

UNA APROXIMACIÓN A LAS COMPETENCIAS MATEMÁTICAS EN INTERPRETACIÓN DE GRÁFICAS FUNCIONALES. UN ESTUDIO DE CASO

Horacio Solar, HoracioCristian.Solar@campus.uab.cat

Carmen Azcárate, carmen.azcarate@uab.es

Jordi Deulofeu, jordi.deulofeu@uab.es

Universidad Autònoma de Barcelona

Resumen

La aproximación a las “competencias” matemáticas suele ser un camino diverso, amplio y complejo. En nuestra investigación (de tesis doctoral) se indagan las competencias desde un punto de vista de “procesos” matemáticos (Niss 2002, OCDE 2003, NCTM 2004). Se estudia el caso de Valentina, profesora chilena, en la aplicación a un curso de 2º de ESO, de una unidad didáctica de interpretación de gráficas. La discusión se centra en dos puntos:

- (1) Identificar la noción de competencia como un proceso.
- (2) Proponer una caracterización de las prácticas del profesor que potencien las competencias en los estudiantes.

Abstract

The approach to mathematics competences can be a wide, diverse and complex way. This research (PhD thesis) focus on the competences from a mathematical processes point of view (Niss 2002, OCDE 2003, NCTM 2004). We study the case of a *chilean* teacher, Valentina, who applies a teaching unit about graphics interpretation in a 2nd ESO course.

We develop the subject in two questions:

- (1) Identify the competence notion as a process.
- (2) To propose a characterization of the teacher's practices that develop the students competences.

Palabras clave: competencia, competencias matemáticas, procesos matemáticos, currículum de matemáticas,

Key words: competence, mathematical competence, mathematical processes, mathematical models.

Introducción

En el marco del grupo de didáctica del análisis matemático, presentamos los avances de nuestro proyecto de tesis doctoral cuyo marco problemático son las competencias matemáticas que se desarrollan en los estudiantes.

Actualmente la noción de competencias se ha expandido exponencialmente en el campo educativo; más aún, gran parte de los currículos europeos se han redactado en términos de competencias. También es el caso de España en cuyo marco curricular aparece una descripción extensa del significado de competencia matemática.

En nuestra investigación no se plantea una perspectiva generalista hacia la competencia matemática, es decir desde una noción amplia de competencia hacia la competencia matemática. Por el contrario, partimos de la base de caracterizar el significado de competencia desde la propia actividad matemática. Esta idea se ha llevado a la práctica comenzando en una primera instancia el estudio de una noción matemática, que se abocó al estudio en profundidad de la interpretación de gráficas funcionales en un 2º de ESO, curso elegido porque es donde el currículo da pie a la enseñanza de las funciones.

Ha sido difícil localizar investigaciones sobre competencias matemáticas que comiencen con el estudio de un contenido; más aun, no hemos encontrado evidencia de investigaciones que relacionen las tareas de interpretación de gráficas funcionales, con un programa en términos de competencias.

En consecuencia, una de las contribuciones que esperamos lograr en la investigación es caracterizar la competencia matemática *a partir de* tareas de interpretación de gráficas funcionales.

Competencia matemática

Definir la *competencia matemática* es complejo ya que no tiene un único significado; por ejemplo en los programas curriculares de universidades y centros escolares que han adoptado este término, en varias ocasiones el término competencia se refiere a los objetivos de enseñanza, un cambio de terminología que no necesariamente significa un cambio de perspectiva.

Por otra parte, hay numerosos estudios y proyectos educativos que sí caracterizan la competencia matemática de una manera propia. Una de los proyectos más completos en este sentido es el estudio PISA, en cuyo marco teórico se describe la competencia matemática.

El marco PISA es una propuesta innovadora que trata de una manera extensa la competencia y que va evolucionando en cada informe, lo que ha sobrellevado a que los términos en que se ha caracterizado la competencia de un informe a otro se modifiquen; cambio que se ha concretado de manera muy sutil y ha traído confusiones a los educadores en la materia. Esta complejidad la hemos organizado en dos bloques de interpretaciones de PISA.

Primera interpretación de PISA

El significado que propone PISA sobre las competencias es variado, y confuso. Rico (2007) ha encontrado cuatro significados distintos para competencia en el documento PISA: *Alfabetización matemática, Procesos, Grupos de procesos, Niveles de complejidad.*

Alfabetización matemática: se considera la competencia como dominio de estudio, equivalente a la noción de *alfabetización matemática*, y supone un modo global de entender y hacer matemática, como a su vez comprender la naturaleza del conocimiento matemático. Desarrollar la competencia matemática se convierte en la finalidad principal de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.(OCDE, 2003)

Procesos: en el informe final (OCDE, 2005) se pasa a denominar *procesos* a las competencias. Este segundo significado pasa a conformar las ocho competencias adoptadas de NISS (2002), considerándolas como procesos matemáticos. En el último informe (OCDE, 2006) las ocho competencias se han descrito de la siguiente manera:

- *Pensar y razonar.* Plantear y reconocer preguntas; distinguir entre diferentes tipos de proposiciones matemáticas; entender y manipular el rango y los límites de ciertos conceptos matemáticos.
- *Argumentar.* Saber qué es una prueba matemática y cómo se diferencia de otros tipos de razonamientos; poder seguir y evaluar cadenas de argumentos matemáticos de diferentes tipos; desarrollar procedimientos intuitivos y construir y expresar argumentos matemáticos.
- *Comunicar.* Entender y hacerse entender en forma oral o escrita.
- *Construcción de modelos.* Estudiar los procesos de modelización (identificar, reflexionar, analizar y plantear críticas a un modelo y sus procesos)
- *Plantear y resolver problemas.* Plantear, formular, definir y resolver diferentes tipos de problemas matemáticos utilizando una variedad de métodos.

- *Representar*. Traducir, interpretar y distinguir entre diferentes tipos de representaciones de objetos y situaciones matemáticas, y las interrelaciones entre ellas; escoger entre diferentes formas de representación, de acuerdo con la situación y el propósito particulares.
- *Utilizar lenguaje y operaciones simbólicas, formales y técnicas*. Decodificar, interpretar y manipular el lenguaje formal y simbólico, entender su relación con el lenguaje natural, utilizar variables, resolver ecuaciones y realizar cálculos.

Empleo de material y herramientas de apoyo. Conocer, y ser capaz de utilizar diversas ayudas y herramientas (incluyendo las tecnologías de la información y las comunicaciones TICs) que facilitan la actividad matemática, y comprender las limitaciones de estas ayudas y herramientas.

Grupos de procesos: en el ejercicio de detallar las competencias PISA sugiere otra organización que resulte más operativa para clasificar los ítem de preguntas (OCDE, 2003):

La intención del proyecto OCDE/PISA no consiste en desarrollar preguntas de prueba que evalúen las competencias arriba mencionadas por separado. Dichas competencias se entremezclan y a menudo es necesario, al ejercitar las matemáticas, recurrir al mismo tiempo a muchas competencias, de manera que el intentar evaluar las competencias por separado resultaría por lo general una tarea artificial y una compartimentación innecesaria del área. Las diferentes competencias que presenten los alumnos variarán considerablemente de una persona a otra.

Para describir y transmitir de manera productiva las capacidades de los estudiantes, así como sus puntos fuertes y sus puntos débiles desde una perspectiva internacional, es necesaria cierta estructura. Un modo de ofrecerla de una manera comprensible y manejable es describir grupos de competencias a partir de los tipos de requisitos cognitivos necesarios para resolver diferentes problemas matemáticos.

El proyecto OCDE/PISA ha elegido describir las acciones cognitivas que estas competencias engloban de acuerdo a tres *grupos de competencia*: el grupo de *reproducción*, el grupo de *conexión* y el grupo de *reflexión*. En las secciones siguientes se definen los tres grupos y se tratan las maneras en que se interpretan cada una de las competencias dentro de cada grupo.

Se distingue estos grupos por las demandas cognitivas implicadas en las tareas que los ejemplifican (Rico, 2007). En la *tabla 1* se definen los tres *grupos de procesos* y se tratan las maneras en que se interpretan cada una de las competencias dentro de cada grupo.

Tabla 1. Grupos de procesos

Reproducción	Conexión	Reflexión
Las competencias de este grupo implican esencialmente la reproducción del conocimiento estudiado. Incluyen aquellos que se emplean más frecuentemente en las pruebas	Las competencias del grupo de <i>conexión</i> se apoyan sobre las del grupo de <i>reproducción</i> , conduciendo a	Las competencias de este grupo incluyen un elemento de reflexión por parte del estudiante sobre los procesos necesarios o empleados para resolver un problema.

estandarizadas y en los libros de texto: conocimiento de hechos, representaciones de problemas comunes, reconocimiento de equivalentes, recopilación de propiedades y objetos matemáticos familiares, ejecución de procedimientos rutinarios, aplicación de destrezas técnicas y de algoritmos habituales, el manejo de expresiones con símbolos y fórmulas establecidas y realización de cálculos.	situaciones de solución de problemas que ya no son de mera rutina, pero que aún incluyen escenarios familiares o casi familiares.	Relacionan las capacidades de los alumnos para planificar estrategias de resolución y aplicarlas en escenarios de problema que contienen más elementos y pueden ser más «originales» (o inusuales) que los del grupo de <i>conexión</i> .
---	---	---

Niveles de complejidad: un cuarto significado corresponde a la clasificación teórica de las tareas por el *nivel de complejidad* requerido para los procesos implicados. La clasificación de los procesos descrita en la tabla 1 es genérica y algo imprecisa por su amplitud. En cambio las respuestas de los sujetos a tareas con distintos niveles de complejidad permiten establecer niveles de competencia entre los estudiantes. En los resultados empíricos de la prueba PISA se confirma la hipótesis de que los estudiantes que resuelven problemas de mayor complejidad también responden a los problemas de complejidad inferior, por tanto a partir de los resultados de los estudiantes se observa una mayor riqueza de niveles que el planteamiento teórico en tres categorías de complejidad. En consecuencia para determinar el nivel de competencia matemática alcanzada por un estudiante se ha tomado referencia de los resultados de los mejores alumnos, los que han mostrado en su actividad distintos niveles de dominio en la realización de las tareas. La clasificación de las tareas se ha organizado en seis niveles de competencia, que admiten una descripción general y también una descripción detallada para cada uno de los campos de contenido. Cada nivel se describe en relación al tipo de competencia matemática que el alumno es capaz de realizar y el grado de complejidad con que las aborda.

Segunda interpretación de PISA:

Puig (2008) sugiere una lectura distinta a la diversidad de significados que tiene el término competencia en PISA, afirma que hay una confusión en las diversas traducciones del documento original inglés a otros idiomas. Puig argumenta que hay un abuso del término competencia en la versión en castellano del documento PISA, ya que en la versión original inglesa se usan diferentes términos. Si bien se homologa en la versión castellana el término Alfabetización matemática por Competencia, en la versión inglesa se mantiene el término *mathematical literacy*, más aun en la versión francesa se traduce por el término *culture*

mathematique, recogiendo mejor en esta versión que en la castellana el significado que se atribuye a *mathematical literacy*.

(Puig, 2008, pag 94) afirma que en la versión inglesa el término competencia se atribuye tanto a los procesos matemáticos que se ponen en práctica al resolver problemas matemáticos, los ocho procesos acuñados por Niss (2002), como a los grupos de competencia: reproducción, conexión y reflexión.

El cuarto significado propuesto por Rico (2007) “los seis niveles de competencia”. En la versión inglesa el término que se usa para describir ese nivel es “*proficiency*”, muy distinto a competencia. Para Puig esta confusión en los términos se debe a que el diccionario español admite como traducción “competencia” de “*proficiency*”. En cambio la versión inglesa de PISA ha tomado cuidado de distinguir conceptualmente entre *competence* y *proficiency*. Puig (2008, pag 96) interpreta como “pericia” a *proficiency*, y plantea que originalmente en el texto en inglés se describe como: “la agrupación de las actuaciones (performance) en niveles de pericia (*proficiency*) se hace sobre la base de las competencias (competentes) subyacentes.”

La opción de identificar la noción original de alfabetización matemática como competencia matemática no creemos que sea algo casual. La definición responde en gran medida a lo que se entiende en términos generales por competencia (OCDE, 2003):

La competencia matemática es la capacidad para identificar y comprender el papel que desempeñan las matemáticas en el mundo actual, emitir juicios bien fundamentados, utilizar las matemáticas y comprometerse con ellas de manera que puedan satisfacer las necesidades de la vida del individuo como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo

Si bien estamos de acuerdo con que esta definición rescata el espíritu de competencia, no obstante no da indicios de cual es la dirección para desarrollar la competencia, y por tanto acordamos con dejar esta definición para una noción mayor como alfabetización matemática.

En definitiva el significado que se atribuye en la versión inglesa de PISA a las competencias, segunda interpretación, es la que nosotros coincidimos. Estas ocho competencias, y su agrupación en tres niveles, se pueden interpretar como *procesos matemáticos*. Y en lo que sigue del documento se hará referencia indistintamente a procesos y competencia para referirse a lo mismo.

Nos parece más acertado identificar la noción de proceso como competencia porque representa el eslabón que anteriormente sugerimos que faltaba hacia la alfabetización matemática. Es el dominio de los procesos los que permiten que la persona se desarrolle

competentemente. Algunos de estos procesos, que se asemejan a las competencias propuestas por Niss, son:

- La capacidad para *resolver problemas* (aplicar conocimientos matemáticos, utilizar diversas destrezas y estrategias, o crear procedimientos no conocidos de antemano)
- La capacidad para *representar* (evocar representaciones, traducir entre ellas, elegir entre varias según la situación)
- La capacidad para *modelizar* (identificar un modelo, construir, reflexionar sobre el proceso)
- La capacidad para *razonar y argumentar* (formular conjeturas matemáticas, desarrollar y evaluar argumentos, elegir y utilizar varios tipos de razonamiento y demostración)
- La capacidad para *comunicar* (organizar el pensamiento comunicando, comunicar el pensamiento con coherencia, evaluar el pensamiento de los demás, usar el lenguaje matemático para expresar ideas matemáticas con precisión)

Algunas descripciones de los cuatro procesos mencionados son extraídas de la propuesta curricular de la NCTM (2003) *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Los principios y estándares propuestos se estructura en:

Principios: Describen las características particulares de una educación matemática de gran calidad (Igualdad, Currículo, Enseñanza, Aprendizaje, Evaluación, Tecnología)

Estándares de contenido: Describen explícitamente los contenidos que deberían aprender (Números, Álgebra; Geometría; Medida, Análisis de datos y probabilidad)

Estándares de proceso: Ponen en relieve las formas de adquisición y uso de dichos contenidos: (Resolución de problemas; Razonamiento y prueba; Comunicación; Conexiones y Representación)

La propuesta de la NCTM de describir un currículo en términos de proceso, representa algo único y nuevo, no hay indicios de propuestas curriculares de esta magnitud que describan el aula en términos de procesos. Para cada una de las cuatro etapas educativas (Pre-K-2; 3-5;6-8; 9-12) se describe como debería darse y cual es el papel del profesor en el desarrollo del proceso. No obstante los apartados de descripción de estándares de contenido y procesos son diferentes, y no hay un apartado que los relacione. Para nosotros esta separación representa una carencia puesto que una planificación de una unidad didáctica que considere incorporar los procesos, lo más probable es que tienda a incorporarlos a partir de los contenidos.

En nuestra investigación, los procesos matemáticos se caracterizan a partir de la aplicación de una unidad didáctica sobre interpretación de gráficos funcionales, estrategia que se justifica por nuestro posicionamiento de desarrollar las competencias a partir de un contenido. Este enfoque, como se mencionó en la introducción, es una de las contribuciones que esperamos desarrollar en la investigación.

Discusión recogida de datos

Un segundo tema a tratar es el enfoque que hemos desarrollado para conducir los datos. La recogida de datos se realizó en Santiago de Chile, en un marco en que el investigador participó en la formación de profesores permanente que realiza el grupo Felix Klein¹. Se trabajó con un conjunto de cuatro profesoras, las que aplicaron una unidad didáctica titulada “análisis de gráficos” en el curso de 8° básico (2° de E.S.O). La labor del investigador fue hacer un seguimiento de sus clases por medio de grabaciones en video; se registraron elementos como: el desarrollo de los estudiantes, la interacción con el profesor, y el rol del profesor. Posteriormente se analizaron partes ya seleccionadas de estas grabaciones en un seminario con estos mismos profesores que aplicaron la Unidad².

Consideramos que la Unidad didáctica (UD) elaborada por el grupo Felix Klein de la cual se hace el seguimiento, ha sido una buena UD para indagar las competencias de los estudiantes. En efecto, analizamos la UD con un instrumento (Mesa, Solar, Azcárate, 2007) construido a partir de una triangulación de las competencias de Niss (2002), los niveles de complejidad de PISA (OCDE, 2003) y la interpretación de Lupiáñez (2005, extraído de Rico, 2007) que caracteriza tanto el nivel de complejidad de las tareas matemáticas como las competencias que potencia³. A partir de su aplicación se adaptó la UD, remplazando algunas actividades por actividades elaboradas por nosotros que respondían de mejor manera a desarrollar competencias en los estudiantes.

En la tesis doctoral nuestro problema de investigación se centra en indagar las competencias matemáticas que surgen al estudiar la interpretación de gráficas. El objetivo principal, antes de iniciar la recogida de datos, era indagar las competencias que se potencian en la aplicación

¹ El grupo Félix Klein, Centro de Investigación y Experimentación en Didáctica de las Matemáticas y las Ciencias. Está adscrito a la Universidad de Santiago de Chile (USACH). La misión de este equipo es contribuir al progreso, tanto científico como profesional, del área de Educación Matemática en todos sus niveles.

² Esta implementación responde a otros objetivos que no se detallan en este artículo. Pero que hemos preferido describir para contextualizar la investigación.

³ Este aspecto es analizado más adelante en la discusión teórica.

de una unidad didáctica de interpretación de gráficas. Para tal efecto había que determinar tanto el papel del estudiante como del profesor. Por tanto nuestro objetivo general se segmentó en dos grandes objetivos.

- *Caracterizar las competencias que surgen en los estudiantes al realizar tareas de interpretación de gráficos funcionales.*

- *Caracterizar las acciones del profesor que potencian las competencias en el estudiante.*

En el proceso de recogida de datos, se hizo seguimiento a las cuatro profesoras, la idea inicial era observar un mínimo de tres o cuatro clases de cada profesora, y en el seminario con estas profesoras de periodo quincenal, ir conversando que acciones del profesor son las que se relacionan (potencian, disminuyen) con el desarrollo de las competencias en los estudiantes. En este proceso hubo algunas modificaciones que repercutieron en los objetivos de la investigación:

- No se pudo hacer todas las observaciones mínimas posibles a dos profesoras por presentar irregularidades en la aplicación de la UD.
- La experiencia con otra profesora resultó que si bien se grabaron las tres clases acordadas inicialmente, mostró varias inasistencias al seminario y no siguió el ritmo del seminario, lo cual repercutió que en sus clases no se aplicaban las orientaciones para las actividades que se discutieron en dicha instancia.
- La profesora “Valentina” que aplicó la unidad mostró las condiciones que se esperaba con lo cual el investigador decidió observar más clases de las previstas con esta profesora, para así tener un proceso más completo. Además fue la profesora que más participó en asistencia y discusión en los seminarios.

Por estas razones se decidió posteriormente centrarse en Valentina, profesora que más se observó, con el propósito de caracterizar sus acciones en el aula, y a su vez analizar su discurso en el seminario. En consecuencia la recogida de datos se condujo a un estudio de caso.

La dinámica de clase de Valentina es una combinación entre una gestión tanto expositiva como de pregunta y respuesta a los estudiantes. Había espacios para el trabajo de a pares, y prácticamente no existió el trabajo individual. Las respuestas escritas fueron escasas y por lo general la misma información se daba oralmente en la clase. Así advertimos que los datos que se recogieron mostraron una mayor riqueza para fijarse en las acciones de Valentina que en el alumno, por lo tanto establecimos profundizar en el segundo objetivo enfocado en las

acciones del profesor. En detrimento, el primer objetivo de caracterizar las competencias que surgen en los estudiantes se decidió no desarrollarlo por no tener datos suficientes, y para dar pie a una mayor exhaustividad en caracterizar las acciones de la profesora que tengan relación con las competencias.

Es importante advertir que las acciones del profesor en el aula de matemáticas son generalmente investigadas dentro de un marco de desarrollo continuo del profesor. Nuestro enfoque en cambio son las competencias del estudiante, pero nos centramos en uno de los agentes que las potencian: el profesor.

¿Qué competencias considerar?

Nos enfrentamos a una nueva decisión respecto a qué orientación de las competencias considerar. Para caracterizar las competencias que se desarrollan en la interpretación de gráficas funcionales, se consideraron tanto las competencias propuestas en PISA como los estándares de proceso propuestos por la NCTM, y nos planteamos cuáles son las competencias (o procesos) que nos parecieron más relevantes de desarrollar en tareas de interpretación de gráficas, obteniendo como resultado que se dan tres competencias fundamentalmente: Argumentación, Representación y Modelización. Las razones para plantear cada una de éstas son:

Representación: Es un proceso que se identifica tanto en PISA como en los Estándares, de igual modo la capacidad de identificar, comprender y elaborar representaciones es parte constituyente de las tareas de interpretación de gráficas.

Argumentación: PISA propone la “Argumentación” como una competencia que hace mención a los aspectos en relación con un proceso de prueba. Los Estándares en cambio contemplan este proceso en un estándar más amplio, que involucra también al razonamiento matemático. Con ello se pone de manifiesto que en los Estándares el razonamiento y la demostración se desarrollan de manera conjunta, para probar hay que razonar, y recíprocamente se potencia el razonamiento en tareas de prueba. El razonamiento en PISA en cambio se contempla en otra competencia más amplia que se identifica como “pensar razonar”, la cual considera: plantearse preguntas matemáticas, reconocer propiedades matemáticas y comprender conceptos. En la propuesta de PISA se deduce que el razonamiento se observa en la actividad matemática transversalmente y no sólo en un proceso de prueba.

En nuestra investigación tenemos una visión semejante a PISA sobre el razonamiento matemático, ya que plantea que se manifiesta más allá de un proceso de prueba. Por tanto la argumentación es una competencia que se constituye por si misma, cuyo significado se asocia semejantemente al que se presenta tanto en las competencias PISA, como en los Estándares. Por tanto argumentar hace referencia a los procesos de evidencia y prueba en la actividad matemática. Por otro lado, no se potencia la demostración, sino más bien la interpretación en las tareas de gráficas y tablas funcionales. De esta manera el proceso de argumentación se manifiesta en la interpretación de gráficas y tablas.

Modelización: Esta competencia no surge solamente de la una de las ocho competencias “construcción de modelos”, más bien se adapta del primer proceso propuesto por PISA “Matematización”, dado que la descripción de matematización que se propone es completa y robusta, y en definitiva describe lo que es desde nuestra perspectiva un proceso de modelización en la actividad matemática (identificar el modelo, construir, reflexionar, analizar y plantear críticas a un modelo). Del mismo modo que el proceso de razonar, un proceso de modelización es inherente a la actividad matemática. Más aun, no es sólo esta característica lo que hace que consideremos modelar como una competencia por si misma. Otro punto favorable proviene del marco de competencias que enaltece la perspectiva funcional de las matemáticas, las tareas matemáticas tienen como propósito desarrollar capacidades para identificar, estudiar y resolver situaciones cotidianas, y el proceso que más se ajusta a esta intención es la modelización, en términos de desarrollar cuatro pasos. Una situación o comportamiento a observar se simplifica para corresponderlo a un modelo matemático, el cual se resuelve para luego interpretarlo en el contexto de la situación. El sistema es entendido como dinámico y cíclico, pues en él se producen continuas transformaciones que pretenden mejorar la interpretación y predicción del fenómeno, hasta obtener un resultado satisfactorio.

Por otra parte, en el contenido en si mismo, las tareas de interpretación tienen dos características sustanciales respecto a considerarlas dentro de un proceso de modelización, por una parte las tareas implican identificar, manipular y construir gráficas; y por otra parte surgen diversas estrategias para interpretar.

Otro punto que nos queda por discutir es el rol de la resolución de problemas en la modelización. Al definir la competencia modelización con los procesos y estrategias que la comporta, con ello también se pretende considerar las estrategias que son parte de un contexto

de resolución de problemas. En efecto la interpretación de gráficas no se perfila como un contenido en que se trabaje la resolución de problemas como comúnmente se entiende, lo más cercano a resolución de problemas son las estrategias para interpretar que van surgiendo a partir de la situación y la tarea matemática. Por lo tanto estas estrategias dependen en gran medida de modelo que se identifique. Y por tal razón la resolución de problemas la trabajamos como una de las partes del proceso para modelar.

Discusión análisis: indicadores

Hemos caracterizado las acciones de Valentina que se relacionan con las competencias de Representación, Argumentación y Modelización. Si bien los indicadores que caracterizan a cada competencia en el aula se han desarrollado a partir de una muestra cerrada de cinco clases, por comparación recurrente, aun falta someterla a su validación por un agente externo. Finalizamos la discusión de este trabajo, presentando los indicadores que se han levantado para el proceso de *modelización* en el aula.

Indicadores Modelización

Un primer grupo corresponde a las *acciones que inducen a una construcción del proceso por parte de los estudiantes*, con el propósito por una parte de experimentar el proceso y por otra de comprender el modelo. En este grupo aparecen una serie de indicadores que describen las acciones del profesor. En la Tabla 2 se describen cada una de los indicadores.

El segundo grupo de acciones corresponde a las *acciones del profesor que el mismo realiza para modelar*. De igual modo que en el primer grupo, hemos caracterizado una serie de indicadores que tienen relación con estas acciones. Un tercer grupo corresponde a las *acciones del estudiante en torno a la modelización*, que son las mismas a las acciones directas del profesor. Por tanto las ser las mismas en la Tabla 3 aparece la descripción tanto de las acciones del profesor como del estudiante.

Tabla 2: Grupo 1 acciones que induce a modelar

Indicador	Descripción
Induce a identificar el modelo	Induce a identificar el modelos, sus características e indica las variables pero sin llegar a describirlas.
Induce a describir características del modelo	Induce a describir las características de un modelo, indicando las variables, cualidades, pero sin usar el modelo
Induce a establecer variables didácticas para modelar	Induce a que se establezcan condiciones para elaborar

	un modelo.
Induce a determinar validez características del modelo	Induce a determinar la validez de las variables, parámetros, o características en general del modelo
Induce a construir el modelo	Induce a determinar o construir el modelo que responde a la situación problema (sistema de referencia, gráfico, tabla, etc)
Induce a determinar validez del modelo	Induce a determinar la validez de un modelo
Induce a aplicar el modelo	Induce a aplicar o usar el modelo
Induce a interpretar el modelo	Induce a interpretar una modelo (gráfica tabla, algebraica)
Induce a describir interpretación modelo	Induce a describir interpretación modelo
Induce a analizar críticamente el modelo	Induce a reflexionar sobre el modelo, el proceso, y su aplicación como solución a la situación problemática

Tabla 3. Grupo 2 acciones del profesor o del estudiante para modelar

Indicadores	Descripción
Características modelo	Señala o describe las características de un modelo
Describe el uso del modelo	Describe como se usa el modelo, ya sea que el profesor lo proponga o a partir de las descripciones de los estudiantes. Puede ser una síntesis o un resumen.
Variables didácticas del modelo	Describe las condiciones que se establecen para modelizar
Valida características modelo	Hace aseveraciones para validar las descripciones de las características de un modelo
Interpreta modelo	Interpretar un modelo (gráfica, tabla, expresión verbal o algebraica)
Construye el modelo	Se elabora o identifica una modelo (sistema de referencia, gráfica, tabla, etc.)
Modificar modelo	Se cambia de modelo a uno más eficiente
Aplicar el modelo	Se aplica el modelo que se ha construido
Valida el modelo	Valida el modelo.
Analizar críticamente el modelo	Reflexiona sobre el modelo, el proceso, y su aplicación como solución a la situación problemática
Reflexionar respecto a la aplicación de la matemática	Reflexionar sobre la aplicación de los gráficos, tablas, y modelos en general en diversas situaciones es de la vida real

El modelo puede identificarse en varias expresiones, veamos en la Tabla 4 un ejemplo como se relaciona un modelo con sus expresiones:

Tabla 4. Modelo dependencia de variables

Expresión numérica del modelo	Tabla numérica
Expresión gráfica del modelo	Gráfica estadística, funcional, cualitativa, cuantitativa
Expresión verbal del modelo	Descripción verbal de una relación entre variables

Estas expresiones del modelo se combinan con los indicadores anteriores. Por ejemplo se puede identificar, describir, construir, aplicar las expresiones de un modelo.

Los indicadores que se han identificado, tienen semejanza con los criterios de modelización que han identificado Henning y Keune (2007), Su esquema clasifica la competencia

modelización en tres niveles. La Tabla 1 equipara la clasificación de dicho autor, con los indicadores que se han identificado. (En la tabla se han resumido en un mismo indicador los criterios del grupo 1 y grupo 2)

Tabla 5. Comparación indicadores modelizar y criterios de Henning y Keune(2007)

	Nivel 1: Reconocer el modelo	Nivel 2: Construir el modelo	Nivel 3: Meta- reflexionar sobre el modelo
Niveles de Henning y Keune	- Reconocer - Describir los procesos de modelización -Caracterizar, distinguir y localizar las fases del proceso de modelización	- Analizar y estructurar problemas y abstraer cantidades. - Adoptar diferentes perspectivas - Construir modelos matemáticos - Trabajar sobre modelos - Interpretar resultados u declaraciones del modelos - Validar el modelo	- Analizar críticamente la modelización -Caracterizar los criterios de evaluación del modelo - Reflexionar sobre las causas de la modelización - Reflexionar respecto a la aplicación de las matemáticas
Indicadores observados en Valentina	<i>Identificar características modelo</i> <i>Describir características</i> <i>Validar características modelo</i>	<i>Describir estrategias para caracterizar</i> <i>Establecer variables didácticas</i> <i>Identificar (construir) modelos</i> <i>Aplicar el modelo</i> <i>Interpretar el modelo</i> <i>Describir interpretación del modelo</i> <i>Validar el modelo</i>	<i>Analizar críticamente el modelo</i> <i>Reflexionar respecto a la aplicación de la matemática</i>

La propuesta de Henning y Keune (2007) permite organizar los indicadores en un sistema de niveles de competencia.

El modelo de matematización propuesto por PISA (OCDE, 2006) converge con los indicadores descritos. Concretamente la fase final de evaluación se asemeja con los indicadores que se identifican con la reflexión del modelo.

En consecuencia existe una correspondencia entre los indicadores de modelización levantados del estudio de caso, con criterios de modelización propuestos en otros marcos teóricos.

Proyecciones de la investigación

En el momento de entregar esta comunicación, se están validando por comparación recurrente los indicadores de modelización, argumentación y representación. Además hemos descrito dos de las cinco clases en término de las tres competencias, con el propósito de evidenciar que una práctica de aula se puede focalizar desde procesos matemáticos.

Actualmente se utilizan los indicadores de cada competencia para caracterizar la secuencia de la clase, obteniendo de momento dos tipos resultado, ciclos en cada uno de las competencias, y modelos de interacción entre Valentina y los estudiantes.

Referencias bibliográficas

- Abrantes, P. (2001). Mathematical competence for all: Options, implications and obstacles, *Educational Studies in Mathematics*, 47, 125-143.
- Henning, H.; Keune, M. (2007). Levels of Modelling Competence, *Modelling and Applications in Mathematics Education, The 14 th ICMI Stud*, vol 10, 225-232. Springer
- Mesa, G.; Solar, H.; Azcárate, C. (2007). Una aproximación a las competencias matemáticas. Caracterización de actividades de un libro de texto utilizando indicadores para la complejidad de las tareas, *Actas XIII JAEM*. Granada.
- National Council of Teachers of Mathematics. (NCTM). (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*, Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales. España
- Niss, M. (2002). Mathematical competencies and the learning of mathematics: *The danish kom project (Proyecto KOM. The national academies: The national academies)*. [Http://www7.nationalacademies.org/mseb/mathematical_competencies_and_the_learning_of_mathematics.pdf](http://www7.nationalacademies.org/mseb/mathematical_competencies_and_the_learning_of_mathematics.pdf)
- OCDE. (2003). *The PISA 2003 Assessment Framework Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills*, OCDE. Paris
- OCDE. (2005). *Informe PISA 2003 aprender para el mundo del mañana*, Santillana. España.
- OCDE. (2006). *PISA marco de la evaluación. Conocimientos y habilidades en Ciencias, Matemáticas y Lectura*, Santillana. España.
- Puig, L. (2008). Sentido y elaboración del componente de competencia de los modelos teóricos locales en la investigación de la enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos específicos, *PNA*, vol 2 (3), 87-107.
- Rico, L. (2007). La competencia matemática en PISA. *PNA*, 1(2), 47-66.