

SISTEMAS DE SÍMBOLOS ANTIGUO TEÓRICO Y ANTIGUO REAL ASOCIADOS A LAS PROPIEDADES GLOBALES DE LAS FUNCIONES

Cristina Pecharromán

Tomás Ortega

Didáctica de la Matemática. Universidad de Valladolid

ortega@am.uva.es

Resumen. Tras una breve introducción, se presenta una síntesis de los antecedentes más directos que se han tenido en cuenta en la investigación, los marcos teórico y metodológico, y se describen los sistemas de símbolos antiguos en los que se basa la docencia de estos contenidos: el teórico, obtenido a partir de textos utilizados en la docencia y documentos oficiales; y el real, definido a partir de la información que aporta el departamento, el Profesor del primer ciclo de ESO y los propios alumnos.

OLD THEORETICAL AND OLD REAL SYMBOL SYSTEMS ASSOCIATED TO GLOBAL PROPERTIES OF THE FUNCTIONS

Abstract. After a brief introduction, we present a synthesis of the most direct previous papers that we have had into consideration in our research, and the theoretical and methodological framework. And then, we describe the old symbol systems in which teaching is based: on the one hand, the theoretical one, achieved by means of the text books and official documents, and, on the other hand, the real one, which has been defined on the basis of information provided by the department, the teacher of the first cycle of ESO and the students themselves.

Introducción

El currículo oficial de Enseñanza Secundaria Obligatoria (ESO) refleja la importancia de la interpretación de las gráficas como forma de transmitir información y de describir las relaciones entre magnitudes y, en concreto, considera fundamental la interpretación de las propiedades globales de las funciones a través de sus gráficas. Siguiendo esta orientación curricular, la investigación que se presenta tiene su origen en el aula, al observar las dificultades de los alumnos para interpretar la gráfica de una función no contextualizada, utilizando un lenguaje matemático adecuado y un sistema de representación riguroso, bien algebraico bien numérico, que exprese con precisión la información que transmite la gráfica.

Este trabajo forma parte de un proyecto más amplio que trata de investigar el proceso de enseñanza-aprendizaje de las propiedades globales de las funciones en el segundo ciclo de ESO, partiendo de su representación gráfica. En el proyecto, se considera un marco teórico de integración que tiene en cuenta: las ideas descritas por Castro y Castro (1997) sobre los sistemas de representación y el proceso de visualización que están presentes en la práctica docente; las dificultades de aprendizaje y los estadios de desarrollo cognitivo de los sistemas de representación considerados por Socas (1997), que han inspirado el diseño de enseñanza puesto en práctica; y el *Enfoque Lógico Semiótico* (Socas, 2007), para el análisis de la comprensión de los conceptos matemáticos.

Se utiliza una metodología cualitativa basada en la investigación-acción que se adapta perfectamente al marco teórico considerado, y cuya integración, permite estudiar cómo se produce el desarrollo cognitivo de los conceptos a través de sus representaciones en el aprendizaje del alumno. En este marco, es fundamental la evolución del proceso educativo y, habida cuenta de que el diseño del proceso de enseñanza está basado en los sistemas de símbolos, es crucial determinar el punto de partida del aprendizaje de los alumnos, dado por el sistema de símbolos antiguo que posea cada alumno.

En nuestro caso, la investigación parte y evoluciona centrada en dos de los elementos del Microsistema Educativo considerado por Socas (2007): la materia (estudio de los conceptos a través de sus representaciones) y los alumnos (análisis de su aprendizaje), de manera, que las intervenciones en ambos elementos se impulsan recíprocamente. Los avances de la investigación son integrados en el aula por el profesor, por tanto, de forma indirecta, se puede

considerar que se potencia su desarrollo profesional. En definitiva, el Microsistema Educativo evoluciona y se desarrolla a lo largo de toda la investigación.

En lo que sigue, tras presentar una síntesis de los antecedentes más directos que se han tenido en cuenta en la investigación, se describen los marcos teórico y metodológico, y se definen los sistemas de símbolos antiguos en los que se basa la docencia: el sistema antiguo teórico, obtenido tras un análisis curricular basado en textos utilizados en la docencia; y el antiguo real, definido a partir de la información que aporta el departamento, el profesor del primer ciclo de ESO y los propios alumnos.

Antecedentes

No es fácil encontrar unos antecedentes directos de la investigación que se pretende desarrollar, quizás por la especificidad del tema considerado, y, de hecho, la búsqueda en MATHDI resultó infructuosa. Sin embargo, sí que se han encontrado artículos cuyo contenido tiene cierta relación, y el estudio de los mismos ha permitido conocer las ideas de diversos autores que, de alguna manera, han influido en el desarrollo de la investigación. A continuación, se relacionan algunos de esos autores, cuyas reflexiones configuran los antecedentes de nuestra investigación, y se indica la relación que tienen con nuestro trabajo.

Así, Leinhardt, Zaslavsky y Stein (1990) consideran la tarea de interpretación como la acción por la cual se da sentido a una expresión matemática, y la tarea de construcción como el acto de generar algo nuevo, e indican que, aunque está asumido que los alumnos tienen más facilidad para llevar a cabo tareas en situaciones contextualizadas que en situaciones abstractas, no está claro cómo influye el contexto en el proceso de aprendizaje. Los autores observan que ante la gráfica de una función se restringe la atención a un punto o grupo de puntos, en oposición a los rasgos globales del gráfico y destacan las dificultades con la abstracción del mundo gráfico, ya que conlleva una cantidad considerable de convenios y notaciones. Desde el punto de vista de la enseñanza de las funciones, los autores consideran que el problema central es la conexión del punto de vista informal, intuitivo y cualitativo de ver el concepto, con otro punto de vista más explícito y formal, y con el uso de un sistema de notación riguroso. Cobo (1995) no se centra en la representación gráfica de las funciones, pero es favorable a desarrollar procesos de visualización, a través del uso de gráficos, para ayudar a la comprensión de enunciados y motivar la resolución de problemas. Esta idea

proporciona un sentido favorable al hecho de orientar el aprendizaje de los conceptos a partir de su representación gráfica, por tanto, a utilizar la técnica perceptiva de la visualización como medio para iniciar el aprendizaje de los conceptos. Deulofeu (1995) considera que el lenguaje gráfico tiene valor como instrumento de comunicación de la información y valor como objeto propio del conocimiento. El lenguaje gráfico es objeto de conocimiento porque es una representación del concepto de función y de otros conceptos relacionados con éste, como variable, dependencia, continuidad, linealidad... Así, un correcto conocimiento del lenguaje gráfico puede propiciar ciertas intuiciones sobre dichos conceptos. Esta idea del autor confirma la idoneidad del uso de la representación gráfica para iniciar el aprendizaje de las propiedades de las funciones, porque el hecho de que pueda propiciar ciertas intuiciones sobre estos conceptos facilita orientar el aprendizaje relacionando los símbolos nuevos con el conocimiento de los alumnos, con los símbolos que ya conoce y con su experiencia. Por otra parte, el autor también observa, en el caso de gráficas contextualizadas, la tendencia a discretizar la situación a través de puntos relevantes y restringir la dependencia entre las variables a las coordenadas de estos puntos. Azcárate (1995 y 1997) comenta algunos modelos y teorías que describen la naturaleza del conocimiento de los estudiantes y los procesos de construcción del mismo. En concreto, se centra en los procesos cognitivos de representación, abordando los conceptos de esquema conceptual, obstáculo cognitivo y definiciones conceptuales. Este estudio lleva a la autora a destacar la importancia de que los profesores conozcan las características del conocimiento de sus alumnos, creando situaciones que pongan de manifiesto el significado que ellos dan a los conceptos matemáticos para poder crear las condiciones necesarias que faciliten una revisión y reconstrucción de sus ideas. La autora también indica que no sirve de nada introducir un concepto matemático nuevo mediante una definición si el alumno no ha construido previamente y mediante su propia experiencia algunos elementos de un esquema conceptual, y propone que la definición llegue a formar parte de este esquema conceptual. La autora también observa que en el proceso de enseñanza-aprendizaje se utilizan los lenguajes verbal, gráfico, simbólico y gestual, que se deben cuidar, pues, se viene observando, que las dificultades del lenguaje que tienen los estudiantes repercuten negativamente en el aprendizaje de las matemáticas. Como propone la autora, creemos que hay que orientar un aprendizaje a partir del conocimiento de los alumnos y proponer un proceso de enseñanza que permita la adquisición de los conceptos por la construcción de un esquema conceptual, caracterizado, según la autora, por las imágenes

mentales, propiedades, procedimientos, experiencias asociadas al concepto, y evitar que el aprendizaje de los conceptos se limite a su definición, muchas veces memorística. Knuth (2000) señala la importancia del conocimiento de las diversas representaciones de las funciones por su influencia en el desarrollo matemático del alumno, y hace notar la falta de investigaciones que analicen la relación que existe entre estas representaciones. La investigación que hace el autor le permite indicar que las dificultades de los alumnos para crear las relaciones entre sus representaciones internas pueden ser debidas a la influencia del uso inadecuado que se hace en la docencia de las representaciones externas. Nosotros creemos que la misma docencia debe reflejar la relación coordinada entre las representaciones de los conceptos para facilitar su aprendizaje significativo, es decir, facilitar alcanzar la coordinación espontánea entre al menos dos de sus representaciones, (Duval 1993). Creemos que, en general, la docencia no siempre progresa manifestando la relación entre los símbolos matemáticos y esto puede dificultar la formación de las imágenes mentales de los conceptos matemáticos. Por otra parte, en nuestro caso, el concepto de función y sus diversas representaciones son un medio para el aprendizaje de sus propiedades como objetos matemáticos abstractos. Bloch (2003) considera que, inicialmente, la mejor representación para acercarse al concepto de función y sus propiedades es la representación gráfica, y valora la función semiótica del lenguaje gráfico (lo mismo que Sanz-Lerma, 2004) y su contribución al fundamento de otros aprendizajes, como la comprensión de enunciados y la demostración de teoremas. Por otra parte, la autora coincide con Schwarz y Dreyfus (1995), según los cuales, aprender se reduce a representar un mismo objeto en diferentes sistemas de representación y pasar de uno a otro, y con Duval (1993, 1996), que considera la interacción entre las diferentes representaciones de los objetos matemáticos para aprender el concepto. En suma, se vuelve a poner de manifiesto la importancia del aprendizaje de los conceptos a través de sus diversas representaciones y la importancia del lenguaje gráfico como vehículo de aprendizaje. Bagni (2004) atribuye a la visualización una importancia capital para el aprendizaje del concepto de función, aunque cree que no se puede hablar de un solo registro representativo en términos absolutos, pues se pueden formar obstáculos causados por la identificación de una función y su gráfica cartesiana. El autor sigue las ideas de Duval e indica que es imposible aprender las nociones matemáticas sin recurrir a las representaciones, todas importantes y didácticamente necesarias. La investigación de Dolores (2004) podría ser el antecedente más inmediato a la nuestra. El autor considera que la interpretación de las

gráficas de funciones es una habilidad básica para el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, y que requiere de procesos de visualización. Su investigación estudia las concepciones alternativas de los alumnos en el análisis global de la gráfica de una función (propiedades de signo y monotonía) y la coordinación de este comportamiento global con la ubicación de la gráfica (signo de las coordenadas). Por una parte, el autor observa que hay una falta de coordinación de lo que ocurre gráficamente con las dos variables a la vez, lo que indica que no se tiene adquirido el carácter covariacional del concepto de función, y, por otra parte, se observan confusiones entre el comportamiento de la función y la ubicación de su gráfica, privilegiando la ubicación de los puntos de la gráfica sobre su comportamiento variacional, lo puntual sobre lo global. Esta investigación sólo utiliza las representaciones gráfica y numérica de las propiedades y no analiza el paso de una representación a otra. Sin embargo, nos orienta sobre algunas dificultades de aprendizaje que podemos observar en el proceso de enseñanza-aprendizaje de los conceptos, que evidencia la necesidad de que la docencia explicita las relaciones entre las representaciones de los conceptos. Dolores y Cuevas (2007) presentan una investigación de carácter cualitativo sobre la interpretación de gráficas socialmente compartidas. Consideran que la interpretación de gráficas requiere de procesos agudos de visualización, y que las dificultades en la interpretación de la información gráfica de una función son debidas al escaso desarrollo del pensamiento covariacional. Los autores advierten que la mayoría de los alumnos identifica las variables concretas de las gráficas pero no dan sentido a la variable abstracta, y que la tendencia de los alumnos es la de leer dato por dato o punto por punto y a no usar términos matemáticos. Nuestra investigación sólo va a utilizar gráficas de funciones no contextualizadas como medio para el aprendizaje de los conceptos, sin embargo, la observación de los autores sobre la tendencia a discretizar y a no usar términos matemáticos en el caso de gráficas de variable abstracta, motiva nuestra investigación.

Reflexión sobre los antecedentes

La observación conjunta de las ideas anteriores permite apreciar ciertas líneas de pensamiento común en diferentes autores, aunque cada investigación las hace propias de su autor. A continuación, exponemos estas líneas de pensamiento común, pues posteriormente han influido en el carácter del diseño del proceso de enseñanza de los conceptos basado en el marco teórico ELOS (Socas, 2007).

Diversos autores son favorables a desarrollar procesos de visualización para alcanzar diferentes objetivos dentro del proceso de aprendizaje de las matemáticas, (Cobo (1995), Bagni (2004), Dolores (2004), Dolores y Cuevas (2007)). Este enfoque también lo manifiestan otros autores cuando consideran la representación gráfica de los conceptos relacionados con las funciones y sus gráficas como la más adecuada para iniciar su aprendizaje, (Deulofeu (1995), Bloch (2003)). Estas ideas hacen adecuado el hecho de orientar el proceso de enseñanza-aprendizaje de las propiedades globales de las funciones a través de su representación gráfica, y mediante la técnica perceptiva de la visualización.

Completando la idea anterior, un grupo de autores señala la importancia del uso de las diferentes representaciones de los conceptos para su aprendizaje y la relevancia de conocer las relaciones entre las mismas, (Azcárate (1997), Knuth (2000), Bloch (2003), (que se hace eco de las ideas de Schwarz y Dreyfus (1995) y Duval (1993, 1996)) y Bagni (2004)).

También se manifiesta la importancia de que el aprendizaje de los conceptos parta del conocimiento de los alumnos (Azcárate (1995)) o de sus intuiciones (Deulofeu (1995)). Esto permitirá desarrollar una docencia que relacione los símbolos nuevos con los ya conocidos y con su experiencia, y, donde la definición de los conceptos llegue a formar parte de su esquema conceptual, elaborado previamente a través de otras experiencias relacionadas con los conceptos, aunque puedan ser dispares, como indican Leinhardt, Zaslavsky y Stein (1990).

Hay autores que expresan la importancia de la función semiótica del lenguaje gráfico (Bloch (2003), Sanz-Lerma (2004)), y destacan la contribución de este lenguaje al fundamento de otros aprendizajes y desarrollo del conocimiento matemático, (Bloch (2003), Dolores (2004)).

Varias investigaciones ponen de relieve algunas dificultades de aprendizaje que podemos llegar a observar en el proceso de enseñanza-aprendizaje de estos conceptos. Destacamos la falta de coordinación de lo que ocurre gráficamente con las dos variables de la función, debida al escaso desarrollo del pensamiento covariacional, (Dolores (2004), Dolores y Cuevas (2007)), y, la tendencia a centrar la atención en ciertos puntos de la gráfica frente a los rasgos globales del gráfico, es decir, a discretizar la información, (Leinhardt, Zaslavsky y Stein (1990), Deulofeu (1995), Dolores y Cuevas (2007)).

Marco teórico

Las aportaciones de Castro y Castro (1997), Socas M. (1997) y Socas M. (2007), por un parte, permiten establecer un marco teórico de integración y, por otra, han permitido modelar el diseño de un proceso de enseñanza de los conceptos, que parte de su representación gráfica y se estructura a través de los estadios de desarrollo cognitivo de los sistemas de representación de los conceptos, semiótico, estructural y autónomo. En lo que sigue, presentamos una síntesis de las aportaciones de estos autores e indicamos cómo las hemos utilizado en nuestra investigación.

Castro y Castro (1997) ponen de relieve el valor de las representaciones externas para el aprendizaje de los conceptos y procedimientos matemáticos, por su influencia en la formación de imágenes y objetos mentales (representaciones internas). Este hecho les lleva a observar la importancia de los procesos de visualización en el aprendizaje y comprensión del conocimiento matemático. Los autores consideran el proceso de visualización como una capacidad para interpretar información representativa del concepto, que le permita al alumno generar una representación interna del mismo y expresarla sobre un soporte material, por tanto, producir una representación externa. Éstos, y otros autores referidos antes, destacan el valor de esta técnica perceptiva en el caso de la representación gráfica de los conceptos, porque contribuye al aumento de la intuición y el entendimiento, y complementa a los procedimientos analíticos en el aprendizaje y comprensión del conocimiento matemático. Asimismo, indican que los conceptos matemáticos, generalmente, vienen expresados mediante varios sistemas de representación, donde cada uno proporciona una caracterización diferente de dicho concepto, que destaca alguna propiedad del mismo, aunque pueda dificultar la comprensión de otras propiedades. El tipo de representación externa que prevalece en el aprendizaje de un concepto determina el tipo de representación interna del mismo. A su vez, la representación externa que se utilice de un concepto muestra el tipo de información que se posee del mismo. Dominar un concepto matemático consiste en conocer sus principales representaciones, el significado de cada una de ellas, operar con las reglas internas de cada sistema, traducir entre los sistemas de representación y conocer qué sistema es más ventajoso para trabajar con determinadas propiedades. Por otra parte, hay que tener en cuenta que las representaciones de los conceptos no son los propios conceptos, aunque el conocimiento de estos se produce a través de sus representaciones y, por tanto, en la docencia, hay que

establecer las conexiones entre los símbolos de las representaciones y el significado asociado del referente.

El proceso educativo que se sigue en la investigación utiliza la representación gráfica como medio para generar la visualización inicial de los conceptos, porque, en principio, creemos que favorece su intuición, su interpretación y su comprensión. A continuación, siguiendo con el desarrollo cognitivo de los conceptos que caracteriza el marco teórico ELOS, se alcanzan las representaciones numérica y algebraica, con lo que se enriquece el esquema conceptual (Tall y Vinner (1981)) que los alumnos tienen asociado al concepto. En definitiva, el dominio de los diversos sistemas de representación de los conceptos y el conocimiento de las relaciones entre los mismos facilitará que los alumnos alcancen el significado del objeto matemático.

Socas (1997), con el propósito de motivar una enseñanza que permita un mejor aprendizaje de las matemáticas, presenta un estudio en el que caracteriza las dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en Educación Secundaria, tomando como referente de contenido matemático al lenguaje algebraico. El autor hace una clasificación de las dificultades de aprendizaje, pero, nuestro interés se centra en las dificultades de aprendizaje de las matemáticas que aparecen asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos, dificultades que, para Socas, por una parte, son debidas a los conflictos y confusiones que aparecen cuando se utiliza el lenguaje habitual para favorecer la interpretación de los *signos matemáticos*, es decir, por el uso conjunto de ambos lenguajes, y, por otra parte, aparecen en el proceso de abstracción de los sistemas de representación de los conceptos matemáticos, en el que el autor distingue y caracteriza tres estadios de desarrollo:

Semiótico: Los signos nuevos adquieren significado, se definen, a partir de los antiguos ya conocidos. El sistema nuevo de signos es caracterizado por el sistema antiguo.

Estructural: El sistema nuevo se estructura según la organización del antiguo, es decir se mantienen las propiedades del sistema antiguo. Pueden aparecer dificultades cognitivas para dar sentido a determinados objetos o nuevas propiedades y, para explicarlas y dotarlas de significado, se recurre a la observación de regularidades y patrones.

Autónomo: Los signos actúan con significado propio, con independencia del sistema anterior. El sistema nuevo adquiere significado en sí mismo, pero es una fuente de dificultades, al encontrarnos con elementos que no pueden ser conocidos en términos del sistema de signos

antiguo. En estos casos, se recurre a la generalización, proceso característico de las matemáticas.

El autor indica que los errores pueden tener origen en un obstáculo, en la ausencia de significado, (motivada por la complejidad de los objetos y los procesos de pensamiento matemático), u origen en actitudes afectivas y emocionales. Socas considera importante conocer los errores conceptuales de los alumnos que dificultarán el aprendizaje subsiguiente, para organizar estrategias de enseñanza que faciliten el aprendizaje de las matemáticas, insistiendo en los aspectos que generan más dificultades y en la corrección de los errores. Pueden ser estrategias de prevención, dirigidas a minimizar las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas reflejadas a través de los errores comentados; o estrategias de remedio, que vienen determinadas por un diagnóstico inicial del error y en las que se facilitan actividades que provoquen conflictos con la estructura cognitiva errónea, con el fin de que el alumno la modifique y la sustituya por la correcta.

En un trabajo posterior, Socas (2007) amplía este marco desde la perspectiva del Enfoque Lógico Semiótico (ELOS), y lo define a través de la elaboración de modelos de competencia teóricos y prácticos (Formal y Cognitivo), con el fin de analizar y entender situaciones problemáticas del Microsistema Educativo. El modelo de competencia formal se establece a partir de los aspectos funcionales, fenomenológicos y conceptuales del lenguaje algebraico, y, el modelo de competencia cognitivo permite describir la comprensión que el alumno tiene de un objeto matemático desde el punto de vista de las relaciones entre los elementos de este modelo, (sistemas de representación semióticos, estadios de desarrollo del objeto y dificultades y errores). En este trabajo, el autor caracteriza los estadios utilizando acciones de aprendizaje (reconocimientos, transformaciones, conversiones y coordinaciones) que describen el proceso de adquisición del concepto a través de sus representaciones, y, teniendo presente el modelo de coordinación de registros de Duval (1993), fundamenta el aprendizaje significativo de los conceptos en la coordinación, libre de contradicciones, entre las diferentes representaciones de los conceptos.

El marco teórico ELOS (Socas, 2007) constituye nuestra referencia teórica más directa para el desarrollo experimental de toda la investigación. Pretendemos que mejore el aprendizaje de las propiedades globales de las funciones, por tanto, primero, debemos conocer cómo se produce este aprendizaje, es decir, observar los errores que manifiestan los alumnos e

interpretarles en función de dificultades de aprendizaje concretas que se producen en el proceso de abstracción que tiene lugar en la adquisición de los conceptos a través de sus representaciones. A continuación, utilizando la caracterización de los estadios de aprendizaje que ofrece el marco teórico ELOS, diseñamos un proceso de enseñanza estructurado por dichos estadios, que tiene en cuenta las dificultades de aprendizaje que se han observado, y en el que unas acciones sobre las representaciones del concepto concretan de aprendizaje que se alcanza en cada estadio de desarrollo y explicitan las relaciones entre los símbolos nuevos y con el conocimiento del alumno. En definitiva, en esta investigación, el marco teórico gobierna la docencia que permite la adquisición del sistema nuevo de símbolos a partir del sistema antiguo de los alumnos. Por tanto, se observa como fundamental fijar el punto de partida del conocimiento de los alumnos, es decir, su sistema antiguo.

Marco metodológico

En nuestro caso, se trata de investigar un problema educativo relacionado con la praxis y comprender y describir un proceso de enseñanza-aprendizaje estudiando los aspectos cualitativos de este proceso, por medio de instrucciones, cuestionarios y entrevistas, adaptándonos a las limitaciones materiales y humanas que tengamos en cada momento, aunque también haremos algunos cálculos estadísticos puntuales.

Entre las metodologías propias del modelo cualitativo utilizaremos la *investigación-acción*, porque entendemos que es la que mejor se ajusta a las características del trabajo que pretendemos llevar a cabo. Se sigue las pautas descritas por Kemmis y McTaggart (1988), Hopkins (1997) y Elliot (1990) y, como viene siendo habitual en trabajos de tesis desarrollados en el Área de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valladolid (Blázquez, 1999; Ibañez, 2001; García, 2008), se completan tres ciclos, siguiendo en cada uno las cuatro fases de investigación (planificación, acción, análisis y reflexión). El primero de ellos se planificó teniendo en cuenta el sistema antiguo teórico de símbolos, el segundo ciclo partiendo del sistema antiguo real de símbolos y, en el tercer ciclo, además, se consideró una docencia estructurada según los estadios de desarrollo cognitivo de los sistemas de representación que define el marco teórico ELOS.

Pérez (1994) establece una serie de rasgos que caracterizan la investigación-acción y enuncia una serie de requisitos para que el trabajo esté dentro de este marco metodológico, requisitos que se cumplen en nuestra investigación:

- El proyecto surge de problemas y preocupaciones educativas de carácter práctico que los educadores sienten como propios.
- El proyecto implica a todos los responsables del mismo, formando un equipo preocupado por las cuestiones prácticas vinculadas con la acción que se desea mejorar.
- Se evitan las siguientes formas de actuación: depender exclusivamente de pruebas, dirigirse estrictamente a la determinación del logro, ignorar las perspectivas de otros profesores, servir a quienes toman las decisiones, o romper el ciclo de acción y reflexión necesario, (se han considerado entrevistas, grabaciones, producciones escritas de los alumnos (cuaderno, cuestionarios), informes de Departamento, documentos internos, textos de los alumnos, observaciones externas).
- El equipo investigador ha mantenido la redacción de un diario del proyecto en el que se registran las reflexiones críticas relativas al tema a investigar y orientaciones para la planificación de los ciclos.
- Que el grupo siga una espiral de ciclos de acción-reflexión (se han seguido tres ciclos de planificación, acción, análisis y reflexión).
- Partir de abajo a arriba; integrar docencia, praxis e investigación; relacionar la investigación documental y la formación investigadora; y aplicar los resultados a la práctica educativa.

Sistema de símbolos antiguo teórico asociado a las propiedades globales de las funciones

Como punto de partida del desarrollo experimental de la investigación, y con objeto de fijar una primera referencia para la planificación de la docencia, se hace necesario que el equipo investigador conozca los contenidos del sistema antiguo teórico, que son aquellos contenidos relativos a las propiedades globales de las funciones que debería conocer el alumno al finalizar el primer ciclo de ESO según el currículo oficial y el libro de texto, en este caso de la editorial ANAYA. A continuación, se relacionan los contenidos que componen este sistema

de símbolos y se hace un breve comentario sobre el tratamiento que el libro de texto hace de los mismos:

1. *Sistema de referencia: ejes cartesianos y coordenadas de un punto.*

Se introduce el sistema de referencia cartesiano indicando los elementos más característicos (ejes, origen, escala) y las coordenadas de un punto del plano.

2. *Lectura e interpretación de información transmitida de forma gráfica:*

Prácticamente, sólo se interpretan gráficas de funciones contextualizadas.

3. *El concepto de función como dependencia entre variables.*

Se introduce el concepto de función a través de una gráfica contextualizada como relación de dependencia entre dos magnitudes concretas. Se introduce el concepto de variable independiente y dependiente y se ejemplifica utilizando ejemplos concretos.

4. *Sistemas de representación de funciones y traducción entre los sistemas de representación: verbal, tabular, gráfico y algebraico.*

Se introducen las distintas formas de representación de las funciones, con distinto tipo de profundización en cada una de ellas y, algunas de las traducciones entre las mismas:

	1. Verbal	2. Tabular	3. Gráfica	4. Algebraica
1. Verbal			X	X (sólo afines)
2. Tabular			X	X
3. Gráfica	X			X (sólo afines)
4. Algebraica		X	X	

Tabla 1. Traducciones entre sistemas de representación en Anaya. (columna-fila).

5. *Estudio global de la monotonía de la gráfica de una función.*

Se introduce el concepto de monotonía de una función de forma intuitiva y verbal, interpretando la gráfica de una función contextualizada. No se utiliza la noción de intervalos de números reales en sentido explícito, aunque sí se expresan de forma verbal, utilizando vocabulario relacionado con la variable representada.

6. *Estudio de la función afín:*

Utiliza los sistemas de representación numérico, gráfico y algebraico, siguiendo este orden.

7. Interpretación y obtención de la pendiente de una función afín.

Se introduce el concepto de pendiente como factor de proporcionalidad, como parámetro en la ecuación y como inclinación de la gráfica. Se relaciona la pendiente con el crecimiento o decrecimiento de la función y con la noción de rectas paralelas.

En resumen, en el primer ciclo de ESO, se inicia el estudio del concepto de función y sus distintas representaciones, y se orienta el aprendizaje de los contenidos hacia la interpretación de las gráficas de funciones dentro de un contexto de la vida real. También se describen situaciones muy sencillas modelizadas por funciones afines, utilizando los cuatro registros (gráfico, tabular, verbal y algebraico).

Durante el desarrollo de la docencia que tiene como punto de partida el sistema de símbolos antiguo teórico, las intervenciones erróneas de los alumnos o la falta de las mismas permitieron observar a la profesora que los alumnos no tenían bien adquiridos los contenidos de este sistema de símbolos, aunque no se hubiese hecho su valoración explícita. Esta realidad hizo que la profesora tuviese que dedicar mucho tiempo a la introducción de los mismos, como el conocimiento de los elementos básicos del sistema de referencia cartesiano o la notación de intervalos. Tras la docencia de los símbolos nuevos, la profesora investigadora era consciente de que no se había producido un buen aprendizaje, pues los alumnos no tenían bien adquiridos los conocimientos básicos sobre los que sustentar su aprendizaje, es decir, el sistema antiguo de símbolos que se les suponía no era real y, en consecuencia, el aprendizaje de los símbolos nuevos no partió del conocimiento de los alumnos, por tanto, no se llevó a cabo un adecuado proceso de enseñanza-aprendizaje de los contenidos. El hecho de que los alumnos no dominen el sistema antiguo teórico es fundamental para planificar la docencia de los ciclos siguientes, haciéndose necesario valorar el sistema antiguo real de los alumnos que permita fijar un punto de partida del aprendizaje de los símbolos nuevos.

Sistema de símbolos antiguo real asociado a las propiedades globales de las funciones

Vista las deficiencias anteriores, se hacía necesario determinar con precisión el sistema antiguo real del grupo de alumnos donde se desarrolla la docencia de los símbolos nuevos, con el fin de fijar un punto de partida del aprendizaje y fundamentar la docencia de los símbolos nuevos en el conocimiento de los alumnos. Para definir este sistema de símbolos se contaron con varias fuentes de información: las actas del Departamento de matemáticas, el

Profesor del primer ciclo de ESO y un cuestionario que se implementó a los alumnos para tal fin.

La información que procede del Departamento es muy pobre, se limita a indicar si se ha desarrollado la Unidad Didáctica correspondiente a los contenidos que tratamos en los dos cursos que configuran el primer ciclo de ESO. En concreto, se dice lo siguiente:

- En 1º ESO no se ha desarrollado la unidad “Funciones: puntos y gráficas”.
- En 2º ESO sí se ha impartido la unidad “Funciones”, según el desarrollo que presenta el libro que utilizan los alumnos.

La información del Profesor que tuvo a su cargo la docencia de los grupos de alumnos con los que se va a experimentar, permite recabar más información sobre el sistema de símbolos antiguo que los alumnos debieran tener, aquellos que fueron enseñados y aprendidos. La relación de contenidos impartidos fueron los siguientes:

- Sistema de referencia: Ejes cartesianos y coordenadas de un punto.
- Representación algebraica, tabular y gráfica de la función afín (pero no lineal ni constante), con las traducciones de algebraica a tabular y de tabular a gráfica.

Esta información, obtenida mediante un cuestionario y una entrevista, muestra que la mayor parte de los contenidos del sistema antiguo teórico no se han trabajado en el aula, por tanto, el sistema de símbolos antiguo real de los alumnos es bastante más reducido que el sistema antiguo teórico presentado en el apartado anterior. De la información que transmite el profesor también se desprende que la docencia llevada a cabo es fundamentalmente práctica y que se trabajan los conceptos con predominio de los procedimientos mecánicos en detrimento de la comprensión de mismos. En concreto, la docencia de los contenidos tratados iba dirigida a la obtención de la representación gráfica de funciones afines a partir de su representación algebraica, con el fin de utilizar este procedimiento para encontrar la solución gráfica de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, es decir, el fin estaba más relacionado con el álgebra que con el análisis, y las propiedades de las funciones ni se tocaron.

La información que transmiten los alumnos a través de un cuestionario corrobora parte de la información proveniente del profesor, pero no coincide totalmente con ella, hay contenidos que se han adquirido de manera no formal:

- Representación e identificación de puntos en el plano de coordenadas enteras.
- Interpretación de gráficas de funciones que describen una situación de la vida real.
- Interpretación de la monotonía de la gráfica de una función.
- Identificación de una función en su representación tabular.

Se observa que no hay una total correspondencia entre la información obtenida por las distintas fuentes para la valoración del sistema antiguo del grupo de alumnos. Contrastando las tres fuentes, el sistema antiguo real del grupo de alumnos estaría definido por los contenidos que se describen a continuación:

a) Contenidos presentados por el profesor en cursos anteriores:

- Sistema de referencia: Ejes cartesianos y coordenadas de un punto.
- Representación gráfica de la función afín a partir de la expresión algebraica.

b) Contenidos adquiridos de manera no formal:

- Lectura e interpretación de gráficas funcionales contextualizadas.
- Estudio global de la monotonía de una función a partir de su gráfica.

Según reflejan datos de la investigación, no presentados aquí, no deja de ser paradójico que los alumnos hayan aprendido mejor los conceptos de forma autónoma que aquellos que han sido presentados por el profesor y trabajados en el aula. Quizás los contenidos que creemos no formales han sido presentados en otras áreas, como Ciencias o Geografía..., hecho que, de ser cierto, corroboraría el pensamiento de Stevens (1999) y Hoyles et al. (2001), quienes consideran que las aplicaciones matemáticas pueden considerarse como parte de otras disciplinas y proponen que sean enseñados desde las perspectivas de esas ciencias. Por otra parte, aunque el aprendizaje de los contenidos transmitidos por el profesor no haya sido bueno, no se puede afirmar de forma tajante que no formen parte del sistema antiguo. Pudiera ser que, debido a un mal aprendizaje, los alumnos hayan adquirido símbolos de forma inconexa y sin significado, lo que impide que se manifiesten estos conocimientos. Sin embargo, en la práctica educativa, cuando en el proceso helicoidal de enseñanza se retoman los contenidos que les fueron transmitidos en cursos anteriores, los alumnos los aprenden con mayor rapidez y seguridad que si les fuesen presentados por primera vez, es decir, la

evocación de símbolos del sistema antiguo en el proceso de enseñanza afianza las bases sobre las que se sustentan los símbolos del sistema nuevo.

Reflexión final

Los datos experimentales muestran que cada alumno posee un sistema antiguo particular que no tiene por qué coincidir con el de sus compañeros ni, como se ha visto, con el sistema antiguo teórico. Pero, debido a que la docencia que se va a desarrollar en el aula es grupal, es necesario fijar un punto de partida común del aprendizaje de los símbolos nuevos, es decir, definir un sistema antiguo real del grupo de alumnos. Para ello, la información particular que aporta cada alumno a través del cuestionario, se utiliza para obtener índices porcentuales con los que se caracteriza al grupo de alumnos. Para paliar las diferencias entre los alumnos, el diseño de enseñanza planteará una docencia que recuerde el significado de los símbolos del sistema antiguo que se ha visto que pertenecen a la cultura de la mayoría de los alumnos del grupo en estudio, procurando corregir errores de aprendizaje que se pudiesen haber producido. A continuación, se introducirán los símbolos nuevos fundamentados en los antiguos y se practicará una docencia orientada por el sistema nuevo de símbolos.

El marco teórico considerado obliga a fijar el sistema de símbolos que poseen los alumnos para desarrollar la docencia de los símbolos nuevos. Por una parte, se introducen los símbolos nuevos a partir del significado de los símbolos antiguos y, por otra parte, se propone un diseño de enseñanza fundamentado en las relaciones entre los símbolos. La determinación del sistema de símbolos antiguo no es una tarea sencilla y no basta con realizar un análisis minucioso del manual escolar que se ha utilizado como libro de texto en cursos anteriores. En esta investigación, su determinación surge de la información que se obtiene de diversas fuentes, el departamento, del profesor y de los propios alumnos, y se ha observado que el sistema antiguo real del grupo de alumnos es mucho más reducido que el sistema teórico obtenido de un análisis curricular.

Finalmente, los resultados obtenidos en la investigación recomiendan que se determine con precisión el sistema de símbolos antiguo real de los alumnos, porque este hecho mejora sustancialmente el proceso de enseñanza-aprendizaje de los contenidos tratados.

Referencias bibliográficas

Azcárate, C. (1995): Sistemas de representación. *UNO Revista de Didáctica de las Matemáticas*, N° 4, 13-20.

Azcárate, C. (1997): Si el eje de ordenadas es vertical, ¿qué podemos decir de las alturas de un triángulo? *SUMA*, N° 25, 23-30.

Bagni, G. T. (2004): Una experiencia didáctica sobre funciones en la escuela secundaria. *RELIME Revista Latinoamericana de Investigación en matemática Educativa*, Vol. 7, N° 1, pp. 5-23.

Blázquez, S. (1999): *Noción de Límite en Matemáticas Aplicadas a Ciencias Sociales* Tesis Doctoral. Universidad de Valladolid, Valladolid.

Bloch, I. (2003): Teaching functions in a graphic milieu: what forms of knowledge enable students to conjecture and prove? *Educational studies in mathematics*, Vol. 52, N° 1, 3-28

Castro, E. y Castro, E. (1997): Representaciones y Modelización. En *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. ICE de la Universidad Autónoma de Barcelona y Horsori. Barcelona, pp.95-124.

Cobo, P. (1995): Efectos de la utilización de gráficos en la traducción algebraica de problemas verbales. Estudio del caso de problemas verbales que combinan estructura semántica de cambio y de comparación. *UNO Revista de Didáctica de las matemáticas*, N° 4.

Deulofeu, J. (1995): Concepciones de los alumnos de secundaria sobre distintas gráficas de funciones. *UNO Revista de Didáctica de las matemáticas*, N° 4, 6-16.

Dolores, C. (2004): Acerca del análisis de funciones a través de sus gráficas: concepciones alternativas de estudiantes de bachillerato. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, Vol. 7, N° 3, pp.195-218.

Duval, R. (1993): *Sémiosis et Noésis*. Conférence A.P.M.E.P.I.R.E.M.

Duval, R. (1998): Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp. 173.201). México: Departameot de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN-Grupo Editorial Iberoamericana.

- Dolores, C.; Cuevas, I. (2007): Lectura e interpretación de gráficas socialmente compartidas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, Vol. 10, Nº 1, pp.69-96.
- Elliot, J. (1990): *La investigación-acción en Educación*. Madrid. Morata.
- García, A (2008). *Educación matemática atendiendo a la diversidad. Análisis de una metodología específica*. Tesis doctoral. Universidad de Valladolid.
- Hopkins, D. (1989): *Investigación en el aula*. Barcelona. PPU.
- Hoyles, C. et al. (2001). Proportional reasoning in nursing practice. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32 (1), 4-27
- Ibañez, M. (2001): *Aspectos cognitivos del aprendizaje de la demostración matemática en alumnos de primer curso de Bachillerato*. Tesis doctoral. U. Valladolid.
- Kemmis y McTaggart (1988): *Cómo planificar la investigación-acción*. Barcelona. Ed. Alertes.
- Knuth, E. (2000): Student understanding of the cartesian connection: an exploratory study. *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 31, Nº 4, 500-508.
- Leinhardt, G.; Zaslavsky, O.; Stein, M.K. (1990): Functions, graphs, and graphing: tasks, learning, and teaching. *Review of Educational Research*, Vol.60, Nº 1, 1-64.
- Pérez, G. (1994): *Investigación cualitativa. Retos e interrogantes*. Madrid. La Muralla.
- Sanz-Lerma, I. (2004): Expresiones gráficas del lenguaje matemático. *UNO Revista de Didáctica de las matemáticas*, Nº 35, 9-22.
- Socas, M. (1997): Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria. En *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. ICE de la Universidad Autónoma de Barcelona y Horsori. Barcelona, (pp. 125-154)
- Socas, M. (2007): Dificultades y errores en el aprendizaje del las matemáticas. Análisis desde el Enfoque Lógico Semiótico. En *Investigación en Educación Matemática XI*, pp.19.52.
- Stevens, R (1999). Disciplined perception: Comparing the development of embodied mathematical practise in school and work. Unpublished doctoral dissertation, University of California, Berkeley.

Tall, D. y Vinner, S. (1981): Concept image and concept definition in Mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Math.*, vol 12, 151-169.