

DEMOSTRACIONES DE LOS ALGORITMOS DE LAS ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO EN EL KITÂB AL-JABR W'AL-MUQÂBALA DE AL-KHWÂRIZMÎ

Juan Francisco Infante

Universidad Santo Tomás, Bogotá, Colombia y Universidad de Valencia, España

Luis Puig

Universidad de Valencia, España

Resumen

Este trabajo es el comienzo de un estudio en ejecución sobre la historia de las formas de demostración en álgebra. Mostramos y explicamos aquí las demostraciones de los algoritmos de solución de las formas canónicas de las ecuaciones de segundo grado, basadas en procedimientos de cortar y pegar, que provienen de la tradición del álgebra babilónica, que realizó al-Khwârizmî en su libro de álgebra, e indicamos cómo también está en el libro de al-Khwârizmî el germen de la demostración mediante transformaciones algebraicas.

Abstract

In this paper we present the first steps of a working study on the history of demonstration in algebra. We show and explain here some of the demonstrations of the algorithms for solving the composed second degree equations made by al-Khwârizmî in his book on algebra, which were based on Babylonian procedures of cutting and pasting, and we point that al-Khwârizmî's book contains also a precursor of the demonstrations by algebraic transformations.

Introducción

Este trabajo se enmarca dentro de un estudio en ejecución sobre la historia de las formas de demostración en álgebra. Desde el comienzo del álgebra árabe medieval ya se hace un esfuerzo explícito por dar una justificación para las soluciones de las formas canónicas, más allá de sólo mostrar el algoritmo de solución. En este sentido la manera en que al-Khwârizmî justifica esos algoritmos en su Kitâb al-jabr w'al-muqâbala abre el camino a todo un proceso que continuarán otras figuras de la ciencia árabe y que luego tendrá su repercusión en el álgebra de la Europa Medieval.

En el libro de álgebra de al-Khwârizmî, lo que hoy llamaríamos ecuación canónica de segundo grado, $y = ax^2 + bx + c$ aparece desglosada en seis formas, tres simples y tres compuestas. Para cada una de las compuestas, al-Khwârizmî presenta un algoritmo de solución y una demostración del algoritmo, basada en procedimientos de cortar y pegar que provienen de la tradición del álgebra babilónica.

El presente trabajo pretende mostrar y explicar esas demostraciones basadas en procedimientos de cortar y pegar que realizó Al-Khwârizmî, siguiendo el análisis realizado por uno de nosotros (Puig, 1998, 2007), e indicar cómo también está en el libro de al-Khwârizmî el germen de la demostración mediante transformaciones algebraicas.

El contexto y los antecedentes

En este texto nos vamos a limitar a estudiar dos demostraciones que aparecen en el libro de al-Khwârizmî *Kitâb al-mukhtasar fî hisâb al-jabr wa'l-muqâbala* (*Libro conciso de cálculo de restauración y oposición*), sin entrar a discutir algunas cuestiones que constituyen puntos de debate entre los historiadores. Dejamos constancia sólo de dos aspectos que se discuten. Uno tiene que ver con si el texto de al-Khwârizmî es el primero en que se plantean los algoritmos de las soluciones de estas ecuaciones y sus demostraciones, o si, por el contrario, el primero es el libro de Ibn Turk del que se conserva un fragmento (cf. Puig, 2009a). El otro tiene que ver con si el libro segundo de los Elementos de Euclides influyó o no en la forma en que al-Khwârizmî establece y demuestra esos algoritmos.

Para estudiar esas demostraciones, seguiremos la idea que ya estaba planteada y puesta en práctica en trabajos anteriores de uno de nosotros (Puig, 1998, 2006, 2007, 2008a) En concreto, examinaremos las demostraciones de al-Khwârizmî en detalle, comparándolas con lo que en esos textos se llaman procedimientos de Cortar y Pegar, siguiendo el análisis de Høyrup (1994, 1996, 2002) de las Matemáticas Babilónicas.

En efecto, Høyrup “ha desarrollado una interpretación del Álgebra Babilónica, en la cual las soluciones de los problemas se leen literalmente como enunciados sobre entidades geométricas y sobre operaciones de cortar y pegar entre ellas, por ejemplo el enunciado lado y cuadrado acumulado, 110 que ha sido interpretado como el problema aritmético-algebraico $x^2 + x = 110$ [...] es visto por Høyrup como un enunciado sobre figuras geométricas [...] En donde lado y cuadrado acumulado pueden ser representados por un cuadrado con un rectángulo de ancho uno, pegado a él” (Puig, 2007). Los cálculos que aparecen indicados en la tablilla babilónica para resolver un problema corresponden en la interpretación de Høyrup a operaciones de cortar y pegar que nos llevarían a la construcción de lo que en la matemática griega se conoció posteriormente con el nombre de gnomon, y de ahí al cálculo del lado buscado. De acuerdo con Høyrup (1994), este procedimiento era conocido por los antiguos babilonios, como el “Método Akadio”, y veremos que es pertinente para nuestra explicación de una de las demostraciones de al-Khwârizmî.

Otro procedimiento presente en la matemática babilónica, que es pertinente para nuestro análisis de las demostraciones de al-Khwârizmî, es el que aparece en lo que Høyrup ha llamado el problema de los “Cuatro lados y el área” (Høyrup, 1996).

Sobre las Demostraciones

Abdeljaouad (2002) señala que “Lo que distingue a al-Khwârizmî de sus predecesores [...] es su deseo de justificar los algoritmos de resolución de las ecuaciones cuadráticas [...] Esta parte del tratado de al-Khwârizmî no sirve de nada al calculador, pero permite al autor mostrar que su trabajo es científico, en el sentido de que sus objetos matemáticos han sido definidos y las

propiedades que se derivan de aquéllos han sido demostradas”. Abdeljaouad atribuye así a al-Khwârizmî la intención de ir más allá de presentar lo que es necesario para la práctica, y le supone tener además una intención de fundamentación teórica del cálculo. Esa intención de fundamentación teórica ya está presente en el hecho de que al-Khwârizmî no comienza enunciando problemas y dando reglas para resolverlos, sino que comienza estableciendo qué es lo que siempre aparece en cualquier tipo de problema (las especies de números que se usan en los cálculos), y cuáles son todos los tipos posibles de combinaciones de esas especies (las formas canónicas), y entonces enuncia los algoritmos para todas las formas canónicas, con lo que todos los problemas que puedan llevarse en su sistema de signos a esas formas canónicas son resolubles (Puig, 1998, 2006, 2008a). Abdeljaouad añade otro elemento más de fundamentación teórica del cálculo: el hecho de que no sólo muestre los algoritmos sino que establezca una demostración de cada uno de ellos.

Lo que vamos a examinar es pues qué tipo de demostraciones son las que al-Khwârizmî desarrolla con el fin de proporcionar esa fundamentación teórica.

Lo primero que podemos observar es que las demostraciones emplean figuras y construcciones geométricas, pero que no son demostraciones que sigan el esquema deductivo que tienen las presentadas por Euclides en los Elementos, con el recurso a definiciones, nociones comunes, postulados y proposiciones ya demostradas.

En las demostraciones de al-Khwârizmî hay figuras geométricas, como también las hay en el texto euclídeo, pero la demostración es un discurso que describe operaciones de cortar y pegar las figuras y de relacionar partes de ellas, y que no busca el fundamento en definiciones, nociones comunes, postulados y proposiciones ya demostradas, sino en lo que se atestigua por la vista, sin poner en duda en ningún momento lo que se ve.

En Puig (2009b) se presenta un primer panorama de tipos de demostración en textos algebraicos pre-simbólicos, y se adopta una clasificación en tres grandes tipos de demostración, a los que se les da el nombre de “ingenua”, “geométrica” y “algebraica”. Se aplica el calificativo de

“ingenua” a una demostración cuya argumentación se apoya en una figura geométrica que está acompañada de letras, y en un discurso que se refiere a lo que se ve en la figura, y a acciones sobre ella o relaciones entre sus partes. La garantía de la verdad de lo que se dice es lo que se ve en la figura. El calificativo “geométrica” se reserva, según esta clasificación, para las demostraciones que siguen el modelo euclídeo, en las que sigue habiendo figuras geométricas acompañadas de letras, pero en las que la garantía de la verdad ya no es lo que se ve en la figura, sino en el conjunto de la arquitectura del texto euclídeo, definiciones, nociones comunes, postulados y proposiciones ya demostradas. Finalmente, se llaman “algebraicas” a las demostraciones en las que las figuras geométricas han desaparecido, y el discurso demostrativo se apoya en las operaciones que se realizan con las expresiones algebraicas.

Siguiendo esta caracterización, diremos que las demostraciones de al-Khwârizmî son “ingenuas”, en este sentido, y veremos que también hay un embrión de demostración “algebraica”, pero ninguna demostración “geométrica”. No examinaremos aquí que las demostraciones de Ibn Turk son también “ingenuas”, que Thābit ibn Qurra explícitamente quiere hacerlas “geométricas”, que en Abū Kāmil o ‘Umar Al-Khayyām hay demostraciones “geométricas”, y que las demostraciones “algebraicas” se desarrollan explícitamente en el álgebra árabe medieval en Al-Karajī, ‘Umar Al-Khayyām, As-Samaw’al and Ibn Al-Ha’, de formas cada vez más desarrolladas (Puig, 2009b).

Tampoco examinaremos aquí la relación que pudiera establecerse entre esta clasificación de tipos de demostración en la historia del álgebra, y otras clasificaciones que están hechas para dar cuenta no de lo que se encuentra en los textos históricos, sino de lo que se encuentra en las actuaciones de los alumnos. Nos referimos a clasificaciones como la de Balacheff (1988) y su versión ampliada en Marrades y Gutiérrez (2000). Indicaremos sólo que, según éstas, las demostraciones de al-Khwârizmî podrían considerarse “pragmáticas”, por el tipo de uso que se les da a las figuras, y, dentro de esta categoría, serían del tipo “ejemplo genérico”, en el sentido de que se toma un ejemplo prototípico como representante de la clase de objetos a los que se aplica lo que se va a demostrar.

El texto del álgebra de al-Khwârizmî

En Puig (2008b) puede verse una historia del texto del *Kitâb al-jabr w'al-muqâbala*. Para este trabajo en concreto se han revisado varias ediciones del texto de al-Khwârizmî, sobre todo, la versión de Rosen (1831), la traducción latina de Robert de Chester en su posterior traducción al inglés de Karpinski (1915), y la reciente traducción al castellano de Moreno (2009), pero además se ha tenido en cuenta las versiones en francés de Rashed (2007) y la traducción latina de Gerardo de Cremona (Hughes, 1986), considerada por la mayor parte de los historiadores como el texto que refleja más fielmente el original de al-Khwârizmî (cf. Puig, 1998, 2008b).

Las Formas Canónicas

Al-Khwârizmî comienza el libro exponiendo cuáles son las especies de números (tesoros, raíces y números) que se usan en los cálculos, y dice que, en los cálculos necesarios para resolver los problemas “unas [especies de números] pueden ser iguales a otras”, y establece todas las posibilidades, tres simples y tres compuestas, todas las formas canónicas (cf. Puig, 1998):

- Tesoro igual a raíces,
- Tesoro igual a números,
- Raíces igual a números,
- Tesoro y raíces igual a números,
- Tesoro y números igual a raíces, y
- Raíces y números igual a tesoro.

Por ejemplo, la expresión “Un tesoro y diez raíces de tesoro son treinta y nueve dirhams”, que es un ejemplo de la cuarta forma canónica, equivaldría en nuestros términos actuales a la ecuación $y + 10\sqrt{y} = 39$ o $(x^2 + 10x = 39)$, según consideremos que el tesoro es la incógnita y la raíz del tesoro es, por tanto, la raíz de la incógnita, o, alternativamente, consideremos que la incógnita es la raíz y, por tanto, el tesoro es el cuadrado de la incógnita.

La forma en que se procede en el texto para desarrollar cada una de las formas canónicas es la siguiente:

- Para cada forma canónica, al-Khwârizmî presenta el procedimiento para darle solución, y ese procedimiento tiene la forma de un algoritmo,
- Luego hace una demostración apoyándose en la representación mediante una figura geométrica, de que el algoritmo proporciona efectivamente el valor de la raíz y del tesoro.

El algoritmo de solución de la Ecuación Canónica

Analizaremos en este texto la cuarta forma canónica, “tesoro y raíces igual a números”, usando el mismo esquema con que en Puig (1998) se analiza la quinta forma canónica.

Veremos, en primer lugar, el algoritmo propuesto, y en paralelo la simbolización en términos modernos; como habíamos mencionado, al-Khwârizmî utiliza un ejemplo genérico para la demostración, en este caso es:

Un tesoro más diez raíces igual a treinta y nueve dirhams	$x^2 + 10x = 39$	
La solución esta en dividir por dos el número de raíces. Y en este caso resulta ser cinco	$\frac{10}{2} = 5$	$\frac{b}{2}$
Lo multiplicas por si mismo y es veinticinco	$(5)^2 = 25$	$\left(\frac{b}{2}\right)^2$
sumas sobre esto treinta y nueve y da sesenta y cuatro	$25 + 39 = 64$	$\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c$
calculas raíz cuadrada que es ocho	$\sqrt{64} = 8$	$\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c}$
y le restas la mitad del número de raíces (que es cinco), y da tres	$8 - 5 = 3$	$\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2}$
y esa es la raíz sobre cuyo cuadrado se suma, y el cuadrado es nueve		

En segundo lugar, veremos la demostración que propone Al-Khwârizmî para el algoritmo de solución, que, en el caso de esta cuarta forma canónica que estamos estudiando, no es una única demostración sino dos demostraciones. Para analizarla, seguiremos el texto, describiendo la construcción de la figura y las transformaciones que hay que realizar en ella para llegar a la figura que aparece en el texto.

En efecto, en las ediciones del texto revisadas sólo aparece una figura, al final del proceso en cada una de las demostraciones (aunque, en la versión inglesa de Karpinski (1915), aparecen varias representaciones para cada demostración tomadas de diferentes traducciones de la obra).

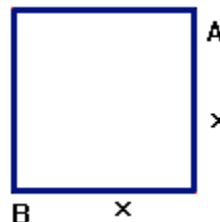
En este trabajo hemos reconstruido estas construcciones y sus transformaciones para las dos demostraciones del caso cuatro.

Presentaremos, en primer lugar, la segunda demostración que aparece en el texto de Al-Khwârizmî. Esta demostración utiliza lo que Høyrup (1994) considera que era un procedimiento ya conocido por los antiguos Babilonios, con el nombre del “Método Akadio”.

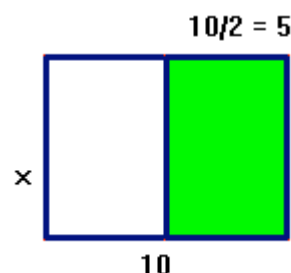
Demostración del Algoritmo FORMA 2ⁱ

Un tesoro y diez raíces son treinta y nueve dirhams

“[...] la figura es [el cuadrado] AB, que es el *tesoro*, y queremos sumar sobre él diez raíces [de *tesoro*].

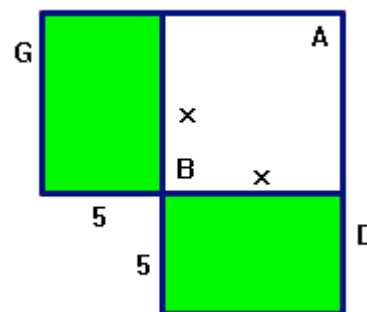


Entonces dividimos diez entre dos, y es cinco, y fabricamos dos rectángulos



sobre los lados del cuadrado AB, que son las figuras G y D. El ancho de cada una de ellas es cinco (que es la mitad del número de raíces), el largo igual al lado de la figura AB,

y nos queda en la esquina de la figura AB un cuadrado de cinco por cinco (que es la mitad del [número de raíces que añadimos a los dos lados del primer cuadrado]).

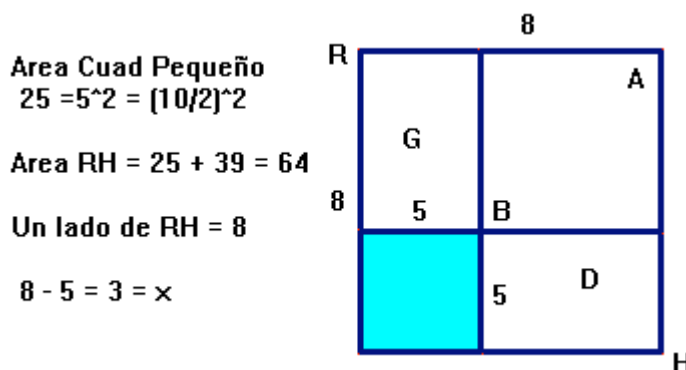


Y queda para completar la figura grande el cuadrado de cinco por cinco, que es veinticinco.

Y lo sumamos a treinta y nueve para completar la figura grande, que es RH, y resulta igual a sesenta y cuatro.

Coges su raíz, que es ocho (uno de los lados de la figura final),

y cuando le restamos lo mismo que aumentamos sobre él, (que es cinco), queda tres, que es el lado de [el cuadrado] AB (que [representa] el *tesoro*) y esa es la raíz [del *tesoro*] y el *tesoro* es nueve. Y esta es la figura” (Moreno, 2009) (Ed)



Demostración del Algoritmo FORMA 1

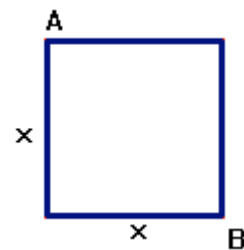
Un tesoro y diez raíces son treinta y nueve dirhams

Esta segunda demostración del algoritmo que vamos a presentar, realmente es la que primero aparece en el texto de Al-Khwârizmî, lo que ya es un hecho interesante en sí mismo, y es más detallada que la anterior, además de otros aspectos que destacaremos.

La representación geométrica que se utiliza también tiene un antecedente babilónico, es lo que Høyrup (1996) ha llamado el problema de los “cuatro lados y el área”. Seguir la tradición de este modelo es más difícil que la del “método akadio” y más interesante para nuestro estudio, pues Høyrup lo sitúa en Babilonia y luego con Al-Khwârizmî.

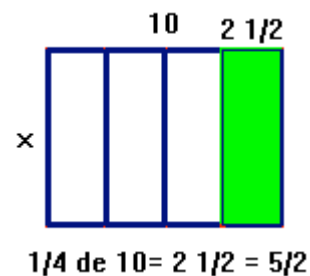
Veamos la demostraciónⁱⁱ, acompañada de la construcción de la figura.

“La figura es un cuadrado de lado desconocido, y es el *tesoro* que quieres conocer, y cuyas raíces también quieres conocer, y es la figura AB.

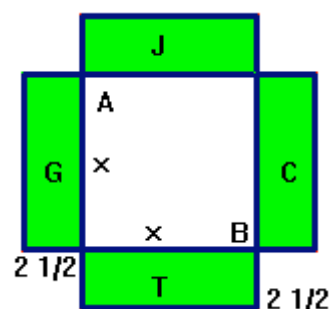


Cada uno de los lados del cuadrado es la raíz [del *tesoro*], y cuando se multiplica por un número cualquiera, sale un cierto número de raíces.

Y cuando se dice que con el *tesoro* hay diez raíces, cogemos un cuarto de diez, que es dos más un medio,

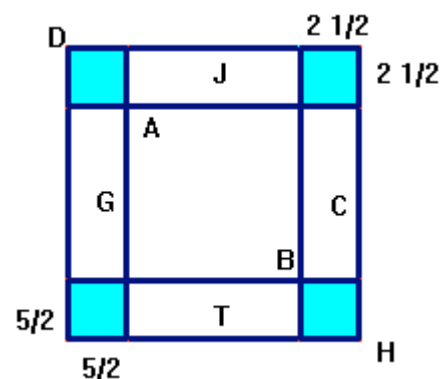


y dibujamos dos mas un medio en cada lado de la figura, y se forman, junto al cuadrado AB, las figuras J, T, C y G.



Y así surge un cuadrado, de lados iguales también desconocidos, y con un defecto en sus esquinas, de dos más un medio por dos más un medio en cada esquina,

y esto es lo que se necesita para cuadrar la figura, dos mas un medio por si mismo cuatro veces, y todo eso suma veinticinco.



Y ya sabemos [por la condición inicial] que el cuadrado original [representa el *tesoro*] y con las cuatro figuras alrededor (que son diez raíces) son iguales a treinta y nueve.

Y cuando añadimos sobre ello veinticinco (que son los cuatro cuadrados que están en las esquinas del cuadrado AB) se completa el cuadrado mas grande DH, y sabemos entonces que todo ello vale sesenta y cuatro,

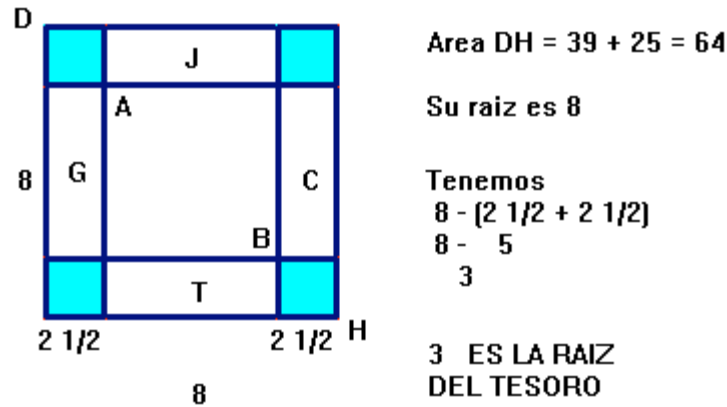
y uno de sus lados su raíz, que es ocho

Y cuando restamos del ocho la cuarta parte del diez dos veces [los dos y un medio] (que son los extremos del lado de la figura grande DH), que es cinco, queda el lado tres. Y esta es la raíz del *tesoro*, [o el lado de la figura original AB].

Y si dividimos por dos el diez de las raíces y lo multiplicamos por si mismo (y le añadimos el número, que es treinta y nueve para llegar a la figura grande de la que faltan las cuatro esquinas) es porque un cuarto de cualquier número multiplicado por si mismo y después por cuatro es igual a la mitad del número multiplicado por sí mismo.

Entonces multiplicamos la mitad del número de raíces por sí mismo en lugar de multiplicar su cuarta parte por si misma y luego por cuatro.

Y esta es la figura” (Moreno, 2009)



Aspectos Importantes

Es muy importante resaltar dos aspectos que ocurren en la última demostración que se ha presentado:

El primero, la inclusión por parte de Al-Khwârizmî, de una identidad algebraica,

“[...] es porque un cuarto de *cualquier número* multiplicado por sí mismo y después por cuatro es igual a la mitad del número multiplicado por sí mismo. Entonces multiplicamos la mitad del número de raíces por sí mismo en lugar de multiplicar su cuarta parte por sí misma y luego por cuatro” (cursiva nuestra).

$$4 \cdot \left(\frac{b}{4}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

Vemos en esta expresión, y otras parecidas del texto, el precursor de las demostraciones por transformaciones algebraicas. Al-Khwârizmî las llamará demostraciones “con palabras” o “mediante la expresión” (*al-lafẓ*).

Un segundo aspecto es que este precursor aparece ante la imposibilidad de completar la demostración “ingenua”, a través de los procedimientos de cortar y pegar acostumbrados.

Cuando la figura ya no es idónea, la identidad “con palabras”, el precursor de la demostración “algebraica”, la demostración mediante la expresión, se convierte en una nueva herramienta de justificación.

Referencias bibliográficas

- Abdeljaouad, M. (2002) La demostración en el álgebra de los árabes En <http://www-didactique.imag.fr/preuve/Newsletter/02Hiver/02hiverThemeES.html>
- Balacheff, N. (1988) Aspects of Proof in Pupil's practice of School mathematics. In D. Pimm (Ed.), *Mathematics, Teachers and Children*. London: Hodder & Stoughton.
- Høyrup, J. (1994). The Antecedents of Algebra. *Filosofi og videnskabsteori på Roskilde Universitetcenter*. 3. Række: Preprint og Reprints, 1994 nr. 1.
- Høyrup, J. (1996). The Four Sides And The Area. Oblique Light on the Prehistory of Algebra. In Ronald Calinger (Ed.), *Vita mathematica. Historical Research and Integration with Teaching* (pp. 45-65). Washington, DC: Mathematical Association of America.
- Høyrup, J. (2002). *Lengths, Widths, Surfaces. A Portrait of Old Babylonian Algebra and Its Kin*. New York: Springer.
- Hughes, B. (1986). Gerard of Cremona's Translation of al-Khwârizmî's al-jabr: A Critical Edition, *Mediaeval Studies* 48, (pp. 211-263)
- Karpinski, L (1915) *Robert of Chester's Latin Translation of The Algebra of Al-Khowarizmi* New York, The MacMillan Company, University of Michigan Studies [electronic version].
- Marrades, R. & Gutiérrez, A. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment, *Educational Studies in Mathematics* 44 (pp.87-125).
- Moreno, R. (Ed.) (2009). *El Libro de Algebra*. Madrid: Nivola.
- Puig, L. (1998). Componentes de una historia del álgebra. El texto de al-Khwarizmi restaurado. En F. Hitt (Ed.) *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp. 109-131). México, DF: Grupo Editorial Iberoamérica.

- Puig, L. (2006). La resolución de problemas en la historia de las matemáticas. En Aymerich, José V. y Macario, Sergio (Eds.) *Matemáticas para el siglo XXI* (pp. 39-57) Castellón: Publicacions de la Universitat Jaume I.
- Puig, L. (2007). Researching the History of Algebraic Ideas from an Educational Point of View. Plenary lecture at the *5th European Summer University on The History and Epistemology In Mathematics Education*. Praha (Czech Republic), July 19-24, 2007
- Puig, L. (2008a). History of algebraic ideas and research on educational algebra. In M. Niss (Ed.) *Proceedings of the Tenth International Congress on Mathematical Education*. CD-version. Roskilde: IMFUFA, Department of Science, Systems and Models, Roskilde University.
- Puig, L. (2008b). Historias de al-Khwârizmî (2ª entrega). Los Libros. *Suma*, 59, pp. 105-112.
- Puig, L. (2009a). Historias de al-Khwârizmî (3ª entrega). Orígenes del álgebra. *Suma*, 60, pp. 103-108.
- Puig, L. (2009b). Naïve, geometric and algebraic proof in ancient and modern times. Talk to the meeting *Semiotic Approaches to Mathematics, the History of Mathematics, and Mathematics Education (SemMHistEd) – 3rd Meeting*. Aristotle University of Thessaloniki, July 16-17, 2009.
- Rashed, R. (Ed.) (2007). *Al-Khwârizmî. Le commencement de l'algèbre*. Paris: Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard.
- Rosen, F. (1831). *The algebra of Mohammed Ben Musa*. London: Oriental Translation Fund.

ⁱ El texto de la demostración se ha tomado de la versión en castellano de la obra de Al-Khwârizmî (Moreno, 2009), aunque se han hecho algunas modificaciones a partir de la edición de Rosen (1834), siguiendo el estilo de Puig (1998).

ⁱⁱ El texto de la demostración está presentado de la manera que ya hemos descrito en la nota anterior.