

LA EXPLORACIÓN CON ESPEJOS Y LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA EN LA EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA. DISEÑO DE UN PROYECTO DE INVESTIGACIÓN

Laura López Iborra

IES Camp de Morvedre

Gregoria Guillén Soler

Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Univesitat de València

Resumen

En este trabajo presentamos la elaboración de un proyecto de investigación que versa sobre la enseñanza y aprendizaje de los procesos matemáticos de describir, clasificar, definir y demostrar, utilizando como contexto la exploración con espejos. Hemos tomado de referencia para la experimentación la teoría de los modelos teóricos locales de Eugenio Filloy. Pretendemos determinar elementos para diferentes componentes del modelo. Para ello delimitamos la actividad matemática que se puede desarrollar a partir de la exploración con espejos; realizamos un análisis teórico de investigaciones relativas a las diferentes problemáticas determinadas y, con la intención de obtener datos experimentales de nuestra propia investigación, diseñamos un Modelo de enseñanza que desarrollamos con estudiantes de 2º de ESO. Investigaciones llevadas a cabo en el Departamento de Didáctica de las Matemáticas de la Universitat de València y en el Instituto de Freudenthal se han tomado de referencia. Los análisis teóricos y de datos experimentales, han llevado a diseñar el modelo teórico local inicial, que se tomará como punto de partida para una nueva investigación.

Abstrat

We present in this work how we have devised a project of research about the teaching and learning of mathematical processes like describing, sorting, defining and proving, having the exploration with mirrors as context. Eugenio Filloy's theory, the Theoretical Local Models has been considered for this experimentation. We try to determine elements that belong to the four Model's components. For this reason we will delimit the mathematical activity that the exploration with mirrors is able to generate; a theoretical analysis about the various problematics that have been determined, will be done. A Teaching Model for 2nd course of ESO students will be designed to obtain experimental information about our research. Researches developed in the Department of the Didactic of Mathematics in Valencia University and Freudenthal Institute have been the references. The theoretical analysis and the analysis of the experimental information, have lead to design the initial Theoretical Model, which will be the origin of a new research.

Presentación

En el llamado enfoque realista para la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas escolares los problemas de contexto ocupan un lugar dominante, como una fuente de formación de conceptos y como un área de aplicaciones (véase, por ejemplo, Treffers, 1987). Asimismo, los nuevos planes de estudio para la Educación Secundaria Obligatoria (ESO) proponen aplicar las Matemáticas a diferentes campos de conocimiento o a distintas situaciones de la vida cotidiana, como la naturaleza o el mundo del arte; también aconsejan el uso de materiales manipulativos en la enseñanza de la geometría, “la utilización de recursos manipulativos que sirvan de catalizador del pensamiento de la alumna o alumno es siempre aconsejable, pero cobra especial importancia en geometría donde la abstracción puede ser construida a partir de la reflexión sobre las ideas que surgen de la experiencia adquirida de la observación de objetos físicos” (DGV, 2007). Los espejos, además de verse como un tipo de material manipulativo, pueden considerarse como un contexto, poco trabajado como tal, que es potencialmente muy rico en cuanto a la actividad matemática que el alumno puede desarrollar (Guillén, 2005). En este sentido, con el diseño del proyecto de investigación que presentamos aquí pretendemos explorar la enseñanza/aprendizaje de los procesos matemáticos tomando como situación-contexto la exploración con espejos y como ámbito de estudio un profesor y estudiantes de la ESO.

Según Filloy (1999), el profesor, el alumno, el contenido (las matemáticas) y la comunicación, son los cuatro factores a tener presentes en cualquier proceso enseñanza-aprendizaje. Éstos se ven reflejados en los cuatro componentes de todo Modelo Teórico Local (MTL): 1) la componente de competencia formal del MTL, o también llamada Modelo de Competencia (MC) de forma más abreviada; 2) la componente de enseñanza del MTL o Modelo de Enseñanza (ME); 3) la componente de actuación o de los procesos cognitivos del MTL, Modelo Cognitivo (MCg); y 4) la componente de comunicación de MTL, más conocida como Modelo de Comunicación (MCm). Estos componentes teóricos, están interrelacionados y se pueden diferenciar según los fenómenos que se toman en consideración al realizar el análisis. (Guillén y Puig, 2005). Una de las ideas fundamentales del modelo es que el esquema de la investigación es recursivo en el sentido de que los resultados obtenidos al realizar un estudio experimental tienen que ver con todos los componentes del modelo (MC,

ME, MCg, MCm) y tienen como objeto reorganizarlo y constituir otro MTL que pueda considerarse como el punto de partida de una nueva investigación.

En nuestro estudio utilizaremos este Programa de investigación de los Modelos Teóricos Locales como marco metodológico. Tomando como referencia Guillén y Puig (2006), trabajo desarrollado tomando como situación-contexto las relaciones de inscripción y dualidad entre los poliedros regulares, nos situaremos en primer lugar en la docencia y usaremos la idea de un MTL para la exploración de un Modelo de Enseñanza; posteriormente lo usaremos como marco para el diseño de una experimentación. Esto es, el proyecto de investigación que presentamos centra la atención en el Modelo de Enseñanza diseñado para un estudio exploratorio previo considerando la exploración con espejos como contexto para la enseñanza/aprendizaje de los procesos matemáticos en la ESO; además se pretende organizar el conocimiento obtenido al administrar este modelo de enseñanza con estudiantes de este nivel educativo, centrando la atención en el profesor y en los estudiantes, a través de los cuatro componentes del MTL para que el MTL elaborado pueda considerarse como punto de partida para una investigación en la que se retomará el estudio de los procesos matemáticos a partir de la exploración con espejos.

Con lo que los objetivos del estudio, enunciados de manera más precisa son:

1. Realizar una exploración de la situación-contexto “exploración con espejos”. Esto es, determinar contenidos (conceptos, procesos matemáticos, relaciones) del Currículo de la ESO de la Comunidad Valenciana relativos a la geometría que pueden surgir en un contexto de enseñanza/aprendizaje a partir de la exploración con espejos.
2. Elaborar un Modelo de Enseñanza (ME) para estudiantes de la ESO que contemplen contenidos (conceptos, procesos matemáticos, relaciones) que se determinen al realizar la exploración de la situación-contexto “exploración con espejos”.
3. Experimentar con estudiantes de la ESO el modelo de enseñanza construido, poniendo a prueba secuencias de actividades del modelo de enseñanza elaborado.
4. Registrar y analizar información obtenida en el desarrollo experimental.
 - 4.1. Analizar la actuación del profesor al desarrollar el ME elaborado.
 - 4.2. Analizar las actuaciones de los estudiantes al desarrollar el ME elaborado.

5. Elaborar un MTL para la enseñanza en la ESO de los procesos matemáticos tomando como situación-contexto la exploración con espejos teniendo en cuenta resultados de investigaciones previas y de la experimentación desarrollada.

Para la elaboración del trabajo distinguimos tres etapas que denominamos: i) *Exploración del problema*, ii) *¿Qué conocemos ya?* y iii) *Nuestra propia experiencia*. En lo que sigue detallamos la metodología usada o prevista para estas etapas y finalizamos el informe formulando algunas cuestiones para el grupo de trabajo del Aprendizaje de la Geometría sobre la pertinencia y la metodología a utilizar en el desarrollo del proyecto.

Revisión bibliográfica. Marco de referencia

El trabajo que presentamos se incluye en la línea de investigación del Departamento de Didáctica de las Matemáticas de la Universitat de València que se centra en la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría de los sólidos. Trabajos desarrollados en esta línea de investigación (Guillén, 1997, 2000, 2001, 2004, 2005, 2006; Guillén y Puig, 2001, 2006; Guillén et al. 2003, 2004; González et al. 2006) toman como marco de referencia el trabajo de Freudenthal y otros estudios desarrollados en el Instituto que lleva su nombre. De ellos heredamos nuestra concepción de la geometría y su enseñanza y otras características de nuestro marco de referencia que vamos a precisar a continuación:

- Concebimos la geometría como ciencia del espacio físico donde el niño se mueve y ligada a las experiencias espaciales del estudiante.
- Se concibe la enseñanza como actividad. Tiene como objetivo aumentar el nivel de razonamiento del estudiante; esto es, un avance en el proceso de matematización; entendiendo ésta en sentido amplio, esto es, asociada a acciones como describir, clasificar, definir, formalizar, esquematizar, organizar, axiomatizar y transformar.
- Entre los contenidos geométricos curriculares distinguimos conceptos, procesos de describir, clasificar, particularizar, generalizar, ... y relaciones entre contenidos geométricos.
- La enseñanza se concibe como reinención y no encorsetada; nos preocupa la resolución de problemas y el planteamiento de otros a partir de éstos. Entendemos el *proceso de enseñanza/aprendizaje*, como un proceso donde además de centrar la atención en el

aprendizaje de contenidos matemáticos y la resolución de problemas se centra la atención en el planteamiento de los mismos.

- Mostramos gran interés sobre cómo aprende el estudiante; esto se refleja al diseñar el ME y al desarrollarlo en clase.
- Consideramos la exploración con espejos como un contexto –Situación, en vez de como un recurso concreto. Esto es, los espejos constituyen la situación soporte que se utiliza para desarrollar actividad matemática. Es una situación que permite que se pueda extender la actividad desde lo que denominaremos *contextos inmediatos* hacia otros que llamaremos *contextos derivados*. Los contextos derivados surgen al extender los inmediatos, bien como consecuencia de una generalización donde se cambia el mundo soporte donde se plantea la actividad, por un cambio de dimensión, por analogía, ...bien al extender un problema y/o su resolución, o por la formulación de una pregunta contemplando la respuesta de un estudiante durante la práctica de un ME.

Ya hemos indicado en la presentación que es el Programa de los MTL de Eugenio Filloy el que tomamos como marco metodológico para la experimentación. Una cualidad de los MTL es su adaptabilidad a diferentes situaciones. Para la problemática tratada en nuestro Proyecto de investigación ya hay trabajos desarrollados que nos proporcionan elementos para los componentes del modelo. Por lo que, en este caso, los modelos de competencia, cognitivo, de enseñanza y de comunicación del MTL, al que se refiere el objetivo 5, contendrán elementos tomados de la bibliografía existente, que provienen de resultados de investigaciones previas, y de los datos que obtengamos con nuestro estudio exploratorio.

En relación con los trabajos analizados hasta ahora cabe señalar, por un lado, el libro Poliedros de la editorial Síntesis (Guillén, 1991, cap.1,5 y 9). Por otro, las secciones *Cómo se aprende* y *Cómo se enseña* de la página Web elaborada recientemente por Guillén (2006) para la formación continua de profesores de primaria en geometría de los sólidos, <http://hipatia.matedu.cinvestav.mx/~descubrirymat/>. Estos trabajos han sido referentes indispensables para la construcción de los primeros elementos para los cuatro componentes del MTL (objetivo 5), así como para la confección de nuestro Modelo de Enseñanza para la fase experimental (objetivo 2). De ellos hemos extraído tareas y actividades, además de formarnos en el estilo de enseñanza utilizado, como realizar clases dinámicas con continuas

preguntas orales, resúmenes de los contenidos al principio de las sesiones, síntesis al finalizar...

En esta revisión bibliográfica cabe hacer referencia también al trabajo reciente de Maanen (2008), perteneciente al Instituto de Freudenthal. Su manera de organizar el estudio realizado se ve reflejada en el nuestro y aprovechamos también la jerga que utiliza para nombrar las etapas en las que lo ha realizado.

Otras investigaciones que cabe mencionar son las que tomamos como referencia para el análisis de los datos experimentales. En relación con el objetivo 4, considerando la bibliografía consultada hasta la actualidad, cabe señalar los trabajos de Guillén (2000) y Pérez y Guillén (2007), que nos sirvan de referente para la organización de los datos sobre la actuación del alumno y los de González et al. (2006, 2007) para la actuación del profesor.

Por último, cabe señalar que nuestro estudio se desarrolla en la Comunidad Valenciana y en un contexto escolar, concretamente con alumnos de Secundaria Obligatoria. Es por ello, que usamos el Currículo Oficial de la ESO de esta comunidad (Decreto 112/2007, de 20 de julio), como referente para nuestro trabajo. Con su análisis seleccionamos los contenidos matemáticos a trabajar vía nuestra unidad de enseñanza. Dicho análisis se ve reflejado en los mapas sobre contenidos geométricos presentados en la etapa 2 de la metodología.

Metodología

El trabajo desarrollado hasta ahora se ha realizado en 5 etapas que describimos brevemente a continuación.

Primera etapa: Revisión bibliográfica

En la primera etapa realizamos una revisión bibliográfica relacionada con la enseñanza/aprendizaje de los procesos matemáticos en geometría utilizando diferentes contextos. Consideramos aquellos trabajos del Departamento de Didáctica de las Matemáticas de la UV relacionados con este enfoque para la enseñanza de la geometría y este análisis permitió caracterizar el marco para la investigación. Asimismo, a partir de las características determinadas para los niveles de Van Hiele para la geometría de los sólidos (Guillén, 1997) y otros trabajos en los que se analizan los procesos de describir, clasificar y/o generalizar y particularizar (Guillén, 1991, 2004, 2005) construimos mapas-esquemas para los diferentes procesos matemáticos que tomamos como referencia en nuestro trabajo posterior.

Segunda etapa: La geometría en el Currículum de la ESO

El trabajo de la segunda etapa se refiere al objetivo 1. En esta etapa analizamos el Currículo de la ESO de la Comunidad Valenciana (CV), centrando la atención en los contenidos matemáticos (conceptos, procesos y establecimiento de relaciones) que se proponían en el bloque de geometría.

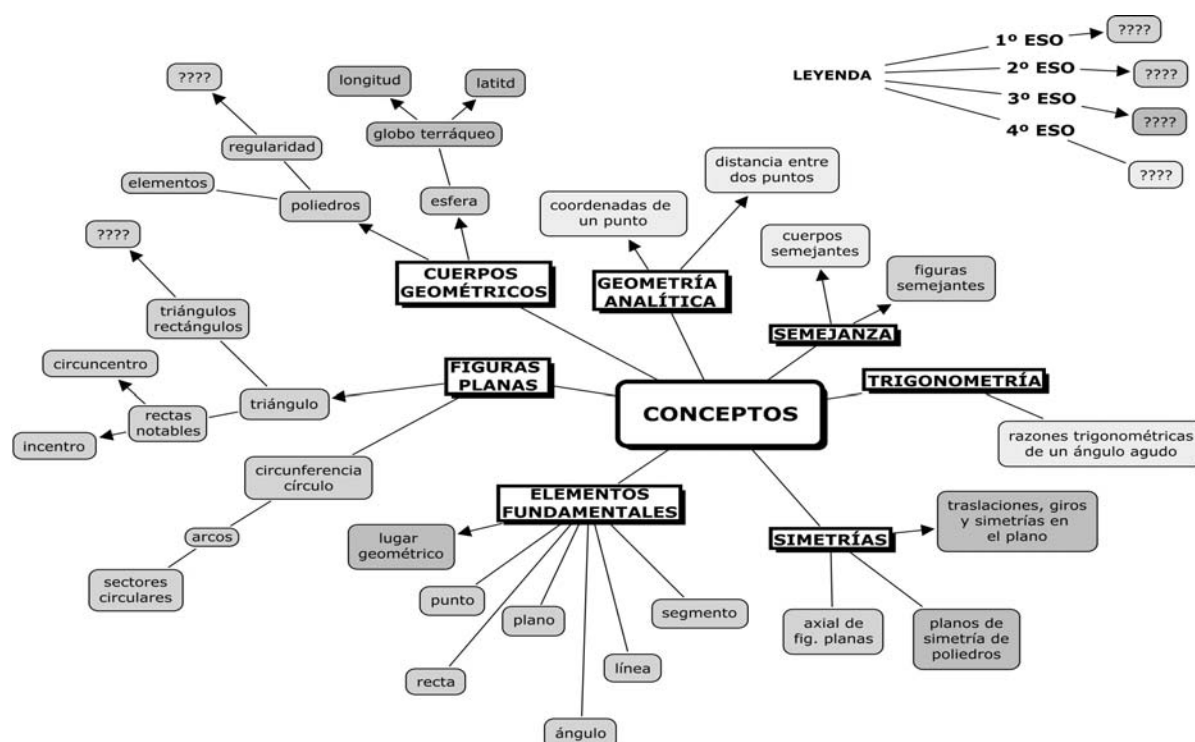


Figura 1

Elaboramos unos mapas sobre estos contenidos curriculares, integrando en un mismo mapa los contenidos asignados a los diferentes cursos de la ESO. En la figura 1 se puede ver uno de los mapas, el correspondiente a los conceptos

Tercera etapa: Exploración del problema

El trabajo desarrollado en la etapa 3, que denominamos *Exploración del problema*, también se refiere al objetivo 1. En esta etapa analizamos la Situación-contexto elegido. Tomando como referencia los mapas-esquemas construidos en la etapa 1, construimos unos mapas que recogen los contenidos que se pueden generar a través de la exploración con espejos cuando los contextos inmediatos se extienden a lo que hemos nombrado como contextos derivados de la manera como hemos explicado al comentar nuestro marco de referencia. En las figuras 2 se

muestran estos mapas, que junto al del anexo 1, muestran el potencial del contexto al visualizar posibilidades que tiene el profesor para conducir la actividad de clase, siempre y cuando se conduzca la enseñanza con el enfoque que describimos brevemente al comentar el desarrollo de las clases.

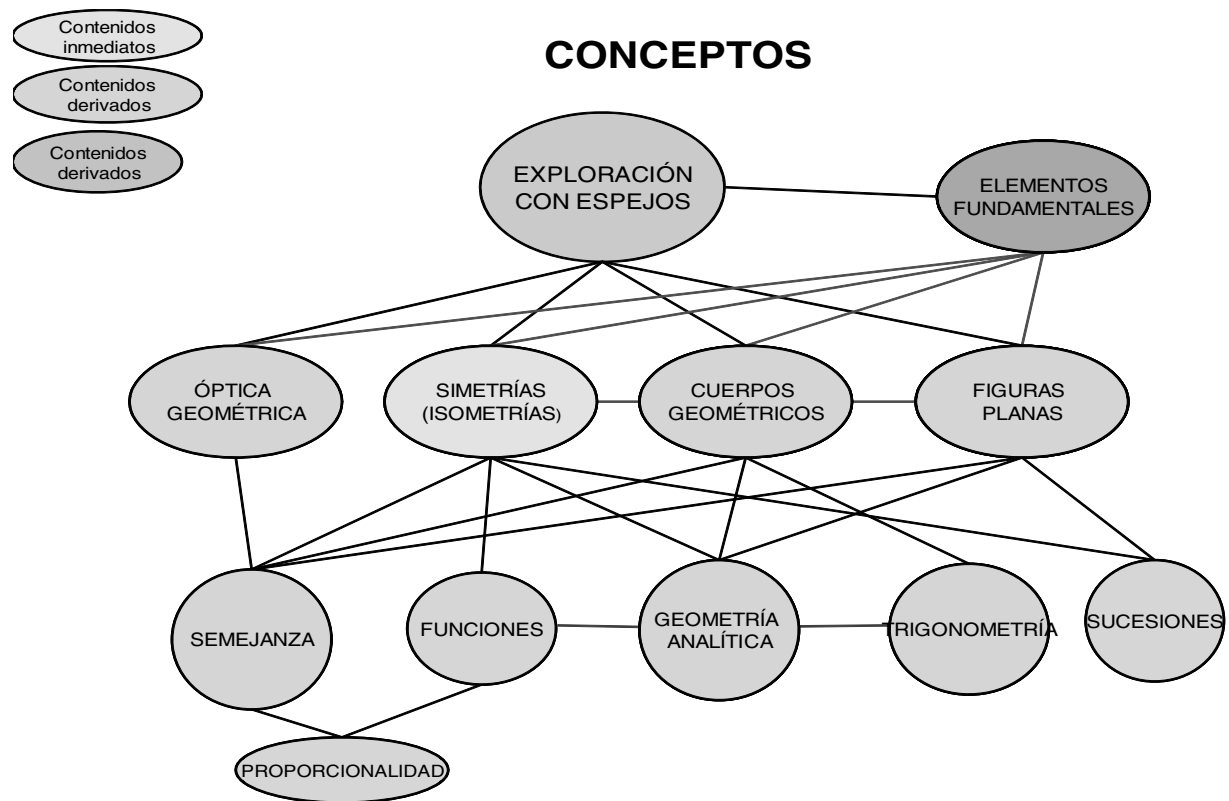


Figura 2.1

ESTABLECIMIENTO DE RELACIONES

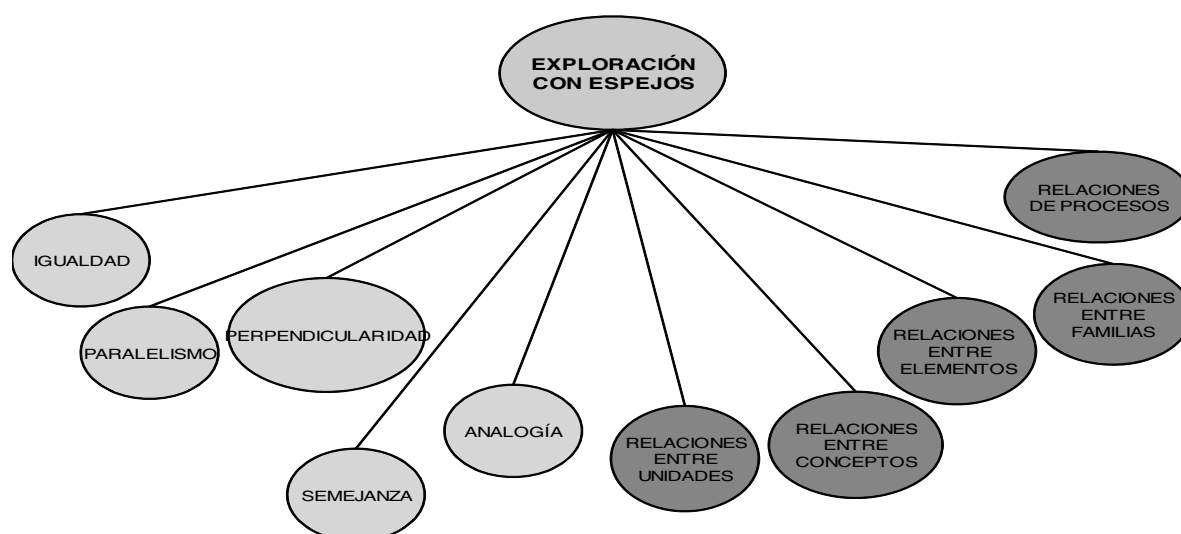
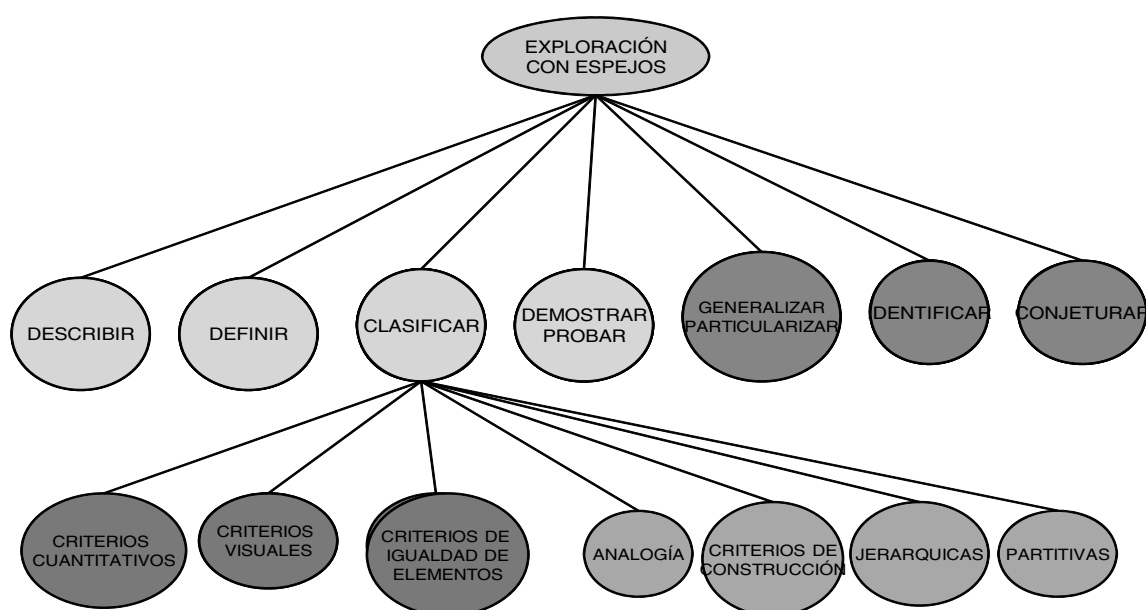


Figura 2.2

PROCESOS MATEMÁTICOS



Figuras 2.3

Finalizamos esta etapa, elaborando unos mapas más específicos sobre contenidos del Currículo de la ESO de la CV relativos a la geometría que pueden surgir en un contexto de

enseñanza desde la exploración con espejos al extender lo que hemos denominado contextos inmediatos a los contextos derivados. Para ello, contrastamos los mapas elaborados en las etapas 2 y 3 y revisamos a aquellos trabajos que informaban sobre cómo extender, los problemas, los contextos,...(por ejemplo, Guillén, 1991). En la anexo 2 se muestra uno de estos mapas.

Cuarta etapa: El Modelo de Enseñanza para la experimentación

El trabajo desarrollado en la etapa 4 está asociado a los objetivos 2 y 3. En esta etapa hemos diseñado el ME utilizado en nuestro estudio experimental.

Para la selección del nivel de Secundaria en el que experimentar el ME se consideró los dos niveles que impartía clase como profesor uno de nosotros y dentro de estos niveles seleccionamos aquel que, según el análisis del Currículo Oficial realizado en la etapa 2, más contenidos geométricos podíamos abordar desde nuestro contexto de trabajo. El resultado de la elección fue el curso de 2º de la ESO. Los contenidos a desarrollar en la unidad didáctica los determinamos a través de los mapas realizados en la etapa 3.

SOBRE EL MODELO DE ENSEÑANZA: ¿QUÉ SABEMOS YA?

Al comentar el marco teórico ya hemos hecho referencia a los trabajos que se tomaron como referencia para diseñar el ME. A partir de ellos recopilamos una batería de actividades y tareas acordes con nuestro marco, el análisis de la actividad matemática que se podía despegar a partir de ellas que en ellos se realizaba, algunas conclusiones sobre ideas erróneas del alumnado, sugerencias que se daban para la instrucción...En las figuras 4 y 5 se pueden ver algunas actividades seleccionadas para nuestro primer ME.

1. Si quisieras verte 6 veces y tuvieses dos espejos, ¿qué harías?_____
2. Imagínate dentro de una habitación donde dos paredes consecutivas estuvieran forradas de espejos, ¿cuántas veces te verías reflejado/a?_____ Si el ángulo entre las paredes fuese de 120º, ¿cuántas veces te verías? _____, describe cómo te verías _____
3. Y si fuese de 60º, ¿cuántas veces te verías?____ Describe como serían tus imágenes.
4. ¿Y si las paredes fueran paralelas, ¿qué verías?_____
-
1. Escribe la imagen esperada tras una reflexión sobre el eje vertical.

n Dibuja la imagen esperada tras 2 reflexiones
n Dibuja la imagen esperada tras 11 reflexiones.

Figura 4: Algunas actividades de contexto real del ME Inicial.

8 ¿Qué simetrías o giros tienen en común el rectángulo y el trapecio isósceles?

9 ¿Qué simetrías o giros tiene el rectángulo que no tiene el romboide? ¿Y a la inversa, posee el romboide alguna simetría que no posea el rectángulo?

.....

12 Completa el siguiente diagrama de árbol con las siguientes palabras: cuadrado, cometa, rombo, rectángulo, trapecio isósceles, romboide:

Figura 5: Algunas actividades de contexto geométrico del ME Inicial.

Quinta etapa: Nuestra propia experiencia

En esta etapa llevamos a la práctica el ME elaborado en la etapa anterior. El trabajo desarrollado en esta etapa está ligado a los objetivos 3 y 4 del estudio y a su vez proporcionará elementos para el Modelo de Enseñanza y el Modelo Cognitivo que constituye parte del objetivo 5.

Detallamos esta primera etapa experimental comentando el contexto en el que se realizó el estudio, los métodos usados para la recogida de datos y el avance de algunas ideas que se tienen para su posterior organización.

LOS ESTUDIANTES. EL DESARROLLO DE LAS CLASES

El estudio se desarrolló durante el último mes del curso académico 2007-2008, tomando como medio un grupo de estudiantes 2º de la ESO del Instituto público de Almenara (Castellón), en el cual, una de las autoras del trabajo impartía la asignatura instrumental de Matemáticas, a razón de 4 horas semanales. El número de estudiantes del grupo que asistían regularmente a clase era 20. Los estudiantes estaban sentados por parejas a criterio de la tutora del curso.

Al comenzar las clases, para registrar los contenidos, presentábamos un resumen de los contenidos trabajados en la sesión anterior. La profesora resolvía algunas actividades estableciendo un patrón de trabajo, para ello expresaba muy detalladamente los pasos a seguir; de esta manera por imitación, el alumno podía resolver tareas similares en su casa. Otro método de trabajo muy usado fueron las preguntas orales por parte de la profesora, lo que provocaba una atención extra del alumnado. También se solía hacer una síntesis de los

contenidos vistos al finalizar la sesión.

Los estudiantes disponían de espejos para que pudieran utilizarlos como herramienta de trabajo ante determinados problemas y se implicaran con mayor facilidad en el desarrollo de la indagación. El profesor disponía de los mismos espejos, además de material comercializado y modelos físicos con el mismo fin. También distribuimos fichas con ejercicios, tablas y dibujos de los modelos estudiados para facilitar que en casa los estudiantes pudieran recordar, comprender, registrar y comunicar lo que se trabajó en clase.

Con el fin de de que las nuevas tecnologías estuvieran presentes en nuestro ME, elaboramos varias presentaciones PowerPoint sobre los planos y ejes de simetría del cubo y los poliedros en el mundo real, y proyectamos un vídeo relacionado con las simetrías en un contexto real.

TOMA DE DATOS

Los instrumentos con los que se ha trabajado en este estudio exploratorio son de tres tipos. Por un lado, los datos escritos de tareas, cuestiones, reflexiones, e investigaciones, que se plantean a estudiantes para averiguar cómo responden y con qué dificultades se encuentran. Por otro las grabaciones de audio de las 11 sesiones en las que se desarrolló la unidad de enseñanza, que además de darnos información sobre el receptor, también o hace del emisor. En la anexo 3 se muestra un mapa conceptual de la sesión 2. Y por último la prueba escrita que se desarrolló al finalizar la unidad de enseñanza; la que constaba de dos partes diferenciables, una de cuestiones similares a las desarrolladas durante el resto de sesiones, y una segunda de preguntas test, seleccionadas de Les Proves Cangur de la Societat Catalana de Matemàtiques.

Para la determinación del momento de recoger las actividades resueltas por los alumnos tuvimos en cuenta simplemente que se hubieran resuelto con posterioridad a que determinadas actividades sí se hubieran abordado en clase.

En cuanto al proceso de enseñanza, disponemos de las grabaciones en audio de todas las sesiones, para describir con el máximo detalle la actuación del profesor ejecutor del modelo de enseñanza diseñado.

EL ESQUEMA DE ORGANIZACIÓN DE LOS DATOS. PRIMERAS OBSERVACIONES.

Cabe señalar que con el trabajo desarrollado hasta ahora sólo se tienen observaciones generales que requieren de una organización. El análisis de estas observaciones está muy en su comienzo. En una primera lectura de las respuestas escritas por los estudiantes a determinadas actividades planteadas para casa, y de una primera escucha de las grabaciones de audio, decidimos organizar la información en nueve grupos: i) actitudes, ii) errores comunes, iii) ideas persistentes, iv) desconocimientos, v) ideas erróneas, vi) dificultades, vii) facilidades, viii) procesos matemáticos y ix) vocabulario y notación. En la figura 7 mostramos como ejemplo la información recogida incluida en alguno de los grupos.

ACTITUDES - Relacionan los nuevos conceptos con los viejos. El eje de simetría oblicuo del cuadrado coincide con la diagonal - Ante una actividad de simetría, su primer impulso es recurrir al uso de espejos. - Hacen uso de las sugerencias de la profesora. Línea horizontal que pasa por el centro. - Casi la mitad de la clase prefiere trabajar individualmente que con su compañero de mesa. - Se sorprenden de la cantidad de imágenes que salen al trabajar con ángulos pequeños. - Se sienten cómodos usando el suelo como referente al describir. - Tienden hacer clasificaciones partitivas. - Prefieren dibujar a escribir. - En general, usan correctamente el espejo como plano de simetría como herramienta de ayuda ante una tarea - La primera idea es dibujar la imagen de un objeto igual a la real. La mayoría se dan cuenta del error - Tres alumnos ven el caso de espejos infinitos como un caso límite de la exploración con un libro de espejos. DESCONOCIMIENTO - No conocen los ángulos de la escuadra y el cartabón. - No conocen el significado de área, aunque están muy familiarizados con el nombre. - No reconocen los trapecios, solo los isósceles. - Reconocen la igualdad de los elementos pero no la perpendicularidad o el paralelismo. - Les cuesta reconocer los triángulos rectángulos - Carecen de ciertos conocimientos elementales como la perpendicularidad y el paralelismo.
--

Figura 7: Sobre la organización de los datos del alumnado

Del mismo modo, la información del docente, tras una primera escucha, la agrupamos en seis grupos: i) actuaciones, ii) sugerencias ante el aprendizaje, iii) sugerencias ante las dificultades, iv) preguntas orales, v) modelos de actuación y vi) tareas propuestas durante las sesión. Véase la figura 8.

PREGUNTAS DEL PROFESOR/A Las preguntas orales, son una de las características y herramientas fundamentales de este método de enseñanza. Con ellas conseguimos una doble atención, la de los alumnos, y la del contenido a trabajar.
--

- Pregunta constantemente durante el desarrollo de la clase, las preguntas son tanto a título individual como al colectivo.
- Las preguntas no están aisladas. El profesor formula la que llamaremos pregunta principal, y seguidamente las llamadas preguntas secundarias, preguntas cuya finalidad es facilitar o bien la comprensión de la pregunta principal o bien asesorar en la estrategia a seguir para la correcta resolución de la principal. A continuación reescribimos algunos ejemplos: ¿Es el cuadrado un cuadrilátero? ¿Cumple el cuadrado todas las propiedades para pertenecer al grupo de los cuadriláteros? ¿Qué propiedades hay que tener para pertenecer a este grupo? La finalidad de las llamadas preguntas secundarias es ayudar a la comprensión de la principal, ¿es el _____ un _____? ¿Qué es una diagonal? ¿Es una flor, un ángulo, un segmento...? En esta ocasión la pregunta secundaria ayuda tanto a la comprensión como a la resolución de la principal. ¿Este _____ tiene algo de especial?, ¿en qué me puedo fijar?, ¿en los lados, en los ángulos, en las caras, en los ejes de simetría....?, ¿hay algo que llame la atención?, ¿son paralelos, perpendiculares, iguales....? Aquí vemos un claro esquema a seguir marcado por el profesor mediante las preguntas secundarias.
- Preguntas que el profesor hace para corregir los errores de los alumnos. Por ejemplo: Un eje de simetría del cuadrado la línea horizontal que pasa por el centro. ¿El centro de la pizarra? No, en centro del cuadrado.
- Preguntas comunes a todas las sesiones, ¿qué vimos en la sesión anterior?, ¿qué hemos aprendido hoy?
- Preguntas que sirven de guía para la resolución de un problema. Describe un cubo. ¿Es un polígono, un poliedro, un cuerpo de revolución, una persona? ¿De qué me puedes hablar de él, de sus caras, de sus ángulos...? Des sus caras, ¿son iguales, son regulares?, ¿qué te llama la atención?

ACTUACIONES DEL PROFESOR ANTE DIFICULTADES DEL ALUMNO

Ante las dificultades de comprensión durante el proceso de enseñanza, hemos podido observar diferentes métodos de actuación:

- Mediante preguntas orales. Describe un cubo. ¿Es un polígono, un poliedro, un cuerpo de revolución, una persona? ¿De qué me puedes hablar de él, de sus caras, de sus ángulos...? Des sus caras, ¿son iguales, son regulares?, ¿qué te llama la atención?
- Dividiendo el problema en problemas más sencillos.
- Usando material dinámico.
- Proponiendo tareas extras sobre el contenido problemático
- Decir lo mismo de diferentes maneras.

Figura 8: Sobre la organización de datos del docente

Ahora bien, esta agrupación necesita perfilarse y precisarse e incluso modificarse. Ya hemos comentado que esta agrupación está en el inicio del proceso y requiere que se preste mucha más atención.

Algunas cuestiones para el grupo de trabajo de geometría

Hasta aquí hemos dado cuenta del diseño de nuestro Proyecto de investigación y del trabajo desarrollado hasta ahora. Planteamos a continuación dos preguntas dirigidas al grupo de trabajo de Geometría, con el fin de mejorar nuestro trabajo e investigación. Primeramente, cuestionamos la viabilidad e interés del proyecto, y con la segunda cuestión, centramos la atención en las nuevas tecnologías. Las cuestiones que planteamos son:

- 1) ¿Se vislumbra viable la continuidad de este trabajo como tesis doctoral? O de lo contrario, ¿corre el peligro de ser interpretada como una tarea de diseño curricular, puro trabajo de un docente?

- 2) Hemos pensado trabajar vía Internet y realizar la exploración con espejos considerando también diferentes “mundos” como contexto. Para la exploración con espejos y “el mundo de los sólidos” usaremos la página Web: <http://linux.ajusco.upn.mx/~transpatricio/gregoria/GregoriaWebSite/>, ¿Qué otros programas o páginas Web se considera que pueden ser interesantes para trabajar vía Internet en nuestro estudio.

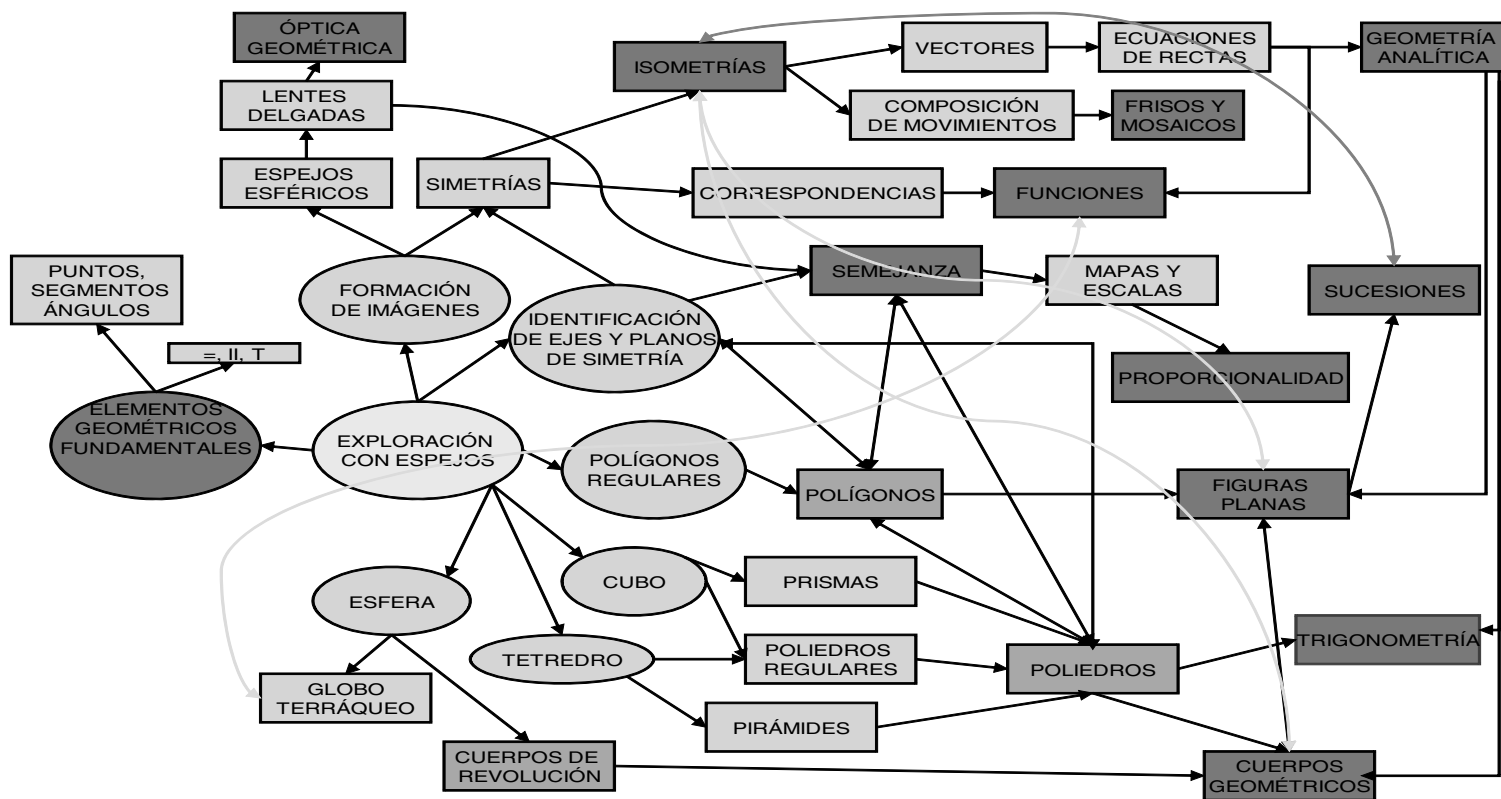
Referencias bibliográficas

- Freudenthal, H. (1971). Geometry Between the Devil and the Deep Sea, *Educational Studies in Mathematics*, vol. 3 (2/4), 413-435.
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*, D. Reidel. Dordrecht.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*, D. Reidel. Dordrecht.
- Fillooy, E. y cols. (1999). *Aspectos teóricos del álgebra educativa*, Grupo Editorial Iberoamérica. México D.F.
- Generalitat Valenciana (2007). Decreto 112/2007, de 20 de julio, del Gobierno Valenciano, por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunitat Valenciana, *DOGV*, 5562.
- González, E.; Guillén, G.; Figueras, O. (2006). Estudio exploratorio sobre la puesta en práctica de un modelo de enseñanza para la geometría de los sólidos en Magisterio. En P. Bolea, M.J. González, y M. Moreno (Eds.), *Actas de X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)*, pp. 195-204. Universidad de Huesca. Huesca.
- González, E.; Guillén, G.; Figueras, O. (2007). Diseño de un estudio sobre la puesta en práctica de un Modelo de Enseñanza para la geometría de los sólidos para la formación continua de profesores de educación básica. En M. Camacho, P. Bolea, P. Flores, B. Gómez, J. Murillo, y M^a.T. González (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación XI Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)*. Universidad de la Laguna. Tenerife.
- Guillén, G. (1991). *El mundo de los poliedros*, Síntesis. Madrid.

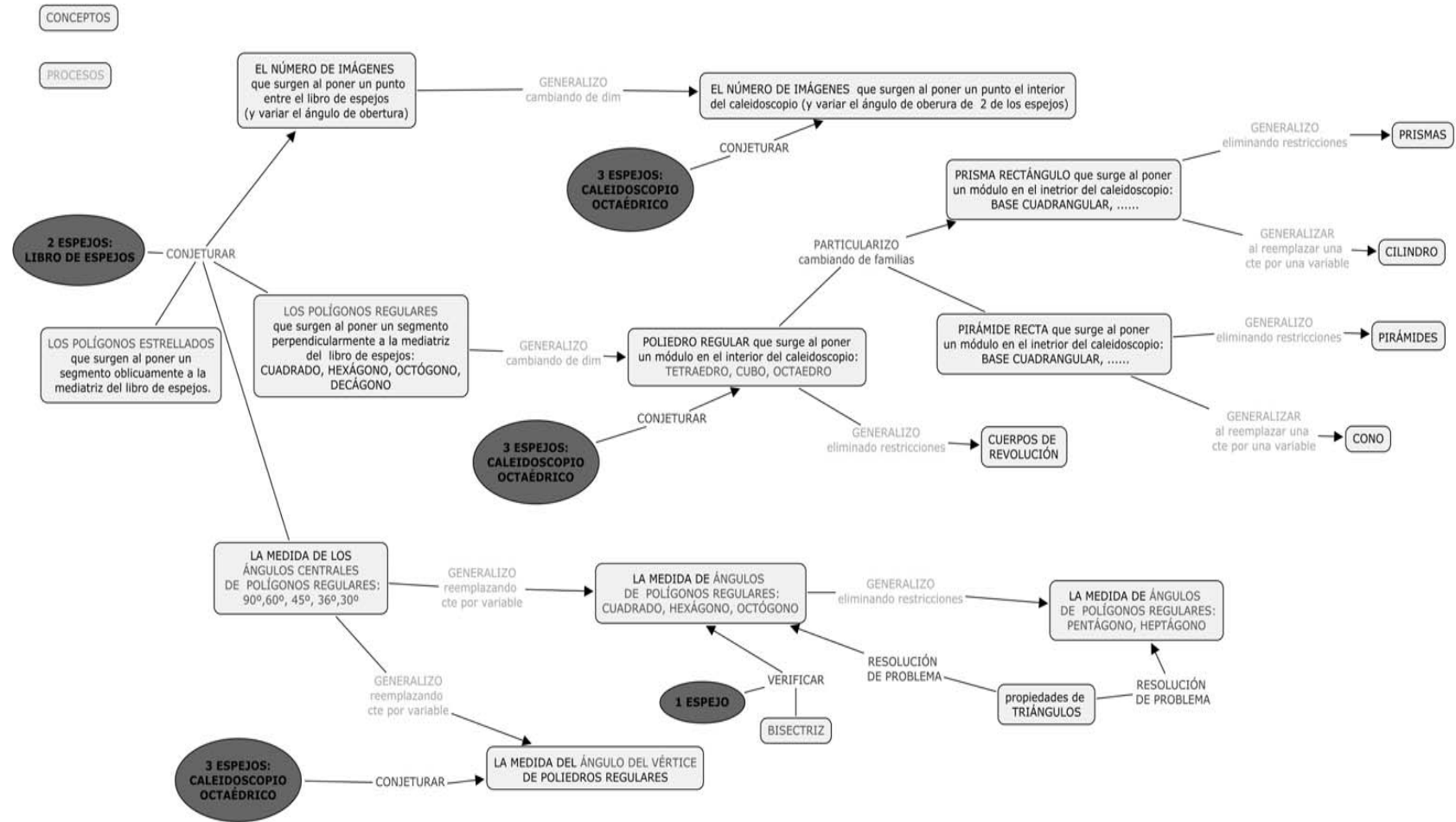
- Guillén, G. (1997). *El modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos. Observación de procesos de aprendizaje*, Tesis doctoral, (Publicada en 1999 en la Colección: Tesis doctorales en Microfitxes). Universitat de València. Valencia.
- Guillén, G. (2000). Sobre el aprendizaje de conceptos geométricos relativos a los sólidos. Ideas erróneas, *Enseñanza de las Ciencias*, vol. 18 (1) 35-53.
- Guillén, G. (2001). Las relaciones entre familias de prismas. Una experiencia con estudiantes de Magisterio, *Enseñanza de las Ciencias*, 19 (3) 415-431.
- Guillén, G. (2004). El modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos: describir, clasificar, definir y demostrar como componentes de la actividad geométrica, *Educación Matemática*, 16 (3) 79-101.
- Guillén, G. (2005). *La enseñanza de la geometría en la educación básica. Algunas investigaciones*. Texto actualizado de la conferencia para los investigadores y estudiantes del departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México D.F. y financiada por Proyecto de investigación Figueras, O.; Buenrostro, A.; García, F.; López, G. y Sáiz, M. (2001-2006). *Procesos de transferencia de resultados de investigación al aula: el caso del bajo rendimiento escolar en matemática*, co-financiado por el Colegio Nacional de Ciencia y Tecnología (Conacyt), (con clave G37301-S).
- Guillén, G. (2006). Descubrir y matematizar a partir del mundo de las formas, en <http://hipatia.matedu.cinvestav.mx/~descubrirymat/> Web elaborada en el marco del Proyecto de investigación Figueras, O.; Buenrostro, A.; García, F.; López, G. y Sáiz, M. (2001-2006). *Procesos de transferencia de resultados de investigación al aula: el caso del bajo rendimiento escolar en matemática*, co-financiado por el Colegio Nacional de Ciencia y Tecnología (Conacyt), (con clave G37301-S).
- Guillén, G.; Corberán, R.M.; Sáiz, M. y Figueras, O. (2003). Transferencia de resultados de investigación sobre enseñanza y aprendizaje de la geometría al aula. En E. Castro, P. Flores, T. Ortega, L. Rico, y A. Vallecillos (Eds), *Actas del VII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)*, pp. 247-255. Universidad de Granada. Granada.
- Guillén, G. y Puig, L. (2001). Diferentes enfoques para el estudio de algunas Relaciones de inscripción y dualidad en el mundo de los poliedros regulares. En M. F. Moreno, F. Gil, M. Socas y J. D. Godino (Eds), *Actas del V Simposio de la Sociedad Española de*

- Investigación en Educación Matemática (SEIEM)*, pp. 183-188. Universidad de Almería. Almería.
- Guillén, G.; Puig, L. (2006). Construcción de un modelo de enseñanza de procesos matemáticos en el contexto del estudio de las relaciones de inscripción y de dualidad entre poliedros, *Educación Matemática*, 18 (3), 65-102.
- Maanen, J. (2008). Professional development of teacher educators, the ELWleR initiative, *IX International Congress on Mathematical Education (ICME)*. México.
- Pérez, S.; Guillén, G. (2007). Estudio exploratorio sobre creencias y concepciones de profesores de secundaria en relación con la geometría y su enseñanza. En P. Bolea; M. Camacho y P. Flores (Eds), *Actas del XI Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)*, pp. 295-305. Universidad de La Laguna. Tenerife.
- Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico, en Rico, L., ed. (1997), *La educación matemática en la enseñanza secundaria*, pp. 61-94. Horsori. Barcelona.
- Puig, L. (2006). Sentido y elaboración del componente de competencia de los Modelos Teóricos Locales en la investigación de la enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos específicos. En P. Bolea, M. J. González, M. Moreno (Eds.), *Actas de X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)*, pp. 107-126. Universidad de Huesca. Huesca.
- Treffers, A. (1987). *Three dimensions (a Model of Goal and Theory Description in Mathematics Instruction - The Wiskobas Project)*, D. Reidel. Dordrecht.

ANEXO 1: Mapas generales



ANEXO 2: Mapas específicos



ANEXO 3: Mapa conceptual de la sesión 2

