

COMPETENCIA DE ARGUMENTACIÓN EN LA INTERPRETACIÓN DE GRÁFICAS FUNCIONALES

Horacio Solar, Carmen Azcárate, Jordi Deulofeu

Universidad Autónoma de Barcelona

Resumen

En este artículo desarrollamos la competencia de argumentación, caracterizado por: tareas, procesos. Las relaciones entre estos dos componentes determinan un nivel de complejidad cognitiva de una actividad matemática. Los procesos son el componente más destacado; en nuestro modelo estos se desarrollan a lo largo de la etapa escolar, a diferencia de las tareas matemáticas que se trabajan a corto plazo.

Palabras clave: competencias matemáticas, argumentación matemática, procesos matemáticos,

Abstract

In this article we developed argumentation competency; those are characterized by: tasks, processes and level of complexity. The relations between the two components determine a level of cognitive complexity of a mathematical activity. The “process” components are the most outstanding ones in our model, and those, within the argumentation competency are developed during the whole school process, unlike mathematical tasks that are developed during short terms.

Key words: mathematical competencies, mathematical argumentation, mathematical processes.

Introducción

Presentamos un reporte de investigación de nuestra tesis doctoral cuyo objetivo es caracterizar un modelo de enseñanza por competencias matemáticas en interpretación de gráficas funcionales. En este artículo se expone la competencia de argumentación.

La argumentación matemática actualmente es uno de los centros de interés en la investigación en Didáctica de las Matemáticas. Para desarrollar la competencia de argumentación, hemos considerado como punto de partida la estructura argumentativa de Toulmin (1958), que sigue un proceso lineal desde los datos hasta las conclusiones en que intervienen elementos constitutivos de la argumentación. Sus elementos son: *datos*, consisten en hechos y evidencias que se invocan para justificar y validar; *conclusión*, declaración sostenida que representa una afirmación; *justificaciones*, representan la enunciados generales que permiten el paso de los datos a las conclusiones; *fundamentos*, se refieren a teorías generales, creencias, y estrategias que proporciona más apoyo a la justificación e indica por qué la afirmación debería ser aceptada; *calificadores modales*, construcciones lingüísticas que permiten atenuar una demanda; y finalmente *refutadores* que constituyen los contraargumentos. La figura 1 muestra la relación entre sus componentes:

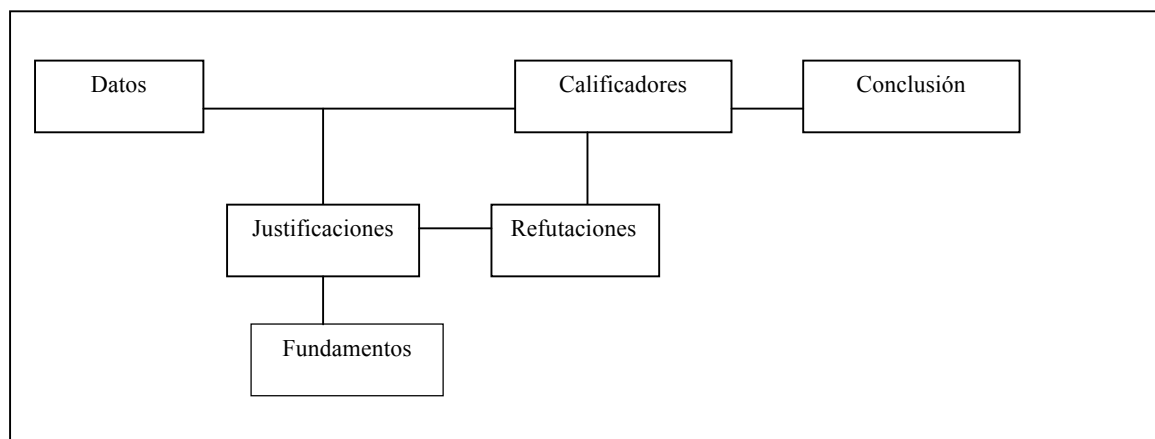


Figura 1: Modelo de Toulmin (1958)

Krummheuer (1995) propone un modelo de argumentación en matemáticas basado en Toulmin. Sin embargo, reduce el sistema original a cuatro elementos: datos, justificación, fundamentos y conclusión;

La mayoría de las investigaciones posteriores sobre argumentación parecen haber seguido la reducción de Krummheuer en el uso del modelo de Toulmin (Inglisch, 2007). Diversos autores (Stephan y Rasmussen, 2002; Whitneack y Knipping, 2002; Yackel, 2002; Rasmussen et al.,

2004; Pedemonte, 2005) han usado esta estructura argumentativa en diversos tópicos matemáticos tanto en primaria como en secundaria, mostrando que es útil transversalmente al nivel escolar y al contenido. De hecho, esta posición parece haber llegado a ser tan arraigada que, en su reciente revisión de la prueba, Mariotti (2006) se refiere al sistema de Toulmin como un "modelo ternario". Otros autores han investigado la argumentación en la actividad matemática adoptando el modelo de Toulmin conservando todos sus elementos (English, 2007).

Los componentes de la secuencia argumentativa de Toulmin se pueden interpretar como procesos matemáticos. En efecto, pensamos que el tipo de análisis de Krummheuer se podría enfocar a un análisis de los procesos que aparecen en la argumentación, y de hecho es uno de los propósitos de nuestro estudio experimental. Pero a diferencia de los autores citados y de acuerdo con English (2007) se considera como base la secuencia argumentativa de Toulmin completa, y no la reducción de Krummheuer, para así poder discutir en nuestra propia investigación qué papel juegan todos los elementos de la estructura argumentativa.

Por otra parte, destacamos que los procesos de argumentación que se identifiquen no esperamos que se correlacionen directamente con la estructura de Toulmin. Uno de los principios de la investigación es que los procesos que emergen de una competencia están ligados a un contenido. Y si bien se considera como base a Toulmin, la caracterización final puede resultar diferente a dicha estructura. En particular en el tópico de interpretación de gráficas, en el estudio de caso se indaga qué procesos ligados a la argumentación emergen en tareas tales como interpretar o construir una gráfica, o determinar la dependencia de variables; dichos procesos ligados a la acción de interpretar, pueden ser muy distintos a lo que emergerían en otros tópicos matemáticos.

Competencia de argumentación

La competencia de argumentación tiene como base los procesos matemáticos, las tareas matemáticas, y los niveles de complejidad.

Procesos matemáticos: consideramos que los procesos matemáticos tienen un papel destacado en la enseñanza de las matemáticas y están relacionados directamente con la noción de competencia matemática. En efecto, por una parte, siguiendo las ideas de Rico y Lupiáñez (2008), de que tanto PISA (OCDE, 2003) como los Estándares de procesos (NCTM, 2003) aportan aproximaciones significativas sobre el enfoque funcional, y sobre todo, un papel explícito de los procesos matemáticos; y por otra parte, la vinculación que establece Niss

(1999) entre competencias y procesos. Por estas razones los procesos matemáticos tienen un papel destacado en las competencias matemáticas.

Tareas matemáticas: el término tarea matemática se ha adaptado de los trabajos de Leinhardt et al. (1990) y Chevallard (1999). planteamos que los contenidos matemáticos se estructuren en términos de tareas matemáticas. En este sentido una actividad matemática se puede definir como un conjunto de tareas matemáticas con una finalidad común. Las tareas cambian y progresan, su alcance es a corto plazo y se van haciendo más complejas a lo largo del período escolar.

Niveles de complejidad: el progreso de la competencia se determina en términos de la complejidad de la actividad, que depende tanto de las tareas como de los procesos que la conforman. El término nivel de complejidad se adopta desde los grupos de competencia de PISA (OCDE, 2003) basados en la pirámide de de Lange (1995).

La competencia de argumentación tiene una función didáctica, puesto que la caracterización de sus componentes es una estructura útil tanto para la planificación de una secuencia didáctica, como para el desarrollo de la argumentación en el aula. Esta competencia consiste en estudiar el desarrollo de las tareas matemáticas, los diferentes procesos de argumentación que emergen, y el nivel de complejidad de una actividad según la argumentación.

En este artículo nos centramos en describir cómo se caracterizan tareas y procesos en el tópico de interpretación de gráficas funcionales, y de qué manera, articulando estos dos componentes, se puede determinar el nivel de complejidad en una actividad matemática desarrollar en el aula de matemáticas

Metodología

Los datos de esta investigación se obtuvieron de una experiencia realizada en Santiago de Chile. Se estudió el caso de la clase de Valentina, profesora de un curso 8° básico (2° de E.S.O) que aplicó una unidad didáctica denominada “Analizando y construyendo gráficos”.

Obtención de datos

La estrategia para caracterizar tareas matemáticas ya está validada por la literatura. En cambio la caracterización de procesos no se sostiene de la misma manera, y se ha optado que surjan de acuerdo con la teoría emergente (Strauss, Corbin, 1990). Se siguió el transcurso de aplicación de la unidad didáctica con una estrategia de observación no participante de cinco

clases. Por medio de grabaciones en video, se consideraron los registros enfocados a la interacción entre la profesora y los estudiantes. Finalmente se transcribieron las cinco clases grabadas.

Análisis de datos

A partir de los datos, se escogieron episodios de cada clase que mostraran una mayor riqueza en la interacción entre profesora y estudiantes. La unidad de análisis corresponde a cada una de las acciones del episodio, tanto de Valentina como de los estudiantes. Cada acción se caracterizó con un término que indicara el proceso asociado a la argumentación. Esta estrategia siguió un criterio de comparación constante entre los procesos que emergieron de los episodios analizados, y concluyó con la caracterización de un listado de procesos que conforman la competencia de argumentación.

Resultados

El cuadro 1 muestra la caracterización de procesos que conforman la competencia de argumentación.

Cuadro 1: Procesos de la competencia de argumentación

Indicadores	Descripción
Identificar datos	Identificar los datos (generalmente en una gráfica o tabla) o enunciados que sirven para argumentar
Interpretar datos	Interpretación de los datos y las representaciones asociadas
Validar datos	Validar la identificación de lectura o interpretación de datos
Justificar	Justificar las declaraciones e interpretaciones
Validar la justificación	Validar o refutar la justificación
Fundamentar	Datos, hechos, contenidos que apoyan la justificación
Reflexionar sobre la argumentación	Reflexionar en relación a los datos o sobre el proceso de argumentación
Concluir	Establecer respuestas o enunciados de término en un contexto de cierre de la situación problemática, tema o unidad

Los tres primeros procesos- *identificar datos*, *interpretar datos* y *validar datos*- se sustentan en los datos. Los datos no se refieren únicamente a los enunciados a probar, tal como es en el

modelo de Toulmin (1958), sino que son datos matemáticos con que se cuenta para desarrollar la argumentación.

El proceso de *validar datos* se refiere a confirmar la identificación o interpretación de los datos. Si bien son acciones diferentes, se ha optado por agruparlos en el mismo indicador para destacar su función de validar. Generalmente la validación responde a confirmar la interpretación de los datos; por el contrario, validar la identificación de datos se da con baja frecuencia.

No obstante, se ha optado en que *validar la justificación* sea un proceso diferente dado que se enfoca en aspectos diferentes de los anteriores procesos. En efecto, el proceso de *justificar* corresponde a explicar el razonamiento que se llevó a cabo para identificar o interpretar datos. Según el modelo de Toulmin (1958) este indicador cumple la función de *justificar*, y bajo nuestro modelo la validez de las justificaciones contempla tanto las valoraciones positivas como negativas (refutar). La razones de esta unión es porque nos interesa optar por un solo proceso que recoja las valoraciones en el aula, independientemente de corresponder a una validación o refutación. De esta manera también se considera el aspecto de refutación del modelo de Toulmin; en todo caso, cuando aparezca este proceso se indica en el caso que trate de una refutación. En el análisis de los episodios, las acciones de validación generalmente conciernen a la profesora, y no se han encontrado validaciones entre estudiantes. Pese a ello, idealmente la validación también se puede dar entre estudiantes, y en este modelo de argumentación así queda reflejado.

El proceso de *fundamentar* apoya la justificación, son datos que son socialmente aceptados que no requieren una validez. Idealmente los fundamentos deberían emerger en una secuencia argumentativa.

Se ha agregado un proceso que tiene la función de caracterizar las acciones de *reflexión sobre la argumentación*. Este proceso contempla tanto reflexionar sobre la información que es tratada, como reflexionar sobre la secuencia de argumentación. La presencia de este proceso muestra que el desarrollo de una tarea matemática puede alcanzar un nivel de complejidad elevado. El modelo termina con el proceso de *concluir*, que cumple la misma función que en el modelo de Toulmin de cerrar una argumentación.

Las caracterización de tareas matemáticas en las cinco clases, provienen principalmente de la unidad didáctica y se han complementado con otras tareas que provienen de un estudio previo

propio (Solar, 2006). Clase 1: identificar variables, identificar y construir sistemas de referencia; Clase 2: traducir de una expresión verbal a una gráfica, interpretar gráficas; Clase 3: identificar variables, interpretar gráficas, construir una gráficas a partir de una situación pictórica; Clase 4: identificar variables, estudiar la dependencia de variables, construir una gráfica a partir de una situación pictórica; y Clase 5: identificar variables, estudiar la dependencia de variables, traducir entre representaciones

Descritos los procesos y las tareas, se puede caracterizar la competencia de argumentación. En la figura 2 aparecen los cuatro niveles de complejidad que se determinan por la relación entre tareas y procesos, que en conjunto caracterizan la competencia de argumentación. Muchas tareas se repiten en los niveles, tales como interpretar gráficas, traducir y estudiar la dependencia entre variables, y lo que cambia son los procesos en cada nivel.

El proceso de concluir se da en toda estructura argumentativa, y no es un proceso que permita discernir en la complejidad de la actividad. En consecuencia no se relaciona con las tareas para determinar un nivel de complejidad. El proceso de *fundamentar* se ha situado en los dos niveles superiores porque depende de qué manera se desarrolle y acompaña al proceso de *reflexionar sobre la argumentación*. Si un proceso emerge de forma incipiente pero no se desarrolla, no implica que se logre el nivel de complejidad asociado. Esto pasa frecuentemente con los procesos de justificar y reflexionar sobre la argumentación, que muchas veces se presentan de forma inicial, pero no se alcanzan a desarrollar en el aula.

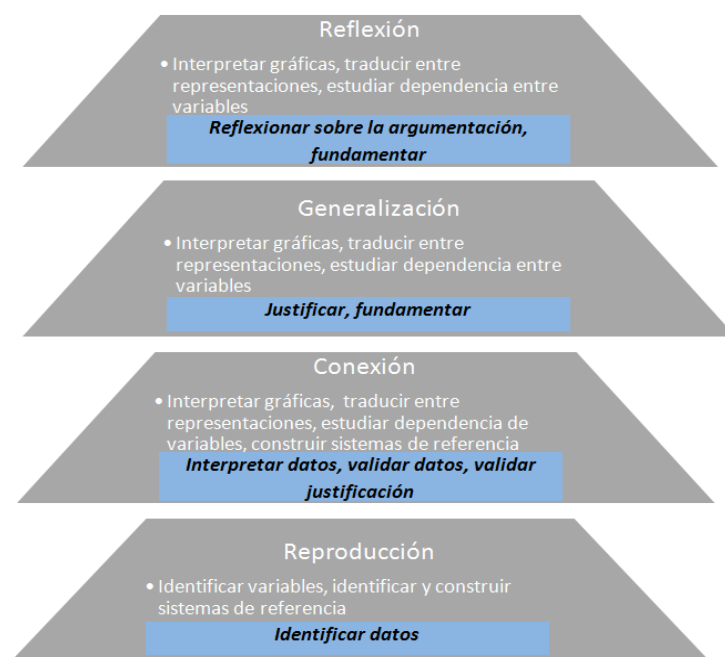
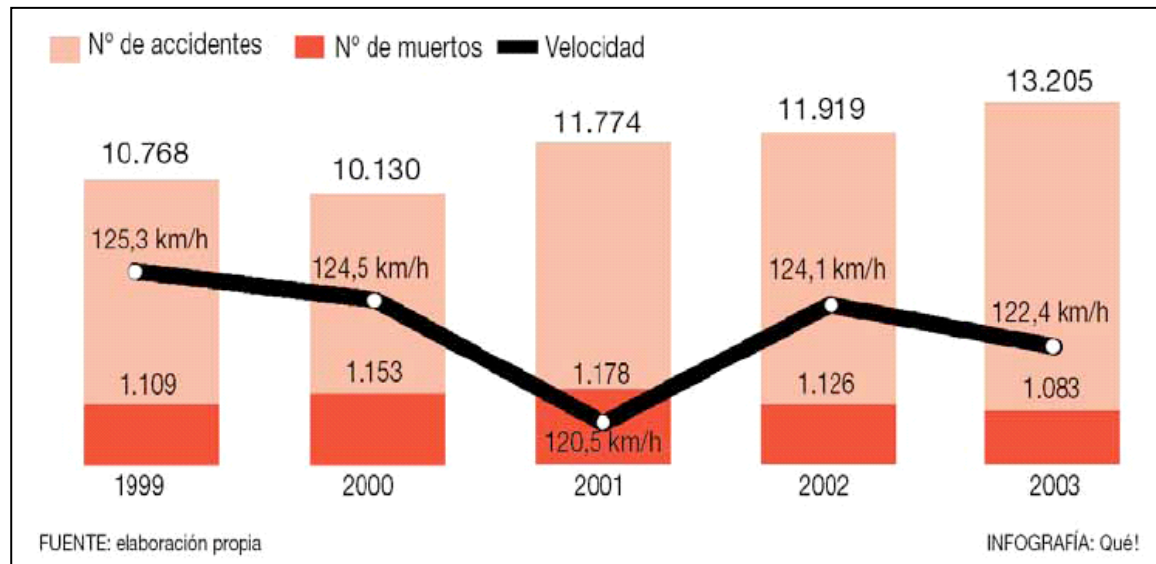


Figura 2: Competencia de argumentación

Veamos cómo actúa la competencia de argumentación en la última clase (5), a partir de la actividad “Accidentes automovilísticos” de la unidad didáctica.

Actividad: Accidentes automovilísticos



El gráfico muestra la velocidad promedio de un auto en el momento que tiene un accidente en el transcurso de cinco años.

- a) ¿En qué año hay más número de accidentes? ¿En qué año es más alta la velocidad promedio de un auto en el momento que tiene un accidente? ¿En qué año hay más número de muertos?
- b) Discute si hay una dependencia entre la velocidad y el número de víctimas (accidentes) ¿Y velocidad con el número de muertos?

A continuación se presenta un párrafo extraído de una noticia real del periódico que tiene anexo al gráfico. Se pide hacer un comentario sobre la interpretación que se hace del gráfico, valorando si se está de acuerdo con la interpretación del periodista.

La velocidad indebida es más peligrosa que la excesiva

Como se muestra en el gráfico “a menos velocidad, más accidentes”. Y tal como afirma automovilistas Europeos Asociados (AEA), el peligro de la carretera reside en realidad en la velocidad inadecuada que mantienen los vehículos. Para Francisco Huerta, presidente de esta asociación. “es tan peligroso ir muy deprisa como viajar excesivamente lento. Por este hecho los radares no son la solución real a los problemas de los accidentes”. Esta apreciación ha sido defendida por la asociación ya que se ha probado que ha bajado la velocidad media de los conductores. No así los accidentes.

- c) Haz un comentario sobre la interpretación que se hace del gráfico en la noticia. ¿Estas de acuerdo?
- d) Supón que eres Francisco Huerta, Presidente de la asociación AEA. Basándote en el gráfico intenta explicar que la velocidad excesiva no es un factor decisivo en los accidentes automovilísticos. Explica cómo lo harías.
- e) Supón que eres un agente de seguridad vial. Basándote en el gráfico intenta explicar como la velocidad es un factor decisivo en los accidentes automovilísticos. Explica como lo harías.

En primer lugar se realiza un análisis *a priori* en que se identifican las tareas y los procesos que se esperan de la actividad, en función del modelo presentado en la figura 2. se caracteriza el nivel de complejidad esperado en el desarrollo de la actividad, En segundo lugar se realiza un análisis del aula a través de un episodio del aula en que se caracterizan los procesos que emergen, y se utiliza nuevamente el modelo de la figura 2 para caracterizar el nivel de complejidad. Finalmente se contrasta el análisis *a priori* y el de aula.

Análisis *a priori*

En el cuadro 2 se identifican las tareas, procesos y se caracteriza el nivel de complejidad esperado en la actividad según las preguntas de la clase 5.

Cuadro 2: Componentes de la competencia de argumentación, clase 5

Pre.	Tareas	Procesos	Complejidad
a)	Lectura de gráficas	Identificar datos	Reproducción
b)	Interpretar gráficas Traducir a otra representación Estudiar dependencia de variables	Interpretar datos	Conexión
c)	Interpretar gráficas Estudiar dependencia de variables	Interpretar datos Justificar	Generalización
d)	Interpretar gráficas Estudiar dependencia de variables	Justificar Reflexionar sobre la argumentación	Reflexión
e)			

Los niveles de complejidad de la pregunta a) y b) se determinan con la relación entre las tareas y los procesos. A simple vista la pregunta b) es más compleja que la pregunta a); esta apreciación se caracteriza por las tareas y procesos implicados: la lectura se asocia a identificar datos que determinan un nivel de reproducción, en cambio la interpretación de gráficas se asocia a interpretar los datos y corresponde a un nivel de conexión. En la pregunta c) las tareas se mantienen, pero con la nueva condición de decidir si se está de acuerdo, se promueve el proceso de justificar; la aparición de este proceso promueve un nivel de generalización. Finalmente en las preguntas d) y e) se espera que se desarrolle el proceso de reflexionar sobre la argumentación, que se asocia a un nivel de reflexión.

Análisis del aula

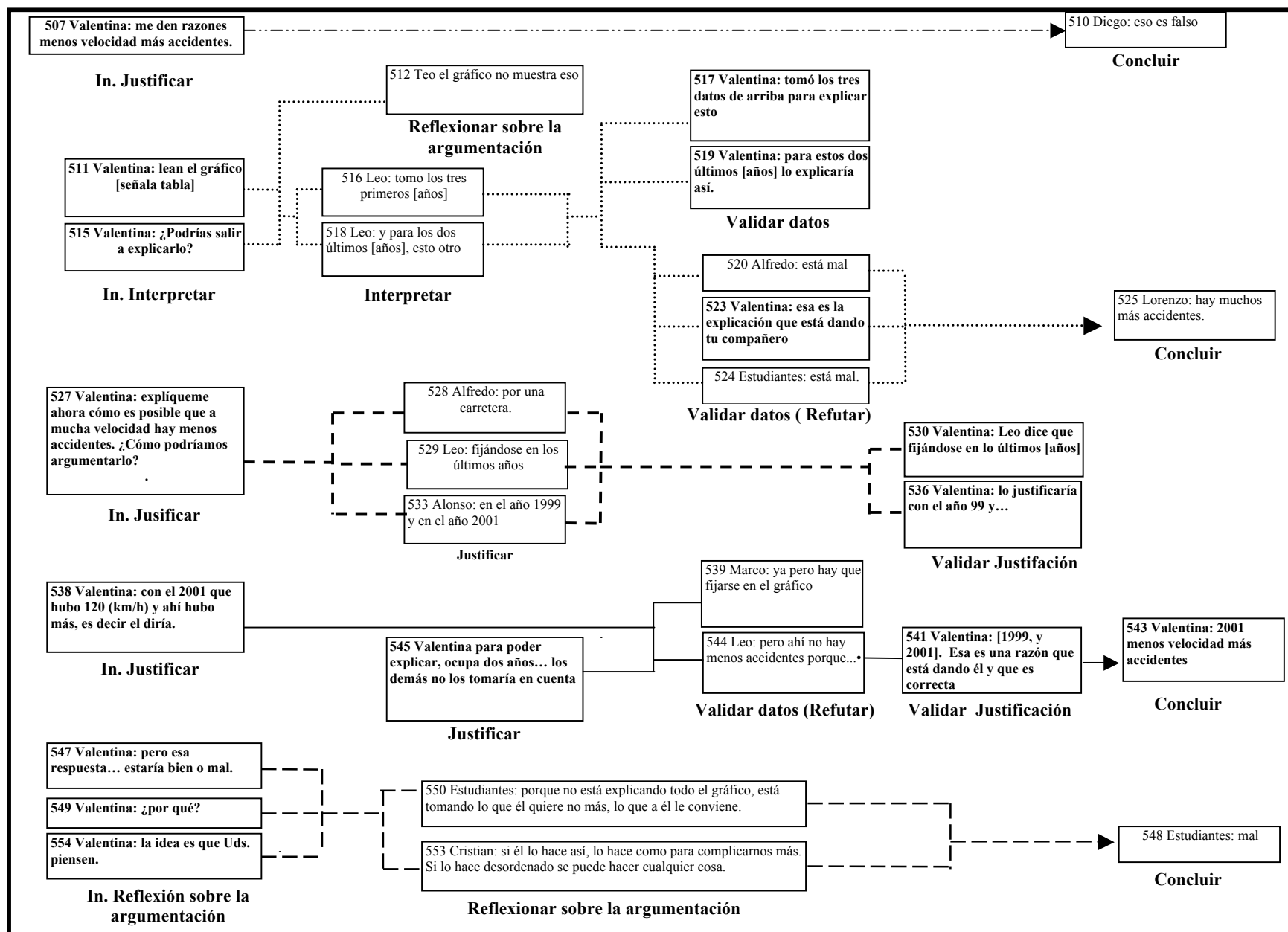
Se ha analizado un episodio que corresponde a gran parte del desarrollo de las preguntas d) y e). En resumen, se ha dado inicio a la pregunta, pero los estudiantes no las entienden, muestran confusión y dicen que la interpretación de la noticia es falsa.

En el *mapa de proceso* se han caracterizado los procesos que emergen del episodio. Los números indican la secuencia en el episodio. Se aprecian cinco secuencias argumentativas señaladas con cinco tipos de líneas distintas, en algunas se identifican secuencias conformadas por un mismo procesos que hemos denominado ciclo. La flecha al final de una secuencia argumentativa significa que ha terminado en una conclusión.

En el mapa de proceso la primera secuencia se compone solamente de dos acciones, un inicio y una conclusión sin desarrollarse más procesos. En la segunda secuencia se desarrolla un ciclo en torno a interpretar datos que termina en una conclusión. En la tercera secuencia se desarrolla un ciclo en torno al proceso de justificar que no termina en una conclusión. La cuarta secuencia también es un ciclo en torno a la justificación que finaliza con una conclusión. Finalmente la quinta secuencia es un ciclo en torno al proceso de reflexionar sobre la argumentación, proceso que se da de manera inicial en el aula pero que no se alcanza a desarrollar.

Al observar de manera global el mapa de proceso se aprecia que las continuas inducciones de Valentina evidencian el esfuerzo de la profesora para que los estudiantes interpreten y justifiquen bajo las nuevas condiciones impuestas en la actividad. Sin embargo en la cantidad de refutaciones por parte de los estudiantes se aprecia que esta intención es difícil de llevar a cabo; si Valentina validaba una interpretación o justificación, luego surgía una acción de refutación de un estudiante. Las conclusiones que se obtienen concuerdan con este hecho, las dos primeras conclusiones de los estudiantes son contrarias a la solicitud de Valentina para argumentar «a menos velocidad más accidentes», y la tercera conclusión la comunica Valentina y no los estudiantes. Finalmente cuando se pide una reflexión acerca de este tipo de actividad, los estudiantes no dudan en expresar que está mal, y sus reflexiones giran en torno a justificar la errónea interpretación que se hace de la gráfica.

Mapa de proceso



Este episodio nos sirve para caracterizar el nivel de complejidad no solo en el episodio, sino también de toda la actividad, puesto que se desarrollan las preguntas en que se espera el nivel de complejidad más alto de reflexión.

En la figura 3 se caracterizan los procesos identificados en el mapa de proceso. El nivel de reflexión solamente se desarrolla de forma inicial, por tanto la complejidad corresponde a un nivel de generalización.

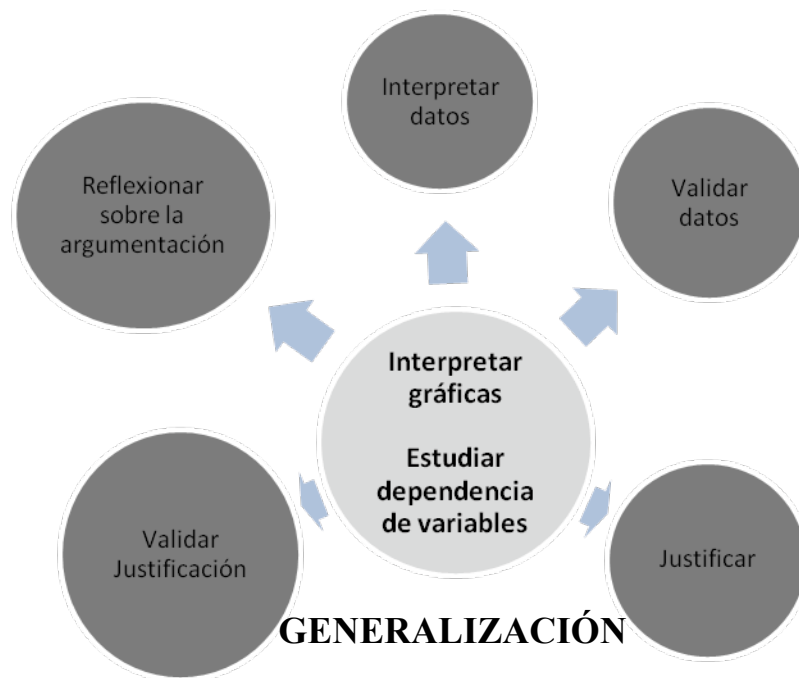


Figura 3: Competencia de argumentación, clase 5.

La complejidad de la actividad matemática en este episodio se ha elaborado para que sea de un nivel de *reflexión*; desde el punto de vista de la argumentación este nivel se cumple si los estudiantes identifican qué datos de la gráfica pueden llevar a una interpretación distinta a la que anteriormente ellos habían establecido y las razones que tenía el protagonista de la noticia- Francisco Cerda- para que no se tomaran medidas contra la alta velocidad de los automóviles. Si bien los estudiantes identifican los datos, no son capaces de tener una actitud crítica frente a la actividad y sus reflexiones se limitan a justificar el error de la interpretación expuesta por la persona en la noticia, y no en desarrollar argumentos de los intereses personales para hacerlo. Por tanto no se logró el nivel de reflexión esperado y solo se obtiene el nivel de generalización. Si bien la falta de tiempo era un factor relevante para explicar esto, desde un punto de vista de las normas matemáticas (Yackel y Cobb, 1996) se puede explicar

la razón para que no se alcanzara el nivel de reflexión. Los estudiantes no están acostumbrados a desarrollar este tipo de actividades en que se cambien las normas ni tampoco a actividades que impliquen una reflexión, en este caso sobre la posibilidad de más de una interpretación. Por tanto no es de extrañar que al finalizar la clase solo unos cuantos estudiantes levantaran la mano indicando que comprendieron el problema.

Finalmente se destaca la ausencia del proceso de fundamentar. En el cuarto ciclo, en el que se intenta refutar la justificación, se pone en evidencia la necesidad de explicitar los fundamentos. Pero ni los estudiantes ni la profesora buscan los fundamentos y la discusión se resuelve sin que finalmente se llegara a un acuerdo. La ausencia de acciones que se dirijan a los fundamentos no es un hecho aislado si no que se da a lo largo de la aplicación de la unidad didáctica.

Otro aspecto a destacar en la competencia de argumentación es la relevancia que tiene el proceso de *interpretar datos* en la secuencia argumentativa. La interpretación es un proceso que no aparece en la estructura argumentativa de Toulmin ni en la adaptación para matemáticas de Krummheuer (1995) que han seguido el resto de autores que han estudiado la argumentación en matemáticas (Stephan y Rasmussen, 2002; Whitneack y Knipping, 2002; Yackel, 2002; Rasmussen et al. 2004; Pedemonte, 2005). Sin embargo, en nuestro estudio experimental se ha evidenciado que las acciones de interpretar son parte de la argumentación colectiva, lo que se pone de manifiesto en la variedad de acciones en los episodios de clase en que la profesora induce a interpretar, los estudiantes y profesora interpretan, la profesora valida la interpretación, los estudiantes justifican la interpretación, y finalmente la profesora valida la justificación de la interpretación. Es decir, la interpretación es uno de los aspectos centrales en la secuencia argumentativa en un tópico de interpretación de gráficas. En el mapa de proceso se ilustra este hecho en la segunda secuencia argumentativa. La interpretación es la acción con la mayor frecuencia tanto en la profesora como en los estudiantes. Si no fuera parte de la estructura argumentativa, perdería riqueza la caracterización de la argumentación.

Para entender mejor la naturaleza de la interpretación, en el mismo mapa de proceso 4.5.13 se puede observar que al terminar esta segunda secuencia argumentativa en torno a la interpretación, se inicia un nuevo ciclo en torno a la justificación. En esta secuencia se refuta la afirmación con una interpretación de los datos, para luego darse una acción de justificación

por parte de la profesora. Este comportamiento refleja que la interpretación se da en muchos casos previo a la justificación.

La figura 5.1 ilustra la relación que hemos establecido entre la interpretación y los otros componentes del modelo de Toulmin.

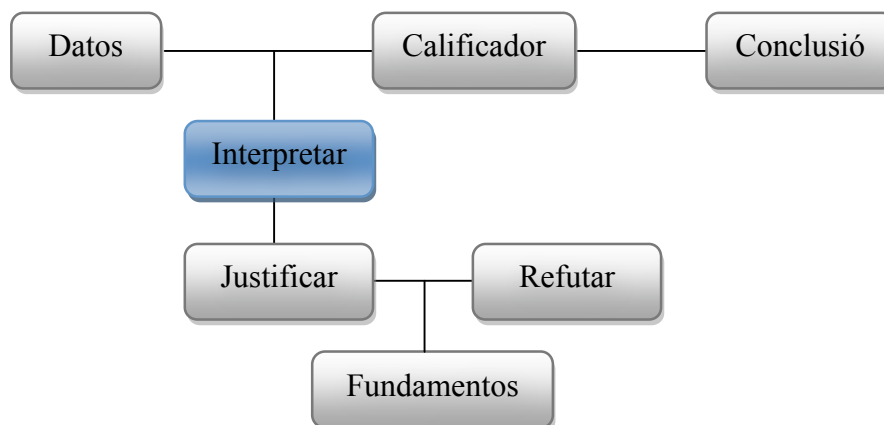


Figura 4: Interpretación en el modelo de Toulmin

Asimismo en la adaptación de Krummheuer (1995) la interpretación cumple la misma función que la ilustrada en la figura 4, sirve de sostenimiento a los datos y apoya la justificación.

La interpretación aparece en la estructura argumentativa en el tópico de interpretación de gráficas, sin embargo en otros tópicos matemáticos la interpretación pueden estar ausente y en cambio los fundamentos sí emergieran como un proceso en el aula. Como resultado, sostenemos que la secuencia argumentativa que se genere depende de los contenidos matemáticos que se pongan en juego, y no es transversal, tal como suponen en el común de los estudios sobre argumentación matemática.

Conclusiones

Hemos propuesto un modelo de competencia matemática que se ha aplicado para estudiar la argumentación. Tres componentes articulan la competencia de argumentación; los *niveles de complejidad* identifican el nivel cognitivo de una *tarea matemática* según el *proceso*.

El elemento central de la competencia son los procesos. Las tareas cambian a lo largo de la matemática escolar, en cambio los procesos se repiten y se desarrollan a largo plazo. Del mismo modo, la competencia de argumentación se desarrolla a largo plazo en la actividad matemática escolar.

La competencia de argumentación tiene varias funciones didácticas. En este artículo nos hemos enfocado en determinar el nivel de complejidad de una actividad en su planificación y en su aplicación en la clase. Además, permite caracterizar los patrones de interacción según los procesos que se secuencian. Estos aspectos se discuten en el informe extenso del estudio.

Referencias bibliográficas

- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221-266.
- de Lange, J. (1995). Assessment: No change without problems. En T. A. Romberg (Ed.), *Reform in school mathematics and authentic assessment* (pp. 87–172). New York: SUNY Press.
- Inglis et al. (2007). Modelling mathematical argumentation: the importance of qualification. *Educational Studies in Mathematics*, 66, 3-21.
- Krummheuer, G. (1995). The ethnography of argumentation. En P. Cobb y H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 229-269). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Leinhardt, G., Zaslavsky, O., y Stein, M. K. (1990). Functions, graphs, and graphing: Task, learning, and teaching. *Review of Educational Research*, 60, 1-64.
- Mariotti, M. A. (2006). Proof and proving in mathematics education. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp.173–204). Rotterdam: Sense.
- National Council of Teachers of Mathematics. (NCTM). (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.
- Niss, M. (1999). Competencies and Subject Description. *Uddanneise*, 9, 21-29.
- OCDE. (2003). *Marcos teóricos de PISA 2003 Conocimientos y destrezas en Matemáticas, Lectura, Ciencias y Solución de problemas*. Madrid: OCDE.

- Rico, L. y Lupiáñez, J. L. (2008). *Competencias matemáticas desde una perspectiva Curricular*. Madrid: Alianza.
- Pedemonte, B. (2005). Quelques outils pour l'analyse cognitive du rapport entre argumentation et démonstration. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 25(3), 313–348.
- Rasmussen, C., Stephan, M., y Allen, K. (2004). Classroom mathematical practices and gesturing. *Journal of Mathematical Behavior*, 23, 301–323.
- Solar, H. (2006). *La interpretación de gráficas y tablas en marcos y materiales curriculares a través de un análisis de texto*. Tesis de master. Bellaterra: Universitat Autònoma de Barcelona (UAB).
- Stephan, M. y Rasmussen, C. (2002). Classroom mathematical practices in differential equations. *Journal of Mathematical Behavior*, 21, 459-490.
- Strauss, A., Corbin, J. (1990). *Basic of Qualitative Research: Grounded Theory, procedures and techniques*. Londres: Sage Publications.
- Toulmin, S. (1958). *The uses of argument*. England: Cambridge University Press.
- Whitenack, J., y Knipping N. (2002). Argumentation, instructional design theory and student's mathematical learning: a case for coordinating interpretive lenses. *Journal of Mathematical Behavior*, 21, 441-457.
- Yackel, E. (2002). What we can learn from analyzing the teacher's role in collective argumentation. *Journal of Mathematical Behavior*, 21, 423-440.
- Yackel, E. y Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4), 458-477.