investigaciones de Vallecillos (1994). Sólo un 5,6% elige el distractor b), de

donde solo son ocho los alumnos del total de la muestra que usarían sus ideas previas, pensando que las personas introvertidas tienen menos autoestima que las extrovertidas sin tener en cuenta el enunciado del problema. Los distractores funcionan de manera eficiente, ya que existe un cierto equilibrio entre ellos (2,8% y 5,6%).

El ítem 4 al igual que el anterior ítem evalúa el conocimiento del planteamiento de las hipótesis nula y alternativa. Resultó bastante sencillo a los estudiantes (81,8% de respuestas correctas, ver tabla 3) que conocen bien el planteamiento de hipótesis estadísticas. En las pruebas piloto, hubo un 94,6% (n=93) en un ítem similar pero por la respuesta positiva, y 93,1% (n=130). Vallecillos (1994) encontró un 56% de respuestas correctas en un ítem similar (77,1% en Psicología). Es de destacar que el mayor porcentaje de respuestas correctas, lo obtiene la especialidad de Matemáticas, y que el segundo mayor porcentaje lo tienen los alumnos de la carrera de Psicología. Un 7% no considera las hipótesis como complementaria (Vallecillos, 1994) no incluye este distractor). Es destacable el equilibrio y bajo porcentaje entre los distractores (7% y 7,7%). Finalmente es muy bajo el porcentaje que no responde al ítem (3,5%).

El ítem 5 obtiene un 47,6% de aciertos (tabla 3). Las prueba piloto con ítems similares arrojó un 76,1% (n=93) y 38,5% (n=130) de respuestas correctas. Como vemos los porcentajes de aciertos para la respuesta correcta ha sido muy variado, de donde destacamos depende del tipo de redacción que le demos a esta unidad de medida.

Vallecillos (1994) obtiene 22,9% de respuestas correctas en un ítem similar (20% en Psicología), aunque ella da los distractores mediante símbolos; por ello puede ser más difícil que en nuestro caso, en que están dados en valor numérico. Un 19,6% (tabla 3) confunde la potencia con el error tipo II, lo que indica un fallo en la interpretación de resultados, ya que el distractor se refiere al error tipo II pero en el ítem se pregunta acerca de la potencia (el porcentaje de alumnos con este error fue el 6,2% en la investigación de Vallecillos (1994) en la muestra general y el 7,1% en los estudiantes de Psicología). Un 18,9% de nuestros estudiantes confunde probabilidad de error tipo II con su complemento; (mientras que los porcentajes fueron el 16,1% en Vallecillos (1994) en la muestra general y el 30% en los estudiantes de Psicología). Vallecillos (1994), alerta que esta confusión está bastante extendida, especialmente entre estudiantes de Psicología.

El ítem 6 evalúa primordialmente si el alumno es capaz de diferenciar entre los errores tipo 1 y tipo 2 al plantear un test de hipótesis. Se tiene un 62,9% (tabla 3) de respuestas correctas. En nuestras pruebas piloto encontramos un 65,2% (n=93), para un ítem similar.

Vallecillos (1994) obtiene 22,9% de respuestas correctas en un ítem con características análogas al nuestro (20% en Psicología), aunque en su investigación

para este tipo de ítem da los distractores mediante símbolos. Un 17,5% (18,5%(n=93), en las pruebas piloto) piensa que hay error cuando no existe, confunde la definición de Error Tipo II. Sólo un 4,9% (tabla 3) no interpretan enunciado, ya que el problema afirma que se conoce que ambos medicamentos han sido probados separadamente, resultando efectivos. Hay un alto porcentaje, 14,7%, de alumnos que no responden al ítem, lo que conlleva el desconocimiento sobre la diferencia entre hipótesis estadísticas e hipótesis de investigación; y entre Error Tipo I y Tipo II. Estos son los que dudan sobre el significado del Error Tipo II. Se observa un fuerte desequilibrio entre los distractores (4,9% y 17,5%).

El ítem 7 se evalúa la comprensión entre el nivel de significación y el valor crítico, la diferencia entre test unilateral y bilateral, y el concepto de puntuación crítica. El porcentaje de aciertos es del 62,2% (tabla 3). Hemos obtenido más aciertos que para nuestra primera prueba piloto 34,8% (n=93), podría deberse a un cambio en la redacción sugerido luego de la consulta a expertos. Asimismo, en nuestra otra prueba piloto con una muestra de tamaño n=130, hemos registrado un 90,8% de respuestas correctas, posiblemente se deba a que la pregunta es por un contraste unilateral izquierdo, y se asocie inmediatamente izquierdo con el valor negativo para el percentil.

Un 23,1% ha decidido escoger el distractor a), tomando el test unilateral izquierdo o lo que es lo mismo confunde hipótesis nula y alternativa o bien la región crítica y de aceptación en un contraste unilateral. Este bajo porcentaje de aciertos, lo significa como un ítem de difícil solución. Tauber (2001) en su investigación sobre la construcción de significados acerca de la distribución Normal, nos muestra un ítem similar, donde observa el conocimiento de la gráfica de la función de densidad. Un 4,9% elige el distractor c) ó sea, casi un 70% elige como respuesta un valor del mismo lado del contraste que se da en el enunciado.

Finalmente, el ítem 8 evalúa el conocimiento de las condiciones en las que se tomará la decisión de rechazar la hipótesis nula. Obtuvimos 63,6% de respuestas correctas (tabla 3); en nuestras pruebas pilotos los porcentajes de respuestas correctas han sido 59,8%(n=93) y 68,5%(n=130); lo que muestra que en las tres pruebas los porcentajes de aciertos se ha mantenido.

Vallecillos (1994) encuentra un 33,7% en un ítem relacionado con éste (42,9% en estudiantes de Psicología), pero donde se da el valor obtenido del estadístico y se pide cuál es la decisión (qué hipótesis se debe aceptar o rechazar) por lo cual el enunciado es más complejo. También en otro muy similar donde pregunta qué se concluye si el resultado en un contraste de hipótesis es significativo, los alumnos de psicología presentan un 30% de aciertos. En nuestra investigación, a pesar de ser correctas las dos respuestas a) y b) a la vez, sólo un 2,8% (2,2%(n=93), 3,1%(n=130) pruebas piloto) decide por el distractor b) y un 25,9% por el distractor a). Se registra desequilibrio entre los distractores. Podría deberse a que el

distractor b) pregunta acerca de una probabilidad, mientras que el a) se trata de una comparación de valores numéricos

Conclusiones

Podríamos pensar que la formación universitaria, tanto en ramas tecnológicas como de las ciencias sociales hace más énfasis en el aspecto de cálculo, olvidando a menudo la aplicación práctica de los conocimientos implicados así como la interpretación de los resultados.

Recordemos que los dos primeros ítems evalúan los conocimientos respecto al intervalo de confianza, el primero de ellos referido a la construcción y el segundo a la interpretación del objeto. Destacamos que los errores encontrados tanto para la construcción como para la interpretación en porcentajes han sido casi constantes tanto en las pruebas piloto, como en el cuestionario definitivo, también se asemejan a los denunciados por Olivo (2008). Se debe contemplar que la muestra de este autor está compuesta por estudiantes con mayor base matemática que los de nuestra muestra; más aún, nos acercamos a los resultados del segundo grupo de Behar (2001) de donde, comparando nuestros resultados con los de estos investigadores cabe señalar alguna satisfacción. En resumen, no es alto el porcentaje de alumnos que presentan dificultades para construir un intervalo de confianza, es decir comprenden el procedimiento, pero son muy pocos los que realmente comprenden su definición. Finalmente para completar esta conclusión tengamos en cuenta que más del 50% de nuestra muestra deja en blanco la respuesta para el ítem 2; esto indica que el estudiante no está seguro de la interpretación del intervalo, ya que si la respuesta es errónea se le descuentan puntos, y como duda decide no arriesgar.

La importancia del intervalo de confianza y las recientes sugerencias de la necesidad de su uso en la investigación recomiendan tener en cuenta estas conclusiones y tratar de cambiar el enfoque de la enseñanza.

En cuanto al contenido referido al objeto contraste de hipótesis se incluyen varios ítems, cada uno de los cuáles evalúa la comprensión de alguno de sus componentes, ó varios a la vez. De acuerdo con los resultados tanto del ítem 3 como del 4, pareciera que la gran mayoría de los alumnos asegurarían comprenderlos, ya muy pocos no los responden, es decir, prácticamente todos declaran el tipo de hipótesis más adecuado. Además, específicamente para el Ítem 4, los resultados caen fuera del intervalo de confianza para los ítems equivalentes del piloto. Por ello, también en este caso los estudiantes presentan un conocimiento algo menor que los de los cursos anteriores, (en los que pasamos los cuestionarios piloto) en relación al planteamiento de las hipótesis. Nuestros resultados son bastante similares a los conseguidos por Vallecillos (1994) en su muestra de estudiantes de Psicología. Para poder tener una conclusión más sólida al respecto,

sería prudente quizás realizar un estudio semiótico de algún ítem abierto de características similares.

Los Ítems 6, 7 y 8 presentan resultados análogos y coincidentes con la muestra de Psicología de Vallecillos (1994). Finalmente agregamos que ya Vallecillos (1996) sugirió que algunos estudiantes no comprenden la lógica del contraste de hipótesis, algo que se confirma con estos resultados. De donde, a la hora de hacer intervenciones se recomienda tener en cuenta estas conclusiones para así lograr superar este porcentaje en la comprensión de los alumnos.

Referencias bibliográficas

Artículos en revistas

- Batanero, C., Godino, J. D., Vallecillos, A., Green, D. R. y Holmes, P. (1994). Errors and difficulties in understanding statistical concepts. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, 25(4), 527-547.
- Batanero, C. (2000). Controversies around significance tests. *Journal of Mathematics Thinking and Learning*, 2(1-2), 75-98.
- Brewer, J. K. (1985). Behavioral statistics textbooks: Source of myths and misconceptions? *Journal of Educational Statistics*, 10, 252-268.
- Carpintero, H. (1989). Comentarios a la enseñanza de la estadística en psicología. El aprendizaje de la estadística. *Estadística Española*, 31, 122, 476-479.
- Cumming, G., Williams, J. y Fidler, F. (2004). Replication, and researchers' understanding of confidence intervals and standard error bars. *Understanding Statistics*, 3, 299-311
- Godino, J. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 22 (2 y 3), 237-284.
- Haller, H., & Krauss, S. (2002). Misinterpretations of significance: A problem students share with their teachers? *Methods of Psychological Research*, 7 (1), 1-20.

Libros

- Alvarado, H. (2007). *Significados institucionales y personales del teorema central del límite en la enseñanza de estadística en ingeniería*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.
- Batanero, C. (2001). *Didáctica de la estadística*. Granada: Grupo de Investigación en Educación Estadística.

- Behar, R. (2001). *Aportaciones para la mejora del proceso de enseñanza-aprendizaje de la estadística*. Tesis Doctoral. Universidad Politécnica de Cataluña. España.
- Chow, L. S. (1996). *Statistical significance: Rationale, validity and utility*. London: Sage.
- Díaz, C. (2007). *Viabilidad de la enseñanza de la inferencia bayesiana en el análisis de datos en psicología*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.
- Martínez Arias, R. (1995). *Psicometría: Teoría de los test psicológicos y educativos*. Madrid: Síntesis.
- Olivo, E. (2008). *Significados de los intervalos de confianza para los estudiantes de ingeniería en México*. Tesis Doctoral. Tesis Doctoral. Universidad de Granada. Granada, España.
- Santisteban, C. (1990). *Psicometría: Teoría y Técnicas de Construcción de Tests*. Madrid, España: Norma.
- Tauber, L. (2001). *Significado y comprensión de la distribución normal a partir de actividades de análisis de datos*. Tesis Doctoral. Universidad de Sevilla.
- Vallecillos, A (1994). *Estudio teórico experimental de errores y concepciones sobre el contraste de hipótesis en estudiantes universitarios*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.
- Vallecillos, A. (1996). *Inferencia estadística y enseñanza: un análisis didáctico del contraste de hipótesis*. Granada: Comares.
- Vera, O. (2008). Tesis de Master. *Dificultades de estudiantes universitarios en algunos conceptos de Diseño Experimental*. Universidad de Granada. España.

Artículos en Actas o Proceedings

- Batanero, C. y Díaz, C. (2005). Análisis del proceso de construcción de un cuestionario sobre probabilidad condicional. Reflexiones desde el marco de la TSFS. En A. Contreras, L. Ordóñez, & C. Batanero (Ed.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. I Congreso Internacional sobre Aplicaciones y Desarrollos de la Teoría de las Funciones Semióticas*, (págs. 15-39). Jaén. Universidad de Jaén.
- Fidler, F. y Cumming, G. (2005). Teaching confidence intervals: Problems and potential solutions. Proceedings of the 55th International Statistics Institute Session CD-ROM. Sidney, Australia: International Statistical Institute.

GRUPO:

DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS COMO DISCIPLINA CIENTÍFICA (DMDC)

Coordinadora: **Dolores Carrillo**, Universidad de Murcia

DESARROLLO DE TAREAS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS
MATEMÁTICAS Y LAS CIENCIAS DESDE UN ENFOQUE
INTERDISCIPLINAR: PROYECTO “COMPASS”.

García, F.J.; Abril, A.M.; Quesada, A.; Romero, M. y Ruiz, L.

APRENDIZAJE EN CIENCIAS Y MATEMÁTICAS BASADO
EN LA INVESTIGACIÓN, PARA LA FORMACIÓN DEL
PROFESORADO EUROPEO: PROYECTO “PRIMAS”.

García, F.J.; Abril, A.M.; Quesada, A.; Romero, M. y Ruiz, L.

COMPETENCIAS PROFESIONALES DE LOS FUTUROS
PROFESORES DE MATEMÁTICAS DE SECUNDARIA.

Font, V.; Rubio, N.; Giménez, J.; Aubanell, A.; Benseny, A.;
Gómez, J.; Vanegas, Y.; Larios, V. y Barajas, M.

ANÁLISIS DE CLASES Y DESARROLLO PROFESIONAL DEL
PROFESORADO.

Martínez, M.; Badillo, E.; Figueiras, L. y Font, V.

DESARROLLO DE TAREAS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS Y LAS CIENCIAS DESDE UN ENFOQUE INTERDISCIPLINAR: PROYECTO COMPASS

Fco. Javier García García, Ana M. Abril Gallego, Antonio Quesada Armenteros, Marta Romero Ariza, Luisa Ruiz Higuera
Universidad de Jaén

Resumen

El origen de este proyecto se sitúa en el descenso alarmante, en la sociedad actual, del interés de los jóvenes por la ciencia, hecho puesto en evidencia por el informe Rocard (2007), entre otros estudios. En dicho informe se recomienda, con objeto de mitigar este problema, la introducción en las escuelas de enfoques interdisciplinarios y basados en el “aprendizaje por investigación”, así como la formación del profesorado y el desarrollo de redes de profesionales para guiar y apoyar la implantación de estas metodologías. El principal propósito del proyecto Comenius COMPASS (Common Problem Solving Strategies as links between Mathematics and Science) es reposicionar la ciencia y las matemáticas como áreas de estudio significativas y relevantes para los estudiantes. Por ello el objetivo primordial del proyecto es elaborar y difundir materiales interdisciplinarios de ciencias y matemáticas, a través de ciclos de diseño, implementación y optimización.

Abstract

Throughout Europe there is an alarming decline in young people's interest in scientific disciplines, as it has been evidenced in the Rocard report (2007). This is the origin of this project. To mitigate this situation, the report suggests the necessity of introducing interdisciplinary and inquiry based learning approaches in school, as well as teacher professional development and networks that will support the use of associated methodologies. COMPASS (Common Problem Solving Strategies as links between Mathematics and Science) is a multilateral Comenius project aiming at re-positioning science and mathematics as an area of study that has meaning to students as active citizens. The project will elaborate and disseminate interdisciplinary materials in mathematics and science, through cycles of design, implementation and optimization.

García, F.J. et al. (2011). Desarrollo de tareas para la enseñanza de las matemáticas y las ciencias desde un enfoque interdisciplinar: proyecto compass. En M.M. Moreno, N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los Grupos de Investigación de la SEIEM* (pp. 311-319). Lleida.

Introducción

Según el informe Rocard (2007), que ratifica el diagnóstico de la situación detectado por la OCDE, el Eurobarómetro y el informe PISA, existe un descenso alarmante en el interés de los jóvenes por los estudios de ciencias y matemáticas, así como notables sesgos de género. Esto supone un peligro importante para el futuro de Europa, ya que pone en riesgo la formación científica de los futuros ciudadanos y la base para la construcción de la Europa del conocimiento. Los informes reflejan que la enseñanza de la ciencia y las matemáticas dista mucho de atraer multitudes y en muchos países la tendencia está empeorando significativamente.

Los orígenes de la situación descrita pueden encontrarse, entre otras causas, en el modo de enseñar la ciencia. Existen evidencias de que la aplicación de metodologías más centradas en el alumno y basadas en la formulación de problemas relevantes, tales como el aprendizaje por investigación o el aprendizaje basado en la resolución de problemas, permiten aumentar el interés por la ciencia y las matemáticas. Por otro lado, los planteamientos didácticos relacionados con la conexión entre diferentes disciplinas se han manifestado como opciones válidas para fomentar el interés por la ciencia; así pues, la interdisciplinariedad entendida como la integración de diferentes disciplinas a la hora de abordar un problema complejo (Nikitina, 2006), debería de tener un lugar a la hora de solucionar el problema de la falta de interés de los estudiantes por el conocimiento científico y matemático.

Sin embargo, en cualquier reforma educativa o renovación pedagógica de la educación científica, el profesorado juega un papel clave. En este sentido, consideramos que las redes de profesores constituyen un medio eficaz para proporcionar y recibir el apoyo necesario para afrontar los desafíos asociados al cambio. Estas redes facilitan la comunicación entre los docente inmersos en el proceso, los cuales comparten inquietudes y dificultades similares y suponen una vía para resolver problemas y orientar la mejora. Además, fomentan la motivación del profesorado implicado al incrementar el apoyo recibido por éste en el proceso de implementación de la innovación educativa. De hecho, ya existen experiencias similares en Europa, como por ejemplo los proyectos “Pollen” (proyecto europeo del VI programa Marco) y “Sinus-transfer” (Proyecto desarrollado en Alemania).

El proyecto que aquí se presenta persigue múltiples objetivos, algunos de los cuales, se exponen a continuación:

- Ayudar a mejorar la calidad, el atractivo y el acceso al aprendizaje a lo largo de toda la vida de contenidos científicos y matemáticos en los estudiantes.

- Promover el desarrollo de contenidos interdisciplinarios e innovadores relacionados con las ciencias y las matemáticas por parte del profesorado.
- Promover la mejora de las prácticas pedagógicas en el profesorado, ofreciéndoles materiales, guías y formación que les faciliten dicha mejora.
- Ayudar a los estudiantes a adquirir las competencias necesarias para su desarrollo personal y profesional a través de los materiales interdisciplinarios y de las nuevas pedagogías centradas en el alumnado.
- Mejorar la motivación hacia el aprendizaje integrado y desarrollar la competencia de aprender a aprender.
- Elaborar un conjunto de aproximaciones innovadoras para la enseñanza y el aprendizaje de temas transversales y competencias básicas.

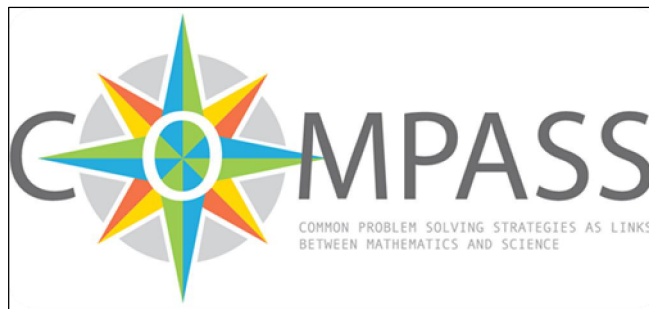


Figura 1. Logotipo del proyecto COMPASS

El proyecto COMPASS, a lo largo de sus dos años de duración, pretende desarrollar situaciones de enseñanza que conecten las ciencias y las matemáticas entre sí, y éstas a su vez, con la vida de los estudiantes, sus intereses y necesidades. Este proyecto busca fomentar en los jóvenes el deseo de aprender ciencias y matemáticas a lo largo de su vida, de manera que reconozcan su valor para aportar conocimientos y habilidades útiles en la resolución de problemas cotidianos. Este enfoque permitirá trabajar las competencias básicas y la equidad entre los estudiantes de los países que participan en el proyecto; para ello será esencial el desarrollo de un programa de enseñanza que incluya aproximaciones interdisciplinarias e integre el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.

Metodología

El proyecto que presentamos lo lidera un grupo de investigadores e investigadoras que forman parte de universidades europeas de seis países

diferentes: Universidad Pedagógica de Friburgo (Alemania), Instituto Freudenthal - Universidad de Utrech (Holanda), Universidad Tecnológica de Chipre, Universidad de Jaén (España), Unidad de Manchester (Reino Unido) y la Universidad “Constantino el Filósofo” de Nitra (Eslovaquia).

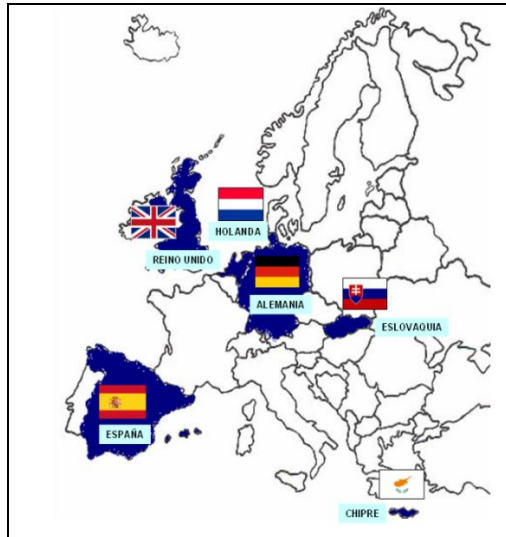


Figura 2. Países que forman parte del proyecto europeo COMPASS

El desarrollo de los objetivos mencionados implica fomentar en los estudiantes tanto el enfoque crítico, como la aplicabilidad de las ciencias y las matemáticas; para ello se ofrecerá el apoyo necesario para explorar y entender problemas científicos de relevancia actual tales como los asociados a cuestiones ecológicas o a diferentes usos de los medicamentos, por ejemplo. El enfoque pedagógico fomentará el desarrollo de competencias y la metacognición lo que asegurará a los individuos herramientas imprescindibles para ser ciudadanos críticos y aprender durante toda la vida.

El proyecto reposiciona la ciencia, de modo que deja de ser una disciplina abstracta y osificada, para convertirse en un área de conocimiento relevante para la vida de los estudiantes como ciudadanos activos y comprometidos. Por lo tanto, las pedagogías adoptadas pretenden ayudar a los estudiantes a comprender el dinamismo de la ciencia, su contribución en la sociedad y su desarrollo a lo largo del tiempo, así como potenciar la adquisición de competencias clave, que promuevan el aprendizaje a lo largo de la vida y la formación de ciudadanos críticos en general y en la indagación científica en particular

Se diseñarán, difundirán e implementarán materiales interdisciplinares para aprender a través de la indagación y la resolución de problemas, mostrando al alumnado la importancia de ser ciudadanos europeos en la sociedad actual. Además, les ayudarán a reconocer la relevancia del conocimiento y las competencias científicas. Para conseguirlo, en el proyecto se trabajará con el profesorado en ejercicio desde el inicio del mismo, desarrollando guías y materiales de clase, poniendo en práctica en las aulas y mejorando los materiales en la medida de lo posible a través de sucesivos ciclos de *diseño* *implementación* *evaluación*. La implicación del resto de la comunidad educativa (otros profesores, padres, estudiantes, etc.) será fundamental para el éxito del proyecto.



Figura 3. Resumen de la metodología a desarrollar en el proyecto COMPASS

Otro aspecto fundamental del proyecto es la equidad: a través del proyecto COMPASS, sus pedagogías y materiales, se conectará la ciencia con la sociedad, y el papel que ésta tiene en la vida de todas las personas. Se desarrollarán competencias relacionadas con la equidad y con la idea de que todas las personas pueden tener acceso a los beneficios que los conocimientos científicos nos ofrecen, no generándose así diferencias entre comunidades. Se facilitará a todos los grupos el acceso a la formación científica y el reconocimiento del valor y la utilidad de los actuales avances científico-tecnológicos. Respecto a la perspectiva de género, es evidente en toda la sociedad europea que las mujeres acceden en menor proporción a los estudios de ciencia y tecnología, lo que se refleja también en los puestos profesionales relacionados con ocupaciones científico-tecnológicas. A través de este trabajo se pretende reforzar la confianza de las mujeres en su capacidad para adquirir competencias científicas y desarrollar labores profesionales relacionadas con ellas, tomando conciencia de la importancia de sus aportaciones en el ámbito científico.

El proyecto se abordará a través de distintos grupos de trabajo, cada uno de los cuales será el encargado de alcanzar algunos de los objetivos anteriormente mencionados, según la distribución de tareas previamente acordada. De esta forma,

se han constituido seis grupos de trabajo y cada grupo será responsable de una de las siguientes tareas: gestión del proyecto, generación de materiales interdisciplinarios y guías, diseño de materiales que integren las tecnologías de la comunicación y la información (applets, hojas de cálculo, software de geometría dinámica,...), diseminación, explotación y evaluación.

El grupo español de la Universidad de Jaén coordina, dentro del proyecto COMPASS, la explotación de los materiales elaborados y la implementación de las metodologías adecuadas para hacer un uso apropiado de dichos materiales. Para garantizar el éxito del proyecto, éstos no solamente tienen que ser accesibles al profesorado, sino que es necesario acompañar y guiar a los docentes en el uso de los materiales y las pedagogías asociadas, de modo que se consiga el resultado esperado. Para ello, a través de las redes nacionales de profesorado en ejercicio (Centros de Profesores), se pretende conectar con todos los profesores en activo interesados por la mejora de su actividad docente en el ámbito de la enseñanza de las ciencias y de las matemáticas. Se organizarán mesas redondas, encuentros, acceso a plataformas virtuales, se generarán comunidades de trabajo, reuniones, etc. de manera que se facilite el desarrollo profesional y su mantenimiento en el tiempo. Antes de proceder a la fase de explotación de recursos didácticos y metodologías, el grupo de trabajo español ha de elaborar un informe donde se realice un análisis de las posibles carencias o necesidades que cada país tiene, con respecto a la integración de tareas interdisciplinarias en el aula y de las pedagogías asociadas, basado en los informes recibidos desde cada país. Este análisis se llevará a cabo utilizando como marco teórico la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard, 1992, 1999; Bosch y Gascón, 2006). En particular, usaremos como herramienta analítica, para identificar las restricciones que operan sobre el sistema didáctico en relación con la interdisciplinariedad, los niveles de codeterminación didáctica.

Situación actual del proyecto

El proyecto COMPASS comenzó en noviembre de 2009 con una primera reunión en Friburgo (Alemania) donde se concretaron los equipos de trabajo nacionales y las diferentes tareas a realizar por los mismos. La segunda reunión, celebrada en mayo de 2010 en Utrecht, sirvió para discutir sobre el análisis de necesidades, perfilar una primera colección de tareas interdisciplinarias, organizar los procesos de revisión por pares y por expertos y esbozar los talleres de formación del profesorado que tendrán lugar en otoño de 2010.

Con respecto al grupo de trabajo español, en la actualidad se ha elaborado el informe del análisis de las necesidades sobre la *ecología*¹ de la interdisciplinariedad en los seis países participantes.

Para elaborar este informe hemos usado como marco teórico los niveles de codeterminación didáctica de la Teoría Antropológica de lo Didáctico. Gracias a esta herramienta, hemos podido identificar los factores que favorecen y los que dificultan la introducción de tareas interdisciplinarias en los sistemas de enseñanza, así como los ámbitos de los que estos provienen.

Aunque la situación difiere significativamente de un país a otro, hemos identificado una fuerte ruptura entre los niveles superiores de codeterminación, y en especial los niveles por encima del disciplinar, y los niveles inferiores. De esta forma, mientras que desde la *sociedad* se reconoce la necesidad de traspasar las fronteras disciplinares para crear ciudadanos críticos y competentes (de acuerdo con el marco europeo de las competencias básicas), que se refleja en los currículos de cada país de formas diferentes (por ejemplo, en el español a través de la necesaria contribución de todas las áreas al desarrollo de las ocho competencias básicas, o en el inglés mediante el acento en el desarrollo de *procesos*), el terreno disciplinar sigue fuertemente atomizado, no solo entre disciplinas, sino también en el ámbito intradisciplinar, como se pone de manifiesto en el carácter fuertemente aislado de los diferentes sectores en los que se dividen las matemáticas y las ciencias escolares.

Una característica importante del análisis que hemos realizado es la despersonalización de la problemática de la interdisciplinariedad respecto del profesorado. No significa esto que el profesorado no tenga un papel fundamental en la ausencia de enfoques interdisciplinarios sino que no es el principal y último responsable de que esta situación se mantenga (en contra de otros posicionamientos, como los basados en el análisis de las creencias y de las

¹ La *ecología didáctica* de los contenidos y las prácticas escolares está condicionada por restricciones y limitaciones que provienen de numerosos ámbitos. En un intento por categorizar dichos ámbitos, Chevallard (2002) introdujo los niveles de codeterminación didáctica: Civilización – Sociedad – Escuela – Pedagogía – Disciplina – Dominio – Sector – Tema – Cuestión. En nuestro caso, el término disciplina se refiere tanto a las *matemáticas escolares* como a las *ciencias escolares*. Los niveles inferiores a la disciplina (Dominio – Sector – Tema – Cuestión) recogen las restricciones que provienen de la forma en que una disciplina (o un conjunto de ellas, como es el caso de la *ciencias de la naturaleza*) se estructuran en el sistema escolar con el fin de poder ser enseñadas. Por su parte, los niveles superiores (Civilización – Sociedad – Sociedad – Escuela – Pedagogía) recogen las restricciones externas a la estructuración escolar de las disciplinas, pero que condicionan fuertemente cómo las éstas se *transponen* en la escuela para convertirse en objeto de estudio.

actitudes del profesorado, que descargan gran parte de los problemas del sistema de enseñanza de las matemáticas y de las ciencias en los hombros del profesorado).

Al contrario, asumimos que la situación es un *problema de la profesión*, en el sentido de que es la *profesión* la que se ve afectada por una situación que, en gran medida, no depende de sus atribuciones profesionales ni del voluntarismo de sus integrantes, pero que también es la profesión la que, dentro de su ámbito de actuación, puede empezar a modificarla. Esto es especialmente significativo en una situación como la analizada, en la que la posición de los niveles superiores hacia la interdisciplinariedad es clara y decidida.

En relación con los materiales, se han diseñado ya ocho tareas para el nivel de la educación secundaria que integran contenidos de matemáticas y ciencias. La integración es tanto a nivel intradisciplinar (conectando contenidos que, al pertenecer a sectores y áreas diferentes rara vez se ponen en funcionamiento de forma conjunta) como a nivel interdisciplinar. Por ejemplo, la tarea desarrollada por el equipo español ("*Contaminación: comprar un coche con un árbol de serie*") articula contenidos tradicionalmente vinculados a la aritmética, a la geometría, a las funciones y a la estadística, con otros provenientes de la ecología, la química orgánica, la botánica o la fisiología y fisionomía vegetal. A lo largo de la actividad y del proceso de estudio que vivirán los alumnos, la activación de estos saberes tiene un carácter de necesidad, y no de arbitrariedad.

En el diseño de las tareas interdisciplinares se ha partido de problemas complejos y significativos para los alumnos, asumiendo en cierta forma el paradigma de la complejidad de Edgar Morin según el cual la interdisciplinariedad sólo es posible cuándo se abordan los problemas reales en toda su complejidad, y no en las versiones más o menos simplificadas que suelen aparecer en las instituciones escolares, fruto de un proceso histórico de institucionalización, evolución y dispersión de las disciplinas científicas que tuvo su origen en el siglo XIX y que culminó en el siglo XX.

Conclusiones

El proyecto Comenius COMPASS permitirá el desarrollo de metodologías y de materiales para la enseñanza de las matemáticas y las ciencias desde una perspectiva interdisciplinar. De esta forma, COMPASS pretende respaldar a la profesión docente en una de sus demandas más recurrentes: la ausencia de materiales adecuados que permitan desarrollar las directrices que emanan de los documentos curriculares y, más allá, las exigencias que la sociedad impone a la escuela.

Además, en cada país COMPASS organizará dos talleres de desarrollo profesional del profesorado, cuyo objetivo es, por un lado, optimizar los materiales

con el apoyo de los profesores que asistan y que posteriormente los experimenten en el aula y, por otro lado, favorecer la reflexión conjunta en torno a las posibilidades que el uso de tareas interdisciplinarias abre para dotar de sentido a las matemáticas y las ciencias escolares.

Finalmente, se editará una revista con los materiales, incluyendo documentos de apoyo y orientaciones metodológicas, que será distribuída gratuitamente a los centros escolares y que también será accesible sin cargo alguno desde la página Web del proyecto (<http://www.compass-project.eu>).

Referencias bibliográficas

- Bosch, M., Gascón, J. (2006). Twenty-five years of the didactic transpositions, *ICMI Bulletin*, 58, 51-63.
- Chevallard, Y. (1992) Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives aportes par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12 (1) 73-112.
- Chevallard, Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19 (2) 221-266.
- Nikitina, S., (2006). Three strategies for interdisciplinary teaching: contextualizing, conceptualizing and problem-centring. *Journal of Curriculum Studies*, 38 (3), 251-271.
- Rocard, M. (2007). Science Education Now: A Renewed Pedagogy for the Future of Europe. Último acceso el 18 de febrero de 2010, desde http://ec.europa.eu/research/science-society/document_library/pdf_06/report-rocard-on-science-education_en.pdf

APRENDIZAJE EN CIENCIAS Y MATEMÁTICAS BASADO EN LA INVESTIGACIÓN, PARA LA FORMACIÓN DEL PROFESORADO EUROPEO: PROYECTO PRIMAS

**Fco. Javier García García, Ana M. Abril Gallego, Antonio Quesada
Armenteros, Marta Romero Ariza, Luisa Ruiz Higueiras**
Universidad de Jaén

Resumen

Diversos estudios han puesto en evidencia la falta de interés de los jóvenes europeos por las matemáticas y las ciencias. Entre otros factores, estos estudios apuntan a un cambio necesario en la forma en que las matemáticas y las ciencias se enseñan en la escuela. Una de las aproximaciones pedagógicas que en la actualidad han demostrado su efectividad es el aprendizaje y la enseñanza basados en la investigación (IBL, *inquiry based learning*). Aunque en algunos países europeos el uso de estas pedagogías se está implantando en las escuelas, en general se trata de situaciones locales y de efectividad limitada, pero en ningún caso de acciones generalizables a nivel nacional. Con el proyecto PRIMAS (*Promoting inquiry in Mathematics and Science education across Europe*) se pretende hacer efectivo un cambio en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y las ciencias en Europa, proporcionando al profesorado la formación y el apoyo necesarios para implantar el aprendizaje basado en la investigación, de manera que el alumnado, en primer lugar desarrolle competencias del ámbito científico y, en segundo lugar, afronte de manera más positiva los estudios superiores de ciencias y matemáticas así como su posible inserción laboral en estos campos. PRIMAS está financiado por la Unión Europea dentro del 7º Programa Marco.

Abstract

The lack of interest in mathematics and science in European young students has been demonstrated by several studies and reports. These studies point at a change in the way mathematics and science are taught at school, among other factors. An efficient didactical approach is that based on learning through inquiry (IBL, *inquiry based learning*). Although these pedagogies already exist in some schools, broadly speaking we can refer only to local initiatives, with a very limited impact and difficult to scale up to a national level. PRIMAS project (*Promoting inquiry in Mathematics and Science education across Europe*) aims at provoking an effective change in the way mathematics and science are taught at school in Europe, through teacher professional development and other supporting actions for the effective implementation of IBL methodologies. As a result, it is expected a growing interest of young people in further studies in mathematics and science as well as a global rise of its scientific competencies. PRIMAS is a European Union funded Project under the 7th Framework Programme.

García, F.J. et al. (2011). Aprendizaje en ciencias y matemáticas basado en la investigación, para la formación del profesorado europeo: proyecto PRIMAS. En M.M. Moreno, N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los Grupos de Investigación de la SEIEM* (pp. 321-319). Lleida.

Introducción

Estudios recientes muestran que aunque los jóvenes entienden las ciencias como algo importante, más de la mitad de los encuestados no seguirían estudios relacionados con ellas (Biología, Medicina, Ingeniería, Matemáticas, etc.). Por otro lado, diversas investigaciones indican que, en muchos casos, el descenso del interés por los temas de ciencias se ha relacionado con la forma de enseñar ciencias en edades tempranas (Gago, 2004; Vázquez y Massanero, 2008). A menos que se tomen medidas al respecto, esta situación podría tener repercusiones negativas en el futuro de la investigación e innovación en ciencias, así como en la capacidad de los futuros ciudadanos para participar en la actual sociedad del conocimiento de manera crítica y responsable, siendo sus efectos irreparables (Rocard, 2007).

Tradicionalmente las pedagogías centradas en la transmisión han favorecido en los estudiantes actitudes de desidia, de recepción pasiva o de reproducción de la información, mientras que las actitudes de interés y participación activa se han visto desfavorecidas. Es por ello que se debe de hacer énfasis en la implantación de pedagogías efectivas para el desarrollo de competencias básicas así como de técnicas que estimulen la motivación intrínseca del alumnado por aprender ciencias y matemáticas, es decir, favorecer una educación científica y matemática de calidad.

¿Qué entendemos por educación científica y matemática de calidad?

El grupo de trabajo que avala el proyecto de investigación PRIMAS entiende por educación científica y matemática de calidad aquella que favorezca en los estudiantes, entre otros aspectos:

1. la estimulación de la motivación intrínseca y genere interés por aprender ciencias y matemáticas;
2. el desarrollo de conocimiento básico;
3. el uso de tareas relacionadas con su vida cotidiana y de ámbito interdisciplinar;
4. el aprendizaje a partir de sus errores;
5. el desarrollo autónomo y acumulativo del aprendizaje;
6. la cooperación entre estudiantes;
7. y la reducción de los estereotipos de género.

Para el adecuado desarrollo de los puntos anteriormente mencionados se debe de incidir en el desarrollo profesional del profesorado; dicho desarrollo profesional se debería de centrar, principalmente, en los siguientes aspectos:

1. usar tareas que estimulen al profesorado, que sean relevantes para ellos y les ofrezcan oportunidades para poder colaborar con los compañeros;
2. aprender a seleccionar tareas que les permitan fomentar en el estudiante el conocimiento básico, el aprender a aprender y el desarrollo de competencias relacionadas con la investigación, la organización o la interpretación de la información más que de su memorización;
3. ayudar al profesorado a diseñar y seleccionar tareas desestructuradas que sean accesibles, extrapolables, interdisciplinarias y que fomenten la toma de decisiones así como la creatividad y el cuestionamiento a mayor escala;
4. permitir el conocimiento de las ideas previas de los estudiantes así como desarrollar y aplicar estrategias para superarlas;
5. formar al profesorado para realizar el seguimiento de la construcción de conocimiento significativo en los estudiantes y dirigir el aprendizaje autónomo de los mismos;
6. ayudar al profesorado a orientar y liderar debates y discusiones en el aula
7. y facilitar materiales que desarrollen actitudes positivas hacia la ciencia en las chicas, utilizando contextos relevantes para ellas para reducir así las diferencias entre géneros.

El aprendizaje basado en la investigación (IBL) abarca pedagogías que aseguran las acciones relacionadas anteriormente, por lo que nuestra intención es hacer que éstas se articulen como base de un efectivo desarrollo profesional del profesorado.

¿Qué entendemos por desarrollo profesional efectivo?

Cuando hablamos de desarrollo profesional nos referimos a la adquisición de competencias relacionadas con la práctica profesional y que capacitan al profesorado a actuar como expertos. Esta adquisición de competencias comienza con su formación inicial y debería de continuar a lo largo de toda su vida.

Con respecto al conocimiento del profesorado en la bibliografía especializada se distingue entre las creencias del profesorado, las competencias relacionadas con la autorregulación y la motivación o interés del profesorado. En general, las experiencias más exitosas en cuanto a su desarrollo profesional son aquellas que ofrecen al profesorado la oportunidad de dudar, reflexionar y reconstruir sus ideas.

En el proyecto PRIMAS se pretende ofrecerle al profesorado oportunidades para explorar diferentes comportamientos en el aula de manera que estas situaciones les permitan reflexionar y modificar sus creencias y su praxis docente. Con este propósito nuestra propuesta se articula en diferentes ciclos sucesivos de planificación – implementación – reflexión (modelo en espiral; figura 1) para lo cual llevaremos a cabo las siguientes acciones:

1. entender claramente el contexto en el que el profesorado trabaja,
2. analizar las aproximaciones IBL de manera colaborativa,
3. implementar las aproximaciones IBL en clase,
4. y reflexionar sobre los resultados obtenidos durante la implementación.

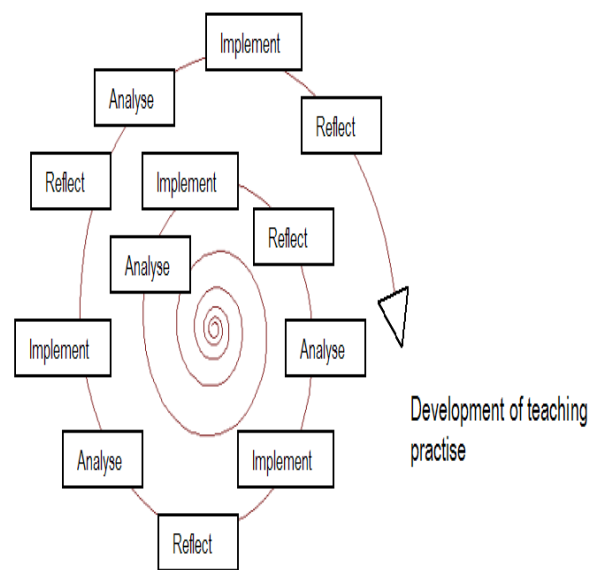


Figura 1. Modelo en espiral del desarrollo profesional que se utilizará en el proyecto PRIMAS

Por todo lo anteriormente expuesto, el proyecto PRIMAS, para conseguir informar y dar soporte al profesorado en ejercicio de Educación Primaria y Educación Secundaria en diferentes países europeos sobre pedagogías basadas en el IBL en Ciencias y Matemáticas, se plantea los siguientes objetivos:

1. Promover el desarrollo profesional del profesorado llevando a cabo intervenciones efectivas basadas en el IBL, que se adaptarán a las

necesidades locales y para cuya implementación se emplearán redes y materiales ya existentes maximizando así el impacto del proyecto.

2. Promover aproximaciones interdisciplinarias entre el profesorado de Ciencias y Matemáticas, comunidades que tradicionalmente trabajan por separado en la mayoría de los países europeos.
3. Impulsar la creación de redes de profesorado que faciliten la colaboración.
4. Seleccionar tareas y materiales basados en IBL con eficacia probada y que contribuyan a la adquisición de conocimiento básico los cuales se usarán en las intervenciones para el desarrollo profesional del profesorado así como para acciones relacionadas con la diseminación del IBL.
5. Contribuir a la reducción de las diferencias de género, seleccionando tareas apropiadas para chicas y chicos prestando especial atención a técnicas de enseñanza apropiadas para ambos.
6. Construir un nexo de unión entre la comunidad de investigadores en educación científica, el profesorado de ciencias y la administración local.
7. Asegurar la diseminación entre el profesorado, las autoridades escolares y otros grupos fuera del aula.

Metodología

Analizando brevemente los objetivos planteados en el apartado anterior, se hace necesario una fase de diseminación en múltiples niveles y con diferentes grupos objetivo, de manera que el impacto del proyecto PRIMAS esté asegurado. Estos niveles o grupos serán:

- los formadores del profesorado en ejercicio,
- el profesorado en ejercicio,
- el profesorado en formación,
- los grupos fuera del aula
- y el ámbito político

El proyecto PRIMAS lo lidera un grupo de investigadores e investigadoras que forman parte de 14 universidades europeas de 12 países diferentes. Para llevar a cabo los objetivos que el proyecto se plantea se han diseñado grupos de trabajo (WP, *work packages*), que, aunque cada uno de ellos es liderado por una determinada Universidad, la universidad responsable de cada grupo de trabajo recoge a su vez las aportaciones del resto de los Centros participantes relacionadas

con dicho paquete de trabajo. A continuación se recoge el reparto de tareas por grupos de trabajo:

WP1.- Entre sus objetivos destacan asegurar la calidad del trabajo, la administración del proyecto, facilitar la relación entre los miembros del proyecto y mantener el contacto con la Unión Europea.

WP2.- Tiene como objetivo principal el análisis de los contextos nacionales para la puesta en práctica del proyecto (análisis de necesidades)

WP3.- Este grupo de trabajo se centrará en la recopilación de materiales basados en IBL en Ciencias, Matemáticas e interdisciplinarios para el profesorado y los formadores. El objetivo es identificar y recopilar, en los países participantes, materiales de alta calidad, que hayan mostrado su eficacia y su eficiencia. Como producto final, se elaborará una colección de los mismos, orientados como recursos para el desarrollo profesional del profesorado, que será accesible libremente a través de un servidor centralizado Scientix de la UE.

WP4.- El objetivo fundamental será el diseño, la diseminación y la explotación de un modelo efectivo de desarrollo profesional centrado en el IBL (ver más adelante).

WP5 y WP6.- Estos grupos de trabajo se centrarán en el diseño e implementación de actividades destinadas a la difusión nacional e internacional del proyecto, a los diferentes “grupos objetivo” identificados, así como de sus resultados a todos los niveles. Con este propósito se diseñará una guía internacional que incluirá claves para llevar a cabo las acciones de difusión.

WP7.- Tras un análisis exhaustivo del panorama político nacional de los diferentes países que forman parte del proyecto, este grupo de trabajo deberá de elaborar un proyecto de diseminación a este nivel. Para llevar a cabo este trabajo se deberá de estar en permanente contacto con los Paneles nacionales e internacionales así como con el Comité de expertos¹ que forman parte también del proyecto.

WP8 y WP9.- Ambos paquetes de trabajo están relacionados con la evaluación del nivel de impacto que el proyecto va consiguiendo a lo largo del mismo; esta evaluación será tanto interna como externa.

¹ Uno de los aspectos principales del proyecto es la presencia de Paneles Nacionales e Internacionales como asesores externos del trabajo. El *Panel Nacional* lo constituye un grupo de personas de diferentes ámbitos profesionales (Educación Secundaria, Universidad, Administración, Asociaciones de investigadores, etc.) en cada uno de los países que participan en el proyecto. El *Panel Internacional* está formado por un representante de cada uno de los Paneles Nacionales. El *Comité de Expertos* lo integran seis miembros de gran influencia científica y profesional en el ámbito de la Didáctica de las Ciencias Experimentales y Didáctica de las Matemáticas a nivel mundial.

Universidad Pedagógica de Friburgo	Alemania	WP1
Universidad de Ginebra	Suiza	WP2
Instituto Freudenthal, Universidad de Utrech	Holanda	WP3
MARS - Shell Centre, Universidad de Nottingham	Reino Unido	WP3
Universidad de Jaén	España	WP4
Universidad ĽConstantino el filósofo de Nitra	Eslovaquia	WP5
Universidad de Szeged	Hungría	
Universidad Tecnológica de Chipre	Chipre	WP6
Universidad de Malta	Malta	
Universidad Roskilde	Dinamarca	
Universidad de Manchester	Reino Unido	WP7
Universidad Babeş-Bolyai, Cluj Napoca	Rumania	
Sør-Trøndelag University College	Noruega	
Instituto Leibniz de Ciencias de la Educación, U. de Kiel	Alemania	WP8 y WP9

Tabla 1. Datos de las Universidades y países que participan en el proyecto PRIMAS. La última columna indica el grupo de trabajo que lidera la Universidad correspondiente.

WP4: Diseminación a través y para la formación del profesorado.

El grupo de trabajo liderado por la Universidad de Jaén es el responsable del diseño, implantación y explotación de un modelo para el desarrollo profesional del profesorado a gran escala. La principal aportación que PRIMAS tendrá desde este WP es diseñar un modelo de formación continua, para lo cual se necesita un plan de desarrollo profesional robusto y bien construido, así como una modelo para su implementación a gran escala.

En la figura 2 se muestra un esquema general que da idea de la complejidad del objetivo que nos planteamos en este grupo de trabajo.

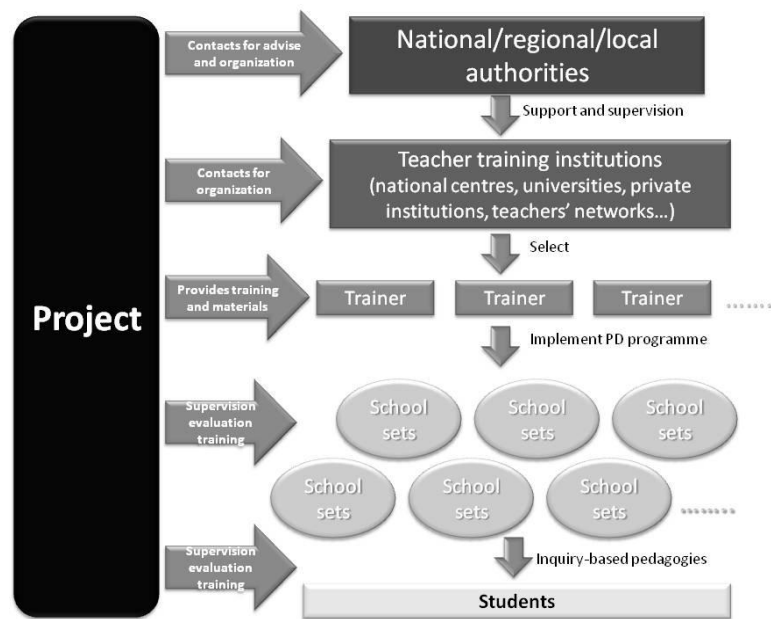


Figura 2. Modelo piramidal para la difusión de un programa de desarrollo profesional

Para que el desarrollo profesional sea efectivo, éste debe de estar soportado y revisado por las autoridades nacionales. Las instituciones de formación de profesores (centros nacionales, Universidades, instituciones privadas, etc.) deberán de promover la difusión del proyecto hacia el profesorado en ejercicio los cuales deberán de implementarlo en diferentes escuelas haciéndose así realidad la implementación del IBL en las aulas. De esta forma se garantizará que al final se llegue al alumnado y se produzca un impacto significativo y a gran escala sobre el aprendizaje y la motivación de los estudiantes hacia las ciencias y las matemáticas. A lo largo de todo el proyecto, el grupo de trabajo WP4 (así como cada socio del proyecto en su correspondiente país) deberá de entrar en contacto con cada uno de los niveles, estableciendo vínculos para asesorar a las autoridades, entablando relación con las organizaciones de formación del profesorado o supervisando y evaluando la formación de los docentes, así como la implementación de las innovaciones en las aulas.

Una vez planteado el sistema general de actuación, se debe de diseñar, implementar y mantener un modelo de desarrollo. El diseño se basará en programas que existen en otros países y que han demostrado su eficacia, será lo

suficientemente flexible como para adaptarlo a las necesidades locales y seguirá el modelo en espiral presentado en la figura 1. Basándonos en algunas iniciativas como Pollen² o Sinus Transfer³ así como en los trabajos de Kennedy (2005), Loucks-Horsley (2003), Fishman et al. (2003) y Clark et al. (2002).

En la primera conferencia del proyecto PRIMAS (Friburgo, febrero 2010) ya hemos avanzado en la delimitación de una posible estructura de este programa de desarrollo profesional. Basado en la literatura sobre desarrollo profesional antes mencionada, así como en el marco teórico de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard, 1992, 1999; Bosch y Gascón, 2006) y en las “comunidades de prácticas” (Wenger, 1998), consideramos que nuestra propuesta de desarrollo profesional debe estar fundamentada en el trabajo en grupo del profesorado (grupos en cada centro o grupos formados por profesores de centros cercanos), guiado por expertos (los formadores más el equipo PRIMAS en cada país) y apoyado por la administración educativa. Será dentro de estos grupos, concebidos como *comunidades de prácticas*, donde se identifiquen necesidades y dificultades en torno a la implementación de metodologías basadas en la investigación, y desde donde se busquen posibles repuestas $R^\heartsuit$ a las mismas, teniendo en cuenta respuestas ya construidas $R^\diamond$, identificadas por los propios profesores en diferentes *medias*⁴ o facilitadas por el proyecto a través de su banco de materiales y de algunas sesiones de formación. Desde esta perspectiva, es de esperar un desarrollo asimétrico de cada comunidad de prácticas, en la medida de sus necesidades, de sus dificultades y de las respuestas que construyan. Las TIC nos ofrecen la posibilidad de interconectar diferentes comunidades de prácticas (dentro de un mismo país, pero también entre diferentes países). Así, el trabajo de cada *comunidad de prácticas* puede constituir una *media* para otra *comunidad*, en la búsqueda de respuestas para las necesidades y dificultades que estén afrontando⁵.

² Último acceso el 18 de febrero de 2010, desde <http://www.pollen-europa.net/>

³ Último acceso el 18 de febrero de 2010, desde <http://sinus-transfer.uni-bayreuth.de/home.html>

⁴ En el marco de la TAD, el término *media* se interpreta en el sentido de los “medios de comunicación” (“mass media”, en inglés). Incluyen todo tipo de recursos a los que una comunidad de estudio puede recurrir para localizar elementos de respuesta a la cuestión o cuestiones que estén abordando (en nuestro caso, a cuestiones ligadas con la implementación de metodologías basadas en la investigación en clases de ciencias y matemáticas).

⁵ Experiencias previas, como la desarrollada por el equipo inglés dentro del proyecto Comenius LEMA, han demostrado ya su eficacia. Por ejemplo, algunos profesores participantes en el curso LEMA en Manchester, y que con posterioridad implementaron metodologías basadas en la modelización en sus clases, participaron en una “estudio de casos” en el que ellos mismos informaban sobre su experiencia a través de una página web. Cada “caso” estaba a disposición de los demás participantes, como un recurso (*media*) para su desarrollo profesional.

El siguiente paso en nuestro grupo de trabajo será el análisis en mayor profundidad de proyectos de formación continua que están siendo desarrollados con éxito en la actualidad en otros países, con el fin de refinar el modelo general anteriormente planteado para así poder elaborar una guía que recoja en detalle el modelo de desarrollo profesional a implementar a nivel europeo. Una vez que esta guía europea está elaborada, se procederá a adaptarla de manera local en cada uno de los países que participan en el proyecto PRIMAS.

Con respecto a la implementación del modelo, se llevará a cabo a través del modelo piramidal y con exhaustivo seguimiento a nivel nacional e internacional.

Conclusiones

En el momento actual en el que, la construcción de la Europa del conocimiento se está abordando como una de la principales estrategias políticas para el fomento del desarrollo social y económico, se hace más urgente que nunca garantizar la calidad de la formación recibida por los ciudadanos, como catalizadora del progreso y la prosperidad. Si a este contexto político le añadimos los resultados de los informes técnicos, que ponen de manifiesto el bajo interés de los estudiantes por las ciencias y las matemáticas y su desmotivación por emprender ocupaciones profesionales relacionadas con ellas, se hace necesaria la búsqueda de nuevas formas de motivar a los individuos hacia el aprendizaje de las ciencias y las matemáticas y mejorar su educación en estos ámbitos de conocimiento. Las ciencias y las matemáticas no sólo constituyen uno de los pilares básicos en la formación de los individuos, sino que además, son áreas de conocimiento claves para garantizar la base del futuro desarrollo científico y tecnológico de una sociedad.

Bajo el anterior análisis de contexto, un proyecto europeo enfocado a fomentar la implementación de nuevas formas, más eficaces y motivadoras, de enseñar ciencia y matemáticas, cobra especial relevancia. La literatura especializada y los resultados de la investigación educativa aportan evidencias del valor del aprendizaje por investigación (*Inquiry Based Learning*, IBL).

En este sentido, el proyecto PRIMAS ha diseñado un complejo entramado encaminado a garantizar en la medida de lo posible, el éxito en la difusión e implementación de pedagogías basadas en el aprendizaje de la ciencia y las matemáticas a través de la investigación (IBL). Para ello, ha involucrado a doce países europeos distintos, que incluyen catorce grupos de trabajo perfectamente armonizados para abordar de forma colaborativa distintas tareas, diseñadas para asegurar que se alcanzan los objetivos previstos. Entre estas tareas cabe destacar, el análisis previo de los distintos contextos nacionales para poner de manifiesto fortalezas y debilidades y aprovechar en la medida de lo posible las redes y recursos existentes, la búsqueda y selección de materiales didácticos y experiencias

previas sobre IBL de demostrada eficacia, la puesta a punto de mecanismos de difusión, o el diseño de un modelo de formación y desarrollo profesional del profesorado, que garantice que éste, va a recibir un apoyo y acompañamiento sostenido en el tiempo, en el proceso de implementación de IBL. El seguimiento de la aplicación por parte de los profesores, de los recursos y metodologías basadas en IBL, se llevará a cabo a través de sucesivos ciclos de implementación, evaluación y optimización.

Teniendo en cuenta todo lo anteriormente expuesto, consideramos que el presente proyecto europeo ofrece una oportunidad importante para la difusión de nuevas formas más eficaces y motivadoras de aprender ciencias y matemáticas, estrategias clave para hacer frente al actual fracaso académico y garantizar la construcción de la Europa del conocimiento.

Referencias bibliográficas

- Bosch, M. y Gascón, J. (2006). Twenty-five years of the didactic transpositions, *ICMI Bulletin*, 58, 51-63.
- Chevallard, Y. (1992) Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives aportes par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12 (1) 73-112.
- Chevallard, Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19 (2) 221-266.
- Clarke, D. y Hollingsworth, H. (2002) Elaborating a model of teacher profesional growth. *Teaching and teacher education*, 18 (8) 947-967.
- Fishman, B. J., Marx, R. W., Best, S. y Tal, R. T. Linking teacher and student learning to improve professional development in systememic reform. *Teaching and teacher education*, 19 (6) 643-658.
- Gago, J. M. (Coord.) (2004). Increasing human resources for science and technology in Europe, report presented at the European Community conference Europe Needs More Scientists, Bruselas, 2 de Abril.
- Kennedy, A. (2005). Models of continuing professional development: a framework for analysis. *Journal of In-service Education*, 31 (2) 235-250.
- Loucks-Horsley, S., Love, N., Stiles, K. E., Mundry, S. y Hewson, P. W. (2003) Designing professional development for teachers of science and mathematics. Corwin Press, Inc. Thousand Oaks, CA

- Rocard, M. (2007). Science Education Now: A Renewed Pedagogy for the Future of Europe. Último acceso el 18 de febrero de 2010, desde http://ec.europa.eu/research/science-society/document_library/pdf_06/report-rocard-on-science-education_en.pdf
- Vázquez, A. y Massanero, M. A. (2008). El declive de las actitudes de los estudiantes: un indicador inquietante para la educación científica. *Revista Eureka*, 5 (3) 274-292.
- Wenger, E. (1998). *Communities of Practice: Learning, Meaning, and Identity*. Cambridge: Cambridge University Press.

COMPETENCIAS PROFESIONALES DE LOS FUTUROS PROFESORES DE MATEMÁTICAS DE SECUNDARIA

Vicenç Font, Norma Rubio(*), Joaquin Giménez, Anton Aubanell, Antoni Benseny, Joan Gómez (**), Yuly Vanegas, Víctor Larios (***), Mario Barajas
Universitat de Barcelona, Catalunya, Pontificia Universidad Católica del Perú (),
Universitat Politècnica de Catalunya (**), Universidad Autónoma de Querétaro,
México (***)*

Resumen

En este trabajo se presenta primero una propuesta de competencias profesionales en matemáticas y su didáctica en la formación inicial de profesores de secundaria. A continuación se explica cómo se ha desarrollado uno de los componentes de la macro competencia en análisis didáctico (identificación de potenciales mejoras de un proceso de estudio en nuevas implementaciones) en el máster de profesor de secundaria de matemáticas de la Universidad de Barcelona durante el curso 2009-2010. Los dos aspectos comentados están enmarcados en los siguientes proyectos: 1) Desarrollo de competencias profesionales en la formación de profesores de matemáticas (AECI 2010, C/023928/09) y 2) Evaluación y desarrollo de competencias profesionales en matemáticas y su didáctica en la formación inicial de profesores de secundaria/bachillerato (EDU2009- 08120/EDUC).

Abstract

In this paper we present first a proposal of professional competencies in mathematics education for pre-service teacher training for Secondary School. Next we explain how one of the components of the macro competence in didactic analysis it has been developed (identification of potentials improvements of a study process in new implementations) in the “master for pre-service mathematics teacher training for Secondary School” of the University of Barcelona along the course 2009-2010. This two aspects was carried out as part of the projects: 1) Development of professional competencies in mathematics education for pre-service teacher training (AECI 2010, C/023928/09) and 2) Evaluation and development of professional competencies in mathematics education for pre-service teacher training for Secondary School (EDU2009- 08120/EDUC).

Font, V. et al. (2011). Competencias profesionales de los futuros profesores de matemáticas de secundaria. En M.M. Moreno, N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los Grupos de Investigación de la SEIEM* (pp. 333-342). Lleida.

El contexto curricular

En este apartado comentaremos brevemente el contexto curricular en el que se desarrolla la formación inicial de los profesores de enseñanza secundaria de matemáticas.

Competencias profesionales

Estamos en un momento de reforma de los currículos de formación inicial de los profesores de enseñanza secundaria de matemáticas. Dicha reforma organiza los currículums por competencias, lo cual nos lleva, entre otras, a las siguientes preguntas: ¿Qué tipo de competencias debieran desarrollarse en estos currículos? ¿Cuáles son estas competencias? ¿Cómo se pueden desarrollar y evaluar?

En lo que sigue centraremos nuestras reflexiones en el título de máster que habilita para el ejercicio de la profesión de Profesor de Educación Secundaria¹. Las directrices de este máster establecen que la duración de la formación que habilite para el ejercicio de la profesión sea de 60 créditos ECTS (sistema europeo de transferencia y acumulación de créditos). Con carácter general, las enseñanzas han de ser presenciales, al menos, en el 80% de los créditos totales del máster, incluido necesariamente el Prácticum. Las directrices del máster prescriben la realización del Prácticum en colaboración con las instituciones educativas establecidas mediante convenios entre Universidades y Administraciones Educativas. Las instituciones educativas participantes en la realización del Prácticum habrán de estar reconocidas como centros de prácticas, así como los tutores encargados de la orientación y tutela de los estudiantes.

Las competencias de este máster se estructuran en términos de competencias profesionales genéricas, específicas (matemáticas y su didáctica en nuestro caso) y las que se desarrollan por medio de la práctica. Un ejemplo de competencia genérica es:

Participar en la definición del proyecto educativo y en las actividades generales del centro atendiendo a criterios de mejora de la calidad, atención a la diversidad, prevención de problemas de aprendizaje y convivencia.

Un ejemplo de competencia específica:

Identificar los problemas relativos a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y plantear alternativas y soluciones.

¹ ORDEN ECI/3858/2007, de 27 de diciembre, por la que se establecen los requisitos para la verificación de los títulos universitarios oficiales que habiliten para el ejercicio de las profesiones de Profesor de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas. BOE núm. 312 del 29 de diciembre de 2007.

Un ejemplo de competencia relacionada con la práctica:

Participar en las propuestas de mejora en los distintos ámbitos de actuación a partir de la reflexión basada en la práctica.

En nuestra opinión, las directrices curriculares presentan cierta ambigüedad ya que, por ejemplo, (1) no queda clara la diferencia entre objetivos y competencias (se proponen objetivos competenciales), (2) hay párrafos en los que las competencias se consideran procesos, (3) según como se entienda la competencia, no queda claro que lo que se considera una competencia en el currículo realmente sea una competencia, etc.

La competencia matemática en el currículo de secundaria

Los currículos por competencias en la formación inicial de profesores de secundaria están pensados para desarrollar una competencia profesional que le permita al futuro profesor desarrollar y evaluar la competencia matemática contemplada en el currículo de secundaria.

Actualmente hay una tendencia a considerar que “saber matemáticas” incluye la competencia para aplicarlas a situaciones no matemáticas de la vida real. Esta tendencia, en algunos países, se ha concretado en el diseño de currículos basados en competencias. Dichos currículos contemplan la competencia matemática, la cual es entendida, en muchos casos, de manera similar a como se entiende en el informe PISA 2003.

La actual propuesta de currículos de matemáticas por competencias en la enseñanza secundaria hay que pensarla como una consecuencia más del “giro procesal” en el diseño de currículos de matemáticas (y también de otras materias) que ha tenido lugar a nivel internacional en las últimas décadas. Dicho giro ha significado pasar de concebir los currículos de matemáticas cuyos objetivos eran el aprendizaje, sobre todo, de conceptos a pensar en currículos cuyos objetivos son el aprendizaje, sobre todo, de procesos. Este giro se ha producido, entre otras razones, debido a que las matemáticas actualmente se ven como una ciencia en la cual el método domina claramente sobre el contenido. Por esta razón, recientemente se ha dado una gran importancia al estudio de los procesos matemáticos, en particular los procesos de resolución de problemas y modelización. Podemos observar este giro procesal, entre otros, en los Principios y Estándares del NCTM (2003), donde se propone el aprendizaje de los siguientes procesos: resolución de problemas, razonamiento y prueba, comunicación, conexiones y representación; en el Tercer Estudio Internacional de Matemáticas y Ciencias, conocido con el acrónimo TIMSS (Mullis y otros, 2003), en el estudio PISA (OCDE, 1999) y en las propuestas de los currículos de algunos países como es el caso de los currículos del

estado español derivados de la Ley Orgánica General del Sistema Educativo (LOGSE) y de la Ley Orgánica de Educación (LOE).

Un aspecto problemático y una pregunta relacionada

Los currículos por competencias conllevan el problema de cómo conseguir que los profesores tengan la competencia profesional que les permita el desarrollo y la evaluación de las competencias matemáticas señaladas en el currículo. Dicho problema lleva a la siguiente pregunta: ¿Cuáles son las competencias profesionales que permiten a los profesores desarrollar y evaluar las competencias, generales y específicas de matemáticas, prescritas en el currículum de secundaria? La respuesta a la cual, a su vez, depende de cómo se conteste a la pregunta previa: ¿Cuál es el conocimiento didáctico-matemático que necesita el profesorado para enseñar matemáticas?

Una de las problemáticas que más ha interesado en el área de educación matemática es la de determinar cuál es el conocimiento didáctico-matemático del profesorado requerido para enseñar matemáticas. Diversos autores han dado respuestas diferentes: “conocimiento pedagógico” (Moore, 1974), “conocimiento pedagógico del contenido” (Shulman, 1986) y “conocimiento matemático para la enseñanza” (Ball, Lubienski y Mewborn, 2001) entre otras. En nuestra opinión, estas respuestas coinciden al considerar como una de las competencias profesionales que debe tener un profesor aquella que le permite describir, explicar, valorar y mejorar procesos de enseñanza-aprendizaje (análisis didáctico), pero difieren, entre otros aspectos, en cuáles son las herramientas necesarias para realizar este tipo de análisis didáctico.

Un primer posicionamiento

Nuestro primer posicionamiento es que la competencia profesional que permite evaluar y desarrollar la competencia matemática se puede considerar compuesta por dos macro competencias: 1) La competencia matemático-epistemológica y 2) La competencia en análisis didáctico de procesos de instrucción matemática. Además, nuestra posición es que el núcleo de la competencia profesional del futuro profesor de secundaria debería de ser la competencia en el análisis didáctico. De manera secundaria se debería mejorar la competencia matemática-epistemológica en el máster.

La razón principal para tomar esta opción es que el modelo de formación inicial de profesores de secundaria es de tipo secuencial: primero formación disciplinar y posteriormente una formación profesionalizadora. Dicho de otra manera, asegurar el desarrollo de la competencia matemática corresponde al grado, en el máster esta competencia se puede completar, pero no puede ser la obligación del máster su desarrollo, obligación que si debe tener en el caso de la competencia de análisis didáctico.

Un segundo posicionamiento

Dado que el término competencia es un término controvertido y que, como se ha dicho antes, el currículum del máster de formación de profesor de secundaria de matemáticas presenta una cierta ambigüedad en la manera de conceptualizar las competencias, nuestra segunda opción ha sido optar por una manera de entenderlas que no sea contradictoria con las directrices curriculares del máster de FPS del estado español ni con el Perfil del Docente en la Educación Media Superior de México. La razón de tener en cuenta también las directrices mejicanas se debe a que se trata de una propuesta conjunta de la Universitat de Barcelona (UB), la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM) y de la Universidad Autónoma de Querétaro (UAQ).

La opción que se ha tomado es la de considerar la competencia como una acción eficaz realizada en un determinado contexto con una determinada finalidad.

Un tercer posicionamiento

Nuestro tercer posicionamiento ha sido la elaboración de una lista de competencias redactadas de acuerdo al segundo posicionamiento. En concreto se contemplan 5 competencias genéricas del profesor (aunque se está estudiando la posibilidad de que sean seis) y 10 competencias específicas del profesor de secundaria de matemáticas. Para cada una de dichas competencias se han considerado tres niveles de desarrollo.

Un ejemplo de competencia genérica es la competencia digital:

C5: COMPETENCIA DIGITAL

Utilizar la tecnología digital en los ámbitos profesional y social como herramienta para un desempeño profesional adecuado y un desarrollo permanente.		
Nivel 1:	Nivel 2:	Nivel 3:
Utiliza la tecnología digital para desarrollar materiales didácticos o de referencia para su clase, de gestión educativa.	Utiliza la tecnología digital para ilustrar situaciones o ejemplos en clase.	Utiliza la tecnología digital en clase con actividades que involucren directamente la actividad de los alumnos.
Utiliza la tecnología digital para obtener información útil para su labor profesional.	Utiliza la tecnología digital para establecer contacto e intercambio social eficiente con colegas y alumnos.	Utiliza la tecnología digital para el desarrollo de su labor docente con sus alumnos en un ambiente virtual o semipresencial. Contribuye a desarrollar la competencia digital en sus alumnos

Un ejemplo de competencia específica es la competencia en el análisis de secuencias didácticas:

C14: ANÁLISIS DE SECUENCIAS DIDÁCTICAS

<i>Diseñar, aplicar y valorar secuencias de aprendizaje , mediante técnicas de análisis didáctico y criterios de calidad , para establecer ciclos de planificación, implementación , valoración y plantear propuestas de mejora.</i>		
N1: Muestra conocimiento del currículum de matemáticas como elementos fundamentales para comprender su práctica pedagógica.	N2: Integra teorías, metodologías y currículum, en la planificación de los procesos de enseñanza y reconoce las implicancias en su práctica considerando los contextos institucionales.	N3: Implementa la planificación de los procesos de enseñanza en sus prácticas y emite juicios argumentados y reflexivos acerca de las teorías, metodologías y el currículum.
N1: Aplica herramientas para describir las prácticas, objetos y procesos matemáticos presentes en un proceso de enseñanza aprendizaje. y muy en especial en su propia práctica.	N2: Conoce y aplica herramientas socioculturales para conocer la interacción y las normas que condicionan un proceso de enseñanza aprendizaje y muy en especial en su propia práctica.	N3: Explica los fenómenos didácticos observados en los procesos de enseñanza aprendizaje y muy en especial en su propia práctica
N1: Conoce criterios de calidad y los tiene presentes en la planificación de una secuencia didáctica de matemática	N2: Utiliza criterios de calidad para valorar procesos ya realizados de enseñanza y aprendizaje de la matemática	N3: Aplica criterios de calidad para valorar su propia práctica y realizar innovaciones con el objetivo de mejorarla

Una secuencia didáctica

El desarrollo de la competencia C14 corresponde a todas las asignaturas del máster. A continuación comentamos brevemente la secuencia que se ha seguido en tres asignaturas del máster para contribuir al desarrollo de dicha competencia.

En la asignatura de innovación e investigación sobre su propia práctica se ha seguido la siguiente secuencia:

Análisis de casos (sin teoría). Se propuso a los alumnos la lectura y análisis del episodio descrito en Font, Planas y Godino (2010), dicho análisis se debía realizar a partir de sus conocimientos previos sobre análisis didáctico. El proceso seguido fue el siguiente:

- Lectura individual del contexto del problema y de la transcripción.
- Formación de grupos de 3-4 personas.
- Análisis didáctico del episodio de clase en grupo.
- Elaboración de conclusiones.
- Presentación a los otros grupos de las conclusiones.

Emergencia de los niveles de análisis didáctico propuestos por el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS). La puesta en común de los análisis realizada por los diferentes grupos, completada con la técnica de “otras voces” si es necesario, permite observar como el gran grupo ha contemplado los cinco niveles de análisis que siguen, aunque cada grupo sólo ha contemplado alguno de ellos:

- Análisis de las prácticas matemáticas.
- Análisis de objetos y procesos matemáticos activados y emergentes de las prácticas matemáticas.
- Análisis de las trayectorias e interacciones didácticas y de conflictos semióticos.
- Identificación del sistema de normas que condicionan y hacen posible el proceso de estudio (dimensión normativa)
- Valoración de la idoneidad didáctica del proceso de estudio.

Los niveles de análisis 1-4 son herramientas para una didáctica descriptiva explicativa (para comprender) que permite responder a la pregunta ¿Qué está pasando (y por qué) aquí? El nivel de análisis 5 pretende ser una herramienta para una didáctica prescriptiva (para evaluar y para indicar el camino a seguir) que permite responder a la pregunta ¿Qué se debería hacer?

Teoría (criterios de idoneidad). De los cinco niveles anteriores en la asignatura de innovación e investigación sobre su propia práctica se focaliza la atención en el quinto, para ello se dan elementos teóricos a los alumnos, en concreto se les explican los criterios de idoneidad propuestos en el EOS mediante la lectura de algunas páginas del capítulo “Inicio a la investigación en la enseñanza de las matemáticas en secundaria y bachillerato”, del libro “Matemáticas: Investigación, innovación y buenas prácticas” (Font y Godino, 2010). Dicho enfoque (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2006; Godino, Font, Wilhelmi y De Castro, 2009) propone los siguientes criterios de idoneidad:

Idoneidad epistémica, se refiere a que las matemáticas enseñadas sean unas “buenas matemáticas”. Para ello, además de tomar como referencia el currículo

prescrito, se trata de tomar como referencia a las matemáticas institucionales que se han transpuesto en el currículo.

Se puede aumentar su grado presentando a los alumnos una muestra representativa y articulada de problemas de diversos tipos (contextualizados, con diferentes niveles de dificultad, etc.); procurando el uso de diferentes modos de expresión (verbal, gráfico, simbólico...), y traducciones y conversiones entre los mismos; procurando que el nivel del lenguaje matemático utilizado sea adecuado y que las definiciones y procedimientos estén clara y correctamente enunciados y adaptados al nivel educativo a que se dirigen; asegurando que se presentan los enunciados y procedimientos básicos del tema y adecuando asimismo las explicaciones, comprobaciones, demostraciones al nivel educativo a que se dirigen; estableciendo relaciones y conexiones significativas entre las definiciones, propiedades, problemas del tema estudiado, etc.

Idoneidad cognitiva, expresa el grado en que los aprendizajes pretendidos/ implementados están en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los aprendizajes logrados a los pretendidos/implementados.

Se puede aumentar su grado asegurándonos, por una parte, que los alumnos tienen los conocimientos previos necesarios para el estudio del tema y, por otra parte, que los contenidos que se pretenden enseñar se pueden alcanzar (tienen una dificultad manejable); procurando incluir actividades de ampliación y de refuerzo; realizando una evaluación formativa durante el proceso de enseñanza-aprendizaje que nos asegure que los alumnos se han apropiado de los contenidos enseñados.

Idoneidad interaccional, grado en que los modos de interacción permiten identificar y resolver conflictos de significado y favorecen la autonomía en el aprendizaje.

Se puede aumentar su grado asegurándonos que el profesor hace una presentación adecuada del tema (presentación clara y bien organizada, ¿se le entiende cuando habla?, haciendo un uso correcto de la pizarra, poniendo suficiente énfasis en los conceptos clave del tema, etc.); procurando reconocer y resolver los conflictos de significado de los alumnos (interpretando correctamente los silencios de los alumnos, sus expresiones faciales, sus preguntas, etc.); utilizando diversos recursos retóricos argumentativos para captar, implicar, etc. a los alumnos; procurando facilitar la inclusión de los alumnos en la dinámica de la clase y no la exclusión; favoreciendo el diálogo y comunicación entre los estudiantes; contemplando momentos en los que los estudiantes asumen la responsabilidad del estudio (exploración, formulación y validación) etc.

Idoneidad mediacional, grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje.

Se puede aumentar su grado usando materiales manipulativos e informáticos; procurando que las definiciones y propiedades sean contextualizadas y motivadas usando situaciones y modelos concretos y visualizaciones; procurando invertir el tiempo en los contenidos más importantes o nucleares del tema e invirtiendo el tiempo en los contenidos que presentan más dificultad de comprensión.

Idoneidad afectiva, grado de implicación (interés, motivación) del alumnado en el proceso de estudio.

Se puede aumentar su grado seleccionando tareas de interés para los alumnos, promoviendo la valoración de la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana y profesional; promoviendo la implicación en las actividades, la perseverancia, responsabilidad, etc.; favoreciendo la argumentación en situaciones de igualdad de manera que el argumento se valore en sí mismo y no por quién lo dice; promoviendo la autoestima evitando el rechazo, fobia o miedo a las matemáticas, etc.

Idoneidad ecológica, grado de adaptación del proceso de estudio al proyecto educativo del centro, las directrices curriculares, las condiciones del entorno social, etc.

Se puede aumentar su grado asegurando que los contenidos enseñados se corresponden con las directrices curriculares; asegurando que dichos contenidos contribuyen a la formación socio-profesional de los estudiantes; procurando que los contenidos que se enseñan se relacionan con otros contenidos matemáticos y de otras disciplinas, etc.

Análisis de una clase completa sobre ecuaciones utilizando los criterios de idoneidad.

Lectura y comentario de partes de algunos trabajos final de máster de cursos anteriores, en los que los futuros profesores de cursos anteriores utilizaron los criterios de idoneidad para valorar la unidad didáctica que implementaron en el prácticum II (este punto sólo es posible a partir de la segunda edición del máster)

En las asignaturas prácticum II y trabajo final de máster los alumnos han de utilizar los criterios de idoneidad para diseñar y valorar su propia práctica, en concreto la unidad que han diseñado e implementado en el prácticum II.

Agradecimientos

Trabajo realizado en el marco de los siguientes proyectos: 1) Desarrollo de competencias profesionales en la formación de profesores de matemáticas (AECI 2010, C/023928/09) y 2) Evaluación y desarrollo de competencias profesionales en matemáticas y su didáctica en la formación inicial de profesores de secundaria/bachillerato (EDU2009- 08120/EDUC).

Referencias

- Ball, D., Lubienski, S. T. y Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge, en V. RICHARDSON (ed.): *Handbook of Research on Teaching*, pp. 433-456. American Educational Research Association, Washington, D.C., EEUU.
- Font, V. y Godino, J. D. (2010). Inicio a la investigación en la enseñanza de las matemáticas en secundaria y bachillerato, en C. Coll (ed.), *MATEMÁTICAS: Investigación, innovación y buenas prácticas* Barcelona: Graó (en prensa).
- Font, V., Planas, N. y Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje*, 33 (1), 89-105.
- Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma*, XXVII, (2): 221-252.
- Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. y Castro, C. de (2009). Una aproximación a la dimensión normativa en didáctica de las matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias*, 27(1), 59-76.
- Moore, T.W. (1974). *Introducción a la Teoría de la Educación*. Madrid. Alianza Editorial.
- Mullis, I., Martin, M., Smith, T., Garden, R., Gregory, K., Gonzalez, E., Chrostowski, S. y O'connor, K. (2003). *TIMSS assessment frameworks and specifications 2003*. Boston College, Chestnut Hill, MA, EEUU.
- National Council of Teachers of Mathematics (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. SAEM Thales y National Council of Teachers of Mathematics, Sevilla, España.
- Organisation for Economic Co-operation and Development. (1999). *Measuring student knowledge and skills. A new framework for assessment*. OECD, París, Francia.
- Shulman, L. S. (1986): Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.

ANÁLISIS DE CLASES Y DESARROLLO PROFESIONAL DEL PROFESORADO

Mario Martínez, Edelmira Badillo (*), Lourdes Figueiras (*), Vicenç Font ()**

Secretaría de Educación del Estado de Nuevo León, México, Universidad

Autónoma de Barcelona (), Universidad de Barcelona (**)*

Resumen

En esta comunicación se presenta una propuesta para el desarrollo profesional de los profesores en el ámbito de la educación matemática basada en una estrategia de "Análisis de clases". Se trata de una estrategia que, en algunos aspectos, coincide con la estrategia japonesa denominada "Estudio de clases". Interesados en explorar dicha estrategia como vía para desarrollar en los profesores de educación primaria el conocimiento profesional que requieren para enseñar matemáticas, hemos diseñado e implementado tres clases para la enseñanza del concepto "mediatriz de un segmento" que se corresponden a modelos diferentes de enseñanza. Las clases se implementaron en tres aulas de sexto grado de primaria y se videograbaron. En estos momentos estamos realizando el análisis de estas tres clases utilizando, entre otras, herramientas del Enfoque Ontosemiótico (EOS) y del Mathematical Knowledge for Teaching (MKT). El siguiente paso es elaborar una propuesta para la formación y desarrollo profesional de los profesores de primaria a partir del análisis realizado.

Abstract

In this paper we present a proposal for professional development of teachers in the field of mathematics education based on a strategy of "Analysis of class." It is a strategy that in some respects, different from the Japanese strategy called "Lesson study". Interested in exploring this strategy as a means to develop primary education teachers require professional knowledge to teach mathematics, we have designed and implemented three classes for teaching the concept of "bisector of a segment" corresponding to different teaching models. The lessons were implemented in three classrooms of sixth grade and were videotaped. We are currently conducting an analysis of these three classes using, among others, tools Ontosemiotic Approach (OSA) and Mathematical Knowledge for Teaching (MKT). The next step is to develop a proposal for training and professional development of primary teachers from the analysis performed.

Martínez, M. et al. (2011). Análisis de clases y desarrollo profesional del profesorado. En M.M. Moreno, N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los Grupos de Investigación de la SEIEM* (pp. 343-354). Lleida.

Introducción

Dotar o proporcionar a los niños y jóvenes de los conocimientos y competencias matemáticas necesarias para su desarrollo integral y su participación plena en la sociedad es uno de los grandes retos de la educación básica en México. Para lograr este propósito, la Secretaría de Educación Pública han emprendido en los últimos años diversas acciones entre las que destacamos: a) la modificación de los planes y programas de estudio para la educación básica, actualizando y articulando su contenido en los diferentes niveles educativos y estableciendo una mayor coherencia en el enfoque por competencias; b) la incorporación de mecanismos de evaluación estandarizados y masivos que “dan cuenta” de los niveles de logro educativo de los estudiantes; c) la creación del Sistema Nacional para la Formación Continua y Superación Profesional (SNFCSP) como vía para promover el desarrollo de las competencias profesionales que los maestros requieren para enseñar en la escuela actual.

Aunque estas acciones apuntan a mejorar a mediano y largo plazo la educación matemática de los niños y jóvenes mexicanos, es evidente a la luz de la experiencia que hemos tenido con las reformas educativas anteriores que éstas serán insuficientes si no se acompañan de acciones más específicas a nivel local, con una mayor implicación de sus actores, principalmente de los profesores.

Más allá de los resultados arrojados por la investigación en el campo de la didáctica de las matemáticas, o por las evaluaciones que dan cuenta de los pobres resultados en el aprendizaje de las matemáticas de los niños y jóvenes mexicanos y de los factores asociados a dichos resultados, relevamos el papel que tiene el profesorado en la pretensión de mejorar a mediano y largo plazo la educación matemática de los estudiantes.

Aunque los profesores mexicanos de educación primaria y secundaria participan a lo largo de su carrera profesional en cursos, talleres y diplomados sobre el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, estos programas parecen ser insuficientes para desarrollar el conocimiento y competencias profesionales que requieren para enfrentar con éxito esta compleja tarea. Los programas de formación continua y superación profesional en el ámbito de las matemáticas, no logran tener un impacto significativo en cambiar sus concepciones y prácticas de enseñanza y, en consecuencia, mejorar el aprendizaje de los estudiantes. Esto sucede, entre otras causas, porque: a) los programas de actualización están muy alejados de los problemas y necesidades de los profesores en la clase de matemáticas, b) los profesores no cuentan con los apoyos necesarios para aplicar en el aula las ideas pedagógicas o los recursos didácticos aprendidos.

Desde nuestra perspectiva, hay que realizar una mayor apuesta por la formación y el desarrollo profesional de los profesores de primaria y secundaria, impulsando

estrategias alternativas que al mismo tiempo que promueven una cultura de la formación continua y superación profesional, tengan un impacto en la mejora de la calidad instruccional.

Para desarrollar el conocimiento profesional que requieren los profesores para enseñar matemáticas es necesario impulsar y experimentar estrategias alternativas que tengan como eje la reflexión y estudio de los problemas del desarrollo del currículum en el aula, haciendo de este proceso una experiencia de aprendizaje compartido en el que participen colegas del propio centro, colegas de otros centros y asesores o expertos externos.

En consecuencia, uno de los mayores retos del desarrollo profesional de los profesores mexicanos en el campo de la educación matemática está en construir programas efectivos de formación continua que al mismo tiempo que mejoren su conocimiento profesional para enseñar matemáticas, tengan un impacto en la mejora cualitativa de la instrucción matemática. Este reto implica impulsar alternativas para el desarrollo profesional de los profesores que se vinculen directamente con los problemas profesionales a los que se enfrentan cuando gestionan el conocimiento matemático en el aula.

Estrategias situadas para el desarrollo profesional de los profesores

Las teorías de la cognición (Putnam y Borko, 2000), nos ofrecen un marco de referencia conceptual interesante a partir del cual fundamentar la necesidad de vincular los programas y estrategias para el desarrollo profesional de los docentes con los problemas de su práctica profesional. Las teorías de la cognición contextualizada, que se centran explícitamente en esta relación, asumen que el conocimiento es inseparable de los contextos y las actividades donde se desarrolla. Desde esta perspectiva el aprendizaje es un producto de la participación continua en las actividades diarias en la “vida en” el mundo (Lave, 1991) y el conocimiento está inicialmente incluido en las circunstancias de su construcción. En este sentido coincidimos con García (2000), quien subraya el papel del contexto en que las tareas y actividades tienen lugar, en la formación del profesorado.

Desde la perspectiva de la cognición situada (García, 2000, Martínez, 2001, 2003), para asegurar la adquisición del conocimiento profesional del profesor para enseñar y la transferencia de este conocimiento a la práctica profesional, es necesario contextualizar dichos programas a partir de problemas o necesidades concretas de los profesores y de los centros educativos en los que trabajan, en un ambiente de colaboración y compromiso institucional. En otras palabras, el conocimiento para enseñar debería de ser aprendido de manera activa y en contextos que sean significativos para el profesor. Los programas de desarrollo profesional deben de proporcionar a los profesores los entornos de aprendizaje en los que se puedan generar las nuevas prácticas que se pretenden impulsar.

Por enseñanza situada entenderemos el enfoque instruccional en el que se destaca la importancia de la actividad y el contexto para el aprendizaje, y reconoce que el aprendizaje es, ante todo, un proceso de enculturación en el cual los estudiantes se integran gradualmente a una comunidad o cultura de prácticas sociales. En esta misma dirección, se comparte la idea de que aprender y hacer son acciones inseparables. (Díaz Barriga, 2003). Este enfoque es coherente con las perspectivas reflexivas de formación del profesorado (Gimeno y Pérez, 1997), que otorgan una gran importancia a la reflexión sobre la propia práctica en el desarrollo del conocimiento profesional del profesor.

Algunas estrategias de enseñanza situada que hemos considerado como referentes previos para nuestro trabajo sobre el análisis de clase se encuentran el estudio de casos, los itinerarios de formación y el estudio de clases.

Estudio de casos

Según García (2000:67) los casos presentan ejemplos, escenarios, viñetas, etc. de situaciones reales de enseñanza-aprendizaje que pueden ser analizadas desde diferentes perspectivas y niveles cognitivos por sujetos tanto en el período de formación inicial como permanente. Para Llinares (1994), los casos son “escenas” específicas que presentan cuestiones sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje a resolver. Suelen ser desde esta perspectiva grabaciones en video o narraciones escritas que describen alguna cuestión relativa a los procesos de aprendizaje, o situaciones de enseñanza contextualizadas en un tiempo y lugar en particular.

El estudio de casos como una aproximación metodológica al proceso de enseñar a aprender está ampliamente documentada (Llinares, 1994) y permite cubrir, entre otros, los siguientes propósitos:

Como un medio para el desarrollo de procesos de reflexión y generar aproximaciones críticas a las situaciones de enseñanza.

Como situaciones que presentan cuestiones enraizadas en las nuevas aproximaciones a la enseñanza de las matemáticas que se pretenden generar.

El estudio de casos intenta generar las condiciones necesarias para que los profesores lleguen a cuestionarse aspectos de la enseñanza-aprendizaje de tópicos concretos dados por ciertos de manera incuestionable como consecuencia de su propio aprendizaje.

Retomando algunos aspectos señalados por Llinares (1999:175), el estudio de casos en los programas de formación permanente del profesorado proporciona oportunidades para:

- Cuestionar sus creencias epistemológicas previas.

- Ampliar su comprensión de las nociones matemáticas escolares.
- Desarrollar su comprensión del conocimiento de contenido pedagógico vinculándolo con las nociones matemáticas escolares.
- Comenzar a generar las destrezas cognitivas y los procesos de razonamiento pedagógico.
- Incrementar los procesos de reflexión (destrezas metacognitivas).

A continuación se presenta un ejemplo de un caso retomado de la investigación en didáctica de las matemáticas y utilizado para estudiar las concepciones de los profesores sobre la enseñanza de la resta en la escuela primaria.

CASO ANA: Ana es una estudiante de tercer grado. Ella ha resuelto la siguiente tarea

$$\begin{array}{r} 6003 \\ - 37 \\ \hline \end{array}$$

.....

escribiendo en una hoja , en sucesivos momentos lo siguiente:

	b)	c)
5	4	4
6 0 0 13	5	5
- 3 7	6 0 10 13	6 0 10 13
.....	- 3 7	3 7
6		
	7 6	4 0 7 6

i) ¿Podrías explicar lo que ha sucedido?

ii) ¿Cómo podrías ayudarla?

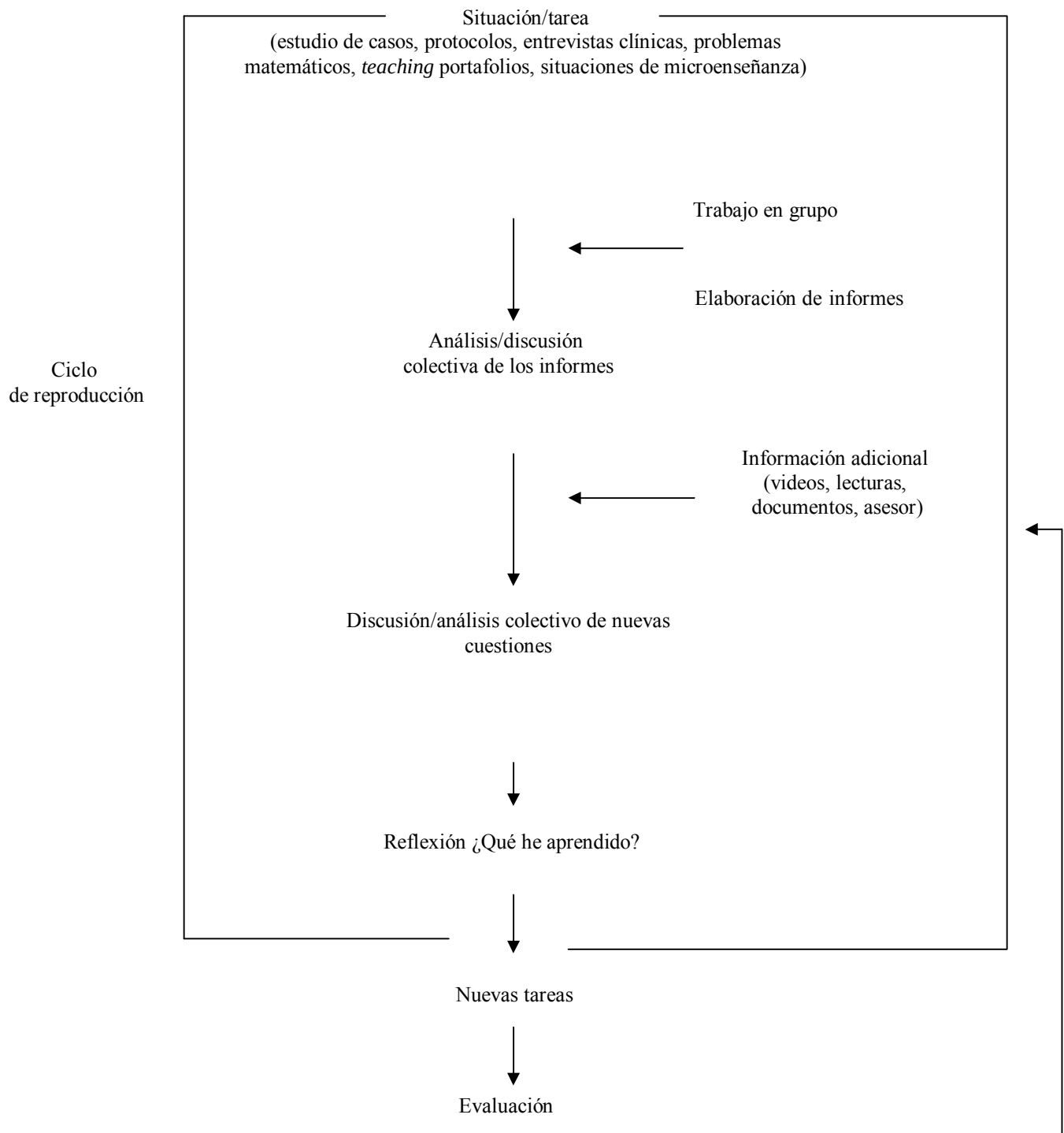
iii) ¿Cómo podrías diseñar la enseñanza para prevenir esto?

Figura 1. Caso Ana. (Llinares, 1994, Martínez, 2001, 2003)

Itinerarios de formación

Los itinerarios de formación (García, 2000, 2005) parten de una situación o tarea que puede tomar diferentes formas (estudio de casos, protocolos, entrevistas clínicas, problemas matemáticos, “teaching portafolios”, situaciones de microenseñanza) (Figura 2). Una vez diseñada la tarea/situación se plantea al grupo de profesores. A partir de las tareas y procesos de resolución, se formulan una serie de cuestiones que definen distintos espacios de problemas para reflexión y análisis del grupo de maestros. La intención de las cuestiones es hacer explícito, mediante la discusión en grupos, las creencias y el conocimiento que los profesores tienen respecto a una serie de aspectos y generar la necesidad de introducir información teórica respecto a diferentes temas, información que se proporciona a través de lecturas, videos y el propio formador de profesores. La información teórica presentada será la base para una visión nueva y más completa de la situación/tarea inicial. Los distintos grupos elaboran un nuevo informe ampliado con un análisis de su propio aprendizaje, los profesores deben reflexionar, analizar e informar sobre lo aprendido, así como sobre sus viejas y nuevas concepciones. En función de cómo se haya desarrollado el proceso, se incorporarán unas tareas complementarias, que cumplirían con el objetivo de generar conocimiento práctico personal y social.

Figura 2. Itinerario de formación. (García, 2000)



Lesson Study

“Lesson Study” es otra estrategia de enseñanza situada que favorece el análisis y la reflexión compartida sobre problemas de la práctica de la enseñanza de las matemáticas de los docentes. Implica planificación, enseñanza, observación y reflexión crítica.

Los profesores seleccionan un aspecto a observar, plantean las cuestiones de investigación que quieren explorar y diseñan conjuntamente un plan detallado de la lección que utilizará uno de ellos para enseñar en una clase real mientras los otros miembros del grupo observan. Luego el grupo comparte y discute sus observaciones y con frecuencia otro profesor repite la experiencia en otra clase. Finalmente, los profesores elaboran un informe acerca de lo que esta experiencia les ha enseñado, en particular sobre las cuestiones de investigación (Fernández y Makoto, 2004; Lewis, Perry y Murata, 2006). Hemos retomado una adaptación de la estrategia “Lesson Study” realizada por Callejo, Valls y Llinares (2007) denominada ciclo de reflexión compartida sobre la práctica

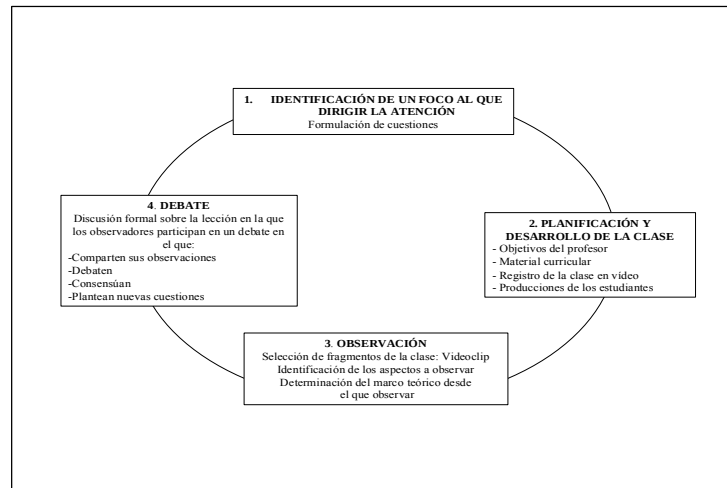


Figura 3. Ciclo de reflexión compartida sobre la práctica Callejo, Valls y Llinares (2007)

El análisis de clases. ¿En qué estamos?

Con la intención de iniciar una línea de trabajo que tiene como interés principal estudiar las perspectivas que ofrece el análisis de clase como estrategia para el desarrollo profesional de los profesores de educación primaria en el campo de la educación matemática, nos dimos a la tarea de diseñar tres secuencias didácticas

sobre la enseñanza del concepto de mediatriz en sexto grado de primaria, e implementarlas en tres aulas con la participación de tres profesores.

Las tres secuencias didácticas diseñadas responden a tres modelos diferentes de gestionar el conocimiento matemático en el aula:

a) un modelo centrado en el contenido, con una fuerte componente directiva del proceso didáctico por parte del profesor, privilegiando una vía deductiva en la presentación del contenido;

b) un modelo centrado también en el contenido pero privilegiando la vía inductiva en la presentación del contenido de aprendizaje y;

c) un modelo de enseñanza centrado en el aprendiz en el que la contextualización del contenido y la interacción social entre el profesor y los estudiantes, y entre los estudiantes entre sí juegan un papel relevante.

Las secuencias didácticas diseñadas responden a objetivos educativos diferentes. En los primeros dos casos el objetivo de la sesión se centra en aprender el procedimiento para trazar la mediatriz con regla y compás, mientras que en la tercera de las secuencias se trata de que los estudiantes desarrollen el concepto de mediatriz como “espacio geométrico”, como la frontera entre dos regiones, cada una de las cuales está constituida por todos los puntos que están más cerca de un extremo del segmento que del otro. A continuación se presenta un esquema muy general de las primeras dos secuencias didácticas:

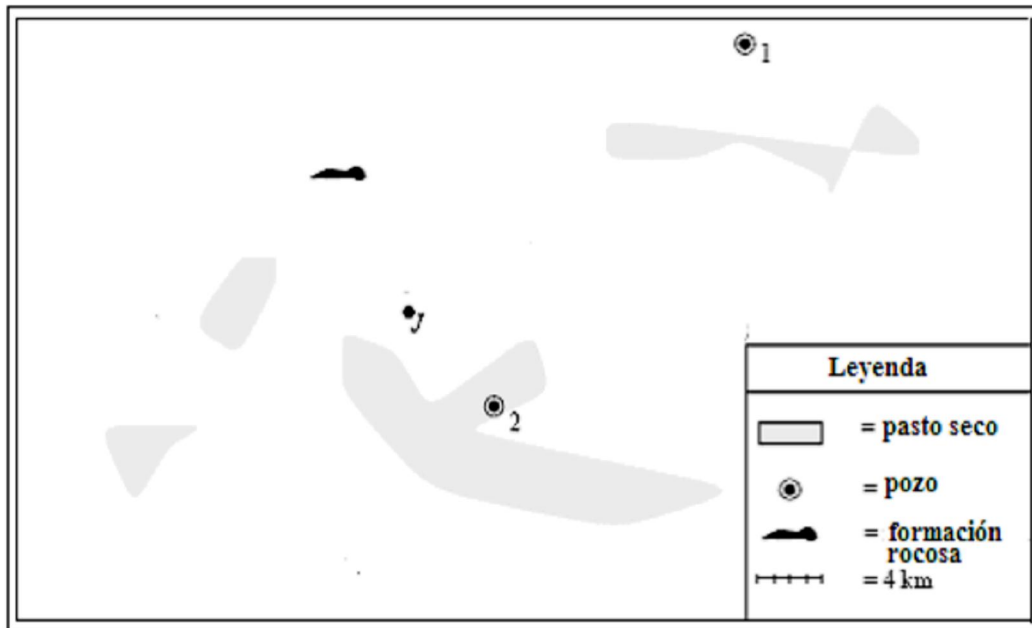
Secuencia didáctica 1	Secuencia didáctica 2
- Definición de la mediatriz. - Construcción de la mediatriz con regla y compás. - Resolución de ejercicios de aplicación del libro de texto. Tiempo: 1 hora	- Construcción de diversos ejemplos de mediatriz con regla y compás. - Reflexión sobre los procedimientos realizados. - Definición colectiva de la mediatriz. - Aplicación del procedimiento geométrico para la construcción de la mediatriz con regla y compás y estrategias para verificarlo. - Resolución de ejercicios de aplicación. Tiempo : 1 hora

La tercera secuencia didáctica a la que hemos denominado constructivista tuvo como eje el planteamiento y la resolución en pequeños equipos y de manera colectiva del siguiente problema, adaptada de los trabajos de Freudenthal.

En el desierto

En la figura se muestra parte de un mapa de un desierto. Hay dos pozos en esta región. Imagínate que estás con tu rebaño de ovejas en J, que estás muy sediento y solo llevas este mapa contigo.

¿A cuál de los pozos irías a tomar agua?



Señala otros dos lugares desde los cuales irías al pozo 2. Escógelos uno alejado del otro.

Ahora, esboza una división del desierto en dos partes o regiones de manera que siempre tengas más cerca un pozo que el otro pozo. ¿Si estás en la frontera a qué pozo irías y por qué?

¿Qué clase de línea es la frontera? ¿Recta o curva?

Encuentra un procedimiento para dibujar esta línea. Describe los pasos de este procedimiento.

Tiempo: 2 horas

Como se mencionó anteriormente las tres secuencias didácticas fueron implementadas por tres profesores diferentes en tres aulas de sexto grado de un

centro concertado de educación primaria de la Provincia de Barcelona. Las sesiones fueron videograbadas para su análisis posterior.

En este momento nos encontramos en un proceso de análisis de los videos de las sesiones implementadas utilizando algunos constructos teóricos y herramientas metodológicas del Enfoque Ontosemiótico (Godino, Batanero y Font, 2009; Font, Planas y Godino, 2010); así como de los estudios sobre el Mathematical Knowledge for Teaching (MKT), (Ball et. al, 2008).

Nuestra intención, como ya ha sido señalado anteriormente, es que este análisis nos permita derivar algunas propuesta para el desarrollo profesional de los profesores de educación primaria en el ámbito de la educación matemática que tenga como eje el estudio de algunos episodios de las clases implementadas.

Agradecimientos

Trabajo realizado en el marco de los proyectos de investigación, EDU2009-07298 denominado “Influencia en la discontinuidad del aprendizaje matemático entre primaria y secundaria” y EDU2009-08120 denominado “Evaluación y desarrollo de competencias profesionales en matemáticas y su didáctica en la formación inicial de profesores de secundaria/bachillerato“, ambos financiados por el Ministerio de Ciencia e Innovación de España

Referencias bibliográficas

- Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Especial?. *Journal of Teacher Education* 59 (5); 389-407.
- Callejo, M.; Valls, J.; LLinares, S.(2007) The building of preservice primary teacher's knowledge of matehematics teaching : interaction and online video case studies. *Instructional Science*, 37, 247-271.
- Díaz Barriga, F. (2003). Cognición situada y estrategias para el aprendizaje significativo. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, 5 (2). Consultado el día de mes de año en: <http://redie.ens.uabc.mx/vol5no2/contenido-arceo.html>
- Fernández, C.; Makoto Y. (2004). *Lesson Study. A Japanese approach to improving mathematics teaching and learning*. Lawrence Erlbaum Associates, New Yersey: USA.

- Font, V., Planas, N. y Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje*, 33(1), 89-105.
- García, M. (2005). Formación de profesores de matemáticas, un campo de estudio y preocupación. En *Educación Matemática*. Vol. 17, No.2. Ed. Santillana. México.
- García, M. (2000). El aprendizaje del estudiante para profesor de matemáticas desde la naturaleza situada de la cognición: implicaciones para la formación inicial de maestros. IV. *Simposio propuestas metodológicas y de evaluación en la formación inicial de los profesores del área de didáctica de las matemáticas*. Universidad de Oviedo.
- Gimeno, J.; Pérez, A. (1997). *Comprender y transformar la enseñanza*. Madrid, España: Morata.
- Godino, J.; Batanero, C. y Font, V. (2009). *Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática*. <http://www.ugr.es/local/jgodino>.
- Lave, J. (1991). *La cognición en la práctica*. Barcelona, España: Paidós.
- Lewis, C., Perr, R. & Murata, A. (2006). How should research contribute to instructional improvement? The case of Lesson study. *Educational Researcher*, 35(3), 3-14.
- Llinares, S. (1999). Del conocimiento sobre la enseñanza para el profesor al conocimiento del profesor sobre la enseñanza: implicaciones en la formación de profesores de matemáticas. En L. Contreras; N. Climent, (Eds.), *La formación de profesores de matemáticas estado de la cuestión y líneas de actuación*. Universidad de Huelva.
- Llinares, S. (1994). El estudio de casos como una aproximación metodológica al proceso de aprender a enseñar. En L. Blanco; y L. Casa (Coords.), *Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas* (pp. 252-278). Bajadoz. Sociedad extremeña de educación matemática.
- Martínez, M. (2001). *Concepciones de los profesores de educación primaria sobre la enseñanza de la resta. Construcción y validación de instrumentos*. Tesina para obtener el grado de Master. Universidad Autónoma de Barcelona.
- Martínez, M. (2003). *Concepciones sobre la enseñanza de la resta: un estudio en el ámbito de la formación permanente del profesorado*. Tesis Doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona.
- Putnam, R.; Borko, H. (2000). El aprendizaje del profesor: implicaciones de las nuevas perspectivas de la cognición. En Bruce, J.; Thomas, L; Ivor, G., *La enseñanza y los profesores I. La profesión de enseñar* (pp. 219-299). Barcelona, España: Paidós.

GRUPO:

HISTORIA DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA (HEM)

Coordinador: **Alexander Maz Machado**, Universidad de Córdoba

ANÁLISIS PRELIMINAR DE MANUALES ESCOLARES DE
ARITMÉTICA.

Carrillo, C. y Sierra, M.

UN ANÁLISIS SISTÉMICO DE LA OBRA DE JOSÉ MARIANO
VALLEJO DESDE LA PERSPECTIVA DE LA
INVESTIGACIÓN HISTÓRICA EN EDUCACIÓN
MATEMÁTICA: LIBROS PARA PRIMERA ENSEÑANZA.

López, J.I. y Sierra, M.

ANÁLISIS PRELIMINAR DE MANUALES ESCOLARES DE ARITMÉTICA

Carolina Carrillo García, Modesto Sierra Vázquez
Universidad de Salamanca. España

Resumen

Se presentan los avances metodológicos de una investigación en proceso cuyo objetivo es analizar la evolución que ha tenido la aritmética como materia escolar en España desde su establecimiento dentro de un currículo de manera oficial hasta el término de la Guerra Civil Española (1789-1939). Para la realización de este trabajo nos apoyaremos en la Metodología Histórica, utilizando el Análisis de Contenido como metodología complementaria para observar esta evolución. En este escrito se reportan los resultados de un análisis preliminar de 50 libros publicados por autores españoles en la época mencionada.

Abstract

This article presents the methodology of an ongoing investigation whose purpose is to analyze the developments that have taken the arithmetic as a subject in Spain since its establishment in curriculum officially until the end of the Spanish Civil War (1789-1939). To carry out this work we will rely on historical methodology, using the content analysis as a complementary method to observe this evolution. In this paper we report the results of a preliminary analysis of 50 published books by Spanish authors in the mentioned epoch.

Carrillo, C. y Sierra, M. (2011). Análisis preliminar de manuales escolares de aritmética. En M.M. Moreno, N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los Grupos de Investigación de la SEIEM* (pp. 357-372). Lleida.

Introducción

La aritmética es una de las materias escolares consideradas fundamentales dentro de la educación de los estudiantes. Se aborda desde los primeros años escolares y se supone uno de los conocimientos más utilizados dentro de la vida diaria. A su vez, es uno de los primeros filtros escolares contra los que se enfrentan los estudiantes, razón por la cual es considerada como centro de este estudio.

En este escrito se presentan los avances metodológicos de una investigación en proceso cuyo objetivo general es *analizar la evolución que ha tenido la aritmética como materia escolar en España desde su establecimiento dentro de un currículo de manera oficial hasta el término de la Guerra Civil Española (1789-1939)*. Dicha investigación se enmarca en la Didáctica de la Matemática pero utiliza la metodología histórica para la consecución de sus objetivos. Asimismo, reconociendo la importancia del análisis de libros de texto para el estudio de los procesos de enseñanza aprendizaje, se utilizará como metodología complementaria el Análisis de Contenido propuesto en Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez (2008).

El planteamiento general de la investigación ha sido reportado en Carrillo y Sierra (2009). En este escrito se hace énfasis en el desarrollo metodológico y se reportan los resultados de un análisis preliminar de 50 libros publicados por autores españoles durante el primer tercio de la época mencionada.

Marco teórico y metodológico

Para esta investigación se utilizará la metodología de la investigación histórica, siguiendo las fases propuestas por Ruiz (1976):

- Planteamiento de la investigación.
- Selección del problema. Criterios.

Atendiendo al consejo de Ruiz de buscar fechas que sean significativas desde el punto de vista de la educación y no sólo de la historia en general, seleccionamos para su observación la época de 1789 a 1939 debido a que es en ella cuando surgen los libros de texto tal como los conocemos ahora y a la importancia concedida a la aritmética como materia escolar. Para ello, realizamos un estudio con respecto a la historia de la matemática y la historia de la educación en España, que nos permitiera establecer los criterios de la selección del periodo a analizar.

Estado de la cuestión.

Se realizó un análisis de investigaciones relacionadas directa o indirectamente con nuestra investigación. Dicho análisis se centró en trabajos que tuvieran como

objeto de estudio a la aritmética o temas aritméticos, la metodología histórica y el análisis de manuales escolares.

Primer sondeo de fondos documentales.

Fuentes primarias:

Según la definición dada en esta metodología, las fuentes primarias *son todos aquellos documentos elaborados por los observadores o participantes directos en los hechos*. Para este estudio consideramos fuentes primarias los manuales de aritmética publicados en el periodo a analizar. La búsqueda y recopilación de manuales se realizó tanto en lugares físicos como virtuales, tales como la biblioteca histórica de la Universidad de Salamanca, librerías especializadas, google books, el proyecto MANES y la Biblioteca Digital Hispánica, entre otros.

Fuentes secundarias:

Según la definición dada por (Ruiz, 1976), las fuentes secundarias *son las que nos informan de modo indirecto del pasado, son las hechas por personas que no fueron testigos presenciales de lo sucedido*. A este rubro pertenecen las investigaciones reportadas tanto en el planteamiento del problema como en el estado de la cuestión, ya que nos brindan un panorama general del contexto estudiado.

Primera delimitación de la investigación.

Con base en el actual análisis de los 150 libros de los que en este momento disponemos podremos acotar nuestra investigación a un análisis más específico.

- Elaboración de una hipótesis o campo de hipótesis.
- Recogida de datos o fase de documentación.
- Selección y clasificación de los documentos.
- Para la elección de los manuales establecimos los siguientes criterios:
- Que fueran publicados en España dentro del periodo de 1789-1939.
- Que estuvieran en idioma español.
- Que fueran de aritmética o la contuvieran como materia.

En este momento nos encontramos en un análisis general de los 150 manuales recopilados. Es de mencionar que es la primera vez en este tipo de estudios que se obtiene una cantidad tan grande de fuentes primarias y esto es gracias a los medios digitales tan en boga actualmente. Ante ello, hemos considerado que sería

inexcusable no hacer un primer análisis de ellos para la selección de los libros que se analizarán finalmente.

Crítica Histórico-Pedagógica de los documentos.

Crítica externa.

Se preocupa de determinar la autenticidad de las fuentes según sus características formales, las circunstancias en que ha llegado a ser posible su conocimiento y el modo de llegar a las manos del historiador.

Todo el material recopilado fue obtenido de fuentes confiables como se ha mencionado.

Crítica interna.

Atiende a la comprensión y recta interpretación del contenido de los documentos.

Para atender la crítica interna serán útiles las fichas propuestas en la segunda etapa del análisis e interpretación de resultados. Además, este trabajo ha sido y seguirá siendo presentado en diversos foros de investigación con expertos en la metodología de investigación histórica, poniendo de esta forma en constante evaluación los resultados obtenidos y las herramientas utilizadas.

Análisis e interpretación de los documentos.

Como hemos mencionado anteriormente, el análisis de los libros se hará tomando en consideración la metodología utilizada en Rico *et. al.* (2008). Sin embargo, haremos modificaciones en los puntos específicos a observar adecuándolos a nuestros intereses particulares.

Construcción o síntesis histórica: explicación histórico-pedagógica.

Se deben relacionar los hechos educativos con el contexto general de una sociedad o una cultura, tanto en el momento en que se dan como en su gestación o en su desarrollo posterior.

- Exposición del trabajo de investigación.
- Escritura final del trabajo, atendiendo a los objetivos de la tesis.
- Resultados obtenidos del análisis preliminar

Hasta el momento se han analizado 50 libros. Este análisis se ha hecho enfocándonos principalmente en datos como: Autor, Lugar/año, Población Diana, Definición de aritmética, Índice resumido, Descripción de la presentación y

Observaciones generales. Poniendo especial atención en los prólogos y en los índices.

A pesar de que aún estamos analizando las fuentes primarias, podemos presentar a manera de resultados preliminares las siguientes observaciones:

Sobre los autores

Los autores eran principalmente sacerdotes y profesores de diferentes especialidades.

Es posible ver cuáles eran los autores de mayor influencia, ya por el número de obras publicadas y reeditadas, tal es el caso de Benito Bails, José Mariano Vallejo y en este conjunto destacamos el caso de Manuel Poy y Comes cuyas obras fueron reeditadas numerosas veces por sus Fausto de la Vega, Salvador Ros y José María Ferrer; ya por la mención explícita dentro de los prólogos de otros autores

Aun los que quieran hacer su única profesión de estas , estudiándolas á fondo y en toda su estension , ahorrarán mucho tiempo y trabajo , comenzando por estos Elementos , y entendiendo despues de sabidos , sus conocimientos recorriendo qualquiera de las apreciables obras que tenemos ya en nuestra lengua: la de D. Benito Bails, la de D. José Vallejo , ó la de D. Tadeo Lope y Aguilar , que con mas doctrina y estension tratan las materias contenidas en esta.

(Juan Justo García, 1814).

cido dicha obra , pensé en añadirle la parte teórica , aprovechándome en algunas partes , como ya hago mencion de ello , de las advertencias y observaciones de los célebres autores Vallejo , Cerdá , Bails , Tosca , y otros españoles y extranjeros.

(Manuel Poy y Comes, aumentada por Salvador Ros y Renart, 1819).

La influencia de autores extranjeros también se aprecia por ejemplo en:

El fundamento que yo tuve, para usar del método que espongo, es la máxima del sapientísimo Laplace, que dice: «Preferid en la enseñanza los métodos generales, procurad presentarlos del modo mas simple, y veréis al mismo tiempo que son casi siempre los mas fáciles. Tuve presente además otro consejo del mismo Laplace, á saber: que no se abuse del método de induccion para la demostracion de las proposiciones; pues aunque el método de elevarse á

(José Mariano Vallejo, 1821).

Asimismo, algunos autores reconocían haber extraído parte de las obras de otros autores:

<i>Del multiplicar compuesto de tercera especie.</i>	<i>92.</i>
<i>Método de Vallejo en la multiplicacion de números deno-</i>	
<i>minados.</i>	<i>97.</i>
<i>Del partir números denominados, 1ª especie.</i>	<i>99.</i>

(Francisco Moreu, 1823).

CAPÍTULO PRIMERO.

LECCION PRIMERA.

*Ideas generales estractadas de la introducción
al tratado de matemáticas de D. José
Mariano Vallejo.*

(Cayetano Riera, 1835).

Me ha parecido conveniente el sacar de la obra del P. Cerdá los teoremas fundamentales de las proporciones, y de la obra del mismo Autor y de la de Vallejo el tratado de logaritmos por el método, precision y finura de sus demostraciones, y al mismo tiempo para aligerarme de algun poco de trabajo.

(Manuel Poy y Comes, aumentada por Salvador Ros y Renart, 1842).

Sobre la Población Diana

Las obras estaban dirigidas hacia una amplia variedad de público: niños, jóvenes, comerciantes, militares, seminaristas, contadores, público en general. Esto es posible de observar gracias a los prólogos, los títulos y las portadas.

No resta , pues , otra cosa sino que los artesanos sepan aprovecharse del bien que les proporciona la Academia , que no contenta con darles

(Benito Bails, editado por Antonio de Varas, 1801).

**PARA USO
DE LOS SEMINARIOS Y ESCUELAS
públicas del reyno , donde de órden de
S. M. se ha establecido su método.**

(Torcuato Torío de la Riva, 1818).

de que se componen. De este modo el comerciante, el oficinista y el artesano, tendrán las noticias necesarias para conducirse con acierto en sus operaciones: el médico, jurista, canonista y teólogo, lo que mas les interese saber para el completo estudio de sus respectivas facultades; y todos adquirirán las precisas ideas para distinguir el verdadero mérito, y saber apreciar las fatigas que los Matemáticos se toman en beneficio de la humanidad.

(José Mariano Vallejo, 1819).

TABLAS C 138
PARA
UTILIDAD DE LOS PRINCIPIANTES
SACADAS
DEL TRATADO DE ARITMETICA

(Cayetano Riera, 1837).

**METODO NUEVO
BREVE, FÁCIL Y CURIOSO
DE ARITMETICA
TEÓRICA Y PRÁCTICA.**

*ÚTILISIMO A TODA CLASE DE PERSONAS,
aun á las que quíeran aprender sin maestro, por
la claridad con que se esplican sus reglas, y se
ejecutan las operaciones que las sensibilizan; y los
casos prácticos y ejemplos curiosos que comprende:*

(DLAL, 1840).

En cuanto a la exposición

Los autores presentaban su obra principalmente a manera de enunciados, seguido en número de preguntas y respuestas y, por último, muy pocos optaban por los diálogos ó versos.

*De la naturaleza de los números,
y sus diferentes especies.*

1 El asunto principal de la Arismética es enseñar como de muchos números se compone uno solo, ó uno solo se resuelve en muchos; ó, lo que viene á ser lo mismo, como de muchas partes se compone un todo, ó un todo se resuelve en sus diferentes partes. Quando junto unas con otras muchas partes para saber quanto monta el agregado de todas, de muchos números compongo uno solo: quando parto una suma de dinero entre muchos compañeros para saber la parte que le cabe á cada uno, señalo las diferentes partidas que componen la suma propuesta.

2 Componer de muchos números uno solo, ó resolver un número en otros muchos, es lo que se llama *calcular ó computar*.

(Benito Bails, 1790).

P *Regunto:* Que entendemos aquí por Llave?

Respondo. Lo que entendemos aquí por Llave no es otra cosa, que aquella idea general que con franqueza nos abre el conocimiento para descubrir con tino y acierto lo oculto que en sí contiene el dilatado campo de la Aritmética y Algebra.

PROEMIALES.

P. Que es Aritmética?

R. Aritmética es una ciencia que trata de la cantidad discreta, ó de los números.

(Poy y Comes, 1790).

M. Pues pon los mismos siete, porque en no llegando á diez se escribe el mismo guarismo; y leerás la suma diciendo: siete mil nueve cientos, cinquenta y quatro libras, que la señalarás como ves, pues es el caracter distintivo de la libra.

D. Me parece que con esta leccion tengo bastante para entender en que consiste el sumar enteros, pues me figuro que siempre habré de seguir este método: ya fuesen dineros las partidas que haya de sumar; ya fuesen varas, pesos, ó qualesquiera otra cosa.

M. Es cierto, mientras sean enteros, siempre seguirás este método.

D. Lo que yo no entiendo, es aquello de contarle siempre por diez, y por cada diez llevar uno.

M. Voy á explicartelo y á satisfacer tu duda. Que siempre

(Miguel Solá, 1801).

Quitar un número de otro
No es mas que substraccion,
***Substraendo* al menor llamamos,**
Y al mayor *minuyendo* , y son
Resta , esceso ó diferencia
Los nombres del resultado;
Si la nota del substraendo
Pon aqui el mayor cuidado.
Es mas que la del minuendo
Diez á esta aumentarás,
Y uno á izquierda del substraendo
En tal caso añadirás.

(León Moles, 1837).

En cuanto al contenido

El contenido temático variaba en correlación con el público al que iban dirigidas las obras y/o la filosofía del autor con respecto a lo que se les debería enseñar. Además, es posible observar diferencias entre los autores al incluir o no algunos temas y el orden de la disposición de los mismos. Es de destacar, por ejemplo, que ya en 1819 Salvador Ros presentaba en una edición aumentada de la obra de Manuel Poy y Comes el Sistema Métrico Decimal, bajo el título de Nuevo Sistema Decimal.

Las definiciones dadas de aritmética oscilaban principalmente entre arte y ciencia enfocadas a los números y sus propiedades.

Observaciones generales

Es posible observar cuestiones del contexto social, político y económico del momento de la publicación del libro. Por ejemplo Juan Pérez de Moya en el libro nueve de su obra, en un diálogo entablado por Antímaco y Sofronio en el que confronta 2 posturas contrarias hacia la aritmética poniendo a discusión su utilidad, nos deja percibir la visión que en ese momento se tenía de las colonias españolas en América.

Aritmética es tan necesaria como decir. Porque veamos, si este Arte (que así le quiero llamar) fuera tan necesario, mal pudieran pasar muchas gentes, las cuales no solamente no la aprenden, pero aun ninguna noticia de ella tienen, como vemos claramente entre los Indios y Negros y otras muchas gentes, entre las cuales, ni la Aritmética se halla, ni nadie la procura hallar, como dice el Filósofo: muchas de estas Naciones no saben contar de quatro adelante, y vemos con todo eso, que en sus compras y ventas, en sus tratos y comercios, no haber estos engaños que entre nosotros, que somos tan grandes contadores; antes veo que tratan tan sencillamente, que todas sus ventas y compras son muy limpias de engaño: para lo qual, dexada la experiencia, bas-

(Manuel Poy y Comes, aumentada por Salvador Ros y Renart, 1819).

Vallejo haciendo hincapié en el método para enseñar con su obra, nos permite imaginarnos parcialmente el sitio en el que se impartían las lecciones.

verla á aprender. Y 3º Que el Maestro en vez de enseñar á cada niño en particular, debe formar una clase de todos los que se dediquen á la Aritmética, y en el encerado que hay en todas las escuelas para manifestar los principios de la caligrafía, ó en otro cualquiera, les debe hacer que contraygan las reglas generales de cada operacion,

(José Mariano Vallejo, 1824).

Asimismo cómo con el paso del tiempo va madurando la imprenta y con ello, aumentan los recursos de presentación de los autores (gráficos, estructura, etc.).

A manera de reflexión

Las observaciones obtenidas a partir de esta primera parte del análisis preliminar de fuentes primarias nos animan a continuar por este camino, dado que empezamos a cumplir los objetivos fijados al principio de la investigación. Creemos que a partir de ello podremos hacer una selección mejor justificada de los libros que servirán para el análisis de contenido final.

Agradecimientos:

Con el apoyo del Programa Alban, Programa de Becas de Alto Nivel de la Unión Europea para América Latina, beca nº E07D403010MX

Referencias bibliográficas**Fuentes primarias:**

- Bails, B. (1790). *Arismética para negociantes*. Imprenta de la Viuda de Ibarra. Madrid.
- Bails, B. (1801). *Aritmética y geometría práctica de la real academia de San Fernando*. Editado por Antonio de Varas. Imprenta de la Viuda de Ibarra. Madrid.
- Bails, B. (1804). *Principio de aritmética de la real academia de San Fernando*. Por la Viuda de Joaquín Ibarra. Madrid.
- Bails, B. (1805). *Principios de matemática de la real academia de San Fernando. Cuarta Edición, añadida. Tomo I*. Imprenta de la hija de D. Joaquín Ibarra. Madrid.
- D.L.A.L. (1840). *Metodo nuevo breve, fácil y curioso de aritmética teórica y práctica*. Imprenta de D.M. Ramos. Plasencia.
- de Alemany, L. (1829). *Tratado elemental de aritmética: dispuesto para uso de la juventud. Segunda edición corregida*. Imprenta de D. Eusebio Aguado. Madrid.
- de Alemany, L. (1843). *Principios de Aritmética, Algebra y Geometría: dispuestos para las clases inferiores de segunda enseñanza*. Librería de Sojo. Madrid.
- Ferrer de la Concepción, F. (1821). *Tratado de Aritmética mercantil para uso de los discipulos de las escuelas Pías de Cataluña*. Por Miguel y Tomás Gaspar. Barcelona.
- Ferrer de la Concepción, F. (1829). *Colección de problemas de Aritmética para uso de los discípulos de las escuelas pías de Cataluña*. Impreso por los hermanos Juan y Jaime Gaspar. Barcelona.
- García J.J. (1814). *Elementos de aritmética, álgebra y geometría. Cuarta Impresion. Tomo Primero*. Imprenta de D. Vicente Blanco. Salamanca.

- García J.J. (1814). *Principios de aritmética y geometría sacados de los elementos de aritmética, álgebra y geometría*. Imprenta de D. Vicente Blanco. Salamanca
- García, J. J. (1794). *Elementos de aritmética, álgebra y geometría*. D. Francisco de Tovar. Salamanca.
- Gerard, J. (1798). *Tratado completo de Aritmética, ó método para aprender á contar por principios*. Imprenta de Vega y Compañía. Madrid.
- Herranz, D. N. (1790). *Aritmética pura y comercial, dividida en dos partes: la primera instruye á los principiantes en lo perteneciente á la aritmética pura, la segunda trata de los cambios ó reducciones de monedas de la mayor parte de las principales plazas de comercio de la Europa*. Imprenta de D. Benito Cano. Madrid.
- Lacroix, S.F. (1839). *Tratado elemental de aritmética, compuesto en francés para uso de la escuela central de las cuatro naciones. Tomo I. Quinta Edición*. Imprenta Nacional. Madrid.
- Lista, A. (1823). *Elementos de matemáticas puras y mixtas. Segunda Edición. Tomo I*. Imprenta de D. León Amarita. Madrid.
- Martínez Rodrigo, J. (1845). *Aritmética. Definiciones más indispensables y teoría de sus principales operaciones con el correspondiente número de problemas ya resueltos, y aplicados á los usos mas comunes del trato social, para que sirvan de modelos en las varias cuestiones que pueden ocurrir. Segunda Edición*. Imp. de D. Victoriano Hernando. Madrid.
- Moles, L. (1837). *Elementos generales de aritmética, en verso castellano, para la mejor inteligencia de los jóvenes alumnos que concurren á la Escuela pública de Vinaroz*. Imprenta de Cabrerizo. Valencia.
- Moreu, F. (1823). *Elementos de aritmética mercantil. Primera parte*. Imprenta nacional de la Viuda Roca. Barcelona.
- No específica, (1804). *Tratados de Matemáticas para la instrucción de los militares*. Imprenta Real. Madrid.
- No específica, (1822). *Principios generales de aritmética para uso de las Escuelas Pías de Castilla*. Imprenta de A. Martínez. Madrid.
- Oriol y Bernadet, J. (1842). *Los Rudimentos de aritmética, ó sean, las principales definiciones, tablas y reglas de esta ciencia para uso de las escuelas de niños y niñas*. Imprenta de José Matas. Barcelona.
- Oriol y Bernadet, J. (1845). *Manual de aritmética demostrada al alcance de los niños*. Imprenta de José Matas. Barcelona.

- Pérez de Moya, J. (1798). *Aritmética, práctica, y especulativa. Décimaquinta impresion.* En la Oficina de Don Plácido Barco Lopez. Madrid.
- Poy y Comes, M. (1790). *Llave aritmética y algebráyca.* Francisco Suriá y Burgada, Impresor de S.M. Barcelona.
- Poy y Comes, M. (1819). *Elementos de aritmética numérica y literal al estilo de comercio para instrucción de la juventud. Quinta Edición, aumentada por su discípulo D. Salvador Ros y Renart.* Tomo 1. Oficina de Sierra y Martí. Barcelona.
- Poy y Comes, M. (1824). *Llave aritmética y algebráyca. Cuarta impresión.* Imprenta de la Viuda de D. Agustín Roca. Barcelona.
- Poy y Comes, M. (1835). *Elementos de aritmética numérica y literal al estilo de comercio para instrucción de la juventud. Secsta Edición. Tomo I.* Aumentada por Fausto de la Vega. Oficina de D. Juan Francisco Piferrer impresor de S.M. Barcelona.
- Poy y Comes, M. (1842). *Aritmética mercantil de Poy. Nuevamente corregida y aumentada, y acompañada de un Tratado elemental de álgebra. Séptima edición. Tomo I.* D. Juan Francisco Piferrer, impresor de S.M. Barcelona.
- Poy y Comes, M. (1842). *Elementos de aritmética numérica y literal al estilo de Comercio para instrucción de la juventud.* Imprenta de Juan Gaspar. Barcelona.
- Poy y Comes, M. (1843). *Aritmética mercantil. Aumentada con un tratado elemental de cambios para instrucción de la juventud.* Imp. de Manuel Saurí. Barcelona.
- Poy y Comes, M. (1843). *Compendio de los elementos de aritmética numérica al estilo de comercio para instrucción de la juventud en las escuelas de primeras letras.* Miguel y Jaime Gaspar. Barcelona.
- Riera, C. (1829). *Principios de aritmética científico - práctica dirigida á las escuelas. 3ª impresión.* Imprenta de José Torner. Barcelona.
- Riera, C. (1835). *Principios de aritmética científico-práctica dirigida a las escuelas. Cuarta impresión. Parte primera.* Imprenta de José Torner. Barcelona.
- Riera, C. (1837). *Tablas para utilidad de los principiantes sacadas del tratado de Aritmética.* Imprenta de Ignacio Estivill. Barcelona.
- Romero y Serrano, L.M. (1797). *Lecciones de aritmética puestas en forma de diálogo.* Imprenta de Villalpando. Madrid.

- Santos Velasco, V. (1844). *Cuaderno de aritmética. Segunda Edición*. Imp. de Vicente Blanco. Salamanca.
- Solá, M. (1801). *Arismética teórico-práctica y mercantil dispuesta en forma de dialogo*. Por la compañía de Jordi, Roca y Gaspar. Barcelona.
- Taboada y Ulloa, J.A. (1795). *Antorcha. Aritmética práctica, provechosa para tratantes y mercaderes. Instruye á los principiantes con Reglas del Arte Menor, y muchas breves para reducir las Monedas de Castilla unas en otras. Declara de modo seguro de comerciar con dichas Monedas, la cobranza de Vales, y Letras de todas partes, y otras curiosidades*. Real Compañía de Impresores y Libreros del Reyno. Madrid.
- Torio de la Riva, T. (1818). *Ortología y diálogos de caligrafía, aritmética, gramática y ortografía castellana*. Por Ibarra, impresor de cámara de S. M. Madrid.
- Vallejo, J.J. (1819). *Compendio de matemáticas puras y mistas. Tomo 1*. Imprenta de Estévan. Valencia.
- Vallejo, J.M. (1806). *Aritmética de niños escrita para uso de las escuelas del Reyno*. Imprenta Real. Madrid.
- Vallejo, J.M. (1821). *Tratado elemental de matemáticas para uso de los caballeros seminaristas del seminario de nobles de Madrid y demás casas de educacion del Reino. Tercera Edición. Tomo I. Parte primera que contiene la aritmética y el álgebra*. Imprenta del gobierno político superior. Barcelona.
- Vallejo, J.M. (1824). *Aritmética de niños escrita para uso de las escuelas del Reyno. Tercera Edición corregida, y aumentada con las reglas de compañía, aligacion é interés; y con el modo de formar el cuadrado y cubo de un número y de estraher la raíz cuadrada, y un apéndice sobre las razones y proporciones*. Imprenta que fue de García. Madrid.
- Vallejo, J.M. (1840). *Compendio de matemáticas puras y mistas. Cuarta Edición. Tomo 1*. Imprenta Garraayaza. Madrid.
- Vallejo, J.M. (1841). *Tratado Elemental de Matemáticas. Para uso de los Caballeros seminaristas. Cuarta Edición. Tomo I. Parte primera*. Imprenta Garraayaza. Madrid.
- Verdejo González, F. (1795). *Compendio de aritmetica teorica y practica para comerciantes, artesanos y negociantes*. Por la Viuda de D. Joaquín de Ibarra. Madrid.

Fuentes secundarias:

- Carrillo, C. y Sierra, M. (2009). La evolución de la aritmética como materia escolar. Un análisis de libros de texto desde la revolución francesa hasta el final de la guerra civil española (1789-1939). *Actas del XII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*. Santander, España.
- Carrillo, D. (2005). *La Metodología de la aritmética en los comienzos de las Escuelas Normales (1838-1868) y sus antecedentes*. Tesis doctoral. Universidad de Murcia.
- Colomer, J. (2009). *La Construcción y la Metodología de la Aritmética según los Manuales Escolares. Siglos XIX y XX. Un Enfoque Filosófico*. Tesis doctoral. Universidad Nacional de Educación a Distancia. Madrid.
- Gómez, B. (1994). *Los métodos de cálculo mental en el contexto educativo y los procesos cognitivos involucrados en los errores que cometen los estudiantes al aplicarlos*. Tesis Doctoral. Universidad de Valencia.
- González, M.T. (2002). *Sistemas Simbólicos de Representación en la Enseñanza del Análisis Matemático: Perspectiva Histórica*. Tesis doctoral. Universidad de Salamanca.
- Maz, A. (2005). *Los Números Negativos en España en los Siglos XVIII y XIX*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.
- Ruiz, J. (1976). El método histórico en la investigación histórico-educativa. *Revista Española de Pedagogía*. No. 134 pp. 449-475. Madrid.
- Schubring, G. (1987). On the methodology of analysing historical textbooks: Lacroix as textbooks authors. *For the Learning of Mathematics*, 7(3), 41-51.
- Sierra, M. (2005). Los Conceptos de Límite Funcional y Continuidad en los Manuales de Enseñanza Secundaria en la Segunda Mitad del Siglo XX. Resúmenes del *Primer Congreso Conjunto de Matemáticas RSME-SCM-SEIO-SEMA*. Valencia, España.
- Sierra, M., Rico, L. y Gómez, B. (1997). El número y la forma. Libros e impresos para la enseñanza del cálculo y la geometría. En Escolano, A. (Ed.), *Historia ilustrada del libro escolar en España: del Antiguo Régimen a la Segunda República*. pp. 373-398.

UN ANÁLISIS SISTÉMICO DE LA OBRA DE JOSÉ MARIANO VALLEJO DESDE LA PERSPECTIVA DE LA INVESTIGACIÓN HISTÓRICA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA: LIBROS PARA PRIMERA ENSEÑANZA

José Iván López Flores, Modesto Sierra Vázquez
Universidad de Salamanca

Resumen

Se presenta el avance de una investigación sobre el científico-pedagogo José Mariano Vallejo desde la perspectiva de la Historia de la Educación Matemática, cuyo objetivo es caracterizar la obra de este autor como materia a aprender. El diseño metodológico consta de un análisis tridimensional de la obra del autor granadino que nos permite, de una manera sistemática, mirar la evolución de la obra y las influencias que la motivaron. Asimismo, para caracterizar cada uno de los libros elegidos se realiza un análisis de contenido centrando fundamentalmente en mostrar las estructuras conceptuales, los sistemas de representación usados y la fenomenología. En este escrito se presenta la parte de la obra dedicada a la enseñanza básica.

Abstract

We report the progress of research scientific-pedagogue José Mariano Vallejo from the perspective of the History of Mathematics Education, which aims to characterize the work of this author as a subject to learn. The methodological design consists of a three-dimensional analysis of the author's work allows us, in a systematic way, look at the evolution of the work and the influences that motivated. Furthermore, to characterize each of the chosen books, we do an analysis of content, focusing mainly on showing the conceptual structures, systems of representation used, and phenomenology. In this paper we present the part of the work devoted to basic education.

López, J.I. y Sierra, M. (2011). Un análisis sistémico de la obra de José Mariano Vallejo desde la perspectiva de la investigación Histórica en Educación Matemática: libros para primera enseñanza. En M.M. Moreno, N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los Grupos de Investigación de la SEIEM* (pp. 373-391). Lleida.

Introducción

José Mariano Vallejo y Ortega (1779-1846) fue un matemático-pedagogo granadino interesado por temas científicos y su enseñanza. Sus libros tuvieron gran influencia tanto sobre el sistema educativo español como en diversos países de América por un espacio de aproximadamente 70 años. Razón por la cual el objetivo general de este estudio es *caracterizar su obra como materia a aprender*.

Se han consultado diversos fondos documentales digitales así como de Universidades españolas y se han contemplado 28 libros entre distintas ediciones de las 9 obras principales que sobre matemáticas tiene el autor. En este escrito se presenta un avance de la investigación correspondiente a la parte de la obra dedicada a la enseñanza básica, constituida por dos libros en sus distintas ediciones. Los libros analizados fueron la *Geometría de Niños*, edición 1845 y la *Aritmética de Niños* en las ediciones de 1806, 1824, 1841 y 1845.

Marco conceptual y antecedentes

Esta investigación se sitúa en la Historia de la Educación Matemática y se apoya en el método histórico (Ruiz, 1976) para la construcción de una explicación histórica de una parte muy particular de la realidad: la *oeuvre* de un autor de libros de texto de matemáticas. El desarrollo de este método ha sido reportado en López y Sierra (2009).

El análisis se hará siguiendo a Schubring (1987), en el sentido de que se usará la aproximación holística propuesta mediante el uso de su esquema tridimensional para el análisis de una *oeuvre* compuesta por libros de texto históricos:

La primera dimensión consiste en el análisis de los cambios entre ediciones de un libro de texto escogido como punto de partida, dígase uno de álgebra o uno de aritmética.

La segunda dimensión consiste en encontrar los correspondientes cambios en otros libros de texto pertenecientes a la misma oeuvre, mediante el estudio de aquellas partes que tienen campos conceptuales relacionados, dígase álgebra geométrica, trigonometría, etc. Esta dimensión se compone de dos momentos: el primero consiste en la realización de un *análisis de contenido* (cuya explicación abordamos en el siguiente apartado), y en un segundo momento se comparan estos elementos encontrados con aquellos presentes en otras partes de la obra de Vallejo que son conceptualmente relacionados con ellas.

La tercera dimensión correlaciona cambios en los libros de texto con cambios en el contexto: cambios en los planes de estudio, decretos ministeriales, debates didácticos, evolución de las matemáticas, cambios en la epistemología.

Análisis de contenido

De forma general el análisis de contenido es “una técnica de investigación destinada a formular, a partir de ciertos datos, inferencias reproducibles y válidas que puedan aplicarse a su contexto” (Krippendorff, 1990; p.28).

Cohen y Manion (1989, p. 93, citado en Maz, 2005) indican que: “la técnica del análisis de contenido puede aplicarse a aspectos seleccionados de la investigación histórica en educación” y, más particularmente, agregan luego: “Otro empleo que viene rápidamente a la imaginación sería un examen del contenido de los libros de texto en diferentes puntos de la historia”.

El mismo análisis de contenido por sí mismo no provee de una fuente de análisis, ésta debe provenir de la disciplina a la cual se aplica el estudio, en nuestro caso la Didáctica de la Matemática.

Las ideas que nos permiten encontrar esas fuentes parten de una concepción particular de lo que son las matemáticas, según Rico *et al* (2008) las matemáticas son:

...un modelo paradigmático de proporcionar significado a relaciones y expresiones abstractas, que no corresponden a objetos o propiedades físicas, pero que satisfacen un marco de experiencias estructuradas, relacionadas con las acciones de clasificar, contar, ordenar, situar, representar, medir, expresar armonía, buscar relaciones y regularidades, jugar y explicar (Devlin, 1994; Steen, 1990).

Según Rico *et al* (2008), si miramos las conexiones internas entre conceptos matemáticos estaremos mirando su estructura, y ésta nos servirá de referencia a cada elemento de la estructura; un concepto es objetivo y potencialmente argumentativo en tanto se hacen uso de sus conexiones con otros conceptos.

Hay diferentes significados para un mismo concepto matemático, que vienen dados por las estructuras conceptuales que lo refieren, por los sistemas de símbolos que lo representan, y por los objetos y fenómenos de los que surge y que le dan sentido. Sostenemos que esto es así porque un mismo concepto admite una pluralidad de relaciones internas, de modos de representación y de sentidos, que vienen determinados por las relaciones externas del concepto de referencia.

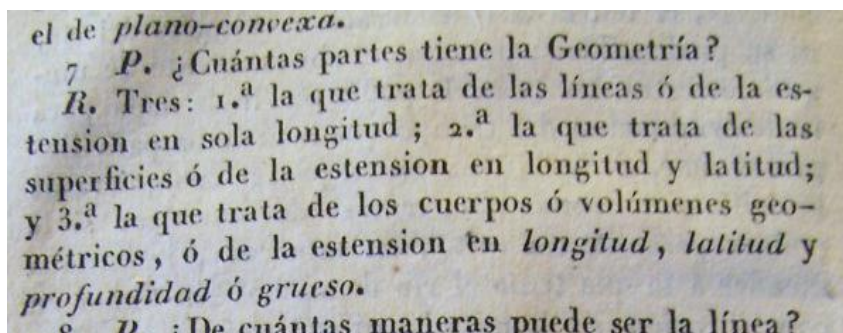
“El análisis de contenido de un texto escolar de matemáticas se diversifica, pues, en tres tipos de análisis, según los significados antes mencionados: el que estudia la propia estructura matemática considerada; en este caso un análisis de la estructura matemática es determinante; el que considera los diversos sistemas de representación utilizados para expresar dichos conceptos; y el que realiza el análisis fenomenológico de los conceptos estudiados, junto con los procesos de modelización en que tales conceptos se implican (Maz, 2005)”.

Análisis de contenido de la Geometría de Niños (GDN)

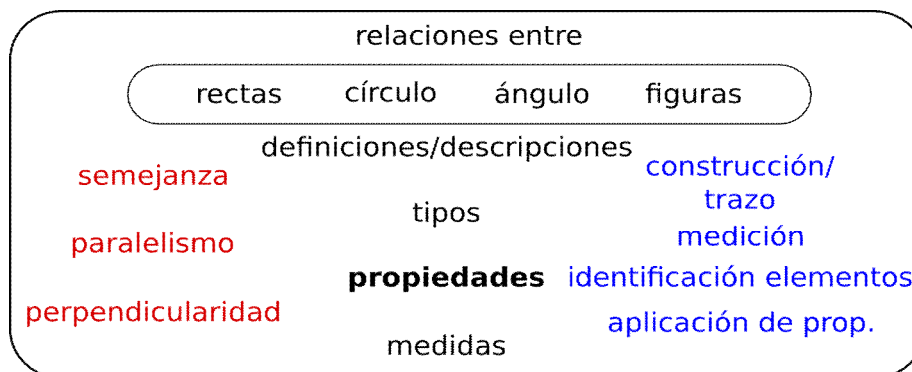
En la secuenciación de los contenidos de la GDN se pueden identificar tres grandes bloques que son paralelos en la forma en que se estructuran: conocimiento conceptual compuesto por los elementos primarios de la geometría (en forma de nociones, definiciones) y resultados sobre ellos (en forma de propiedades, que en términos de formalidad matemática algunos son teoremas no demostrados).

La estructura que se sigue en la GDN está organizada en *tres focos conceptuales* que están basados en la idea de dimensión. Desde el primer momento de la obra se señalan las diferencias entre longitud, latitud y profundidad que organizarán los bloques a enseñar. Si bien los bloques no permanecen sin traslaparse, existen elementos que son únicos en cada uno de ellos.

Según vemos en la GDN (Vallejo, 1834, pág. 4):



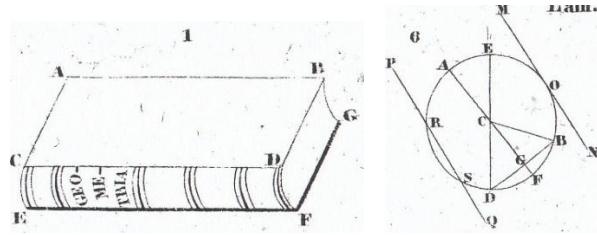
A modo de ejemplo ponemos el mapa conceptual correspondiente a la primera parte:



Las otras partes tienen mapas similares.

Sistemas de representación

Figurales (Vallejo, 1834, lám. 1):



Textuales (Vallejo, 1834, pág. 3):

6 P. ¿De cuántas maneras puede ser una superficie?
 R. De dos: *plana* y *curva*. Se dice que es plana cuando todos sus puntos se hallan tan salientes los unos como los otros, á cuya superficie se le caracteriza tambien con el nombre de *plano matemático*, ó simplemente *plano*. Se dice que es curva, cuando unos puntos sobresalen mas que otros. Las superficies curvas pueden ser de dos maneras: *convexas* y *cóncavas*.

Tabulares (Vallejo, 1834, pág. 44):

	<i>Lado.</i>	<i>Perímetro.</i>	<i>Radio oblicuo.</i>	<i>Radio recto.</i>	<i>Superficie.</i>
Triángulo inscrito.....	1,7321	5,1962	1,0000	0,5000	
Triángulo circunscrito...	3,4641	10,3923	2,0000	1,0000	1,2990
Cuadrado inscrito.....	1,4142	5,6569	1,0000	0,7071	5,1962
Cuadrado circunscrito....	2,0000	8,0000	1,4142	1,0000	2,0000
Pentágono inscrito.....	1,1756	5,8779	1,0000	0,8090	4,0000
Pentágono circunscrito...	1,9613	9,8696	1,6180	1,0000	5,0000

Simbólicos (Vallejo, 1834, pág. 26):

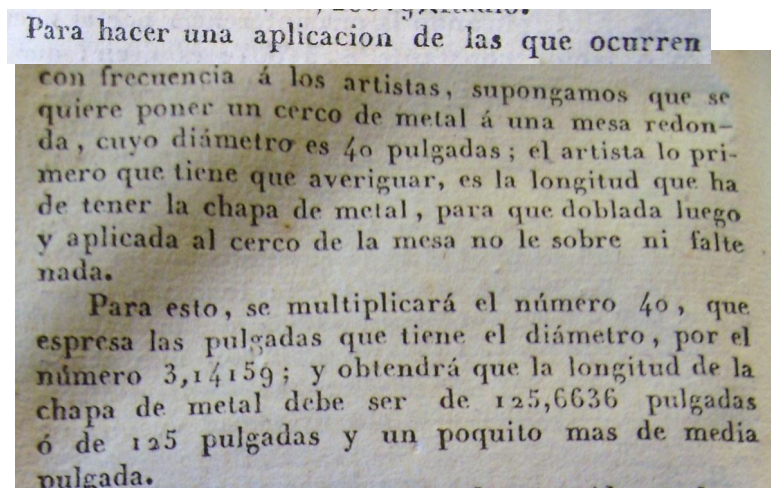
Se llaman *grados*, corresponden 90 al cuadrante; de manera, que cuando se dice un ángulo de un grado, de dos &c., se da á entender, que dicho ángulo es $\frac{1}{90}$ ó $\frac{2}{90}$ del ángulo recto; ó que dicho ángulo tiene con el recto, que es el que se toma por unidad, la misma relación.

Análisis fenomenológico

La mayor parte de la obra transcurre en un contexto puramente matemático.

Fenómenos físicos: Cálculo de la circunferencia terrestre.

Artístico: Cálculo/colocación de los elementos de una mesa (Pág. 66).



Para cada una de estas situaciones podemos identificar subestructuras conceptuales, que “agrupan” conocimiento conceptual y procedimental.

Elementos de comparación entre campos conceptuales relacionados con la GDN

Una de las características principales que podemos sacar para la GDN es que no existen demostraciones de teoremas. Éstos son presentados en forma de listas de “propiedades” que son explicados, en la mayor parte de los casos, a través del uso del contexto matemático y de las representaciones textuales, figúrales y simbólicas.

Si se compara con aquellas otras obras de Vallejo que tratan sobre geometría se entrará que la característica anterior no se encuentra, en el tomo I segunda parte del *Tratado Elemental de Matemáticas* (edición de 1812) y en el tomo I del *Compendio de Matemáticas puras y mistas* (edición de 1840), se pueden encontrar estas diferencias (para un análisis más profundo mirar López, Sierra, (2010).

Relaciones entre los contenidos y el contexto en la GDN

La edición del *Tratado* corresponde a la segunda etapa (1812), y tanto la GDN (1834) como la edición analizada del *Compendio* (1840) pertenecen a la tercera, lo que de primera mano nos permitiría afirmar que son relativamente lejanas entre sí.

Sin embargo, si bien la GDN se publica en 1834 este libro fue empezado al mismo tiempo que el *Compendio de Mecánica Práctica* (1815), por lo que podemos decir que es de la misma época que el *Tratado* (1812).

...esta Geometría la principié al mismo tiempo que mi *Compendio de Mecánica Práctica*. Las circunstancias no me han permitido publicarla; y ahora lo hago, estimulado tanto de lo que se previene en el artículo 35 de la Instrucción para los subdelegados de Fomento, como por lo que se ha verificado ya en las *Escuelas Normales*, establecidas en esta Corte bajo mi inmediata inspección (Vallejo, 1834, pág. III).

El autor señala que la obra se terminó en 1834 y que se agregaron métodos que aprendió en el extranjero. Asistió al Curso de Geometría y mecánica aplicada a las artes, de Charles Dupín, que como Vallejo mismo señala fue una influencia para la GDN.

Tampoco puedo dejar de anunciar, que tengo ya medio puesta en limpio, para publicarla á la mayor brevedad, una Geometría para uso de los niños, que tenía empezada desde que compuse mi *Compendio de Mecánica práctica*; y que la circunstancia de hallarme en París, en la época en que el célebre Monsieur Charles Dupín trata de dar en el Conservatorio de Artes y oficios su segundo Curso de Geometría y Mecánica aplicadas á las Artes, y de publicar las lecciones, según las vaya explicando, me servirá al mismo tiempo para aprovecharme de cuanto conduzca para mi objeto (Vallejo, 1833, pág. 78)

Vallejo señala en el prólogo que algo que le impulsa a la publicación de la GDN es el contenido del artículo 35 de la Instrucción para los Subdelegados de Fomento (Martínez, 1869, pág. 831):

... cada pueblo de cien vecinos debe tener una escuela de primeras letras, en la cual, como en todas, se establecerá tan pronto como sea posible el método de Vallejo, que tan visibles progresos permite hacer en la enseñanza...

Ahí mismo encontramos lo que consideramos es la razón de las diferencias entre éste y los otros dos libros:

En las Escuelas Normales se les han presentado cuantos libros son conducentes para forman rectamente su corazón, y difundir aquella instrucción popular que es tan indispensable en la clase obrera é industrial de nuestra Nación.

Los libros, que hasta ahora se les han puesto en la mano, son las Lecciones Escogidas de los Padres Escolapios ..., el Manual del Carpintero y Ebanista, y el Manual de Señoritas, donde se insertan el de la Costurera, Planchadora, Lavandera &c. Mas como estas dos últimas obras hacen uso de figuras para la correspondiente explicación, no se pueden entender sin que precedan unas nociones claras de Geometría; por lo cual, me apresuré á poner corriente el original; imprimí desde luego el primer pliego, y lo hice leer en las escuelas de ambos sexos: lo cual ha

producido ya los mas ventajosos resultados; pues en los exámenes generales que se tuvieron el 27 de abril ... manifestaron con mucha soltura y desembarazo estar impuestos en todo lo que precede á la doctrina de los ángulos (pág. IV).

Podemos ver que la razón por la que no se incluyen demostraciones en la GDN es que estaba dirigido a un público específico: la clase obrera, que supone Vallejo ésta la aplicará de un modo más bien utilitario.

García (2002) señala que las obras de Vallejo en cuanto a estructura están basadas en la obra de Le Blond, maestro de Matemáticas del Delfín de Francia. Es de llamar la atención que entre la GDN y la obra “*Abregé de l'arithmetique et de la géométrie de l'officier*” (1748) exista una gran similitud en cuanto a la estructura.

Análisis de contenido de la Aritmética de Niños (ADN)

La tabla de contenidos es reveladora en cuanto al hilo conductor del libro, son las operaciones las que guían la secuenciación de los mismos.

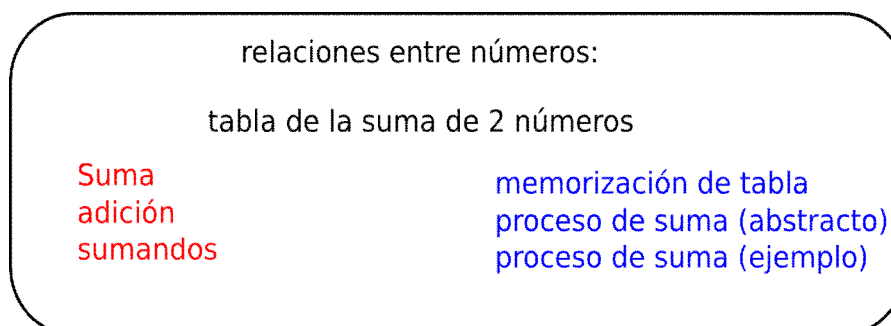
La definición de aritmética (Vallejo, 1806, pág. 1), corrobora esta idea:

“La ciencia que trata de averiguar las relaciones y propiedades de los números”

Está enfocada hacia las relaciones (operaciones) entre los números y las propiedades.

Del mismo modo que con la GDN, la APN tiene mapas conceptuales “repetidos”, uno para los preliminares, otro para la suma, otro para la resta, otro para la multiplicación, etc.

Ejemplificaremos con el mapa conceptual del capítulo 2, el relativo a la suma:

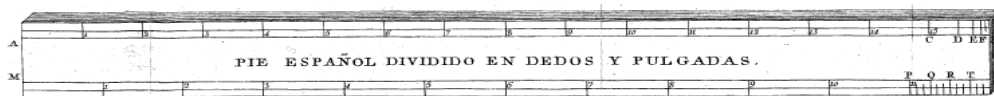


En todos los capítulos la estructura conceptual es la misma, una tabla para la operación, memorización de la tabla, un proceso que el autor hace en “abstracto”,

analizando diversos tipos de números y posteriormente aplica este proceso a ejemplos escogidos *ad hoc* a sus propósitos. En la ADN el conocimiento procedimental es una guía para la estructuración de la obra.

Sistemas de representación

Figural (Vallejo, 1806, pág. 157):



En el caso de la ADN es la única representación figural presente en el libro.

Textual (Vallejo, 1806, pág. 11):

19 P. ¿Qué han de hacer los niños para adiestrarse en escribir los números?

R. Escribir los números que se expresan en los exemplos que aquí se ponen, y proponerse otros á competencia.

Primer exemplo: el número *doscientos setenta* se escribe 270.

Segundo exemplo: el número *dos mil y treinta y nueve* se escribe 2039.

El uso de los textos es amplio en el caso de la ADN, prácticamente la totalidad de libro se desarrolla en texto.

Tabular (Vallejo, 1806, pág. 20):

1 y 1 son 2.	2 y 2 son 4.	3 y 3 son 6.
1 y 2 3.	2 y 3 5.	3 y 4 7.
1 y 3 4.	2 y 4 6.	3 y 5 8.
1 y 4 5.	2 y 5 7.	3 y 6 9.
1 y 5 6.	2 y 6 8.	3 y 7 10.
1 y 6 7.	2 y 7 9.	3 y 8 11.
1 y 7 8.	2 y 8 10.	3 y 9 12.
1 y 8 9.	2 y 9 11.	
1 y 9 10.		

9	0	3	5	8,6	1,2,2	7	5,8	3	7,2	6	9	3	3	5
decenas de trillon ó de tricuentos.	trillones ó tricuentos.	centenas de millar de billon ó de biciento.	decenas de millar de billon ó de biciento.	millares de billon ó de biciento.	centenas de billon ó de biciento.	billones ó bicientos.	centenas de millar de millon ó de cuento.	millares de millon ó de cuento.	decenas de millon ó de cuento.	centenas de millon ó de cuento.	millones ó cientos.	centenas de millar.	millares.	centenas.
														unidades.

En tres ocasiones hace uso de esquemas para presentar información de manera ordenada.

Fenomenología

Contexto matemático. La mayor parte del libro transcurre en un contexto puramente matemático, cuando se plantea un nuevo capítulo, el conocimiento, tanto procedimental como conceptual, se planten en un contexto matemático (Vallejo, 1806, págs. 29, 35):

60 P. ¿Cómo se executa la operacion de restar ó la substraccion?

R. Del modo siguiente: se coloca el subtrahendo debaxo del minuendo, de modo que se correspondan unidades debaxo de unidades, decenas debaxo de decenas &c.; se tira despues una raya debaxo del subtrahendo; se ve la diferencia que hay entre las unidades del subtrahendo y las del minuendo, ó lo que es lo mismo, se ve las unidades que faltan á las del subtrahendo para que tenga las mismas que el minuendo, y las que le falten se ponen debaxo de la raya en la columna de las unidades; se executa lo mismo con las decenas, centenas, millares &c., y el número que salga debaxo de la raya será la resta.

69 *P.* ¿Me podreis proponer algunos ejemplos para que se ejerciten los niños?

R. Si Señor: esto es muy útil, y principalmente si los procuran resolver conforme he dicho (53).

Primer exemplo en abstracto: si me pidiesen que hallase la diferencia entre los números 8231785 y 5371967, executaría la operacion como he explicado (60), y aquí se ve:

$$\begin{array}{r} 8231785 \\ - 5371967 \\ \hline 2859818 \end{array}$$

Y sacaría por resta el número 2859818.

Conversión de unidades (Vallejo, 1806, pág. 49).

Tercer ejemplo: quiero averiguar quantos maravedises hay en 83 doblones; para esto multiplicaré el 83 por los maravedises que tiene un doblon, que son 2040; y sacaré que son 169320 maravedises; pero como no es fácil conservar en la memoria las unidades de especie inferior de que se compone otra superior quando hay otras unidades intermedias, y lo que se conserva con facilidad es el orden con que se suceden las unidades, es mucho mas cómodo en estos casos el ir las reduciendo sin interrupcion: y así en el exemplo propuesto veré primero quantos pesos hay en los 83 doblones; despues los pesos que saque, veré los reales que componen, y luego este numero de reales veré los maravedises que tienen, en esta forma:

Primero multiplico los 83 doblones por 4, que son los pesos que tiene un doblon, y saco que en 83 doblones hay 332 pesos; multiplico despues estos 332 pesos por 15, que son los reales que tiene un peso, y saco que los 83 doblones, ó los 332 pesos, tienen 4980 reales; luego, multiplico este número de reales por 34, que son los maravedises que tiene un real, y saco que los 83 doblones contienen 169320 maravedises.

83 doblones.	
4	
332 pesos.	
15	
1660	
332	
4980 reales.	
34	
1992	
1494	
169320 maravedises.	

Comercial (Vallejo, 1806, pág. 151).

216 P. ¿Me podreis resolver otros exemplos de regla de tres simple directa?

R. Si Señor: primer exemplo: *un labrador ha comprado 276 reses vacunas en 97538 reales; ¿quántas podrá comprar con 390152 reales.* Como aquí el número principal del supuesto es 97538 reales, escribiré la question como aquí se ve:

97538 rs. : 390152 rs. : 276 rs. vs. : 1104 rs. vs.
y sacaré que puede comprar 1104 reses vacunas con dichos 390152 reales.

Segundo exemplo: *un mercader ha comprado 52 piezas de paño con 7000 reales, ¿quántas podrá comprar con 5257 reales?* Executando la operacion como he dicho, sacaré que puede comprar $39 \frac{364}{7000}$ piezas.

Aplicaciones a la vida cotidiana (Vallejo, 1806, pág. 24).

Segundo exemplo: un padre pregunta á su hijo los niños que hay en la escuela; el niño le responde que no los ha contado; pero si luego se acuerda de que hay 17 en la clase del conocimiento de las letras y formación de las sílabas; 13 en la de la unión de las sílabas para romper á leer; 9 en la que ya leen sin detenerse; 11 escribiendo, y 6 que se dedican á la aritmética, se halla en estado de responder á la pregunta de su padre; pararlo qual no tiene mas que sumar todos estos números; pues los niños que hay en la escuela se componen de los que hay en todas las clases juntas: y executando la operacion como aquí se ve:

17
13
9
11
6
56

Hallará que hay en la escuela cincuenta y seis niños.

De este modo vemos que el libro está enfocado fundamentalmente a la adquisición de conocimiento procedimental en forma de mecanización de las operaciones y que son los cambios entre unidades comerciales lo que domina el contexto.

Relaciones entre los contenidos y el contexto en la ADN

Según cita Vallejo:

Al componer y publicar esta obrita en 1804, tuve por objeto popularizar el conocimiento de los quebrados decimales, que hasta dicha época solo se daban a conocer en las Aulas de Matemáticas; y del cual se necesitaba indispensablemente, para la igualación de nuestras pesas y medidas, de que entonces se ocupaba el gobierno, en que yo trabajaba (Vallejo, 1845, pág. v).

De este modo queda resaltado el carácter un tanto utilitario de la obra, apoyando la idea de que es el dominio de las operaciones (conocimiento procedimental) el que guía la estructura de la obra.

Asimismo, sigue siendo válida la afirmación de García (2002) al señalar que las obras de Vallejo en cuanto a estructura están basadas en la obra de Le Blond, dato corroborado en *ñAbregé de l'arithmetique et de la géométrie de l'officierò*.

Cambios entre las ediciones de la ADN

El resto de las ediciones analizadas presenta características similares en cuanto a la estructura, el cambio entre ellas radica en el aumento de los temas tratados, vamos a mostrar estos cambios proporcionando en la medida de lo posible las relaciones que tienen estos cambios con el contexto del autor.

En la ADN de 1824 (portada) se puede ver:

**Corregida, y aumentada con las reglas
de compañía, aligacion é interés; y con
el modo de formar el cuadrado y cubo
de un número y de estraer la raiz
cuadrada, y un apéndice sobre las razones
y proporciones.**



Según se lee en el prólogo (Vallejo, 1824, pág. IV, VII), la razón de esta inclusión es:

...y en esta [edición] añadiré que la buena acogida que ha tenido esta obrita, dentro y fuera de la Corte por los buenos efectos que ha producido en la enseñanza, me han movido a corregirla con todo esmero y á añadir las reglas de *compañia*, *aligación é interés*, con el fin de reunir en ella todo lo necesario para los usos que por lo general ocurren en la sociedad.

... El deseo de manifestar mi gratitud al público por el singular favor que ha dispensado á esta obrita me ha estimulado a corregirla mas, y añadir un capítulo sobre el modo de formar el cuadrado y cubo de un número y el de estraer la raiz cuadrada, y un apéndice sobre las razones y proporciones; con el fin de completar en cuanto me ha sido posible toda la instruccion que sobre tan importantes materias se puede adquirir en la primera edad.

La razón que da el autor es clara, la de proveer de un material que abarque más usos prácticos.

En la ADN de 1841 (pág. 154), se incluye un segundo apéndice a la obra:

APÉNDICE 2.º Sobre la correspondencia de las unidades de pesas y medidas usuales de Francia con las de España.....	141
--	-----

En (Vallejo, 1845, pág. VI) se puede ver la razón de esta inclusión:

Ademas, siendo muchas las consultas, que diferentes personas me han hecho, acerca de las dimensiones que deben tener las medidas, por haberse suprimido en la Novisima Recopilacion, esta parte tan esencial de la Pragmatica de 20 de febrero de 1801 sobre igualacion de pesas y medidas, en la sexta edicion (nota del § 26) he añadido la parte de dicha Pragmatica relativa á las dimensiones de las medidas de granos y de líquidos, que malamente se ha omitido en la ley 5.ª título 9, libro 9, de la Novisima Recopilacion, impresa en 1805.

En este punto hay que señalar que esta edición la publica en una fecha posterior a su regreso del exilio en Francia, por lo que es de esperarse que la influencia gala esté presente en su obra.

En la ADN de 1845 (pág. 156) son incluidas las secciones:

APÉNDICE III. Problemas relativos á las ocupaciones del Bello Sexo.	147
APÉNDICE IV. Problemas relativos á los haberes de los soldadas, cabos, y sargentos.	151

En la misma obra (Vallejo, 1845, pág. VII) se explica las razones de ellos:

Por otra parte, he sabido que, en algunos establecimientos para instrucción de Señoritas, han adoptado por texto esta obrita; y como tengo cierta vanidad en haber dado la competente importancia á la educacion e instrucción del Bella Sexo, pues me resulta la satisfacción de haber sido el primero que ha cooperado á que, en los reglamentos de instrucción primaria, se ponga un capítulo espreso acerca de la instrucción de las mugeres, no he podido ménos de consagrar un apéndice para resolver ejemplos que les pueden ocurrir.

Por último, estando adoptada esta obrita en la Escuela Normal Militar, y en varios de los Regimientos, he puesto otro apéndice en que hay varios ejemplos relativos á las cuentas sobre haberes de soldados, cabos etc. Y ape-

En términos de Estructuras conceptuales son prácticamente las mismas. Salvo las añadiduras en forma de apéndices, los sistemas de representación se mantienen invariantes y en el caso de la ADN de 1845, la fenomenología presente se ve enriquecida con la presencia de nuevos contextos, como lo son la educación e instrucción del Bello Sexo y las cuentas propias de los soldados.

En el caso de las obras que tienen campos conceptuales relacionados con la ADN, están en tomo I del *Compendio* y el tomo I, primera parte del *Tratado*.

En ambos casos las obras están destinadas a la educación superior, por lo que la diferencia fundamental con ella radica en el hecho de que están presentes demostraciones de las proposiciones, hecho que en el caso de la ADN no está presente.

Conclusiones

Se ha hecho una caracterización de la obra de Vallejo de los libros destinados a la primera enseñanza, los dos libros analizados nos permiten concluir que está enfocada a la adquisición de conocimiento procedimental y que es precisamente este tipo de conocimiento el que guía la secuenciación de los contenidos de los libros.

En el caso de la GDN el contexto matemático es el que predomina y el cambio unidades comerciales en la aritmética.

Otro punto importante es que este análisis tridimensional permitió situar a la obra en el contexto del autor, permitiéndonos no solamente conocer el contenido por sí mismo sino también construir una explicación sobre las influencias o motivaciones que tuvo el autor para introducir cambios en los libros. En la mayoría de los cambios se pudo ver un incremento en los temas, con fines muy específicos.

Asimismo, se puede señalar que el diseño metodológico propuesto es eficaz para los fines de esta investigación ya que nos permite integrar de manera sistémica información que al inicio estaba dispersa.

Agradecimientos:

Con el apoyo del Programa Alban, Programa de Becas de Alto Nivel de la Unión Europea para América Latina, beca nº E07D403010MX

Referencias bibliográficas

- Devlin, K. (1994). *Mathematics: The Science of Patterns*. New York: Scientific American Library.
- Frege, G. (1996). *Escritos filosóficos*. Barcelona: Crítica.
- García, J. (2002). *Literatura española sobre las artes plásticas*. Vol. 2. Madrid: Encuentro.
- Krippendorff, K. (Eds) (1990) *Metodología de análisis de contenido. Teoría y práctica*. Editorial Paidós.
- Martínez M. (1869). *Diccionario de la Administración Española, peninsular y ultramarina*. Tomo VI. Imprenta de la Administración: Madrid. (Contiene las leyes de fomento).
- López, J. y Sierra, M. (2009). Un análisis de la obra de José Mariano Vallejo desde la perspectiva de la investigación Histórica en Educación Matemática. En Maz, A. (Ed). *Actas digitales del Grupo de Investigación en Historia de la Educación Matemática en la XII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*. Santander, España.
- López, J. y Sierra, M. (2010). La “Geometría de niños par uso de las escuelas normales” de Vallejo. En, SEIEM, González, M. T, Palarea, M. y Maz, A. *Actas del Seminario de investigación en Didáctica del Análisis y de la Historia de la Educación Matemática*. Universidad de Salamanca

- Maz, A. (2005). *Números negativos en España en los siglos XVIII y XIX*. Tesis doctoral, Universidad de Granada, Granada.
- Maz, A., Torralbo, M. y Rico, L. (eds.) (2006). *José Mariano Vallejo, el matemático ilustrado. Una mirada desde la Educación Matemática*. Córdoba: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Córdoba.
- Rico, L., Marín, A., Lupiáñez, J. L., Gómez, P. (2008). Planificación de las matemáticas escolares en secundaria. El caso de los números naturales. *Suma*, 58, pp. 7-23.
- Ruiz, J. (1976). El método histórico en la investigación histórica de la educación. *Revista Española de Pedagogía*. n- 134, pp. 449-475.
- Schubring, G. (1987). On the methodology of analysing historical textbooks: Lacroix as textbook author. *For the Learning of Mathematics*, 7(3), pp. 41-51.
- Sierra, M. (2007). *Introducción a la metodología de investigación en Didáctica de la Matemática* (documento inédito, programa de Doctorado en Educación Matemática-USAL).
- Steen, L. (Ed.) (1990). *On the shoulders of Giants*. Washington d. F.: National Academy Press.
- Vallejo, J. M. (1812). *Tratado Elemental de Matemáticas. Segunda parte, tomo I*. Imprenta de Melchor Guasp: Mallorca.
- Vallejo, J. M. (1815). *Compendio de Mecánica práctica*. Imprenta de Doña Catalina Piñuela: Madrid.
- Vallejo, J. M. (1833). *Modo de poner en ejecución el nuevo modo de enseñar a leer*. Imprenta de Don Miguel de Burgos. Madrid.
- Vallejo, J. M. (1840). *Compendio de Matemáticas puras y mistas. Tomo I*. Garrasayasa, Madrid.

Libros de Vallejo analizados:

Aritmética de niños escrita para uso de las escuelas del reyno. Por D. Josef Mariano Vallejo:

1806, Madrid, Imprenta Real, segunda edición.

1824, Madrid, Imprenta que fue de García, tercera edición.

1841, París, Librería de D. Vicente Salvá, sexta edición.

1845, Madrid, Garrasayaza. Séptima edición.

Geometría de Niños para uso de las escuelas normales.

1834. Madrid. Imprenta de Quilez y compañía. Primera edición.

GRUPO:

PENSAMIENTO NUMÉRICO Y ALGEBRAICO (PNA)

Coordinadora: **Mercedes Palarea**, Universidad de La Laguna

FRACCIONAR Y REPARTIR: UN ESTUDIO CON MAESTROS
EN FORMACIÓN INICIAL.

Castro, E. y Rico, L.

LA CAPACIDAD INDUCTIVA EN ESTUDIANTES DE
TERCER CURSO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA.

Cerveró, S. y Cerdán, F.

COLABORACIÓN EN LA DIRECCIÓN DE TESIS
DOCTORALES DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA EN ESPAÑA.

Maz, A.; Bracho, R.; Gutiérrez, M.P.; Hidalgo, M.D.; Torralbo,
M.; Jiménez, N. y Antiduelo, C.

LA REVISTA PNA CUATRO AÑOS DESPUÉS DE SU
LANZAMIENTO.

Molina, M.; Cañadas, M.C.; Gallardo, J.; Gómez, P. y
Lupión, J.L.

COMPETENCIAS NUMÉRICAS DE LOS NIÑOS/AS AL
COMENZAR LA EDUCACIÓN INFANTIL.

Salgado, M. y Salinas, M.J.

SENTIDO ESTRUCTURAL MANIFESTADO POR ALUMNOS
DE 1º DE BACHILLERATO EN TAREAS QUE INVOLUCRAN
IGUALDADES NOTABLES.

Vega-Castro, D.; Castro, E. y Molina, M.

FRACCIONAR Y REPARTIR: UN ESTUDIO CON MAESTROS EN FORMACIÓN INICIAL

Elena Castro Rodríguez, Luis Rico Romero
Universidad de Granada

Resumen

En este trabajo estudiamos, desde un punto de vista empírico, el dominio conceptual que tienen los maestros en formación inicial de algunos de los significados de las fracciones, como un conocimiento previo para el abordaje de los mismos en el aula de magisterio. Empleando un enfoque inductivo tratamos de describir, analizar y organizar los diferentes conceptos e ilustraciones sobre la idea de fraccionar y repartir que los 358 estudiantes de magisterio de la Universidad de Granada, participantes en el estudio, aportaron en respuesta a las preguntas planteadas. El análisis realizado ha contemplado la categorización de respuestas y ha hecho emerger relaciones entre los distintos modelos verbal y gráfico presentes en las producciones de los participantes. Además, se pone de manifiesto que la idea de fracción está fuertemente ligada a la idea de división, mientras que otros conceptos, como el de reparto, adquieren una mayor complejidad en sus respuestas.

Abstract

In this paper it is studied, from an empiric point of view, the conceptual domain that the teachers of the primary education have of some of the meanings of the fractions prior to the teaching of them in the classroom. Using an inductive perspective, it is tried to describe, analyse and organise the different concepts and illustrations about the idea of to fractionize and distribute that 358 students of the Teachers Training Faculty of the University of Granada, who took part in the study, gave as answers to the test. The analysis has carried out a categorization of the answers and has allowed us to find relations between the verbal and graphic models which can be found in them. Moreover, it can be seen that in these students the concept of fraction is strongly connected with the concept of division, while other concepts as to distribute has a higher complexity in their answers.

Castro, E. y Rico, L. (2011). Fraccionar y repartir: un estudio con maestros en formación inicial. En M.M. Moreno, N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los Grupos de Investigación de la SEIEM* (pp. 395-409). Lleida.

Introducción

Las fracciones son un contenido básico en la etapa de Educación Primaria por lo cual los programas de formación inicial de maestros las incluyen como parte del conocimiento del contenido. Parte de la responsabilidad de la enseñanza y el aprendizaje inicial de este campo conceptual recae en los maestros de Educación Primaria cuya preparación profesional demanda un incremento y mejora de sus conocimientos sobre éste tópico matemático. Es por ello que el estudio del conocimiento de los maestros en formación inicial sobre este tema es de gran importancia ya que las fracciones son ciertamente difíciles de aprender y enseñar. Aunque ha habido intentos de clarificar el conocimiento de los maestros en formación sobre las fracciones, los estudios disponibles son limitados y se centran principalmente en la división.

Las grandes carencias de los estudiantes para profesor en el tema de fracciones han llevado a investigadores durante décadas a intentar mejorar la comprensión de este tema. Sin embargo, en distintos trabajos (Ball, 1990; Cramer, Post y del Mas, 2002; Jones, 2006; Ma, 1999; Newton, 2008) se pone de manifiesto que las deficiencias en el conocimiento de las fracciones han sido un problema y lo continúan siendo, tanto en los maestros en ejercicio como en los maestros en formación inicial.

Puesto que la investigación sobre fracciones en relación con los tipos de conocimiento del profesor es un campo de trabajo muy amplio, en este estudio nos hemos limitado a realizar una contribución desde un punto de vista empírico acerca del dominio conceptual que tienen los maestros en formación inicial de algunos de los significados de las fracciones, como un conocimiento previo para su abordaje en el aula.

Diseño de la investigación

La finalidad principal de este trabajo es describir las ideas, imágenes y conceptos sobre fraccionar y repartir que tienen los maestros en formación inicial de las especialidades de Educación Infantil y de Educación Primaria, cuando inician sus estudios. Para ello, hemos planteado tres objetivos específicos:

1. Construir un cuestionario con el que elicitar ideas, imágenes y conceptos sobre las nociones “fraccionar” y “repartir”.
2. Identificar y categorizar los significados que sobre “fraccionar” y “repartir” sustentan los estudiantes para Maestro de Educación Infantil y Maestro de Educación Primaria, en función del campo conceptual de las fracciones.

3. Analizar las relaciones que surgen entre las eventuales categorías establecidas para interpretar la diversidad de significados sobre “fraccionar” y “repartir”, teniendo en cuenta aspectos verbales y gráficos.

Desde el punto de vista de su diseño, lo situamos en el campo de la metodología descriptiva, basado en el método de encuesta con la utilización de un cuestionario de respuesta abierta como instrumento para la recogida de datos. Las cuestiones se han formulado con el objetivo de poner de manifiesto los significados, representaciones, situaciones y contextos que los maestros en formación inicial tienen en relación con el tema objeto de estudio. Las preguntas responden a la siguiente estructura:

La pregunta 1 la forman dos cuestiones relativas a fraccionar, donde se pide explicar verbalmente qué se entiende por fraccionar y realizar un dibujo que muestre qué es fraccionar.

La pregunta 2 la forman dos cuestiones relativas a repartir, siguiendo el mismo esquema de la pregunta 1, se pide explicar verbalmente qué se entiende por repartir y realizar un dibujo que muestre qué es repartir.

La pregunta 3 se refiere a la descripción de situaciones a partir de tres ilustraciones relativas a fraccionar y repartir.

Las preguntas 4 y 5 requieren la invención de problemas sobre fraccionar y repartir, respectivamente.

Se trata de un estudio de tipo exploratorio, realizado durante el curso académico 2009-2010. Se recogieron un total de 358 cuestionarios realizados por alumnos matriculados en el primer curso de las especialidades de Educación Infantil y de Educación Primaria, pertenecientes a la Facultad de Ciencias de la Educación y a la Escuela Ave María de la Universidad de Granada.

Los datos recogidos con el cuestionario, los hemos sometido a un análisis de carácter cualitativo. Este análisis de datos se ha llevado a cabo mediante un proceso inductivo en el que hemos identificado una serie de temas en función de los cuales hemos realizado una organización de los datos en categorías y una identificación de modelos (relaciones) entre categorías (McMillan y Schumacher, 2005). Este esquema general se encuentra reflejado en la Figura 1. Las categorías y los modelos surgen en nuestro análisis a partir de los datos mediante un proceso sistemático de selección, categorización, comparación, síntesis e interpretación

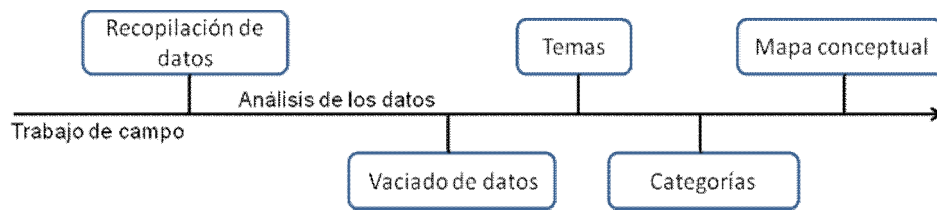


Figura 1. Organigrama de la estructura global del proceso seguido en el análisis de los datos

El análisis realizado ha contemplado la categorización de respuestas y ha hecho emerger relaciones entre los distintos modelos verbal y gráfico presentes en las producciones de los participantes.

Resultados

Las preguntas de la encuesta cuyas respuestas se someten a análisis en este estudio son:

¿Qué es fraccionar?

1.1 Explica verbalmente qué entiendes por fraccionar

1.2 Haz un dibujo que muestre qué es fraccionar

¿Qué es repartir?

2.1 Explica verbalmente qué entiendes por repartir

2.2 Haz un dibujo que muestre qué es repartir

Análisis de las respuestas a la pregunta 1.1

Una primera aproximación a las respuestas de la pregunta 1.1 en base a los verbos de acción de los enunciados, nos proporciona varios temas: “Dividir”, “Partir” y “Repartir” que posteriormente se consolidaron como categorías. Entre estas tres categorías principales encontradas en el conjunto de datos, dividir tiene una mayor frecuencia en las respuestas y, a su vez, tiene un mayor número de subcategorías. El término dividir aparece en el 77,1% de las respuestas, y se muestra con 7 variantes. Los temas partir y repartir tienen un menor peso en las respuestas de los alumnos.

Según los datos obtenidos, la idea de fracción está asociada principalmente a la idea de dividir, siguiendo una secuencia progresiva de subcategorías según la precisión de las respuestas. Las categorías partir y repartir presentan también otra secuencia progresiva pero más corta que en el caso anterior. Estas categorías y

subcategorías dan lugar a un sistema de cinco niveles como se muestra en el mapa conceptual de la Figura 2.

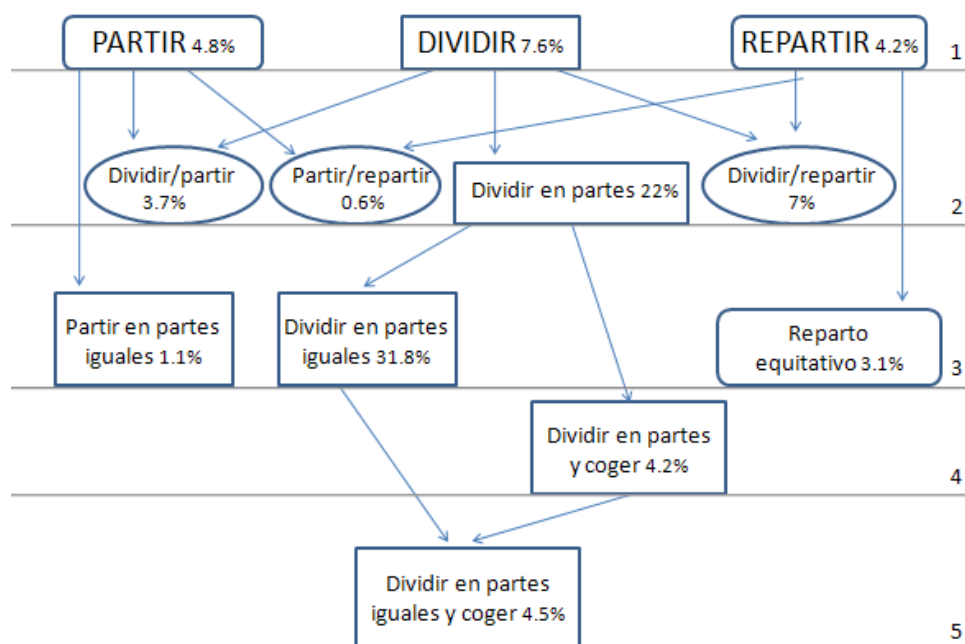


Figura 2. Mapa conceptual de fraccionar

El primer nivel está caracterizado por el término genérico y está formado por los tres verbos “Dividir”, “Repartir” y “Partir”. Este tipo de respuesta tiene verbo único equivalente. El segundo nivel, lo establecen las posibles combinaciones de estos tres verbos tomadas de dos en dos: “Dividir y partir”, “Dividir y repartir”, “Partir y repartir” y “Dividir en partes”. En este caso también hay una significación imprecisa mediante una acción, pero con la presencia de dos verbos que permiten cualificar la acción ya que produce “partes” y hace el papel de complemento indirecto. Cabe destacar que no se ha encontrado ninguna respuesta con los tres verbos simultáneamente.

Un tercer nivel liderado por la idea de igualdad lo forman “Dividir en partes iguales” y “Reparto equitativo”. En ese caso fraccionar es el resultado de una acción equitativa donde se describe cómo son las partes:

El cuarto nivel determinado por la idea de coger, lo integra “Dividir en partes y coger”. En este nivel se acaban las respuestas a la pregunta directa, pues se añade conocimiento al considerar la acción de fraccionar más el resultado. La fracción es

el objeto resultado de dos acciones sucesivas, no se detalla cómo son las partes, pero sí qué se hace con ellas.

Por último, la idea más elaborada y resultante de las anteriores: “Dividir en partes iguales y coger”, forma la significación más precisa. En este caso la fracción es considerada como objeto del resultado de dos acciones equitativas y sucesivas donde se detalla cómo son las partes y qué se hace con ellas.

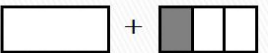
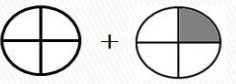
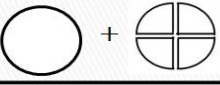
Análisis de las respuestas a la pregunta 1.2

En el caso de la pregunta 1.2 “Haz un dibujo que muestre qué es fraccionar”, los temas lo forman el tipo de magnitud utilizada en la ilustración: continua, discreta o mixta (compuesta por una representación discreta y otra continua). Basándonos en estos temas, para perfeccionar el sistema de clasificación desarrollamos una serie de categorías y subcategorías. El criterio seguido para esta clasificación, es el tipo de figura y el número de figuras presentes en la ilustración, pudiendo presentarse divididas y/o divididas y sombreadas, y acompañadas o no de dibujos de personas.

Debido a que en la categoría área se concentra el 98% de las respuestas hemos desarrollado sólo para éste un sistema de subcategorías compuesto por ocho apartados. Atendiendo a esta clasificación de las ilustraciones realizadas, podemos establecer tres niveles atendiendo al número de figuras presentes en las respuestas.

Tabla 1

Pregunta 1.2. Subcategorías

	18,2%
	49,4%
	11,6%
	1,7%
	4%
	6,3%
	1%

Un primer nivel lo forman representaciones con una única figura, ya sea un círculo o un rectángulo, que se presentan divididos en partes iguales o divididos y una parte coloreada. Un segundo nivel lo constituyen secuencias de representaciones formadas por dos círculos, dos rectángulos o una de estas figuras más un dibujo de personas. Por último, el tercer nivel lo compone una secuencia formada por tres figuras, rectángulos o círculos, distintos entre sí. Estos tres niveles se encuentran íntimamente relacionados con los establecidos en la pregunta 1.1, ya que responden a las secuencias progresivas que se formaban entre dividir, dividir en partes y dividir en partes y tomar. En la Figura 3 vemos cada una de las representaciones ordenadas por niveles, y las relaciones entre las ideas básicas de la pregunta anterior con estas ilustraciones.

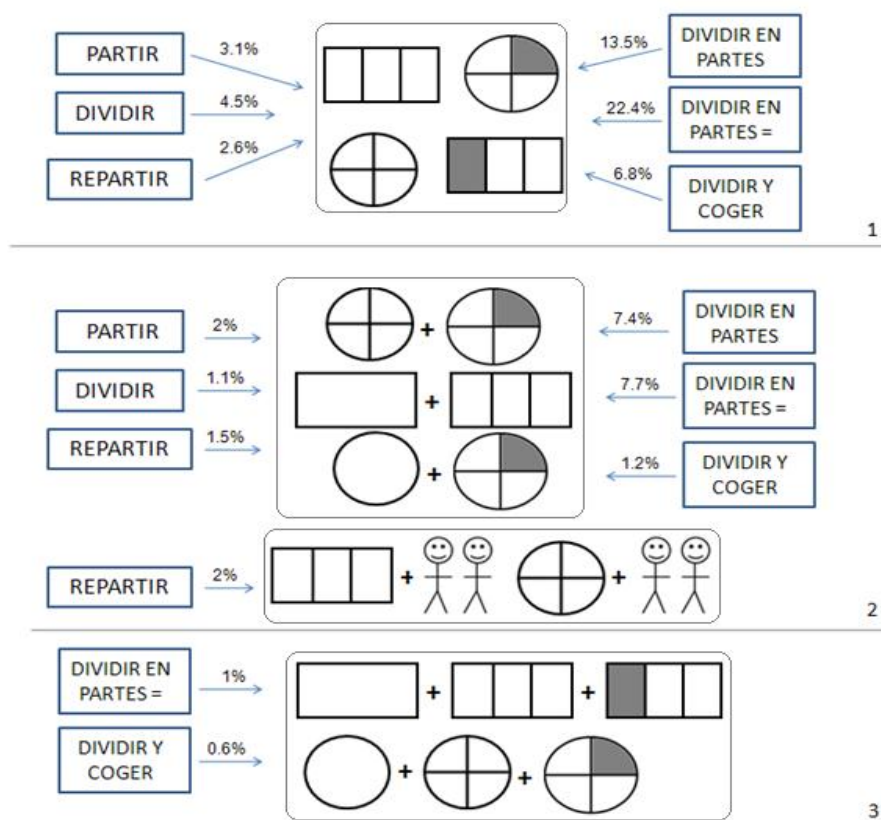


Figura 3. Relaciones entre fraccionar y sus representaciones

Como adelantábamos anteriormente, cada una de estas ideas, a excepción de repartir, no se visualizan de manera única sino que están presentes en dos o tres niveles, 1 y 2 ó 1, 2 y 3. Es natural que respuestas menos elaboradas, como dividir, dividir en partes, partir o repartir correspondan a los niveles 1 y 2; mientras que las

respuestas más completas, dividir en partes iguales y coger, necesiten de una ilustración con un mayor número de figuras que las anteriores, por ello está presente en los tres niveles.

Análisis de las respuestas a la pregunta 2.1

De manera similar a la pregunta 1.1 encontramos para las respuestas a esta pregunta una clasificación por temas, según la semántica de los verbos principales de los enunciados. Se compone de tres grupos, el primero lo forman los sinónimos de repartir, el segundo los términos relacionados con fraccionar y el tercero los términos afines a relacionar.

Las categorías desarrolladas a partir de los temas las forman los verbos que se encuentran asociados a cada uno según su significado: dar, asignar y distribuir corresponden al primer tema; dividir, fraccionar y partir, al segundo. Según los resultados el tema formado por los sinónimos de repartir tiene una presencia mayoritaria en las respuestas, seguida por los términos relacionados con fraccionar y combinaciones de ambas.

Al igual que en la primera pregunta, cada categoría presenta una secuencia progresiva según la precisión de las respuestas. Aunque pueden parecer similares, en este caso no están presentes las categorías "... en partes", ni "... en partes y coger"; y aparece uno nuevo "... partes iguales o no", lo que quiere decir que en el concepto de repartir está presente la noción de reparto equitativo y reparto no equitativo, mientras que en el concepto de fraccionar no tiene cabida la desigualdad de partes. Este sistema dicotómico con ocho categorías lo hemos representado a través del mapa conceptual de la Figura 4.

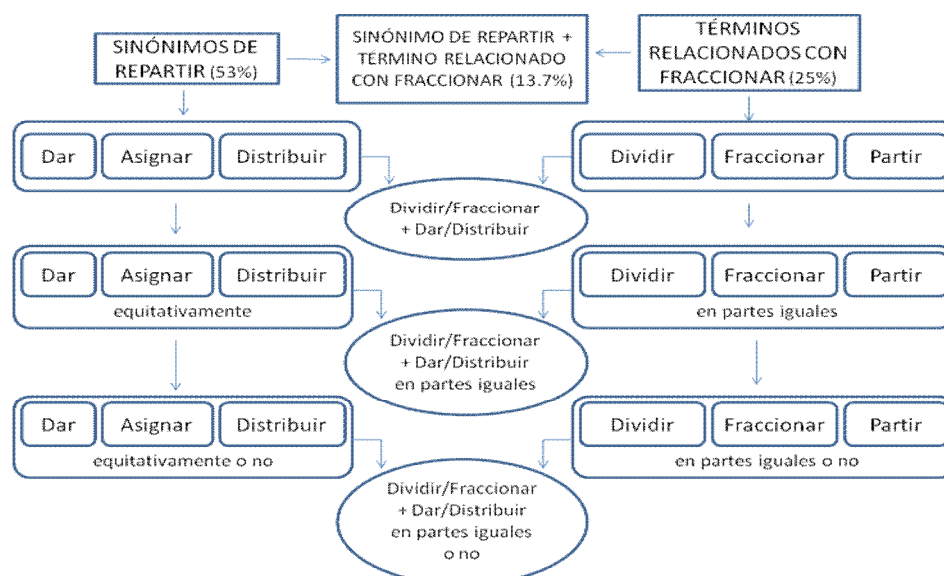


Figura 4. Mapa conceptual de repartir

Como vemos en el mapa conceptual, los dos grupos de respuestas mayoritarias están relacionados a través de un tercero que los une. Existe una secuencia progresiva de tres niveles según la precisión de la respuesta:

El primero se encuentra determinado por un verbo, sinónimo de repartir o fraccionar, o por dos verbos uno de cada uno de los grupos anteriores. La idea de repartir se constituye como una acción.

El segundo nivel está determinado por la idea de equidad, la idea de repartir se vuelve más precisa añadiendo a la acción la igualdad entre las partes. La idea de repartir se amplía a una acción equitativa.

Por último, el tercer nivel está caracterizado por la idea de igualdad o desigualdad entre las partes a repartir o fraccionar. La idea de repartir adquiere su significado más completo mediante una acción que puede ser equitativa o no.

Análisis de las respuestas a la pregunta 2.2

Como en la primera pregunta, vamos a ver cómo se visualizan las principales ideas que rigen el concepto de repartir a partir de las ilustraciones propuestas por los participantes en el estudio.

El sistema de categorías obtenido para esta pregunta coincide con el de la pregunta 1.2, sin embargo, en este caso, el tema discreto es el mayoritario con un

73.5% de las respuestas, seguida de área con un 21.5% de respuestas; es por ello que ha sido necesario establecer categorías en ambos casos.

Atendiendo al número de figuras presentes en las ilustraciones, se conforman tres niveles como en las respuestas a la pregunta 1.2. Para el caso nuevo de los dibujos discretos, el primer nivel lo forma un conjunto discreto, o un conjunto discreto dividido; el segundo está constituido por las posibles combinaciones tomadas de dos en dos de un conjunto discreto, un conjunto discreto dividido y una representación de personas; por último, el tercer nivel está formado únicamente por la unión de las tres imágenes anteriores.

Tabla 2

Pregunta 2.2. Subcategorías magnitud continuo

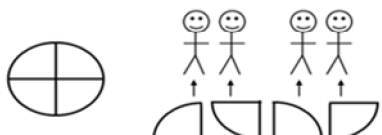
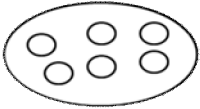
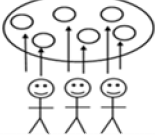
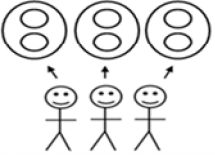
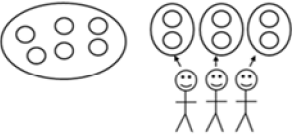
	4.3%
	6.3%
	4.6%
	4.9%

Tabla 3

Pregunta 2.2. Subcategorías magnitud discreto

	1.4%		13.8%
	2.6%		11.5%
	18.7%		29.1%

Todas estas ilustraciones componen las distintas maneras de representar cada una de las ideas descritas en el apartado anterior. En las Figura 5 y 6 se muestran las relaciones existentes entre las tres categorías principales del concepto de repartir y las representaciones continuas y discretas respectivamente.

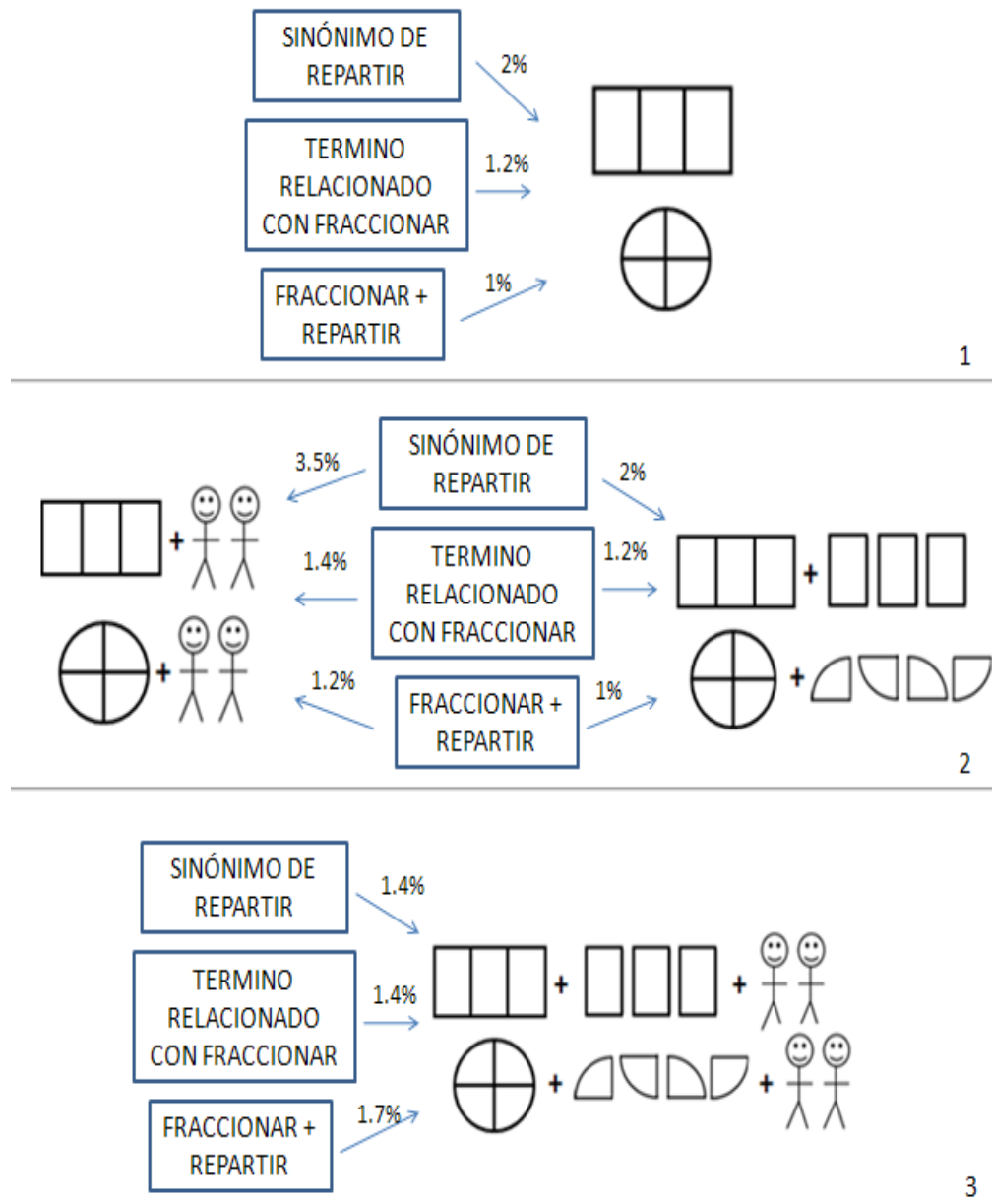


Figura 5. Relaciones entre repartir y sus representaciones continuas

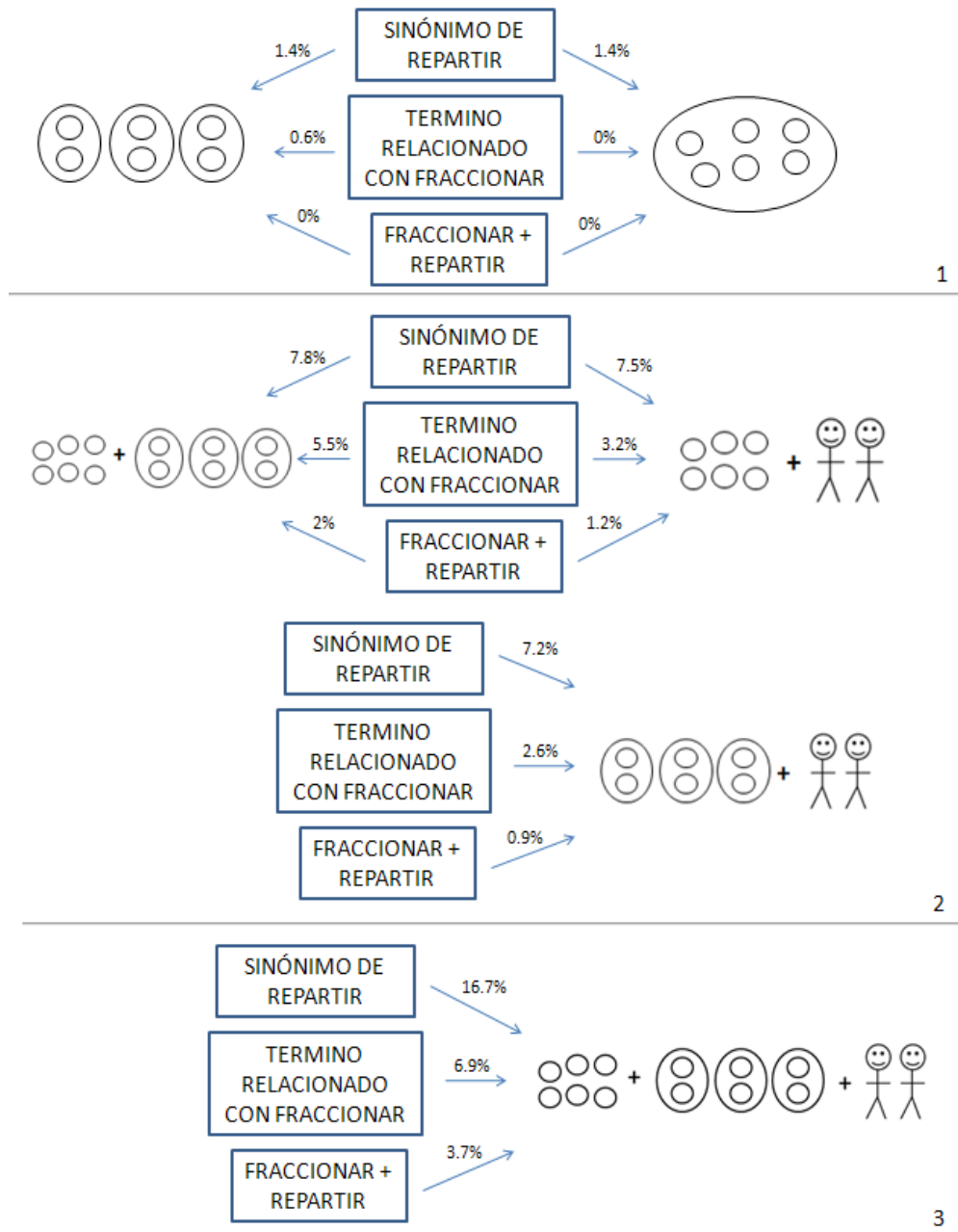


Figura 6. Relaciones entre repartir y sus representaciones discretas

Como se observa en las figuras anteriores, la principal diferencia entre ambas es que en las ilustraciones continuas no se representa la figura inicial, sino que siempre se presenta de manera dividida. En el caso de las ilustraciones discretas, un mayor número de representaciones son las que contienen el conjunto inicial que será repartido.

Las principales diferencias con las ilustraciones de la pregunta 1.2 referente a fraccionar son que, a excepción de un par de casos aislados no hay ilustraciones discretas ni dibujos de personas en esta primera pregunta, mientras que en las correspondientes a repartir tienen una presencia mayoritaria.

Conclusiones

Al comienzo del estudio nos propusimos realizar, con carácter general, una aproximación a las ideas y significados sobre fraccionar y repartir que utilizan los futuros maestros en el primer curso de su formación inicial como profesores. En una primera fase, nuestro propósito fue la construcción de un instrumento que permitiese identificar los conocimientos y nociones de los futuros maestros, es decir, las definiciones, interpretaciones y usos sobre una serie de aspectos básicos de las fracciones. Tras su diseño, redacción y validación, se lleva a cabo la puesta en práctica del cuestionario. El propósito central del estudio culmina con la segunda fase, en la que tratamos de establecer los conocimientos: ideas, conceptos y relaciones, respecto a las nociones de fraccionar y repartir.

En general, la información recogida mediante el proceso descrito ha superado las expectativas iniciales. A través de una serie de preguntas sencillas, hemos realizado un acercamiento a aquellos significados que contemplan los maestros en formación inicial sobre fraccionar y repartir. El análisis nos ha revelado que los maestros en formación inicial consideran una pluralidad de significados no triviales para estos conceptos y que, además, se aprecian niveles complejidad en ellos.

Referencias bibliográficas

- Ball, D. (1990). Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21(2), 132-144.
- Cramer, K., Post, T. R., & del Mas, R. C. (2002). Initial fraction learning by fourth and fifth-grade students: A comparison of the effects of using commercial curricula with the effects of using the Rational Number Project curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(2), 111-144.
- Jones, K. K. (2006). *Beyond a relational understanding of fractions: elements of instruction that contribute to preservice teachers' knowledge and motivation*. Unpublished doctoral dissertation. University of Maryland, USA.
- Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understandings of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- McMillan, J. H., & Schumacher, S. (2005). *Investigación Educativa* (5 ed.). Pearson Addison Wesley. Madrid.
- Newton, K. J. (2008). An Extensive Analysis of Preservice Elementary Teachers' Knowledge of Fractions. *American Educational Research Journal*, 45. Disponible en: <http://aer.sagepub.com/cgi/content/abstract/45/4/1080> (9-Junio-2010).

LA CAPACIDAD INDUCTIVA EN ESTUDIANTES DE TERCER CURSO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

Sabrina Cerveró Sánchez, Fernando Cerdán Pérez

Universidad de Valencia

Resumen

En este trabajo hemos llevado a cabo un estudio exploratorio cuya intención era observar cómo evolucionaba la capacidad inductiva de los estudiantes de tercero de ESO, tras haber sido instruidos en el tema de progresiones. Presentamos una descripción de las actuaciones de los estudiantes cuando se les pedía continuar una sucesión de la que se proporcionaba sus primeros términos, determinar un término k -ésimo de la sucesión y expresar el término general. En particular, hemos analizado las respuestas cuando se proponían progresiones aritméticas de primer y segundo orden expresadas numérica o gráficamente. Al elegir progresiones aritméticas de distinto orden, pretendíamos observar su capacidad inductiva cuando no habían recibido herramientas en forma de fórmulas, ya que durante la enseñanza se les había ofrecido, y habían empleado, la fórmula del término general de una progresión aritmética de primer orden, pero no de segundo.

Abstract

In this work we present an exploratory research which aims to observe how the inductive capacity of students from the third level of ESO (Secondary Obligatory Education) evolves after being trained in progressions. We present a description of the students' actions when they were asked to continue a succession knowing the initial terms, to calculate the k -th term of a succession and to express the general term. Particularly, we have analyzed their answers in arithmetic progressions of first and second orders, expressed in a graphic or numerical form. Choosing arithmetic progressions with different orders, we pretend to observe their inductive capacity when they did not have any formula, because during teaching they have known and used the general term formula of an arithmetic progression of first order, but not of second order.

Cerveró, S., Cerdán, F. (2011). La capacidad inductiva en estudiantes de tercer curso de educación secundaria. En M.M. Moreno, N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los Grupos de Investigación de la SEIEM* (pp. 411-419). Lleida.

Marco conceptual y antecedentes

Cuando abordamos un tema como progresiones en 3° de la ESO tenemos en cuenta que se requiere por parte de nuestros estudiantes un progreso significativo en su razonamiento inductivo. Esto es complejo para ellos, no sólo por la dificultad de introducir un razonamiento inductivo (Polya, 1966) que hasta este curso no habían trabajado, sino por la complejidad de traducir a lenguaje algebraico las deducciones a las que se llegan sobre la expresión de un término cualquiera. Nuestro propósito ha sido estudiar la capacidad inductiva de los estudiantes de 3° de la ESO entendida como su competencia para continuar una sucesión de la que se proporcionaban sus primeros términos, determinar un término k -ésimo de la sucesión y expresar el término general. Hemos medido esta capacidad partiendo de que la dificultad de un problema se puede “medir” a partir del porcentaje de éxito de una determinada población de estudiantes al intentar resolverlo. Además, de esta forma, también pretendemos obtener información de los errores que puedan observarse en dicho proceso de traducción.

Según Polya (1966), cuando vemos una serie de números relacionados entre sí, formulamos una conjetura que ha sido encontrada por inducción. Nuestra conjetura es un juicio general sugerido por ciertos ejemplos particulares en la que la habíamos encontrado verdadera. Luego examinamos otros ejemplos particulares y puesto que la conjetura resulta verdadera nuestra confianza se incrementa. Es necesario que creemos una actitud inductiva en nuestros estudiantes, esto requiere saber ascender de las observaciones a las generalizaciones y descender de las generalizaciones más altas a las más concretas observaciones. Por esto, Polya habla de pasos que nos ayudan en este pensamiento inductivo: generalización, especialización y analogía. Al ver una analogía podemos hacer una conjetura y en vez de demostrar las razones por las que enunciamos la conjetura, podemos examinar las consecuencias de estas conjeturas, verificar tales consecuencias como argumentos en pro de la conjetura.

Pero si queremos seguir un paso más allá, ya tenemos que tener en cuenta los antecedentes de nuestros estudiantes. Cuando creemos que tenemos una evidencia, queremos evaluar el grado de creencia racional justificado por esta evidencia. Sin embargo, tal creencia puede depender del conocimiento de la persona que recibe la evidencia. Por tanto, si deseamos una constatación definida, debemos especificar un nivel de conocimiento sobre el que la propuesta evidencia inductiva será juzgada.

Para tener buena intuición no basta con ser listo. Deberíamos examinar nuestras intuiciones, compararlas con los hechos, modificarlas si fuese necesario, y así

adquirir una extensa (o intensa) experiencia de las intuiciones que fracasan y de las que llegan a ser ciertas. Con tal experiencia como base seremos mucho más capaces de juzgar competentemente qué intuiciones tienen la oportunidad de ser correctas o no. Esta capacidad es la que tienen que empezar a desarrollar nuestros estudiantes. Cuando Polya habla del razonamiento plausible en la invención y en la enseñanza, entendemos que la resolución de un problema es un proceso complejo, más aún cuando se requiere una intuición. Señala el lugar del razonamiento plausible en este complejo proceso y donde es fundamental meditar sobre las líneas de enfoque que seguimos, tanto cuando acertamos como cuando erramos, y sobre lo que nos hace escogerlas.

Historial de instrucción

La población de nuestro estudio es un grupo natural de 3º de ESO formado por 21 alumnos de un instituto de la ciudad de Valencia que no habían recibido instrucción previa en el tema de sucesiones.

En el historial de instrucción ofrecemos una selección, ordenada cronológicamente, de las notas recogidas durante las sesiones de enseñanza que el profesor de matemáticas del grupo llevó a cabo ante la observación de la investigadora. Veamos algunos ejemplos:

- El profesor plantea la progresión 1, 4, 7, 10, 13... y la primera reacción de los estudiantes es definirla por recurrencia (el siguiente es el anterior más tres). El profesor les pide que, ya que saben como sigue, obtengan cuál sería el término que ocupa la posición 100. Esto plantea dificultad entre los estudiantes hasta que un alumno dice “es la posición por 3 menos 2”. El profesor explica que si llamamos n a la posición, entonces lo que acaba de expresar el estudiante sería el término general. Pero como los estudiantes muestran dificultades, se plantean ejemplos en los que se ofrece el término general y se les pide que generen la sucesión.

- Cuando el profesor formaliza el término general de una progresión aritmética da dos formas de definirla: la diferencia entre dos términos consecutivos es constante y cada término es igual al anterior más una constante. Luego explica los primeros casos particulares (hasta a_4)

$$a_2 - a_1 = d \rightarrow a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 - a_2 = d \rightarrow a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d$$

$$a_4 - a_3 = d \rightarrow a_4 = a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d$$

Cuando pregunta el a_5 lo dicen correctamente: pero cuando pregunta el a_n responden que $a_n = a_1 + nd$. Entonces les demuestra que ese término general no se corresponde con el que estaban deduciendo y una estudiante dice que tiene que haber una diferencia menos que los a_n pero no sabe expresarlo algebraicamente. Nadie consigue expresarlo correctamente y el profesor termina poniendo la expresión final y trabajan ejemplos.

- Después de haber introducido las progresiones aritméticas, el profesor plantea la sucesión gráfica de los números cuadrangulares. No es aritmética pero la continúan (1, 4, 9, 16, 25...) y dan el término general ($\{n^2\}$) sin dificultad. Seguidamente, les propone 3, 6, 11, 18, 27... y también ven enseguida que es $\{n^2+2\}$. Pero cuando plantea la sucesión 2, 6, 12, 20, 30, 42... ya no ven el término general tan fácilmente. Les dice que es normal que ésta les cueste más y les da una pista: les pone dos sucesiones muy conocidas para ellos (1, 4, 9, 16... y 1, 2, 3, 4...) y les dice que busquen una relación. Los estudiantes ven que es la suma y uno dice que el término general es $n^2 + n$.
- Para formalizar el término general de una progresión geométrica hace un procedimiento análogo al de una progresión aritmética. Da dos formas de definirla: el cociente de dos términos consecutivos es constante y un término es igual al anterior por una constante. Y, de forma análoga, explicando los primeros casos particulares; esta vez sí llegan al término general sin tanta dificultad en la expresión algebraica.
- El profesor practica problemas con parte gráfica y verbal. Por ejemplo, tienen que dar la progresión de perímetros y áreas de un triángulo rectángulo isósceles al que cada vez su lado se reduce a la mitad. Ven fácilmente que la razón de los perímetros es 1/2. Y varios estudiantes dicen que si la razón de los perímetros es 1/2, la de las áreas es 1/4 (la unidad anterior a sucesiones había sido la de geometría).

Cuestionario y codificación de las variables

Para estudiar la competencia de los estudiantes hemos analizado el cuestionario planteado por nosotros. El cuestionario que hemos realizado consta de 4 cuestiones cada una con 3 apartados: continuar la sucesión, hallar un término concreto y dar la expresión del término general. Las dos primeras cuestiones son progresiones aritméticas; una expresada en forma numérica y otra de forma gráfica. Las otras

dos son progresiones aritméticas de segundo orden, la primera expresada en forma numérica y la segunda gráficamente.

El cuestionario, sin los apartados que son siempre igual (solo cambian los números de las posiciones de los términos k -ésimos), es el siguiente:

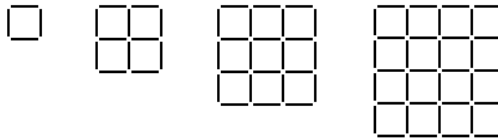
1) Se tiene la siguiente secuencia de números: 1, 4, 7, 10...

2) Imagina que tienes unas baldosas cuadradas blancas y otras baldosas cuadradas grises. Las baldosas blancas y las baldosas grises son del mismo tamaño. Las baldosas blancas están en una fila rodeadas de baldosas grises como muestra el dibujo.



3) Se tiene la siguiente secuencia de números: 3, 7, 13, 21...

4) Se usan palillos para construir cuadrados que se pueden organizar en una sucesión como indica la figura.



Para codificar las actuaciones utilizamos tres variables dicotómicas, una por apartado de cada cuestión, que nos permiten clasificar resultados correctos e incorrectos.

-AC: se ha continuado correctamente la sucesión.

-BC: se ha obtenido el término k -ésimo de manera correcta.

-CC: se obtiene correctamente el término general.

Para clasificar los métodos de producción del término k -ésimo hemos utilizado tres variables.

-RT: realiza una regla de tres.

-GK: calcula primero el término general sin aplicar la teoría.

-TK: aplica directamente la teoría para obtener primero la expresión del término general.

En el tercer apartado hemos añadido dos variables para clasificar la forma de expresar el término general.

-EV: ha producido expresión verbal.

-EA: ha producido expresión algebraica.

Análisis de las actuaciones.

Ahora mostramos una gráfica (ver Figura 1) en la que se indican el número de veces que cada alumno ha conseguido continuar la sucesión (barras 'Total AC'), hallar el término de la posición que se le indicaba (barras 'Total BC') y hallar el término general (barras 'Total CC').

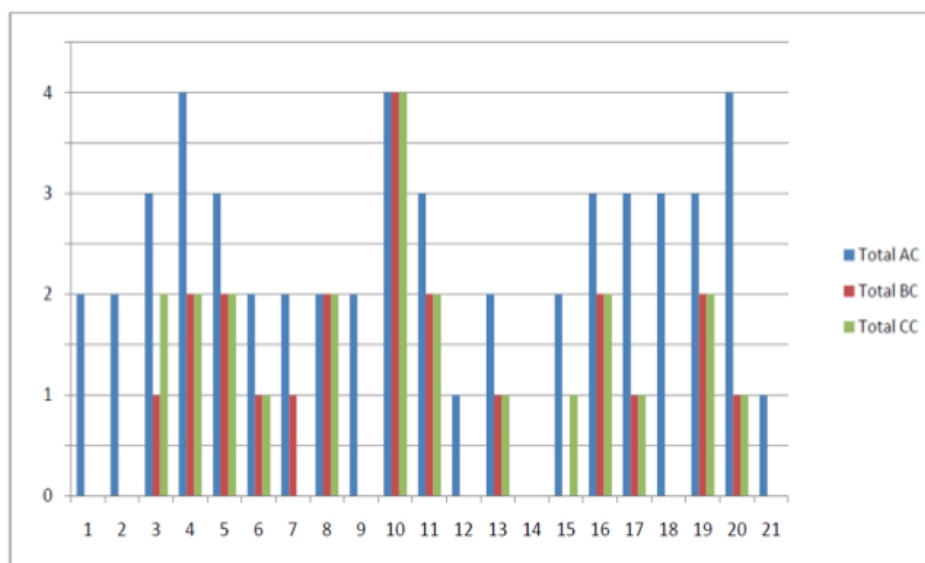


Figura 1.

Como vemos todos los estudiantes menos uno han conseguido continuar correctamente alguna sucesión. Pero, evidentemente, aunque sepan cómo continuar una sucesión esto no implica que luego calculen un término k -ésimo o expresen el término general correctamente. Sin embargo, las barras 'Total BC' (k -ésimo) y 'Total CC' (término general) tienen prácticamente por cada alumno la misma altura, lo que significa que hay una relación entre calcular bien un término k -ésimo y expresar correctamente el término general.

Esto se debe, como vemos en la Tabla 1, a que la mayoría de estudiantes han calculado el término general para obtener el k -ésimo.

Tabla 1

Alumnos	P1								P2								P3								P4							
	AC	BC	RT	GK	TK	CC	EV	EA	AC	BC	RT	GK	TK	CC	EV	EA	AC	BC	RT	GK	TK	CC	EV	EA	AC	BC	RT	GK	TK	CC	EV	EA
Total	21	20	11	1	1	12	0	14	11	9	7	4	7	9	6	11	4	1	1	0	3	1	0	5	16	1	6	0	3	1	0	4

Por tanto, así como antes de recibir instrucción algunos términos k -ésimos los expresaban según su posición concreta y no eran capaces de llegar a la expresión algebraica del término general, después de recibir instrucción consideran más útil buscar la expresión del término general para hacer los cálculos a partir de ella.

Para analizar la dificultad de los problemas contamos la cantidad de estudiantes que han respondido correctamente cada apartado de cada cuestión. Observamos (ver Figura 2) que no han respondido correctamente al apartado segundo y tercero de las cuestiones sobre progresiones de segundo orden (las que llamamos P3 y P4) de lo que concluimos que obtienen más resultados correctos si poseen herramientas teóricas, como la fórmula del término general de una progresión aritmética.

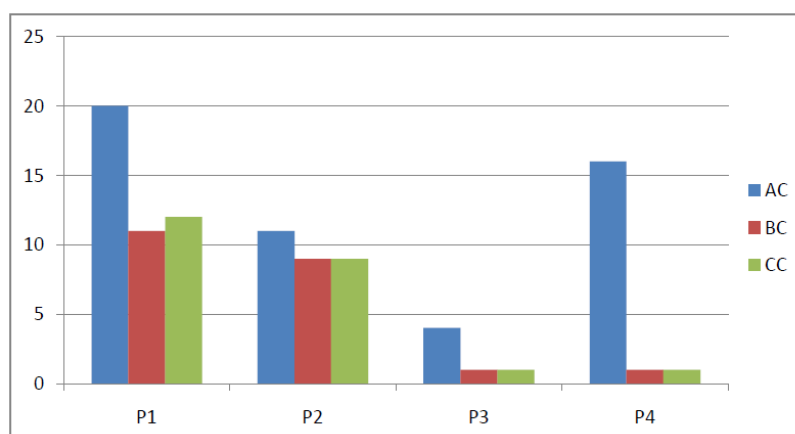


Figura 2.

Sin embargo, parece ser que al mismo tiempo, el poseer herramientas teóricas produce la falta de aciertos en las cuestiones tercera y cuarta. Puesto que, aunque para las progresiones aritméticas de segundo orden no poseían herramientas, las habían resuelto correctamente durante las clases sin demasiada dificultad. Está claro que es predecible que haya más aciertos en las que tienen resultados teóricos que en las que no pero, en nuestro caso, sólo un estudiante ha resuelto correctamente las de segundo orden, mientras que tres alumnos en la cuestión 3 y

otros tres en la cuestión 4 han aplicado la teoría de las progresiones geométricas. Como ejemplo, en la Figura 3, se muestra la actuación de una alumna que intenta resolver la cuestión 4 considerando que la secuencia numérica responde a una progresión geométrica:

b) ¿Cuántos palillos se usarán para el cuadrado 20? ¿y para construir el cuadrado 1000?

$$a_n = a_1 \cdot 2^{n-1}$$

$$a_n = 4 \cdot 2^{n-1}$$

$$a_{20} = 4 \cdot 2^{20-1} = 2097152$$

$$a_{1000} = 4 \cdot 2^{1000-1} = \text{da mucho}$$

c) ¿Cuántos se usarán para construir n-ésimo cuadrado (el cuadrado n)? Justifica tu respuesta.

$$a_n = a_1 \cdot 2^{n-1}$$

porque cada vez se
dobla el doble del
anterior.

Figura 3

Por otro lado, el 42,8% de los estudiantes han utilizado en alguna cuestión la regla de tres para producir resultados (ver Figuras 4 y 5), algunos incluso para obtener la expresión algebraica del término general, a pesar de que en ningún momento de la unidad se utilizó ni mencionó la regla de tres.

b) ¿Cuántas baldosas grises necesitarías si tuvieras 135 baldosas blancas y quisieras rodearlas de la forma que lo hemos hecho en el dibujo? Justifica tu respuesta.

$$\begin{array}{r} 1 \text{ — } 3,2 \\ 135 \text{ — } x \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 135 \cdot 3,2 \\ \hline 1 \end{array} = 432$$

↓
baldosas
grises

Figura 4.

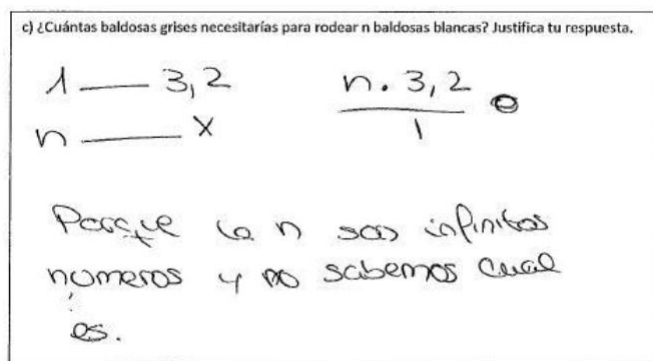


Figura 5.

Sin embargo, estos errores parecen estar relacionados, en lugar de con su capacidad inductiva, con una sobregeneralización del uso de la regla de tres o con su comprensión de las magnitudes directamente proporcionales (confunden que si una magnitud aumenta, la otra también lo hace con la proporcionalidad directa).

Referencias bibliográficas

Cañadas Santiago, M. C. (2007). *Descripción y caracterización del razonamiento inductivo utilizado por estudiantes de educación secundaria al resolver tareas relacionadas con sucesiones lineales y cuadráticas*. Tesis Doctoral no publicada. Universidad de Granada. Granada.

Polya, G. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible*. Tecnos. Madrid.

COLABORACIÓN EN LA DIRECCIÓN DE TESIS DOCTORALES DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA EN ESPAÑA

[Alexander Maz, Rafael Bracho](#), M^a Pilar Gutiérrez, M^a Dolores Hidalgo,
Manuel Torralbo, Noelia N. Jiménez, Concepción Antiduelo
Universidad de Córdoba

Resumen

Presentamos un estudio sobre la producción y las redes de colaboración en la dirección de tesis doctorales en Educación Matemática en España. Se encontraron 175 directores y se obtuvo un grado de colaboración de 0,2. Es visible la productividad de las mujeres directoras. También se identificaron subredes de colaboración personal e institucional.

Abstract

We present a study on the production and collaborative networks in the direction of doctoral theses in mathematics education in Spain. We found 175 directors, achieving a 0.2 degree of collaboration. It is visible productivity of female directors. Subnetwork were also identified personal and institutional collaboration.

Maz, A. et al. (2011). Colaboración en la dirección de tesis doctorales de educación matemática en España. En M.M. Moreno, N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los Grupos de Investigación de la SEIEM* (pp. 421-432). Lleida.

Introducción

En el desarrollo actual de la ciencia intervienen elementos que van más allá de las propias disciplinas científicas, y que están relacionados con las estructuras sociales inherentes a los procesos sociales y a su difusión (Casanueva, Escobar y Larriaga, 2007). Existen determinados colectivos a los que Crane (1975) llama colegios invisibles, que ejercen cierto poder o dominio sobre una disciplina en diferentes ámbitos, sean estos sociales, económicos, académicos, etc. Cuando los individuos aspiran a participar en un determinado colectivo relacionado con la ciencia deben someterse a la validación de su conocimiento o actividad, tanto al culminar algún tipo de formación de postgrado (máster o doctorado) como al presentarse a un tribunal para una plaza académica (funcionario o contratado). En España los departamentos universitarios son los encargados de formar a los nuevos científicos y además, a través de sus miembros, son quienes ejercen estas validaciones en los diferentes tribunales evaluadores.

En este estudio centraremos la atención en los tribunales de tesis doctorales en Educación Matemática leídas en España desde el año 1975 hasta el 2009, con el propósito de identificar las relaciones o posibles colegios invisibles de colaboración entre los diferentes directores de tesis.

Marco teórico y objetivos

En la literatura científica española abundan los trabajos centrados en el estudio y análisis de las tesis doctorales en diferentes áreas de conocimiento (Casanueva et al., 2007; Fernández-Cano et al., 2003; Olmeda-Gómez, Perianes-Rodríguez, Ovalle-Perandones y Moya-Anegón, 2009; Vallejo et al., 2008). En algunas ocasiones buscan representar las redes sociales (Perianes-Rodríguez, 2004), escuelas de pensamiento (Delgado-López-Cozár, Torres-Salinas, Jiménez-Contreras y Ruíz-Pérez, 2006; López-Yepes, 2002) o identificar temas de género (Torres y Torres-Salinas, 2005). Sin embargo en Educación Matemática no se han explorado ninguna de estas relaciones entre las que podemos incluir los directores de tesis y las instituciones a las que pertenecen, más aún cuando en la actualidad se considera favorable la cooperación multidisciplinar e institucional en la investigación.

Por estas razones en este trabajo se pretende:

1. Identificar las redes de colaboración en la dirección de tesis doctorales en Educación Matemática en España.
2. Identificar las redes de colaboración institucional en la dirección de tesis doctorales del área.
3. Identificar a los directores más productivos.

4. Actualizar datos sobre el tema presentados con anterioridad por otros autores.

Materiales y métodos

Para el análisis de la red social entre investigadores de Educación Matemática y que dirigen tesis doctorales se parte de la hipótesis de que los datos que se utilizan sólo son indicadores de vínculos sociales. La población objeto de estudio son las tesis doctorales de Educación Matemática realizadas en España entre los años 1975 a 2009.

Para la recuperación de la información se recurrió en primer término al listado de tesis elaborado por Vallejo (2005), que luego fue ampliado mediante la búsqueda en la base de datos TESEO, los boletines de la SEIEM y la información que brindan las paginas Web de algunos departamentos de Didáctica de la Matemática, así como por la consulta directa con la mayor parte de los doctores miembros de la SEIEM.

Se recuperó información de 328 tesis. En muchas de ellas los datos eran incompletos, por ejemplo, en TESEO, algunas tesis no indican el director ni el departamento de lectura y en algunos casos no figura todo el tribunal, o ciertos datos no coinciden con los datos que los departamentos ofrecen en su Web. Estas deficiencias en la base de datos ya han sido advertidas por otros investigadores (Delgado et al., 2006). En segundo término los nombres de directores no están normalizados, por lo que el nombre y apellidos de un mismo director pueden figurar de variadas formas, alterando de esta manera los resultados. Por estas razones hicimos un proceso de estandarización de los nombres de los directores y miembros de los tribunales, además de sus respectivas universidades de pertenencia.

A continuación se construyó una matriz de adyacencia cuadrada sobre la coparticipación de de profesores que hubieran sido directores o codirectores de al menos una tesis doctoral en Educación Matemática en España. En dicha matriz cada fila y cada columna representan a un director y son vértices en la red. Como las coincidencias entre dos directores son recíprocas, los vínculos generados no son dirigidos. Los vértices de la diagonal de la matriz se representan con ceros, porque ningún director puede coincidir con el mismo.

Resultados

Como se ha indicado se hallaron 328 tesis doctorales en Educación Matemática leídas en España en el periodo 1976-2009 (Figura I). Se observa que en el año 2000 se alcanza el mayor número de lectura de tesis y a partir de ese momento se inicia un descenso en la producción hasta alcanzar en el año 2005 niveles sólo vistos a

principios de los años noventa. Luego se inicia una recuperación hasta alcanzar un número de 19 similar al del año 1999.

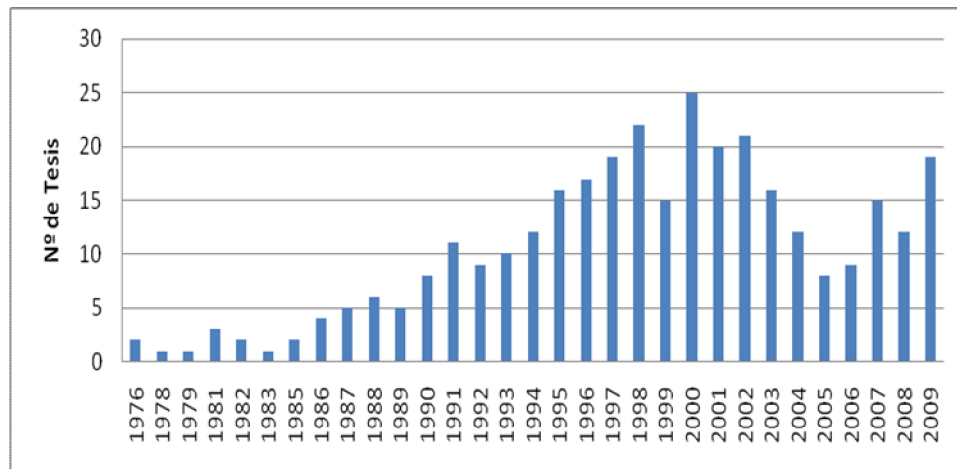


Figura I. Producción diacrónica de Tesis doctorales de Educación Matemática

Toda la producción de tesis se ha realizado en 35 universidades. En la tabla I se presentan los datos de las 20 más productivas. La distribución por comunidades autónomas indica que 78 (23,95%) se realizaron en Cataluña, 76 (23,2%) en Andalucía, 60 (18,3%) en Madrid, 21 (6,4%) en Castilla y León, 20 (6,1%) en la Comunidad Valenciana, 14 en Galicia (4,26%) y las restantes 59 (17,94%) se distribuyen en las demás comunidades.

Participaron en la dirección de las tesis doctorales un total de 215 directores. Si analizamos el género de los autores no se perciben diferencias significativas el 53,9% han sido hombres mientras que el 46,1% fueron mujeres. En la dirección de las tesis doctorales sí se encuentra un gran sesgo a favor de los hombres. El 64,9% de los directores fueron hombres frente al 28,1 de mujeres que han dirigido en el área. En un 7% de las tesis no fue posible determinar el género por cuanto al ser de los años setenta y solo indicarse en la base TESEO sus iniciales, no podía inferirse si eran hombres o mujeres.

Tabla I. Producción Española de Tesis doctorales de Educación Matemática

Universidad	Nº Tesis	%	% Acumulado
U. Granada	45	13,72	13,72
U. Autónoma Barcelona	39	11,89	25,61
U. Complutense Madrid	36	10,98	36,59
U. Barcelona	35	10,67	47,26
U. Valencia	17	5,18	52,44
U. La Laguna	15	4,57	57,01
UNED	15	4,57	61,59
U. Sevilla	13	3,96	65,55
U. Valladolid	11	3,35	68,90
U. Extremadura	10	3,05	71,95
U. Salamanca	10	3,05	75,00
U. Santiago Compostela	10	3,05	78,05
U. Murcia	8	2,44	80,49
U. Oviedo	8	2,44	82,93
U. Cádiz	7	2,13	85,06
U. País Vasco	7	2,13	87,20
U. Málaga	6	1,83	89,02
UPM	5	1,52	90,55
U. Huelva	4	1,22	91,77
U. Zaragoza	4	1,22	92,99

Se observó que de las 273 tesis analizadas, 62 se realizaron mediante codirección, lo que representa el 20% del total (Tabla II). Solamente una tesis tuvo tres directores, lo cual es algo excepcional y muy poco frecuente en Ciencias Sociales. En el periodo 1976-2009 los directores más productivos han sido: Luis Rico (UGR), Carmen Batanero (UGR) y Joaquín Jiménez (UB), Carmen Azcárate (UAB), Juan Díaz-Godino (UGR), José M^a Fortuny (UAB) y Tomás Ortega (UVA).

La información de la tabla II indica que el promedio de tesis dirigidas fuera de su propia universidad por los 25 directores más productivos es del 51,09%, lo que revela un equilibrio. Directores como Azcárate, Ortega y De la Orden han realizado toda su dirección en casa, mientras que con Bosch y Gascón sucede todo lo contrario.

Tabla II. Directores de 4 o más tesis en Educación Matemática 1976-2009

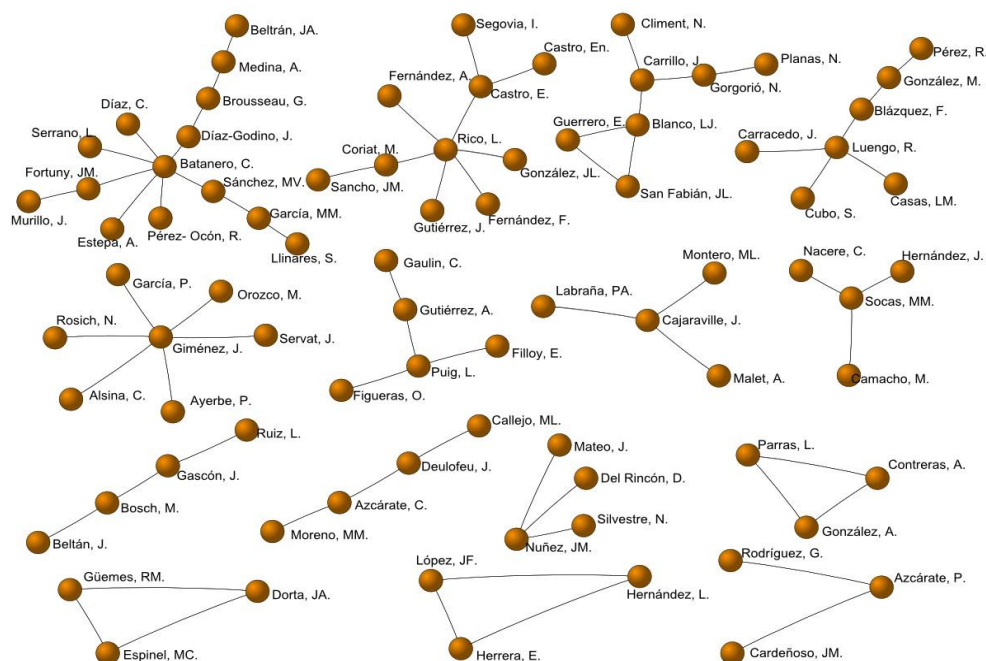
Nº	Director	Tesis dirigidas	% Tesis	% Acum.	Dirigidas fuera	%	Tesis Codirigidas	%
1	Rico, Luis (UGR)	17	5,18	5,2	1	5,88	8	47,06
2	Batanero, Carmen (UGR)	14	4,27	9,5	2	14,29	7	50,00
3	Giménez, Joaquín (UB)	12	3,66	13,1	2	16,67	8	66,67
4	Azcárate, Carmen (UAB)	8	2,44	15,5	-	-	2	25,00
5	Díaz-Godino, Juan (UGR)	8	2,44	18,0	1	12,50	2	25,00
6	Fortuny, José M ^a (UAB)	8	2,44	20,4	1	12,50	2	25,00
7	Ortega, Tomás (UVA)	8	2,44	22,9	-	-	-	-
8	De la Orden, A. (UCM)	7	2,13	25,0	-	-	-	-
9	Deulofeu, Jordi (UAM)	7	2,13	27,1	-	-	2	28,57

10	González, José L. (UMA)	6	1,83	29,0	1	16,67	1	16,67
11	Gorgorió, Nuria (UB)	6	1,83	30,8	-	-	2	33,33
12	Gutiérrez, Ángel (UVA)	6	1,83	32,6	-	-	2	33,33
13	Núñez, José M ^a (UB)	6	1,83	34,5	-	-	4	66,67
14	Blanco, Lorenzo (UEX)	5	1,52	36,0	2	40,00	2	40,00
15	Bosch, Mariana (URLL)	5	1,52	37,5	5	100,00	5	100,00
16	Castro, Enrique (UGR)	5	1,52	39,0	-	-	5	100,00
17	Gascón, Josep (UAB)	5	1,52	40,5	5	100,00	5	100,00
18	Llinares, Salvador (UAL)	5	1,52	42,1	2	40,00	2	40,00
19	Luengo, Ricardo (UEX)	5	1,52	43,6	-	-	4	80,00
20	Bermejo, Vicente (UCM)	4	1,52	43,6	-	-	1	25,00
21	Cajaraville, José (USC)	4	1,52	43,6	-	-	3	75,00

22	Carrillo, José (UHU)	4	1,52	43,6	1	25,00	3	75,00
23	Puig, Luis (UV)	4	1,52	43,6	-	-	3	75,00
24	Rosich, Nuria (UBA)	4	1,52	43,6	-	-	3	75,00
25	Socas, Martín (ULA)	4	1,52	43,6	-	-	3	75,00

A continuación se presenta la representación de la redes de colaboración entre los directores de tesis (Figura II). Se han excluido aquellos directores que no han compartido alguna dirección. El tamaño del nodo indica el grado de producción. Se observa que los dos mayores productores de tesis son a su vez los ejes de las mayores redes de colaboración. En la red se muestra la participación de algunos directores extranjeros, como por ejemplo, Filloy, Brousseau o Figueras.

Figura II. Redes de colaboración personal en la dirección de tesis en EMA



En la dirección de tesis doctorales han participado profesores de 39 universidades, de las que 36 son españolas y tres extranjeras. Los profesores de las universidades de Granada, Autónoma de Barcelona, Complutense de Madrid y Barcelona son quienes han dirigido los mayores números de tesis doctorales, sobresaliendo la UGR como la primera en la participación de sus profesores en la dirección de tesis doctorales en España (Tabla III).

Tabla III. Participación en la dirección de tesis por universidades

Universidad	Nº Tesis
U. GRANADA	42
U. AUTÓNOMA BARCELONA	32
U. COMPLUTENSE MADRID	30
U. BARCELONA	28
U. VALENCIA	15
U. LA LAGUNA	11
U. EXTREMADURA	10
U. POLITÉCNICA MADRID	9
U. SEVILLA	9
U. VALLADOLID	9
UNED	9
U. SANTIAGO DE COMPOSTELA	8

Tomando como referencia la pertenencia universitaria en la colaboración en la dirección de tesis, se obtiene que 22 universidades han establecido vínculos fuera de sus centros, lo que representa el 56,41%. Se crean cuatro subredes (Figura III) en las que se aprecia como las dos universidades con mayor número profesores en la dirección de tesis, se relacionan para formar la mayor subred de colaboración universitaria.

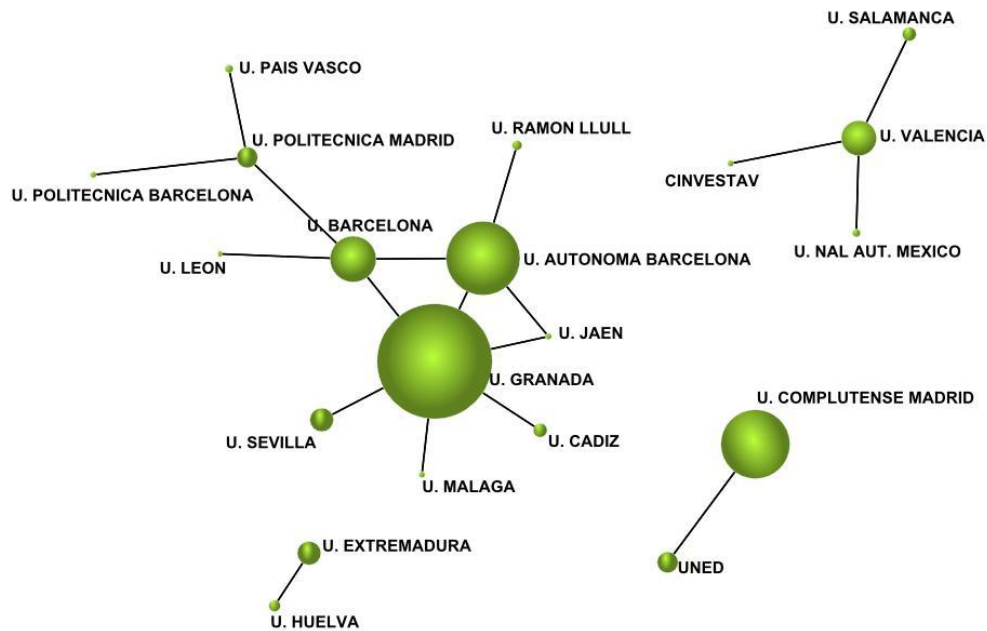


Figura III. Red de colaboración en la dirección de tesis

Es llamativo que pese a que la Universidad Complutense de Madrid es la tercera mayor participante en las direcciones de tesis, solamente haya colaborado con la UNED. En la red representada en la Figura III, el tamaño del nodo representa el grado de participación en la dirección de tesis.

Conclusiones

Es visible la participación de las mujeres en la dirección de tesis doctorales en Educación Matemática, puesto que entre los 10 directores más productivos hay tres mujeres que participan en el 9,86% de la dirección de tesis (Batanero, Azcárate y Gorgorio). Además Carmen Batanero es la segunda directora con mayor producción. Se observa cómo en los últimos cinco años se viene produciendo un relevo en la dirección de tesis doctorales. Esto puede ser consecuencia de que quienes realizaron su doctorado en la década de los años 90, ahora han pasado a desempeñar funciones de dirección de tesis doctorales.

De los 10 directores más productivos, cuatro pertenecen al Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, participando en el 16,1% de tesis realizadas, así mismo, otros cuatro pertenecen al Departamento de

Didàctica de les Matemàtiques i les Ciències Experimentals de la Universidad Autònoma de Barcelona y participan en el 9,87% del total de tesis.

De forma global los profesores de las universidades de Granada, Autònoma de Barcelona, Barcelona y Complutense de Madrid han participado en la direcció de, al menos, 132 de las tesis doctorales defendidas en España. Esto pone de manifiesto el papel destacado que desempeñan estas universidades en el proceso de formación de investigadores del área en España y, por qué no decirlo, en Latinoamérica, de donde provienen muchos de los autores de las tesis que han dirigido.

En España hay 74 universidades entre públicas y privadas, de las que solamente profesores de 36 de ellas han dirigido o codirigido alguna tesis doctoral en Educación Matemática, es decir, menos de la mitad del total, aunque si bien no en todas hay departamentos que incorporen a profesores del área de Didáctica de la Matemática.

La red social que conforman los directores de tesis doctorales en Educación Matemática en España permite ir configurando el mapa de los “colegios invisibles” que tienen el poder de orientar y validar la formación de los futuros investigadores. En un futuro y como continuación de la primera aproximación a esta temática, deberán abordarse las relaciones en la composición de los tribunales de tesis doctorales, que, como es sabido, en España son altamente endogámicos, como indican Casanueva, et al. (2007) y Delgado, et al. (2006).

Referencias bibliográficas

- Casanueva, C., Escobar, P., Larriaga, C. (2007). Red social de Contabilidad en España a partir de los tribunales de tesis. *Revista Española de Financiación y Contabilidad*, 36(136), 707-722.
- Crame, D. (1975). *Invisible colleges: difusión of knowledge in scientific communities*. Chicago: University Chicago Press.
- Delgado-López-Cozár, E., Torres-Salina, D., Jiménez-Contreras, E. y Ruíz-Pérez, R. (2006). Análisis bibliométrico y de redes sociales aplicado a las tesis bibliométricas defendidas en España (1976-2002): temas, escuelas científicas y redes académicas. *Revista española de documentación científica*, 29(4), 493-534.
- Fernández Cano, A, Torralbo, M., Rico, L., Gutiérrez M^a. P., y Maz, A. (2003). Análisis cienciométrico de las tesis doctorales españolas en Educación Matemática (1976-1998). *Revista Española de Documentación Científica*, 26 (2). Pp. 162-176.

- López-Yepes, J. (2002). Focos de investigación y escuelas científicas en documentación. La experiencia de las tesis doctorales. *El profesional de la información*, 11(1), 46-52.
- Olmeda-Gómez, C., Perianes-Rodríguez, A., Ovalle-Perandones, M^a A. y Moya Anegón, F. (2009). Colegios visibles: estructuras de coparticipación en tribunales de tesis doctorales de biblioteconomía y documentación en España. *El profesional de la información*, 18(1), 41-49.
- Perianes-Rodríguez, A. (2004). *Análisis de las redes sociales de los tribunales de tesis en dos departamentos españoles de biblioteconomía y documentación. Universidades de Granada y Carlos III de Madrid*. Madrid: Universidad Carlos III. [Manuscrito no publicado].
- Price, D.J. (1980). Ciencia y tecnología: distinciones e interrelaciones. En Barnes, B (comp.). *Estudios sobre sociología de la ciencia* (pp. 163-177). Madrid: Alianza
- Torres, I. y Torres-Salinas, D. (2005). Tesis doctorales sobre estudios de las mujeres en España (1976-2002): a propósito de un indicador definitivo en investigación. *Revista española de documentación científica*, 28(4). 479-499.
- Vallejo, M. (2005). *Estudio longitudinal de la producción española de tesis doctorales en educación matemática (1975-2002)*. Tesis Doctoral, Universidad de Granada.
- Vallejo, M., Fernández-Cano, A., Torralbo, M., Maz, A. y Rico, L. (2008). History of Spanish Mathematics Education focusin on PhD Theses. *Internacional Journal of Science and Mathematics Education*, 6(2), 313-127.

LA REVISTA PNA CUATRO AÑOS DESPUÉS DE SU LANZAMIENTO

[Marta Molina](#), María C. Cañadas, Jesús Gallardo (*), Pedro Gómez, José Luis Lupiáñez

Universidad de Granada, Universidad de Málaga

Resumen

La difusión internacional de la investigación de calidad constituye uno de los principales retos al que se enfrentan los consejos editoriales de las publicaciones científicas. Entre ellas se encuentra PNA, la única revista española especializada en investigación en Educación Matemática. En este trabajo, cuatro años después del lanzamiento de la revista, el consejo editorial hace una reflexión y presenta aquí una breve descripción del proceso seguido para dar visibilidad a la revista y garantizar su calidad científica.

Abstract

The international divulgation of quality research constitutes one of the main challenges faced by editorial boards of scientific publications. Within them it is PNA, the only Spanish journal on mathematics education research. In this paper, four years after launching the journal, the editorial board makes a reflection and presents a brief description of the process followed to give visibility to the journal and to guaranty its scientific quality.

Molina, M. et al. (2011). La revista PNA cuatro años después de su lanzamiento. En M.M. Moreno, N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los Grupos de Investigación de la SEIEM* (pp. 433-437). Lleida.

PNA es la única revista española especializada en investigación en Educación Matemática. Es una revista de acceso abierto, que publica estudios de investigación, experimentales o teóricos. Dichos trabajos han sido revisados por pares de forma anónima, están escritos en inglés o en español y siguen las normas de estilo APA. *PNA* es editada por el grupo de investigación FQM-193 “Didáctica de la Matemática: Pensamiento Numérico”, del Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación de la Junta de Andalucía.

En este momento, cuatro años después del lanzamiento de la revista, el consejo editorial hace una reflexión y presenta aquí una breve descripción del proceso seguido para dar visibilidad a la revista y garantizar su calidad científica, destacando algunas de las principales dificultades encontradas y los logros alcanzados más significativos.

Creación y lanzamiento

El lanzamiento de *PNA* tuvo lugar en septiembre de 2006 como respuesta a la ausencia de revistas españolas especializadas en investigación en Educación Matemática; un hecho consecuencia del carácter emergente que esta área de investigación tiene en España y, posiblemente también, de la poca presión que, durante varios años, existió en las universidades españolas para la publicación de trabajos de investigación en revistas de alto nivel. La visibilidad de las investigaciones españolas en esta área es todavía escasa en revistas de prestigio internacional. Entre el 2000 y el 2008, los investigadores españoles han publicado sólo cinco artículos en revistas clasificadas en el Social Sciences Citation Index (SSCI) (Llinares, 2008). En todo caso, reconocemos que la Educación Matemática a nivel internacional sigue siendo una disciplina joven en comparación con otras muchas, lo que puede ser una de las razones por la que sólo tres revistas específicas de investigación en esta área están incluidas en el SSCI.

En este contexto, se crea y lanza *PNA* buscando facilitar la divulgación internacional de la investigación española en Educación Matemática, más allá de los encuentros científicos, y dar respuesta a la necesidad de disponer de una revista de investigación española en esta área. Esta iniciativa surge de cuatro estudiantes del doctorado en Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada¹ con el apoyo del grupo de investigación FQM-193, compuesto por 28 investigadores, que

¹ En cierta forma, la aparición de *PNA* en la escena científica puede entenderse como un resultado visible derivado de la consolidación de los programas de doctorado y del avance de la formación de investigadores en Didáctica de la Matemática en España. En la actualidad, todos los miembros del consejo editorial de la revista son doctores en el área.¹ En la actualidad hay 340 personas suscritas electrónicamente y más de 1.300 las páginas Web que incluyen links a *PNA*

proporciona el respaldo institucional necesario. El respaldo internacional viene dado por el comité científico de la revista que está constituido, desde sus inicios, por 11 investigadores de prestigio en el área, de 10 países diferentes.

Divulgación de PNA

Desde el inicio de la creación de *PNA*, el consejo editorial ha aplicado variadas estrategias dirigidas a dar difusión a la revista a nivel nacional e internacional. Con esta intención la revista es bilingüe (Inglés/Español) y existe en dos formatos, uno impreso y otro electrónico (www.pna.es). La versión impresa se distribuye gratuitamente a un número reducido de destinatarios nacionales e internacionales, de prestigio en el área, seleccionados por el consejo editorial, con el objetivo de darles a conocer la revista de una forma directa y cercana y que ellos la den a conocer en su entorno de investigación. Paralelamente se ha potenciado la divulgación de la revista en su formato electrónico con diversas acciones entre las que destacamos la creación de un servicio de suscripción electrónica, que permite a los lectores recibir un aviso con la publicación de cada número, y la inclusión de enlaces a la versión digital de la revista en páginas relacionadas con la Educación Matemática que permiten esta posibilidad². Así mismo se ha dado publicidad a la revista en congresos nacionales e internacionales de investigadores en Didáctica de la Matemática. El esfuerzo de promoción ha tenido como resultado destacable que la página Web de la revista aparezca como primera opción en Google cuando se hacen búsquedas por la frase “investigación en didáctica de la matemática” y séptima con la búsqueda “didáctica de la matemática”³.

Paralelamente y desde el lanzamiento de *PNA*, el consejo editorial ha gestionado su inclusión en índices, bases de datos científico-técnicas, directorios de revistas, catálogos de bibliotecas, motores de búsqueda académicos, repositorios, boletines de sumarios y portales especializados. Este proceso ha sido complejo debido a la ingente cantidad existente de este tipo de fuentes secundarias de información y la diversidad de características y modos de gestión de las mismas. En primer lugar ha sido necesario identificar las fuentes más relevantes e indagar en el proceso de selección de publicaciones que emplean. Con el objetivo de cumplir los criterios de calidad exigidos por estas fuentes, hemos ido definiendo el formato actual de la revista y ha ido evolucionando su política editorial. Como resultado, *PNA* se encuentra en la actualidad indexada en 24 índices y bases de datos, nacionales (e. g., CSIC, DICE e INRECS) e internacionales (e. g., Latindex, MathEduc y ZDB).

² En la actualidad hay 340 personas suscritas electrónicamente y más de 1.300 las páginas Web que incluyen links a PNA.

³ Resultados correspondientes al día 25 de mayo de 2010.

Si bien la presencia de *PNA* en fuentes secundarias es destacada, su corto periodo de existencia es un factor limitante para la inclusión en algunas fuentes relevantes, así como para su evaluación mediante indicadores basados en el número de citas que reciben sus artículos, tales como el índice de impacto de INRECS.

Calidad de los Trabajos en *PNA*

PNA persigue desde su inicio aumentar su calidad como publicación científica. Esta es, junto con la difusión, una de las principales cuestiones que preocupan a los editores de las revistas científicas españolas (Abadal y Rius, 2008).

Si consultamos indicadores cuantitativos para *PNA*, los resultados son muy positivos para la edad de la revista (Bracho, 2010, pp. 387-412):

- a. Su índice de colaboración es de 2,26, superior al número de dos firmas por artículo que usualmente se establece para las ciencias sociales en España.
- b. Todos los artículos han presentado citas bibliográficas y se constata una media elevada de citas a artículos y tesis doctorales en una gran proporción de los artículos.
- c. Las citas, que en su mayoría son en inglés, tienen una antigüedad media de 9,22 años, que es inferior a la media en ciencias humanas y sociales en España.

En este momento, para aumentar la calidad y la visibilidad de la revista, vemos necesario promover su citación regular en otras publicaciones, principalmente de impacto. Así mismo el consejo editorial busca desarrollar sistematicidad en la aplicación de criterios de calidad para la eventual publicación de los artículos recibidos. En todo caso, la baja visibilidad internacional de la revista en términos de citaciones en publicaciones influyentes del área junto con la juventud de la revista, dificulta en estos momentos el alcance de nuestras pretensiones de difusión y calidad, pues hace que los científicos de alto nivel del área todavía no tengan a *PNA* como vía preferente de difusión de sus resultados.

Consideraciones finales

Llevamos a cabo la creación de *PNA* para dar respuesta a la necesidad de disponer de una publicación seriada constante en el área de Didáctica de la Matemática en España, en la que sus investigadores pudiesen compartir, difundir y someter a la valoración de la comunidad los trabajos que realizan. Con este propósito iniciamos una labor sistemática y compleja, que ha sido condicionada por los referentes y requerimientos propios de la literatura de investigación. Gran parte de nuestros esfuerzos se han focalizado en dar visibilidad a la revista a través de sus suscriptores y de su presencia en páginas webs, y por medio de su presencia en

fuentes secundarias de información. Creemos que el número elevado de tales fuentes en las que se encuentra incluida *PNA* junto con el esfuerzo por mejorar la calidad de su contenido, están en el origen de un aumento reciente en el número de manuscritos que recibimos para su publicación. Nuestras acciones actuales se centran en la búsqueda de estrategias para conseguir la inclusión de la revista en un mayor número de fuentes secundarias de prestigio, la citación regular en revistas de impacto y la sistematicidad en la aplicación de criterios de calidad para la eventual publicación de los artículos recibidos.

Referencias bibliográficas

- Abadal, E.; Rius L. (2008). Revistas científicas de las universidades españolas: acciones básicas para aumentar su difusión e impacto. *Revista Española de Documentación Científica*, 31(2), 242-262.
- Bracho, R. (2010). *Visualización de la investigación en Educación Matemática en España. Análisis bibliométrico y conceptual de la producción de artículos científicos (2003-2008)*. Tesis doctoral no publicada, Universidad de Córdoba.
- Llinares, S. (2008). Agendas de investigación en Educación Matemática en España. Una aproximación desde ISI-web of knowledge y ERIH. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L. Blanco (Eds.), *XII-Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática SEIEM-España*, pp. 25-54. SEIEM. Badajoz.

COMPETENCIAS NUMÉRICAS DE LOS NIÑOS/AS AL COMENZAR LA EDUCACIÓN INFANTIL

María Salgado Somoza, María Jesús Salinas Portugal
Universidad de Santiago de Compostela

Resumen

El “número” está presente diariamente en la Educación Infantil y su enseñanza-aprendizaje juega un papel importante en la construcción de dicho conocimiento. El objetivo de este estudio es conocer las competencias numéricas de los niños de tres años. Se diseñó una entrevista que se realizó a una muestra reducida de niños/as y se analizaron los resultados cualitativamente.

Abstract

The "number" is present daily in the Child-Education and its teaching-learning plays an important role in building this knowledge. The aim of this study is to learn the numerical skills of the three years old children. It was designed an interview that was accomplished at a limited sample of children and the results were analyzed qualitatively.

Salgado, M., Salinas, M.J. (2011). Competencias numéricas de los niños/as al comenzar la educación infantil. En M.M. Moreno, N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los Grupos de Investigación de la SEIEM* (pp. 439-451). Lleida.

Introducción

En el marco curricular de la LOE, se destaca la importancia de las competencias numéricas en todas las etapas educativas. A diario en todas las aulas, y en concreto en las de Educación Infantil, se tratan aspectos relacionados con los números y sus competencias, que son probablemente el conocimiento más importante de aprendizaje de las matemáticas (Clements y Sarama, 2007). Son los docentes quienes tienen la tarea de programar y evaluar su adquisición; en ocasiones debido a las características propias de la edad, esta programación y evaluación resulta laboriosa y difícil de realizar.

La mayoría de los niños y niñas ingresan en el sistema educativo a la edad de 3 años. Poseen unas creencias y conocimientos de la realidad, y en particular del número, influenciados o no por la sociedad. Muchos niños y niñas llegan al colegio conociendo socialmente los números, por lo que estos no conllevan “aparentemente” a ninguna dificultad en el aprendizaje.

Un porcentaje alto de adultos consideran que el conocimiento y comprensión de los primeros números es algo sencillo y espontáneo, por el contrario su construcción es larga y compleja.

En la escuela Infantil es donde se deben iniciar la construcción de los conocimientos numéricos, ya que son fundamentales en la educación matemática de las personas (Verschaffel, Greer y De Corte, 2007). A lo largo de la historia los conocimientos numéricos estuvieron presentes en las aulas de los más pequeños, aunque su tratamiento fue distinto. Siguiendo estudios de Ruiz (2006), antes del año 1971 el objetivo de la escuela infantil era enseñar a recitar y escribir la serie numérica. En las décadas setenta y ochenta, se fomentaba la construcción de saberes prenuméricos, clasificar, ordenar, entre otros, como paso previo a la construcción del número y actualmente se incide en que para su construcción es necesaria la actividad de contar. El docente, en el diseño del proceso de enseñanza del número no puede basarse solamente en la definición matemática de número natural y en las reglas del algoritmo de “contar”, tiene que establecer un conjunto de situaciones que lleven a los niños y niñas a encontrar las “razones de ser” del número.

El objetivo de este estudio es:

1. Conocer las competencias numéricas de los niños y niñas al comenzar la Educación Infantil.
2. Competencia matemática

The National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), cuyos trabajos han sido y son referentes en educación matemática, publica en el año 2000: Principios y Estándares para la Educación Matemática, que son “sin lugar a dudas, un referente

internacional que nos permite concretar la matemática que se trabaja en educación infantil” (Alsina, Aymerich y Barba, 2008). Estos Principios y Estándares manifiestan que el desarrollo matemático de un niño se fundamenta en los primeros años y hacen una distinción de diez Estándares curriculares, (números y operaciones, álgebra, geometría, medida, análisis de datos y probabilidad – estándares de contenidos-; resolución de problemas, razonamiento y prueba, comunicación, conexiones y representaciones –estándares de procesos-), para los niveles desde infantil hasta el final de la educación secundaria.

Los actuales currículos hacen referencia explícita a competencias básicas, y en particular, a competencia matemática. Rico y Lupiáñez (2008: 184) apoyándose en documentos del Ministerio de Educación señalan que “la competencia matemática consiste en la habilidad para utilizar y relacionar los números, sus operaciones básicas, los símbolos y las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto para producir e interpretar distintos tipos de información como para ampliar el conocimiento sobre aspectos cuantitativos y espaciales de la realidad, y para resolver problemas relacionados con la vida cotidiana y con el mundo laboral”.

“Competencia matemática no equivale a conocimiento matemático” (Goñi, 2008: 82). La competencia matemática (Goñi, 2008) es la habilidad mediante la cual se desarrolla y aplica el razonamiento matemático con la finalidad de resolver problemas en situaciones cotidianas.

En la Comunidad Autónoma de Galicia el currículo de infantil señala que competencia matemática implica el conocimiento y uso de elementos matemáticos básicos, entre los que está el número, en situaciones reales o simuladas de la vida real, y la puesta en práctica de procesos de razonamiento que lleven a la resolución de los problemas o a la obtención de la información.

Competencia numérica

La NCTM (2000) en el “estándar de números y operaciones”, que corresponde con los contenidos y procedimientos que deberían aprender los estudiantes, cita textualmente “los programas de enseñanza de todas las etapas educativas deberían capacitar a todos los estudiantes para: comprender los números, las formas de representarlos, las relaciones entre ellos y los conjuntos numéricos”.

Competencia numérica es (Cockcroft, 1985) la capacidad de aplicar confiadamente los números a la vida diaria, lo que supone por un lado familiaridad con los números y destrezas y por otro comprender la información en términos numéricos. La competencia numérica, “no está asociada al dominio de cierta técnica, sino al uso de estrategias que resuelvan la situación” (Giménez, 2008; 7)

Los niños y niñas de infantil a menudo recitan números, aunque no comprendan plenamente su representación y las relaciones que se establecen entre ellos (Orton,

1990), “los van construyendo e interiorizando poco a poco” (Veiga Río, 1999: 430).

En la etapa de educación infantil, los niños y niñas deberían conocer y comprender los números, sus modos de representarlos, las relaciones y los sistemas numéricos (Alsina, Aymerich y Barba, 2008). Todo ello en diferentes contextos numéricos, que inciten al afianzamiento y comprensión del conocimiento. Los diferentes contextos numéricos se presentan en el siguiente mapa conceptual, tomado de Rico y Lupiáñez (2008: 301):

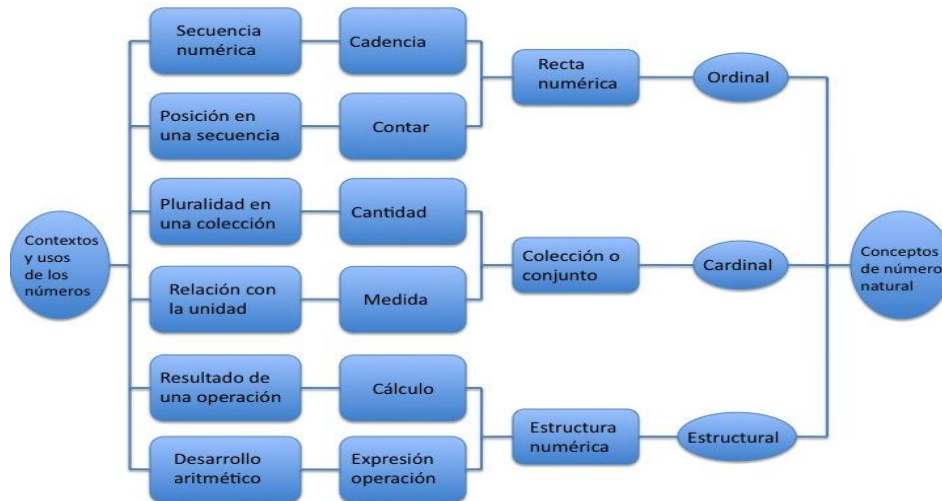


Figura 1. Mapa conceptual de los usos y significados de los números naturales.

Para comprender los números es necesario utilizarlos correctamente y ello requiere de una serie de habilidades (Alsina et al, 2007), entre otras las más importantes son: clasificar, ordenar de menos a más y viceversa, dominar diferentes tipos de orden para poder contar, siendo para ello importante la capacidad de organización espacial, saber coordinar (mano, nombre del número y trayectoria), conocer la inclusión y saber que los números están representados por signos convencionales.

Diseño de la investigación

Como se señala en la introducción el objetivo de este estudio es, conocer las competencias numéricas que tienen los alumnos y alumnas del primer curso del segundo ciclo de Educación Infantil al comienzo del curso.

La muestra son 21 niños de un colegio público de educación infantil y primaria de la comarca de Santiago de Compostela. De esta muestra 11 son niñas y 10 son niños, estando 9 de los totales escolarizados en el curso anterior en guarderías.

GUARDERÍA	SÍ	NO	TOTAL
Niños	4	6	10
Niñas	5	6	11
Total	9	12	21

Tabla I: Características de la muestra.

El enfoque metodológico de esta investigación se sitúa en la metodología cualitativa, basada en la recogida de información mediante entrevistas y en el análisis cualitativo de los resultados.

Esta investigación se inicia con el diseño de una entrevista, que contiene tres pruebas, cada una de ellas asociada a diferentes aspectos del “número”. A continuación se realizaron individualmente las entrevistas y posteriormente se analizaron cualitativamente los resultados. Estos resultados fueron codificados y clasificados.

Diseño de la entrevista

Para el diseño de la entrevista, hemos partido del modelo evolutivo de competencias ordinales de Fernández (2009) y de los usos y contextos de los números naturales (Rico y Lupiáñez, 2008). Teniendo en cuenta éstos y la edad de los niños y niñas a los cuales estaba destinada la entrevista, diseñamos las siguientes pruebas:

Prueba 1. ¿Quién es?

Esta primera prueba consta de tres tareas.

Tarea 1.1: “el calendario”, donde al niño/a se le pregunta: ¿qué día es? (recordándole el día anterior), la respuesta es verificada con la profesora y en caso de no ser correcta le rectifica; a continuación el alumno/a debía buscar en un calendario magnético el “número del día” y colocarlo en el lugar correspondiente.

Se trataba de que el niño/a identificase números en un contexto real para resolver un problema diario del aula “la fecha”.

Tarea 1.2: “la mariola”, donde los niños/as debían jugar libremente al juego de la mariola, este juego fue realizado en tres días, con tres condiciones distintas.

Día 1. (1.2.1.) Los niños/as debían lanzar el peso y a continuación antes de jugar decir en que número cayera.

Día 2. (1.2.2.) Los niños/as debían decir antes de lanzar el peso el número al que tenían intención de tirar, a continuación tirar y comprobar la veracidad del lanzamiento.

Día 3.- (1.2.3.) Los niños/as debían jugar siguiendo la serie numérica del 1 al 10.

Con esta tarea se trataba de que el niño identificase números en un contexto significativo y lúdico, siguiendo un proceso de lo global a lo particular.

Tarea 1.3. es el “registro de cuentos”, en el aula todos los cuentos están numerados y hay un panel con todos los números para realizar el registro de los cuentos. Los niños/as debían escoger un cuento, decirle a la profesora que número es, coger su foto y colocarla al lado del número correspondiente. Si no saben el número, la profesora se lo dice y le insiste en que se fije bien como es y luego que lo busque y coloque. Si no lo colocan en el lugar acertado, no se les corrige, con la finalidad de que puedan surgir posteriores conflictos con otros alumnos/as.

Con esta tarea se pretendía ver que estrategias asociadas a “identificación de números” utilizaban los niños/as.

Prueba 2. ¿Cómo es?

Esta prueba consta de dos tareas.

Tarea 2.1: se realizan individualmente a los niños/as las siguientes preguntas:

2.1.1. ¿Cuántos años tienes?

2.1.2. ¿Cuántos años tienen tus padres?

Tarea 2.2: consiste en reflejar por escrito las respuestas señaladas en la tarea 1.

2.2.1. Representación escrita a la pregunta 2.1.1.

2.2.2. Representación escrita a la pregunta 2.1.2.

Con esta prueba se trataba de observar las relaciones que existían entre lo que el niño/a decía y escribía; y averiguar qué tipo de estrategias utilizaban los niños para determinar la solución de un problema conocido (su edad) y otro desconocido (edad de sus padres).

Prueba 3. Cuéntame.

Esta prueba consistía en tres tareas.

Tarea 3.1: consistía en escribir en mayúsculas en un papel su nombre propio y a continuación tenían que contar las letras de su propio nombre. Al terminar de contar, se les preguntaba ¿cuántas tiene en total?

Con esta tarea se pretendía observar como realizaban los niños/as el conteo y las relaciones que establecían con los resultados.

Tarea 3.2: los niños/as debían predecir que posición tenía una letra de su nombre que previamente le había señalado la profesora.

El objetivo de esta tarea era comprobar que estrategias utilizaban para dar la respuesta.

Tarea 3.3: consistía en que la profesora les preguntaba que “si esta letra de su nombre era por ejemplo la “tercera”, la siguiente cual era.

En esta tarea se trataba de observar que relaciones establecían los niños/as para determinar posiciones teniendo referentes ordinales.

Análisis de resultados

Los resultados de cada una de las tareas fueron analizados cualitativamente. Todas las respuestas se clasificaron, las verbales fueron recogidas en vídeo y por escrito por la investigadora.

Se categorizaron las respuestas del siguiente modo:

0: No entiende.

1: Responde al azar.

2: Responde correctamente mediante ensayo-error.

3: Responde correctamente y justifica la respuesta.

Los criterios de corrección de cada una de las tareas son:

- Tarea 1.1. La respuesta correcta es decir exactamente el día, identificarlo y colocarlo en el panel en el lugar correspondiente.

- Tarea 1.2.1. En este ejercicio el niño debe decir correctamente el número en el que le cae el peso.
- Tarea 1.2.2. Como correcto se valora que el niño/a previamente diga un número y que luego lo identifique con el dedo en la mariola. En caso de no caerle el peso en el número mencionado y señalado, se valora correcta la tarea.
- Tarea 1.2.3. Se debe realizar el juego siguiendo ordenadamente la serie numérica del 1 al 10. Si el niño/a juega realizando la serie aunque no identifique todos los números sigue siendo correcto el ejercicio.
- Tarea 1.3. Se toman como correctas las siguientes respuestas:
 - Si el niño/a, aunque previamente no identifique el número, a continuación coloca su foto en el panel correctamente.
 - Si, identificando el número correctamente, el alumno/a, coloca su foto en otro que se diferencia por la posición de los números.

Si identifica y coloca el número, aunque no utilice su nombre convencional.

- Tarea 2.1.1. La respuesta correcta es que cada alumno diga correctamente los años que tiene.
- Tarea 2.1.2. Se valora como correcto que el niño/a utilice algún cuantificador coherente que represente la edad de sus padres, aunque no sea exacto (muchos, treinta,...)
- Tarea 2.2.1. La valoración correcta de esta actividad es si el niño represente en papel sus años por medio de su grafía, o palitos,...
- Tarea 2.2.2. Se toma como correcta que el niño/a represente en papel la respuesta que diga en la tarea 2.1.2.
- Tarea 3.1. La respuesta es correcta si el niño/a utiliza correctamente el conteo.
- Tarea 3.2. Se toma como correcta si el niño antes de contestar correctamente, previamente cuenta.
- Tarea 3.3. Se debe de identificar el número que le sigue a partir de uno dado previamente para que la respuesta sea correcta.

En la tabla II se recogen los resultados de todos los alumnos/as en cada una de las tareas. El código utilizado para los alumnos/as es el siguiente: AoG (alumno que estuvo escolarizado en guardería), AaG (alumna que estuvo escolarizado en guardería), Ao (alumno que no estuvo escolarizado en guardería), Aa (alumna que no estuvo escolarizada en guardería).

ALUMNOS/ AS	TAREAS											
	1					2				3		
	1.1	1.2.1	1.2.2	1.2.3	1.3	2 1.1	2.1.2	2.2.1	2.2.2	3.1	3.2	3.3
Ao1G	1	1	1	1	1	3	1	1	1	2	2	3
Ao2G	3	3	3	3	3	3	3	3	1	3	3	3
Ao3G	3	3	3	3	3	3	1	1	1	3	3	3
Ao4G	1	3	3	3	3	3	1	1	1	2	2	2
Ao5	0	1	3	1	1	3	1	0	0	1	1	1
Ao6	0	3	3	2	1	3	2	0	0	1	0	0
Ao7	3	3	3	3	3	3	1	3	3	3	2	3
Ao8	1	3	3	3	3	3	1	1	1	2	1	1
Ao9	0	1	1	1	1	3	1	1	1	1	1	1
Aa10G	2	3	3	2	1	3	1	1	1	2	1	1
Aa11G	1	3	3	3	1	3	1	3	1	3	1	1
Aa12G	0	1	3	1	1	3	1	1	1	2	1	1
Aa13G	1	3	3	3	2	3	1	3	1	3	1	1
Aa14G	1	3	3	3	3	3	3	1	1	3	1	1
Aa15	2	3	3	3	3	3	1	1	1	3	3	3
Aa16	3	3	3	3	3	3	3	3	1	3	3	3
Aa17	1	3	3	2	3	3	1	3	1	3	3	3
Aa18	0	1	1	2	1	3	1	3	1	3	0	0
Aa19	3	3	3	2	1	3	1	3	3	3	1	1
Aa20	0	3	3	2	1	3	1	1	1	2	0	0
Aa21	1	1	3	2	1	3	3	1	1	2	0	0

Tabla II. Resultados de las respuestas de las tareas

Analizando individualmente los resultados de la Tabla II, se observa un pequeño modelo evolutivo en los resultados de las tareas. Las primeras tareas que los alumnos realizan con éxito y razonando sus respuestas son las que tratan aspectos sociales del número (tareas: 1.2.1, 1.2.2, 2.1.1). A continuación las de identificación de los primeros números (tarea 1.2.3), después su representación (tarea 2.2.1), recitación de números (tarea 3.1) y por último determinación de posiciones ordinales y representación, primero dando la anterior como dato (tareas: 1.1, 3.3) y después sin ningún dato (tareas: 1.3, 3.2, 2.1.2, 2.2.2).

A continuación en la tabla III se cuantifican los resultados de cada una de las tareas.

TAREAS	RESULTADOS			
	0	1	2	3
1.1.	6	8	2	5
1.2.1.	0	6	0	15
1.2.2.	0	3	0	18
1.2.3.	0	4	7	10
1.3.	0	11	1	9
2.1.1.	0	0	0	21
2.1.2.	0	16	1	4
2.2.1.	2	11	0	8
2.2.2.	2	17	0	2
3.1.	0	3	7	11
3.2.	4	9	3	5
3.3.	4	9	1	7

Tabla III. Resultados de las tareas

Observando la Tabla III, podemos afirmar que la mayoría de los alumnos de la muestra no determinan una posición ordinal a partir de una dada como dato y que no presentan dificultades para resolver problemas relativos a conocimientos

numéricos sociales. Además la mayoría no establecen relaciones lógicas numéricas, ni utilizan estrategias en la resolución de problemas.

Los problemas de identificación de “números” (tarea 1.2.1) son resueltos por muchos niños/as de la muestra, siempre que las posiciones ordinales sean pequeñas (del 1 al 5). Cuando se les ofrece la posibilidad de elegir (tarea 1.2.2), la mayoría opta por escoger números conocidos y representativos para ellos (el uno y el tres). En la identificación de la serie numérica el porcentaje es menor (tarea 1.2.3).

Los problemas socialmente valorados de conocimiento de “números”, son resueltos por la totalidad de la muestra (tarea 2.1.1), frente a los desconocidos (tareas: 2.1.2, 2.2.2), que no es realizado con éxito por ningún alumno/a. Aunque no hubo ningún alumno que realizase la prueba 2 razonando y justificando correctamente sus respuestas, algunos niños presentaron respuestas que se semejaban a la realidad.

Con respecto a la acción de contar (tarea 3.1), se observa que la mayor parte de la muestra “cuenta”, aunque el conteo no lo utilicen como una estrategia para resolver problemas numéricos. La mayoría no establece relaciones lógicas ordinales, y les resulta más fácil las cuestiones de determinar la posición del siguiente inmediato (tareas: 3.3, 1.1) que las de predecir posiciones (tareas: 3.2, 1.3).

La siguiente tabla recoge la cuantificación de los resultados individuales.

RESUL TADOS	-																				
	A o1 G	A o 2 G	A o 3 G	A o 4 G	A o 5	A o 6	A o 7	A o 8	A o 9	A a 1 0 G	A a 1 1 G	A a 1 2 G	A a 1 3 G	A a 1 4 G	A a 1 5	A a 1 6	A a 1 7	A a 1 8	Aa1 9	A a2 0	Aa 21
0																			0		2
1									0										4		5
2																			1		2
3		1					0									1			7		3

Tabla IV. Resultados individuales de la muestra.

Analizando la Tabla IV, en base a las respuestas de cada alumno/a, destacar que ningún niño/a responde correctamente y justifica las respuestas de todas las tareas, al igual que en la muestra no hay ningún alumno/a que no entienda todas las tareas.

Destacamos que el hecho de haber estado escolarizado en el curso anterior en guarderías, no repercute sustancialmente ni positiva ni negativamente en los resultados. Decir que una amplia mayoría de los alumnos que fueron a guarderías entendieron todas las tareas a realizar (en ningún ítem presentaron el resultado 0), y los mejores resultados fueron de una alumna que no fue a guardería en el curso anterior y de un alumno que si estuvo escolarizado.

Conclusiones

Las conclusiones que se pueden extraer de este estudio son las siguientes:

- Los niños/as llegan a la Educación Infantil con un amplio conocimiento social sobre los números, aunque este conocimiento no implique competencias, ya que la mayoría no los utiliza para la resolución de problemas, puesto que no sabe para que son, ni como son, ni como se pueden y deben usar, en diferentes contextos y situaciones.
- La identificación de grafías de números pequeños es realizada por la mayoría de niños frente a un desconocimiento al representarlas por escrito. Su conocimiento social hace que respondan por inercia a preguntas muy interiorizadas y habituales en el entorno, en contraposición, el silencio cuando son desconocidas.
- Determinar posiciones ordinales con o sin referente son tareas que la mayor parte de los alumnos/as responde al azar, sin utilizar ningún tipo de estrategia.
- La acción de decir números es conocida por una amplia mayoría de niños/as, aunque no conozcan la serie numérica ordenadamente ni identifiquen sus representaciones; recitan números intuitivamente sin establecer relaciones entre los mismos.

Este estudio pone de manifiesto que la sociedad y el entorno influyen en los conocimientos previos de los alumnos/as, este hecho debe ser un referente para los docentes a la hora de programar.

Referencias bibliográficas

- Alsina, C.; Burgués, C.; Fortuny, J.M.; Giménez, J.; Torra, M. (2007). *Enseñar matemáticas*, Graó. Barcelona.
- Alsina, A.; Aymerich, C.; Barba, C. (2008). Una visión actualizada de la didáctica de la matemática en educación infantil. *UNO*, vol. 47, 10-19.
- Clements, D.H.; Sarama, J. (2007). Early childhood mathematics learning. En Frank K. Lester, Jr. *Second Handbook of research on mathematics teaching and learning*, pp. 461-555. National Council of Teachers of Mathematics. Reston, VA.
- Cockcroft, W.H. (1985). *Las matemáticas sí cuentan*, MEC. Madrid.
- Fernández, C. (2009). Modelización de competencias ordinales en escolares de 3 a 6 años. *PNA*, vol. 4 (3), 185-211.
- Giménez, J. (2008). Los desafíos competenciales matemáticos en educación infantil. *UNO*, vol. 47, 5-10.
- Goñi, J.M^a. (2008). *El desarrollo de la competencia matemática*, Graó. Barcelona.
- NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA. USA. (Traducción castellana: Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES. (2003). Principios y Estándares para la Educación Matemática. Sevilla: Thales).
- Orton, O. (1990). *Didáctica de las matemáticas*, Morata. Madrid.
- Rico, L.; Lupiáñez, J.L. (2008). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular*, Alianza Editorial. Madrid.
- Ruíz, L. (2006). La construcción de los primeros conocimientos numéricos. En Chamorro, M.C. *Didáctica de las matemáticas*, pp. 181-219. Pearson-Prentice Hall. Madrid.
- Veiga, E.J. (1999). El trabajo lúdico-plástico. Una manera de llegar al número. En *Actas de las IX JAEM, Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas*, pp. 427- 430.
- Verschaffel, L., Greer, B., De Corte, E. (2007). Whole Lumber Concepts and operations. En Frank K. Lester, Jr. *Second Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp 557- 628). National Council of Teachers of Mathematics. Reston, VA.

SENTIDO ESTRUCTURAL MANIFESTADO POR ALUMNOS DE 1º DE BACHILLERATO EN TAREAS QUE INVOLUCRAN IGUALDADES NOTABLES

[Danellys Vega-Castro](#), Encarnación Castro, Marta Molina
Universidad de Granada

Resumen

A raíz de las dificultades que presentan estudiantes de Educación Secundaria y Bachillerato cuando tienen que operar con igualdades notables, nos propusimos indagar sobre el sentido estructural que manifiestan un grupo de estudiantes de 1º de bachillerato al trabajar con expresiones algebraicas que involucran este tipo de igualdades. Con este objetivo pasamos una prueba escrita a 33 estudiantes de 1º de Bachillerato de un Instituto de Educación Secundaria de Granada. En los ítems de dicha prueba se propone a los estudiantes simplificar fracciones algebraicas y construir nuevas expresiones con la misma estructura que las dadas. Los resultados proporcionan información sobre el sentido estructural de los estudiantes y, en particular, sobre cómo y qué visualizan de las subestructuras que componen una expresión algebraica. Como educadores preocupados por el aprendizaje consideramos necesario que la enseñanza favorezca en los estudiantes la percepción de expresiones algebraicas desde un punto de vista estructural y en esa dirección esperamos realizar aportaciones con este trabajo.

Abstract

As a result of the difficulties that secondary students encounter when they have to operate with algebraic identities, we decided to explore their use of structure sense on their work on algebraic expressions that involve this type of equalities. With this aim, we proposed a written test to 33 sixteen to eighteen years old students from a high school in Granada. The test asked the students to simplify algebraic fractions and to build new expressions with the same structure than those given. Results provide information on the students' structural sense and, in particular, on how and what students visualize within an algebraic expression. As educators concerned about learning, we consider necessary that teaching promotes in students the perception of algebraic expressions from a structural point of view, and in that sense we expect this work to make a contribution.

Vega-Castro, D, Castro, E., Molina, M. (2011). Sentido estructural manifestado por alumnos de 1º de bachillerato en tareas que involucran igualdades notables. En M.M. Moreno, N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los Grupos de Investigación de la SEIEM* (pp. 453-464). Lleida.

Introducción

Diferentes autores señalan las dificultades mostradas por estudiantes de Educación Secundaria y Bachillerato cuando trabajan con estructuras algebraicas que involucran igualdades notables. Así mismo los profesores de dichos cursos expresan que estudiantes con buenas calificaciones en matemáticas muestran dificultades al trabajar con expresiones algebraicas, y otros, incluso, abandonan las matemáticas avanzadas en los últimos cursos de la educación obligatoria debido a su falta de habilidad para aplicar las técnicas algebraicas en diferentes contextos (Hoch y Dreyfus, 2004, 2005, 2006, Novotná y Hoch, (2008). En particular las igualdades notables representan una temática de difícil comprensión en el desarrollo del álgebra básica para los estudiantes de estos niveles, quienes las ven como una barrera que limita sus estudios (Chang y Tsai 2005). Surge pues la necesidad de encontrar situaciones de aprendizaje que puedan ayudar a superar estas dificultades.

Tomando como base dichas consideraciones nos planteamos como proyecto, a largo plazo, realizar un estudio sobre el aprendizaje de las igualdades notables centrado en la consideración de su estructura. Para tal fin, un primer paso en dicha investigación ha sido realizar un estudio exploratorio, con el objetivo general de conocer el sentido estructural que muestran un grupo de alumnos de primer curso de bachillerato al trabajar con expresiones algebraicas, en las que varias igualdades notables están presentes, implícita o explícitamente. Dicho trabajo ha consistido en transformar fracciones algebraicas en otras equivalentes de aspecto más simple, y en construir expresiones algebraicas de igual estructura que una dada.

Nuestra atención, por tanto, en esta investigación la hemos centrado en estudiar el sentido estructural de los estudiantes. Ello ha exigido revisar trabajos que han realizado aportaciones sobre este constructo. Los trabajos de Hoch y colaboradores (Hoch, 2003; Hoch y Dreyfus, 2004, 2005, 2006, 2007; 2010; Novotná y Hoch, 2008) han sido los más destacados. En ellos se reflexiona sobre las habilidades de los sujetos, fundamentalmente de secundaria, en el manejo de expresiones algebraicas y se llega a establecer qué entienden los autores citados por sentido estructural.

Estructura y sentido

La palabra estructura en matemáticas se utiliza en ocasiones para referir a un conjunto cerrado bajo una o varias operaciones, cumpliendo varios axiomas. Según Castro, Rico y Romero (1997, p.362) este término consiste en “un conjunto de entes abstractos expresados simbólicamente, dotado de unas operaciones o modos de componerlos y de unas relaciones mediante las que se comparan dichos entes”. Desde un punto de vista más amplio, se puede decir que, en matemáticas, el

término estructura se refiere a la forma en que una entidad se compone de partes, existiendo conexiones o relaciones entre las partes que componen dicha entidad (Hoch y Dreyfus, 2004).

Por otra parte destacamos la noción de sentido. Peltier (2003) considera como aspecto relevante en la construcción del conocimiento que éste se realice con sentido, y emplea como apoyo la idea de que un conocimiento es portador de sentido para un sujeto si este último es capaz de identificar un campo de aplicación en el mismo. Esta concepción pedagógica del aprendizaje ha dado lugar a que se tengan en cuenta en la enseñanza y en la investigación constructos como sentido numérico (Sowder 1988), sentido operacional (Slavit, 1995, 1999), sentido simbólico (Arcavi, 1994), sentido estructural o de estructura (Hoch, 2003; Hoch y Dreyfus, 2004, 2005, 2006; Linchevski y Livneh, 1999; Novotná, Stehlikova y Hoch, 2006, Novotná y Hoch, 2008), entre otros. En todos estos casos se considera a los alumnos como pensadores, como personas capaces de comprender los dominios matemáticos. Son términos asociados a una visión de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas centrados en promover la comprensión de las matemáticas (Molina, 2006).

Sentido estructural

El término sentido estructural utilizado por vez primera por Linchevski y Livneh, (1999), se refiere, en términos generales, a una colección de habilidades relacionadas con transformar expresiones algebraicas, que permiten a un alumno hacer un mejor uso de las técnicas algebraicas aprendidas previamente. A partir de la introducción de este constructo y su consideración en la enseñanza, los autores confían en el surgimiento de una nueva forma de afrontar la problemática de la enseñanza del álgebra. Novotná y Hoch (2008) han detectado cierta correlación entre el nivel de sentido estructural y la habilidad en la manipulación de expresiones algebraicas puestos de manifiesto por los estudiantes. A mayor sentido estructural mayor habilidad para la manipulación de expresiones algebraicas.

Descriptores de Sentido estructural

Los autores Hoch y Dreyfus han realizado un esfuerzo continuado por precisar la noción de sentido estructural. En 2004 y 2005 señalaron algunas de las habilidades que engloba el sentido estructural en el contexto del álgebra escolar: ver una expresión o una sentencia algebraica como una entidad, reconocer una expresión o sentencia algebraica como una estructura conocida, dividir una entidad en subestructuras, apreciar las conexiones mutuas entre estructuras y reconocer qué transformaciones es posible realizar y cuáles de éstas son de utilidad. Posteriormente en 2006, presentaron una definición operacional de sentido estructural, por medio de tres descriptores, que permite identificar si un alumno

está utilizando sentido estructural en el contexto del álgebra de Educación Secundaria. Según estos autores, un alumno muestra sentido estructural en dicho contexto si es capaz de:

- Reconocer una estructura familiar en su forma más simple,
- Tratar con un término compuesto como una única entidad y, a través de una sustitución adecuada, reconocer una estructura familiar en una forma más compleja,
- Elegir manipulaciones apropiadas para hacer el mejor uso de una estructura.

En función de la complejidad de los términos que componen las expresiones con las que se esté trabajando, los autores subdividen los descriptores SS2 y SS3 en dos y tres subdescriptores respectivamente:

- SS2.a El término compuesto contiene un producto o potencia pero no una suma/resta.
- SS2.b El término compuesto contiene una suma/resta y posiblemente también un producto o potencia.
- SS3.a La estructura está en su forma más simple.
- SS3.b La estructura incluye algún término compuesto que contiene un producto o potencia pero no una suma/resta.
- SS3.c La estructura incluye algún término compuesto que contiene una suma/resta y posiblemente también un producto o potencia.

Lo que caracteriza a SS2.a, SS2.b, SS3.b. y SS3.c es la necesidad de tratar términos compuestos como si fueran una entidad.

Entendemos que este refinamiento en la precisión del constructo sentido estructural está basado en la consideración de tareas en las que es necesario realizar transformaciones de expresiones algebraicas, lo que lleva a los autores a no enfatizar otras habilidades como dividir una entidad en subestructuras y apreciar conexiones mutuas entre estructuras. En este trabajo queremos destacarlas como habilidades implícitas dentro del constructo sentido estructural, las cuales pueden ser medidas separadamente de los descriptores señalados, por medio de tareas como la agrupación de expresiones según su misma estructura o la construcción de expresiones con estructura igual a otra dada. Por este motivo, hemos añadido un descriptor (SS4) a los anteriores: “Distinguir subestructuras dentro de una entidad y reconocer relaciones entre ellas”.

Metodología

Esta investigación es de carácter exploratorio, descriptivo y cualitativo. Los sujetos que intervinieron en el estudio fueron un grupo de 33 alumnos de 1º de Bachillerato perteneciente a un Instituto de la ciudad de Granada.

En lo que se refiere al instrumento, al no contar con una prueba preparada y utilizada por otros investigadores para una investigación similar, nos planteamos construirla de manera que nos permitiese recoger la información necesaria para dar cumplimiento a nuestros objetivos de investigación. El diseño de la misma estuvo guiado por los descriptores de sentido estructural señalados anteriormente. Se elaboró en dos fases: una primera prueba que se sometió a pilotaje y una segunda versión definitiva.

La redacción final consta de cuatro tareas con cuatro ítems cada una. En el primer ítem (a) se pide al estudiante que modifique la expresión dada (una fracción algebraica) para obtener una expresión equivalente más sencilla. En el tercer ítem (c), se indica al estudiante que analice la expresión dada en esa misma tarea y construya otra expresión diferente con igual estructura. Los ítems (b) y (d), piden explicar lo hecho en los apartados previos.

La Tabla 1 muestra las fracciones algebraicas consideradas en cada tarea y precisan los descriptores del sentido estructural en los que se basan.

TAREA	Descriptores de sentido estructural						
	SS 1	SS2		SS3			SS 4
		a	b	a	b	c	
1. $\frac{x^2 - 14x + 49}{(x-7)^2(x-7)}$	X			X			X
2. $\frac{2m(2m-1)}{4m^5 - 2m^4}$		X			X		X
3. $\frac{(4x^2 - 1)(4x^2 + 1)}{(2x + 1)(2x - 1)}$		X			X		X
4. $\frac{(5n^2 - 1)^2(5n^2 + 1)}{25n^4 + 1 + 10n^2}$		X			X		X

Tabla 1. Relación entre descriptores del sentido estructural y parte (a) y (c) de las tareas.

Resultados

Dado que la prueba elaborada para la recogida de datos incluyó dos tipos de actividades de naturaleza diferente —simplificar y construir fracciones algebraicas—, las cuales requerían que los estudiantes pusiesen en juego distintas capacidades para su ejecución, realizamos de forma separada, y por medio de diferentes criterios, el análisis del desempeño de los estudiantes en los apartados (a) y (c) de las tareas. Los ítems (b) y (d) proporcionaron información adicional sobre cómo se han abordado los ítem anteriores.

Para el análisis de las actuaciones en el ítem (a) de las tareas, en el que los alumnos trabajan en la simplificación de las fracciones algebraicas, nos centramos en las estrategias que utilizan para hacer las transformaciones en las expresiones dadas. Para el análisis de las fracciones algebraicas construidas en el apartado (c), nos detuvimos en sus producciones, examinando la conservación de la estructura de las fracciones dadas.

Ítem (a) de las tareas

Analizadas las pruebas detectamos tres modelos de actuación de los estudiantes. El modelo A consta de dos pasos en la resolución de la tarea y conduce a estrategias exitosas. El modelo B consta de tres pasos y, conduce a estrategias exitosas pero menos elaboradas. El modelo C presenta diversos casos de resolución que no conducen a estrategias exitosas y que incluyen, en general, más de tres pasos.

Las diferentes estrategias, utilizadas por los estudiantes, fueron organizadas de acuerdo a estos modelos y clasificadas en estrategias exitosas “EE” o no exitosas “EQ”. A modo de ejemplo presentamos en la Tabla 2 las estrategias desarrolladas por los estudiantes en la Tarea 1. En ella se identificaron seis estrategias, cinco de ellas exitosas y una no exitosa. De las cinco estrategias exitosas tres corresponden al modelo A (color oscuro) y dos al modelo B (color claro).

Estrategias -Tarea 1		Modifica P(x)		
$\frac{x^2 - 14x + 49}{(x-7)^2(x-7)}$		No	Sí	
Modifica Q(x)	No	No se considera	Aplica Factorización	Aplica Igualdad Notable. Percepción. 1-EE1
				Ruffini 1-EE2
				2° Grado 1-EE3
	Sí	Aplica Igualdad Notable. Desarrollo cuadrado de un binomio. Percepción 1-EE4	Aplica Igualdad Notable. Factoriza y agrupa potencias Percepción. 1-EE5	
		Agrupar Potencias. 1-EQ		

Tabla 2. Estrategias de la Tarea 1

La diferencia que existe entre estas estrategias radica, principalmente, en cómo se obtiene la factorización del numerador y en si se hacen transformaciones en numerador y denominador o en sólo uno de estos miembros de la fracción. En la Ilustración 1 mostramos algunas respuestas de los estudiantes en la Tarea 1 que clasificamos por estrategias. El primer caso muestra la estrategia exitosa 1-EE1 basada en la percepción de la expresión y la aplicación de una igualdad notable. En el segundo caso el alumno utiliza una estrategia exitosa, aunque menos elaborada, denominada 1-EE2, basada en la aplicación del método de Ruffini a la expresión que compone el numerador. El tercer caso corresponde a una estrategia no exitosa (1-EQ) en la que el estudiante opera desarrollando numerador y denominador. En los resultados de este apartado se detectó que un 36% de los estudiantes presenta dificultades para transformar estructuras algebraicas simples, y que el 74% tienen dificultades para transformar estructuras algebraicas complejas. La Ilustración 1 es un ejemplo de las diversas formas de cómo trabajan los alumnos con una estructura simple.

1-EE1 Modelo A

$$\frac{x^2 - 14x + 49}{(x-7)^2(x-7)} = \frac{(x-7)^2}{(x-7)^2(x-7)} = \frac{1}{(x-7)}$$

1-EE2 Modelo B

$$\frac{x^2 - 14x + 49}{(x-7)^2(x-7)} = \frac{(x-7)(x-7)}{(x-7)^2(x-7)} = \frac{1}{x-7}$$

Resultado

1-EQ Modelo C

$$\frac{x^2 - 14x + 49}{(x-7)^2(x-7)} = \frac{x^2 - 14x + 49}{(x^2 - 14x + 49)(x-7)} = \frac{1}{x-7}$$

Ilustración 1. Modelos de actuación clasificados por estrategias en la Tarea 1.

Ítem (c) de las tareas

En el caso del ítem (c) de las cuatro tareas, analizamos las producciones de los estudiantes atendiendo a si mantienen la estructura de las fracciones dadas al construir las nuevas expresiones. Denominamos PE (producción exitosa) a aquellas expresiones que mantienen la estructura total de la fracción, es decir la estructura del numerador, del denominador y la relación existente entre ambos. Denotamos como PP (producciones parciales) a aquellas producciones en las que se mantiene sólo la estructura del numerador o del denominador o la estructura de ambos pero no la relación existente entre las mismas y como PQ (producción no exitosa) a las producciones que no mantienen la estructura ni del numerador ni del denominador.

En la Ilustración 2 se presentan algunos ejemplos de producciones de los alumnos en la Tarea 1. La primera producción muestra cómo el estudiante es consciente de que la expresión que compone el numerador proviene del desarrollo del binomio cuadrado que aparece en el denominador; percibe la estructura de la fracción como un todo. En el segundo caso la producción de este estudiante muestra reconocer y mantener la estructura del denominador; percibe solamente la estructura del denominador. El tercer caso trata de un estudiante que no conserva en su producción ninguna parte de la estructura de la expresión dada. En los resultados de este apartado se pudo detectar que 60% de los estudiantes no conservan la estructura de la fracción en su totalidad.

1. Producción Exitosa	“PE”	$\frac{x^2 - 14x + 49}{(x-7)^2(x-7)} \Rightarrow \frac{(a-2)^2}{(a-2)^2(a-2)} \Rightarrow \frac{a^2 - 4a + 4}{(a-2)^2(a-2)}$
2. Producción Parcial	“PP”	$\frac{x^2 - 14x + 49}{(x-7)^2(x-7)} \quad \frac{a^2 - 10a + 36}{(a-9)^2(a-8)}$
3. Producción no Exitosa	“PQ”	$\frac{x^2 - 14x + 49}{(x-7)^2(x-7)} \quad \frac{2a^2 - 28a + 98}{(2a-14)^2(2a-14)}$

Ilustración 2. Ejemplos de producción en la Tarea 1.

Niveles del Sentido Estructural

Una vez codificados los tipos de estrategias y producciones de cada estudiante en cada una de las tareas, se construyó la Tabla 3, la cual presenta, en orden, las producciones de los estudiantes según las estrategias y tipos de producciones mostradas en su desempeño de las tareas. Cada número de esta tabla, del 1 al 33, corresponde a un alumno. Así mismo en la tabla aparecen dos columnas subdivididas en 4 sub-columnas, una por cada tarea. La primera columna corresponde al ítem (a) de las tareas y la segunda al ítem (c). En ambas columnas distinguimos varios niveles para cada tipo de actuación: nivel alto; medio-alto; medio; medio-bajo, bajo y nulo.

Si atendemos a la parte izquierda de la tabla, se puede observar que los primeros tres alumnos (Nº 4, 24, 32) muestran un sentido estructural alto, sus actuaciones están basadas en el modelo A. Los siguientes nueve estudiantes muestran un sentido estructural medio alto ya que han realizado actuaciones basadas en el modelo A en tres de las cuatro tareas, y así sucesivamente. De forma análoga se organiza la parte derecha de la tabla.

De acuerdo a los datos de la Tabla 3, se realizó una comparación en cuanto a la consistencia del sentido estructural mostrado por cada alumno, en ambos ítems de las tareas. Por ejemplo el alumno Nº 4 mostró ser consistente en cuanto al nivel de sentido estructural mostrado en ambas partes de la tarea, además mostró ser el único en poseer un sentido estructural alto tanto en estrategias como en las producciones. Otros alumnos muestran una consistencia parcial, como es el caso del Nº 7. Otros mostraron no consistencia, como por ejemplo el Nº 32 que muestra un sentido estructural alto en cuanto a estrategias y nulo en producciones.

	N°	Estrategias				N°	Producciones				
SS Alto	4				Q	4					SS Alto
	24				I	7					
	32				Q	20					
SS Medio Alto	12				I	23					SS Medio Alto
	30				I	25					
	14					29					
	8			Q	I	24					
	21			I	I	13					
SS Medio	22		Q	Q		30					SS Medio
	23		I	Q	I	11					
	18		I	Q		21					
	29	Q	Q	Q		33					
	7				I	5					
	5		I			8					
	11		I			14			--	--	
SS Medio Bajo	27		Q		--	27			--	--	SS Medio Bajo
	9	I	Q	I		18			--	--	
	17	I	I			17					
	33	Q	Q		--	31					
	28		I	Q	Q	19				--	
	6			Q		22					
	2		I	Q		10		--	--	--	
SS Bajo	19					15					SS Nulo
	20				--	9					
	10		Q			6				--	
	25		Q			1					
	31	Q	Q			3					
	13	Q	Q			16					

26		I	Q		26				
16		I			12				--
1		Q			28				--
3	I	Q			32			--	--
15	Q				2		--	--	--

Tabla 3. Nivel de Sentido Estructural mostrado por cada alumno en partes (a) y (c) de las tareas.

Conclusiones

Esta investigación nos ha permitido estudiar la potencialidad de dos actividades cuyo desempeño por los alumnos proporcionan manifestaciones empíricas de su sentido estructural. Hemos diseñado una prueba que fue sometida a un proceso de pilotaje para su mejora. Una vez corregida y mejorada nos permitió detectar en los estudiantes estrategias al operar con expresiones algebraicas, en un caso, y formas de concebir y reproducir la estructura de una expresión algebraica, en otro. Todo ello nos ha llevado a establecer diferentes niveles de sentido estructural en estos estudiantes concretos. Además la prueba ha permitido situar dos elementos significativos del sentido estructural, la interpretación de la estructura de expresiones y la realización de transformaciones que preservan la equivalencia. Estos elementos se encuentran entre los que investigadores anteriores han considerado que afectan al sentido estructural.

La investigación ha hecho posible explicitar un descriptor diferente a los ya establecidos con anterioridad y corroborar que las igualdades notables han permitido fijar y acotar una temática sobre la que los estudiantes pueden trabajar en el estudio de su sentido estructural.

Agradecimientos

Este trabajo se ha realizado dentro del proyecto “Modelización y representaciones en educación matemática (EDU2009-11337) financiado por el Plan Nacional de I+D+I del Ministerio de Educación y Ciencia y cofinanciado con fondos FEDER, con el apoyo otorgado a la primera autora por el Programa de Becas Doctorales que patrocina IFARHU-SENACYT (Instituto para la Formación y Aprovechamiento de Recursos Humanos -Secretaría Nacional de Ciencia, Tecnología e Innovación) de la República de Panamá.

Referencias bibliográficas

Castro, E., Rico, L., Romero, I. (1997). Sistemas de Representación y Aprendizaje de Estructuras Numéricas. *Enseñanza de las Ciencias*. 15(3), 361-371. ISSN: 0212-4521.

- Chang, C. K. y Tsai, Y. L. (2005). An alternative Approach for the Learning of $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. *The 3^{er} East Asia Regional Conference in Mathematics Education*.
- Hoch, M. (2007). *Structure sense in high school algebra*. Unpublished doctoral dissertation, Tel Aviv University, Israel.
- Hoch, M. (2003). Structure sense. In M. A. Mariotti (Ed.), *Proceedings 3rd Conf. for European Research in Mathematics Education* (compact disk). Bellaria, Italy: CERME.
- Hoch, M., & Dreyfus, T. (2004). Structure sense in high school algebra: The effect of brackets. In M. J. Høines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proc. 28th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol.3 (pp. 49-56). Bergen, Norway: PME.
- Hoch, M., & Dreyfus, T. (2005). Students' difficulties with applying a familiar formula in an unfamiliar context. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), *Proc. 29th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education*. 3, 145-152. Melbourne, Australia: PME.
- Hoch, M. & Dreyfus, T. (2006). Structure sense versus manipulation skills: an unexpected result. Submitted to *30th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education*. Prague: PME.
- Hoch, M. & Dreyfus, T. (2007). Recognising an Algebraic Structure. Working Group 3. CERME 5. 436 - 435.
- Hoch, M. & Dreyfus, T. (2010). Developing Katy's Algebraic Structure Sense. Working Group 4. Proceedings of CERME 6, January 28th-February 1st 2009, Lyon France © INRP 2010 www.inrp.fr/editions/cerme6 (pp. 529-538).
- Linchevski, L. & Livneh, D. (1999) Structure sense: the relationship between algebraic and numerical contexts. *Educational Studies in Mathematics*, 40(2), 173-196.
- Molina, M. (2006). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de Primaria*. Tesis doctoral, Universidad de Granada. Disponible en <http://cumbia.ath.cx:591/pna/Archivos/MolinaM06-2822.PDF>
- Novotná, J., y Hoch, M. (2008). How Structure Sense for algebraic Expression or Equations is related to Structure Sense for Abstract Algebra. *Mathematics Education Research Journal*, 20(2), 93-104.
- Peltier, M. (2003). Problemas Aritméticos. Articulación, significados y procedimiento de Resolución. *Educación Matemática*, 15(003), 29-55.

