

EQUIPROBABILIDAD VERSUS NO EQUIPROBABILIDAD EN LA ENSEÑANZA DE LA PROBABILIDAD

Luis Serrano Romero

Juan Jesús Ortiz de Haro

Universidad de Granada. España

Resumen

En este trabajo estudiamos la opción de afrontar la enseñanza-aprendizaje de la probabilidad desde percepciones equiprobables y no equiprobables, optando con ello por introducir al alumno en el mundo de la aleatoriedad desde diversas concepciones de la probabilidad, sin olvidar la concepción subjetiva. Se comparan las respuesta que alumnos de secundaria dan en estas dos situaciones aleatorias, a fin de detectar diferencias apreciables en sus juicios estocásticos.

Palabras Clave: Enseñanza de la probabilidad, simulación.

Abstract

In this work we observe the teaching - learning of probability from equally likely and not likely, this opting to introduce students to the world of randomness from various conceptions of probability, not forgetting the subjective. Comparing the response to high school students in these two situations random, in order to detect significant differences in their judgments stochastic.

Key words: Teaching probability, simulation.

Descripción de la muestra de alumnos y del test de entrevista

Esta investigación se pasó a cuarenta y cinco alumnos de tercer curso de Educación secundaria, con una distribución de treinta niños y quince niñas, y con notas medias en matemáticas de bien alto. La fácil disponibilidad de acceso a estos alumnos motivó su elección. Se usó el simulador Box Model disponible como applet en la página Web del NCTM.

El test que se usó consta de tres ítems, uno sobre situaciones no simétricas o no equiprobables y otros dos de simétricas o equiprobables. Iniciamos la investigación proponiendo a los alumnos que simulen un suceso aleatorio en situación de no equiprobabilidad, para ello se les informa de este tipo de situaciones, que se pueden dar por ejemplo cuando en un dado se nota que una tiene más peso que las otras y por lo tanto al lanzar muchas veces el dado esta cara con más peso es la que sale más veces y además se les indicó que estos hechos suceden en la vida cotidiana, aunque raras veces.

Una vez que se les informa de estas situaciones, se pasa a explicar cómo se puede simular estas situaciones con el Box Model y se les propone que contesten al primer ítem que tiene varios apartados: en el primero se les sugiere que usando el simulador hagan diez veces la simulación no equiprobable, con un sesgo del 60 % y anoten los resultados. Con estos resultados han de estimar el resultado de otra posible simulación al aumentar a sesenta el número de simulaciones a realizar. En apartados posteriores se intenta conocer el pensamiento del entrevistado sobre posibles resultados distintos del valor esperado en pequeñas y grandes simulaciones.

En los dos siguientes ítems presentamos situaciones diferentes a las anteriores para estudiar si los alumnos ven características aleatorias en los sucesos propuestos, que realicen simulaciones y que propongan posibles

resultados aleatorios, diferenciando situaciones aleatorias con grandes y con pequeñas pruebas, todas ellas en situación de equiprobabilidad.

Así, en el ítem 2 se deben simular diez lanzamientos con monedas correctas, anotar los resultados y recontar el número de caras y cruces a fin de darles un primer paso para enjuiciar sobre situaciones aleatorias y deterministas, posteriormente se propone que comparen estos recuentos de caras y cruces con los de su compañero y que propongan un posible resultado en un siguiente lanzamiento.

En el ítem 3 se trata de diferenciar los supuestos lanzamientos realizados por el alumno con los resultados de la simulación. Se proponen varias preguntas que les permiten dar unas posibles pautas para analizar esas situaciones aleatorias.

Se han propuesto actividades de simulación aleatoria a fin de familiarizar a los alumnos con el mundo de la realidad a través del dominio pseudo- concreto y que puedan con ello crear su mundo teórico, en el sentido empleado por Countinho (2001)

Estudio de los resultados de la prueba

Lanzamiento de monedas sesgadas

Estas situaciones aleatorias no simétricas han sido generalmente poco tratadas en la enseñanza secundaria y hemos encontrado pocos trabajos al respecto en investigaciones anteriores en estos niveles educativos. Los alumnos a los que se les pasó la entrevista estaban en un periodo cognitivo en el que las operaciones formales deberían estar supuestamente ya iniciadas, por lo que deberían conocer el concepto razón, poseer habilidades de conteo e inicio de habilidades combinatorias. La comprensión de la probabilidad debería estar

iniciada como límite de las frecuencias relativas principalmente en sucesos equiprobables desconociendo el concepto de sesgo y de probabilidades no simétricas.

Por todo ello hubo que explicar a los entrevistados el concepto de sesgo, aclararle cómo podría suceder esto con monedas y la rareza de este hecho con monedas normales en la vida cotidiana.

ITEM 1

1.0.- Simula el lanzamiento de la moneda sesgada con el Box Model (60 % de posibilidades de cara), haces 10 lanzamientos y anota los resultados.

Los resultados de las simulaciones hechas por BM con los 45 sujetos dan unos resultados de 36 sujetos que anotan resultados entre cinco y siete caras, habiendo un sujeto que no ha sabido hacer bien la transcripción de resultados y ocho que transcriben en sus resultados cantidades distintas a los valores teóricos esperados según el sesgo dado.

1.1.- ¿Cuál sería, aproximadamente, el número de caras si la lanzamos 60 veces?

Según esto se pregunta en el siguiente apartado si prevén el posible resultado al hacer la simulación 60 veces, obteniéndose los resultados de la tabla 1, donde se han agrupado los valores entre 35 y 40, de las respuestas cercanas al valor teórico esperado, según el sesgo del 60 por ciento de salir una cara. Con estas respuestas podemos suponer que les parece poco relevante las condiciones dadas en los enunciados anteriores y presente. Podemos creer que la mayoría de los entrevistados presta poca atención a la proporcionalidad del sesgo dado o que no saben establecer una relación entre las pequeñas muestras (10 extracciones) y las grandes (60 extracciones). Quizás utilicen estrategias mentales de pensamiento y resolución que no tengan en cuenta las condiciones enunciadas en el ítem.

	Percepción del sesgo	Posible número de caras	Frecuencias	Porcentaje
Item 1.0	Sesgo $\approx$ 60 %	$5 \leq \text{N}^\circ \text{ Caras} \leq 6$	36	80 %
	Sesgo $\neq$ 60 %	$\text{N}^\circ \text{ Caras} \leq 5$ $6 \leq \text{N}^\circ \text{ Caras}$	9	20 %
Item 1.1	Sesgo $\approx$ 60 %	$35 \leq \text{N}^\circ \text{ Caras} \leq 40$	9	20 %
	Sesgo $\neq$ 60 %	$\text{N}^\circ \text{ Caras} \leq 35$ $40 \leq \text{N}^\circ \text{ Caras}$	36	80 %

Tabla 1.- Comparación de respuestas a ítems 1.0 y 1.1

Observamos la diferencia que percibe la mayoría de los entrevistados entre los posibles resultados en las pequeñas muestras (ítem 1.0) y las grandes muestras (ítem 1.1). En las pequeñas sí que perciben las condiciones de sesgo de la moneda indicada en el enunciado, en contra de lo enunciado en las grandes muestras (ítem 1.1) donde dan respuestas totalmente distintas a lo enunciado en este ítem y despreciando el sesgo que tiene la moneda.

1.2.- Si lanzamos una vez más esta moneda y sale una cruz, ¿qué conclusión obtendrías?

En las respuestas dadas por los alumnos, que mostramos en la tabla 2, hemos agrupado a más de la mitad en el argumento “es posible ese resultado”, argumento este que engloba a respuestas variadas como por ejemplo: está bien simulado aunque salga eso; es normal porque han salido ya muchas caras. Con ello podríamos deducir que hay una gran mayoría que entienden que en estas simulaciones se puede esperar cualquier resultado debido a su variabilidad. A estas respuestas podríamos añadir las dadas en el argumento “a) se debe a la influencia del azar”, lo que agruparía a un total del 75.6 % de sujetos que no extrañan este posible resultado.

Argumento	Frecuencias	Porcentaje
a) Se debe a la influencia del azar	9	20
b) Que han hecho trampa	3	6.7
c) Respuesta absurda	6	13.3
d) Por que hay posibilidad	25	55.6
f) Blanco	2	4.4

Tabla 2 - Argumentos de respuesta al ítem 1.2

1.3.- ¿Y si la lanzamos 10 veces y obtenemos 4 cruces?

Los resultados a esta pregunta los mostramos en la tabla 3, en la que vemos que al comparar los resultados de este ítem con los del anterior vemos ciertas discrepancias, por ejemplo ha aumentado el número de sujetos que atribuyen ese posible resultado a haber hechos trampas, parece que no pueden imaginar que salgan cuatro cruces en diez lanzamientos, con un sesgo en las monedas del 60%. Otro grupo del 24.4% indica que es posible, dado que “están dentro del porcentaje” que se indicó en el enunciado (60% caras y 40% cruces). Si agrupamos éste último con los argumentos “a) se debe al azar” 24.4 % y “d) porque hay posibilidad” vemos que hay un total del 84.3 % que creen la posibilidad de ese resultado posiblemente por la presencia del sesgo en la moneda y hay un grupo significativo que justifican este resultado utilizando comparación de razones y proporciones.

Lanzamiento de monedas correctas

Las situaciones aleatorias simétricas o equiprobables se han usado tradicionalmente para enseñanza de conceptos probabilísticos incluso en los momentos en los que se hacía una enseñanza teórica desde las primeras etapas de su aprendizaje. Los alumnos están más habituados a tratar con este tipo de sucesos, monedas, dados, etc supuestamente equilibrados, y en esta fase no están

familiarizados con las situaciones no equiprobables, aunque como ya se ha dicho antes, estos alumnos ya se encuentran en un periodo psicoevolutivo en el que deben de comenzar a plantearse situaciones no simétricas.

Esta fase del test consta de dos ítems uno sobre pequeñas muestras y otros sobre muestras más grandes, a fin de observar las diferencias entre ambas y las diferencias entre los resultados simulados y los supuestos por los sujetos.

Argumento	Frecuencias	Porcentaje
a) Se debe a la influencia del azar	11	24.5
b) Que han hecho trampa	6	13.3
c) Están dentro del porcentaje	11	24.5
d) Porque hay posibilidad	16	35.5
f) Blanco	1	2.2

Tabla 3.- Argumentos de respuesta al ítem 1.3

ITEM 2

2.1.- Simula ahora con Box Model el lanzamiento al aire diez veces de una moneda correcta y anota el resultado en el gráfico adjunto. Cuenta y escribe debajo el número de caras y cruces obtenidas:

Lanzamiento n°:									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Número de caras:									
Número de cruces:									

2.2.- ¿Puedes predecir el resultado del siguiente lanzamiento?

Puede que el entrevistado piense que puede predecir el resultado, utilizando la heurística de la representatividad y basando su predicción en la

"recencia positiva" o "negativa" (Piaget e Inhelder, 1951) o que puede influenciar el azar, en el sentido descrito en el trabajo de Fischbein et al. (1991).

La argumentación más usual dada por los entrevistados es que no se puede predecir el resultado, lo que hace que un 60 % de los entrevistados señalen como característica de los fenómenos aleatorios la impredecibilidad y la falta de seguridad al predecir el resultado. Algunos, el 6,6 %, argumentan que la experiencia hace que sepan lo que va a salir, respuesta que está en la línea del uso de la heurística de la representatividad. Unos pocos alumnos solo responden si o no sin justificar sus respuestas y un 17,8 % dan respuestas absurdas como muestra de la inseguridad en este tipo de experiencias no deterministas lo que denota su falta de hábito en el tratamiento con experiencias aleatorias.

Argumento	Frecuencias	Porcentaje
Sí/No sin argumentar	5	11.1
No, debido al azar	27	60,0
Sí, por experiencia	3	6,7
Respuesta absurda	8	17,8
En blanco	2	4,4

Tabla 4 Argumentos de respuesta al ítem 2.2

2.3.- Compara tus resultados con los de tu compañero. ¿Has obtenido el mismo número de caras y cruces?

Con el apartado 2.3 queríamos que los alumnos comprobasen la posibilidad de discrepancia o no en las simulaciones obtenidas por el BM. Es bastante posible que en muestras pequeñas como en nuestro caso, extraer solo diez monedas, no hubiese igualdad en el número de caras y cruces, y así sucedió según las respuestas dadas por los alumnos, que indicaron la falta de concordancia en los resultados obtenidos. De cuarenta y cinco, uno no respondió

y del resto cuarenta y uno indicaron que había diferencia en el número de caras y cruces con su compañero.

Igual nº de caras	Frecuencias	Porcentaje
No	41	91.1
Si	3	6.7
Blanco	1	2.2

Tabla 5 Respuesta al ítem 2.3

Estas experiencias, que deben hacerse con bastante asiduidad en la enseñanza en estos niveles, probarán que estos resultados son habituales en pruebas pequeñas y que a la larga se estabilizará, dando más confianza al alumno en el tratamiento del azar a estos niveles educativos.

2.4.- Cuenta y anota el número de caras seguidas que te han salido. ¿Qué opinas de este resultado?

Con este apartado queremos comprobar los juicios sobre las posibles rachas y sus longitudes. En este ítem se han producido los siguientes resultados en los 45 sujetos entrevistados: 30 veces la racha CC, 11 veces la racha CCC, 7 veces la racha CCCC, 4 veces la racha CCCCC y una vez la racha CCCCCC.

Los argumentos dados son los expresados en la tabla 6. Si comparamos los resultados de estos juicios con los obtenidos en el ítem 1.3, con una moneda con sesgo del 60 % y en el que supone que ha habido una racha de cuatro cruces seguidas, observamos que hay cierta similitud en las respuestas dadas en ambos ítems, con ciertas diferencias sobre todo en el argumento “es el porcentaje”, que lo usan más en el ítem de las monedas sesgadas (11 sujetos) que en las equilibradas (2 sujetos), posiblemente influenciados por el porcentaje de sesgo

de la moneda. Pero estos datos resaltan más si se analizan los porcentajes de cada uno de ellos y no se atiende a las frecuencias sobre una muestra relativamente pequeña.

Argumento	Frecuencias	Porcentaje
Se debe al azar	13	29
Hay trampas o fallos de la moneda	7	16
Por la probabilidad	20	44,3
Blanco o absurda	3	6,7
Es el porcentaje	2	4

Tabla 6 Argumentos de respuesta al ítem 2.4

Así podemos ver que, salvo este argumento anteriormente tratado, el resto de argumentos tiene un peso porcentual bastante mayor para las monedas equilibradas que para las sesgadas, como podemos apreciar en la tabla 7.

Argumento	Porcentajes del ítem 1.3	Porcentajes del ítem 2.4
Se debe al azar	24.5	29
Hay trampas o fallos de la moneda	13.3	16
Por la probabilidad	35.5	44.3
Es el porcentaje	24.5	4
Blanco o absurda	2.2	6.7

Tabla 7. Comparación de argumentos de los ítem 1.3 y 2.4

Podríamos indicar que hay más inclinación a aceptar los resultados de la moneda equilibrada que los de la sesgada, fiándose mucho más de los resultados de la primera que los de la que tiene sesgo.

ITEM 3

3.1.- Abajo tienes dos filas de cuadrículas. En la primera de ellas escribe 20 resultados sin realizar realmente el experimento. En la segunda mitad utiliza Box Model y simula el lanzamiento de una moneda correcta 20 veces y escribe los resultados obtenidos. Pon C para cara y X para cruz.

3.2.-¿Piensas que son parecidos los resultados reales (con Box Model) y los inventados por ti?

3.3.- ¿Cómo podríamos comparar las dos secuencias?

Con estas dos primeras cuestiones intentamos que comparen sus resultados con los del BM, vean si hay diferencias y a qué se pueden deber. En principio una gran mayoría (66.7 %) indica que ambos resultados son muy parecidos, frente al 31.1 % que no encuentran parecido entre ambas sucesiones.

Para comparar los resultados obtenidos en ambas sucesiones un reducido grupo (6 sujetos) propone comparar la igualdad de ambas secuencias, viendo una por una la coincidencia de los resultados, por otro lado la mayoría (36 sujetos) se inclina por comparar los resultados contando el número de caras de ambas secuencias para ver si coinciden estos números, intentando con ello justificar su juicio con la simetría de los posibles resultados y la tendencia a la probabilidad teórica, hechos teóricos que los alumnos no conocen aunque parece que intuyen.

	Frecuencia	Porcentaje
Parecidos	30	66.7
No parecidos	14	31.1
Blanco	1	2.2

Tabla 8.- Frecuencias de las respuestas al apartado 3.2

	Frecuencia	Porcentaje
Comparan globalmente	36	80
Comparan una a una	6	13.3
Blanco	3	6.7

Tabla 9.- Frecuencias de las respuestas al apartado 3.3

3.4.- Compara el número de caras de las dos secuencias.

Después de estas dos preguntas se les propone que comparen ambas sucesiones como se hace en el ítem 2.1, contando el número de caras a fin de que tras ellas emitan su juicio. En investigaciones posteriores, con el mismo grupo de alumnos, se sugieren otras opciones de comparación de los resultados para apreciar la mejor la aleatoriedad de la prueba.

Aunque parece sencilla, observamos que tienen cierta dificultad en la realización de estas comparaciones. Hay más sujetos que no responden a estas cuestiones que en los ítems anteriores (hay 4 que la dejan en blanco), pensamos que por no saber cómo hacerlo. Por otro lado en esta comparación del número de caras hay más de la mitad (26 sujetos) que saben hacer la comparación, y una gran mayoría (15 sujetos) que, pese a la facilidad de la pregunta, no logran contestar bien. Puede que no sepan cómo comparar esas caras, si comparar una a una ambas sucesiones o hacerlo globalmente.

	Frecuencia	Porcentaje
Bien comparado	26	57.8
Mal comparado	15	33.3
Blanco	4	8.9

Tabla 10.- Frecuencias de las respuestas en el apartado 3.3

Conclusiones

Tras detectar la necesidad de modificar la metodología de enseñanza – aprendizaje en estocástica elemental, hicimos una propuesta de enseñanza en situaciones de simulación para sucesiones de Bernoulli, observando las concepciones previas, compararlas con las que podían tenerse tras haber trabajado en simulaciones de hechos aleatorios con el simulador y analizar si los

sujetos encontraban diferencias en simulaciones con sucesos equiprobables y no equiprobables.

En principio creímos que los alumnos encontrarían dificultad en el uso del simulador informático, pero no se detectó ninguna, aunque sí vimos dificultades en el léxico probabilística elemental y usual en ese nivel educativo, como se deduce de las dificultades en sus explicaciones o en los razonamientos de sus respuestas. Parece que prefieren tener un modelo de respuesta a tener que emitir un juicio, esto se puede deber a la influencia de la parte determinista de la matemática.

En cuanto a las características de los hechos aleatorios, saben de su existencia, pero existe el criterio casi general de que pueden influir en ellos, alterar los posibles resultados e incluso “manejarlos”, se percibe pues la presencia de la falacia del jugador.

Sobre los resultados con monedas sesgadas, se presentan como monedas que se saben tiene esta característica y no como deducción tras haber hechos un número limitado de lanzamientos.

Pero, independientemente de esta aclaración, no hay evidencia explícita de que sepan diferenciar monedas sesgadas de correctas, existiendo la posibilidad de que solo comprendan la presencia de la equiprobabilidad en sus juicios estocásticos, aunque se observa que se fían mas de los resultados, las propuestas de actividades con monedas normales o equilibradas a los de las monedas sesgadas. Podríamos decir que están más acostumbrados a confiar en la equiprobabilidad o “regularidad” que en otras situaciones.

Por ello podemos decir que debido a la dificultad de que en la simulación salgan resultados que se aproximen a la probabilidad teórica, si no se hacen gran cantidad de simulaciones y comparaciones sobre un mismo contenido en la

enseñanza de la estocástica caeremos en falsas expectativas, confusiones, sesgos y posibles fundamentaciones de falacias futuras.

Todo ello nos da una idea de la dificultad que los alumnos tiene al enfrentarse con este campo de las matemáticas en el que tienen que emitir un juicio no determinista cuando han estado educados desde pequeños a unas matemáticas concisas y con unas reglas y algoritmos precisos.

Agradecimientos: Esta investigación forma parte del Proyecto SEJ2007-60110/EDUC. MEC-FEDER y ha sido cofinanciado por el Plan propio de Investigación de la Universidad de Granada: Programa 20.

Referencias bibliográficas

- Batanero, C. y Serrano, L. (1995). La aleatoriedad, sus significados e implicaciones didácticas. *UNO, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 5, 15-28.
- Countinho, C. (2001). Introduction aus situations aléatoires dès le Collège: de la modélisation á la simulation d'experiences de Bernoulli dans l'environnement informatique Cabri-géomètre-II. Tesis Doctoral. Universidad de Grénoble.
- NCTM (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA; NCTM Disponible en Internet <http://standards.nctm.org/>
- Piaget, J. e Inhelder, B. (1951). La genèse de l'idée de hasard chez l'enfant. París: Presses Universitaires de France.
- Fischbein, E., Nello, M. S. y Marino, M. S. (1991). Factors affecting probabilistic judgements in children and adolescents. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 523 - 549.
- Rodríguez García, J. D. (2006). Simulación como recurso didáctico en la construcción del significado de la aleatoriedad. Memoria de Tercer ciclo. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.
- Serrano, L. (1996) Significados institucionales y personales de objetos matemáticos ligados a la aproximación frecuencial de la enseñanza de la probabilidad. Tesis. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

PRUEBA DIFERENCIAL ENTRE SITUACIONES EQUIPROBABLES Y NO EQUIPROBABLES

ITEM 1

Se supone que la moneda está sesgada, por ejemplo, cuando la cara tiene un 60 por ciento de posibilidades de salir frente a la cruz con un 40 por ciento.

- 1.0.- Con el Box Model (modelo de urna) simula el lanzamiento de la moneda sesgada (60 % de posibilidades de cara), haciendo 10 lanzamientos y anota los resultados.

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

- 1.1.- ¿Cuál sería, aproximadamente el número de caras si la lanzamos 60 veces?
- 1.2.- Si lanzamos una vez más esta moneda y sale una cruz, ¿qué conclusión obtendrías?
- 1.3.- ¿Y si la lanzamos 10 veces y obtenemos 4 cruces?

ITEM 2

- 2.1.- *Simula ahora con Box Model el lanzamiento al aire diez veces de una moneda correcta y anota el resultado en el gráfico adjunto. Cuenta y escribe debajo el número de caras y cruces obtenidas:*

Lanzamiento n°:									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Número de caras:									
Número de cruces:									

- 2.2.- ¿Puedes predecir el resultado del siguiente lanzamiento?
- 2.3.- Compara tus resultados con los de tu compañero. ¿Has obtenido el mismo número de caras y cruces?
- 2.4.- Cuenta y anota el número de caras seguidas que te han salido. ¿Qué opinas de este resultado?

ITEM 3

¿Cómo piensas que deberían ser los resultados de lanzar una moneda correcta 20 veces seguidas? ¿Serías capaz de escribir 20 resultados de lanzar una moneda correcta (sin lanzarla realmente, sino como tú pienses que debieran salir) de

forma que otras personas piensen que has lanzado la moneda correcta en realidad , ¿podría otra persona adivinar que estás haciendo trampa?

3.1.- Abajo tienes dos filas de cuadrículas. En la primera de ellas escribe 20 resultados sin realizar realmente el experimento. En la segunda mitad utiliza Box Model y simula el lanzamiento de una moneda correcta 20 veces y escribe los resultados obtenidos. Pon C para cara y X para cruz.

3.2.-¿Piensas que son parecidos los resultados reales (con Box Model) y los inventados por ti?

3.3.- ¿Cómo podríamos comparar las dos secuencias?

3.4.- Compara el número de caras de las dos secuencias.