

ALGUNOS ELEMENTOS PARA UN ANÁLISIS “DIACRÓNICO” DEL CONCEPTO DE INFINITO -Informe de investigación-

José Luis Belmonte
*Centro de Apoyo al Profesorado
de Leganés (Madrid)*

Modesto Sierra
Universidad de Salamanca

1. INTRODUCCIÓN: ENFOQUE, OBJETIVOS E HIPÓTESIS DE LA INVESTIGACIÓN

En el ámbito del VIII Simposio de la SEIEM (La Coruña, 2004) se presentó el trabajo *Intuición y esquemas conceptuales del infinito: actualización* que consistía, principalmente, en una síntesis de las investigaciones llevadas a cabo en los últimos veinticinco años sobre el concepto de infinito. Así mismo, se presentaban las líneas directrices para la realización de una tesis doctoral que adoptaría como fundamento teórico algunas de las ideas allí expuestas. Durante el último año se han confeccionado los cuestionarios, que han sufrido una prueba discriminativa previa, se han aplicado a las muestras elegidas y se ha efectuado un primer análisis de los datos recogidos con el fin de diseñar con precisión su categorización y tratamiento informático.

Como ya se indicó en la comunicación mencionada, los objetivos principales consisten en detectar y observar la evolución temporal de los modelos tácitos intuitivos¹ relacionados con la noción de infinito (FISCHBEIN, 1987) así como estudiar la generación y enriquecimiento de su esquema conceptual² (TALL y VINNER, 1981) y la encapsulación³ correspondiente (DUBINSKY, 1991),³ partiendo de las nociones de objeto *embodied*⁴ (GRAY y TALL, 2001) y metáfora conceptual⁵ (LAKOFF y NÚÑEZ, 2000). Igualmente se analizará la influencia del uso de las diferentes representaciones semióticas⁶ y la sensibilidad hacia estas de las categorías de respuestas recogidas (DUVAL, 1993).

1. Analogías, paradigmas, metáforas, diagramas, etc son todos modelos mentales. Son sustitutos que nos ayudan en la resolución de varios tipos de problemas [...] En los procesos de razonamiento pueden intervenir modelos sobre los que nos somos conscientes y que sustituyen *tácitamente* algunos de los componentes originales del proceso de razonamiento. Tales modelos pueden haber sido, inicialmente, conscientes pero posteriormente han sido olvidados. Estos modelos continúan actuando e influyendo en los procesos de razonamiento sin que el individuo sea consciente de sus orígenes y efectos (FISCHBEIN, 2001). Fischbein estableció que la intuición era algo más que el mero hecho de responder de forma inmediata usando el sentido común.

2. Entendido como la estructura cognitiva total asociada al concepto, la cual incluye todas las imágenes mentales, propiedades, procesos, ...

3. Entendida como la conversión de un proceso en un objeto matemático. Gray y Tall introducen la noción de *procepto*, en el cual el símbolo establece el eje entre proceso y concepto (TALL y GRAY, 1994)

4. Concepción mental de un objeto físico en el mundo real percibido a través de los sentidos

5. Se trata de un mecanismo cognitivo fundamental que consiste en la aplicación de un dominio fuente en un dominio objetivo que conserva la estructura inferencial.

6. Para Duval son producciones constituidas por el empleo de signos que pertenecen a un sistema de representación que tienen sus propias restricciones de significado y de funcionamiento. Representaciones semióticas que pertenecen a sistemas semióticos diferentes son, por ejemplo, una figura geométrica, un enunciado en lenguaje natural, una fórmula algebraica o un gráfico cartesiano; no se trata de simples medios de exteriorización de la representaciones mentales para fines de comunicación, sino que son esenciales para la actividad cognitiva del pensamiento.

En cuanto a las hipótesis bajo las que se realiza este estudio y cuyo contraste se aspira a completar a lo largo del mismo proponemos las siguientes:

- El carácter contradictorio al que conducen las intuiciones primarias del infinito y la inevitable naturaleza metafórica del lenguaje utilizado dan lugar a una evolución muy lenta de este concepto. En particular, la intrusión en los enunciados que suponen las referencias al mundo real en términos de *objetos* -dados, recipientes, cuerdas, ...-, *acciones* -cortar, rellenar, alargar, ...- o simplemente alusiones *geométricas* -segmento, línea, recta, cuadrado, ...- impedirán o dificultarán en numerosas ocasiones la accesibilidad a los procesos infinitos. Consideramos que dicho carácter contradictorio, constatado prácticamente en todas las investigaciones realizadas hasta el momento, experimenta a nivel global, una evolución apenas observable en lo que a los aspectos intuitivos se refiere. La adquisición, por parte del alumnado, de nuevos conocimientos matemáticos a lo largo del tiempo considerado en la investigación supone sólo una cierta *adaptación evolutiva* a los diferentes niveles en los que se halla; no desaparecen, en absoluto, las contradicciones ni las intuiciones primarias. En cambio, en lo que a los aspectos formales se refiere, aquellos que de alguna manera guardan relación con tales conocimientos -propiedades de conjuntos numéricos, noción de límite, etc- se evidenciará un claro progreso que, conjeturamos, dependerá del nivel académico.
- Aparte de los modelos intuitivos detectados por Fischbein⁷ en sus trabajos, creemos que será posible descubrir algunos otros, como por ejemplo el role paliativo que supone el carácter *indefinido/incomparable* con que los estudiantes dotan al infinito y que les permite *resolver* las eventuales contradicciones que puedan surgir.
- Esperamos confirmar, al cuantificar rigurosamente los resultados recogidos, que la utilización de diferentes representaciones de un mismo problema -numérica, geométrica, gráfica, ...- pone de manifiesto que el concepto de infinito es, si cabe, más sensible a tales representaciones que otros conceptos ya estudiados.
- Suponemos que se pondrá de manifiesto, en todas las edades consideradas, la existencia de obstáculos tanto epistemológicos como didácticos y se procederá a su tipificación si su evidencia es lo suficientemente clara.
- Dada la amplitud que presentan los instrumentos de recogida de información desarrollados en este trabajo confiamos en corroborar y, en su caso ampliar y refinar, las líneas de coherencia introducidas y definidas por Garbín⁸ (GARBÍN, 2000).

7. Según Fischbein, *aunque sabemos perfectamente bien que los puntos matemáticos no tienen dimensiones, continuamos pensando tácitamente, inconscientemente, en términos de pequeñas manchas. Prácticamente, psicológicamente, no podemos desembarazarnos de estas imágenes; evidentemente si comparamos dos conjuntos en términos de pequeñas manchas del mismo tamaño, los dos conjuntos no son equivalentes [...] El mismo sentimiento de inquietud aparece con respecto a todas las comparaciones de conjuntos infinitos. Es imposible imaginar que el conjunto de puntos de un segmento, de un cuadrado o un cubo sean equivalentes [...] El modelo tácito punto-mancha interfiere en nuestro procesos de razonamiento y nos impide alcanzar el sentimiento de consistencia lógica, a pesar del hecho de que formalmente no nos está permitido confiar en consideraciones figurativas. Pero las cosas son aún más complicadas. Con el fin de eliminar estas contradicciones podríamos pretender que todos estos conjuntos son infinitos y, por lo tanto, que todos son equivalentes. No es tan simple. Dos conjuntos pueden ser infinitos y, sin embargo, no ser equivalentes en el sentido de Cantor. En otros términos, intentar resolver, intuitivamente, las paradojas mencionadas de una manera más sutil no nos ayuda. Sustituimos el modelo figurativo de punto-mancha por uno más complejo, aunque aún intuitivo, como es el de infinito = infinito y como hemos visto esta estrategia no nos ayuda más. Simplemente no cierto en todos los casos que infinito = infinito. Pero lo más importante de todo esto no es que existan estos modelos tácitos, sino la persistencia y el impacto de tales modelos pictóricos incluso en individuos con cierto entrenamiento matemático, conscientes de la naturaleza abstracta de los objetos matemáticos. [...] Otro modelo tácito tiene que ver con el carácter inagotable del infinito [...] Así, si continuamos el proceso de división de un segmento indefinidamente, se podrán alcanzar todos los puntos de dicho segmento. En nuestra opinión, esta interpretación de infinito es la razón esencial por la que, intuitivamente, sólo hay un tipo o nivel de infinito. Un infinito que es equivalente a inagotable no puede ser superado por un infinito más rico. Estos dos modelos tienden a entrar en conflicto entre ellos* (FISCHBEIN, 2001).

8. *Finamista, potencial y actual* según el número y tipo de respuestas dadas por un alumno en un cuestionario.

2. SELECCIÓN DE LA MUESTRA

Dado que el objetivo fundamental que se marca este trabajo supone el estudio de la evolución del concepto a lo largo del tiempo pareció conveniente seleccionar una muestra que, aparte de ser suficientemente representativa, abarcara un intervalo temporal amplio; así, los niveles elegidos oscilan entre el primer curso de Educación Secundaria Obligatoria, 12 años, y el primer curso de estudios universitarios, 19 años, correspondientes a carreras científicas y técnicas⁹ (ver **Tabla 1**). También se considera la posibilidad de ampliar tal periodo hasta sexto curso de Educación Primaria pero su aplicación se encuentra en función de diversas circunstancias. Por lo tanto, la variable temporal tendrá los suficientes valores para permitir, entre otras cosas, el estudio de correlaciones.

Centros				Profesores
	PRI	SEC	UNI	
Cuestionario previo	0	2	1	9
Cuestionario definitivo	1	8	4	34
Total	1	10	5	43

Tabla 1: distribución de centros

En los IES siempre se solicitaron grupos del mayor rendimiento académico posible si se trataba de 1º, 2º y 3º de ESO y para el resto de cursos siempre se ha contado con alumnos y alumnas que cursaban la especialidad de ciencias, tanto en 4º de ESO como en 1º y 2º de Bachillerato. En cuanto a las carreras universitarias, han participado en la experiencia las licenciaturas de Matemáticas y Químicas, las Ingenierías Técnicas de Telecomunicaciones e Informática y la Ingeniería Superior de Informática.

La distribución de las muestras de alumnos seleccionadas queda reflejada en la **Tabla 2**. Como veremos más adelante, en cada nivel no universitario se han utilizado dos cuestionarios diferentes (C1/C2) y en el nivel universitario, a su vez, se aplicaron tres tipos (C1/C2/C3).

C. Previo		C. Definitivo			
	Total	C1	C2	C3	Total
6º PRI		12	12		24
1º ESO	48	83	86		169
2º ESO	51	93	92		185
	99	188	190		378
3º ESO	41	79	95		174
4º ESO	51	85	83		168
	92	164	178		342
1º BTO	41	94	84		178
2º BTO	47	75	80		155
	88	169	164		333
1º UNI	41	75	91	73	239
Total	320				1292

Tabla 2: distribución de las muestras

9. Las investigaciones llevadas a cabo hasta el momento han considerado siempre muestras parciales, o bien el estudio de casos, en niveles concretos, salvo el trabajo inicial de Fischbein, Tirosh y Hess (FISCHBEIN, 1979) que abarcó desde los 10 a los 15 años y fue aplicado a una muestra de más de 300 estudiantes.

3. ELABORACIÓN DE LOS INSTRUMENTOS DE RECOGIDA DE DATOS

Se han elegido como instrumentos de recogida de datos el cuestionario individual, para profesores y alumnos, y la entrevista, sólo para alumnos. Consideraremos a continuación una descripción de los mismos.

3.1.- CUESTIONARIOS

3.1.1.- PARA EL ALUMNADO

Con el fin de establecer un cierto nivel de referencia con los experimentos realizados hasta ahora en este campo, y efectuar una posterior comparación de resultados, se ha revisado la bibliografía correspondiente y se ha decidido crear familias de preguntas, en torno a la misma idea, ya utilizadas por diversos autores, o bien crear otras sugeridas por ellas que permitieran no sólo contrastar sino ampliar la información recogida por aquellas. Aún se han incorporado algunas otras cuya génesis no es tal sino que se basan en ejercicios clásicos de libros de texto de cualquiera de los niveles considerados adaptados en su enunciado al contexto de la presente investigación. La diversidad y amplitud del cuestionario responde fundamentalmente al objetivo de acceder, en la medida de lo posible, a todos aquellos aspectos relacionados con el infinito sobre los que los estudiantes sean capaces de expresarse en lenguaje natural y/o matemático. Así, se ha intentado recorrer todas las representaciones accesibles a los alumnos de cada nivel: numérica, geométrica, algebraica, gráfica, probabilística, etc. De esta manera pretendemos abarcar un espectro amplio de respuestas que un cuestionario breve podría acotar demasiado impidiendo un análisis más fino de los resultados. La misma pregunta planteada en el mismo registro pero con ligeros matices puede sugerir al sujeto, al menos, una nueva expresión o planteamiento de la misma que aporte información complementaria y valiosa o bien le puede permitir el hallazgo de relaciones, analogías o conexiones entre preguntas. En cuanto a los criterios de orden con que aparecen las cuestiones se ha considerado en primer lugar el carácter más elemental de las mismas con el fin de facilitar el acceso a ellas de la mayoría de los estudiantes, afectar su autoestima y crear una disposición positiva para abordar el resto de preguntas; dentro de esta categoría se han dispuesto aquellas de las que se esperaba recoger la información más significativa y esencial; por último, se han incluido las preguntas que bien porque incluían aspectos más sutiles o bien más formales del infinito podían resultar más sofisticadas y quedar sin respuesta debido a dicha dificultad o a la falta de tiempo para su resolución.

Prácticamente todas las preguntas que aparecen en los estudios realizados hasta ahora y en este mismo trabajo se pueden recoger en cuatro categorías definidas en función del tópico que se quiere tratar y del tipo de datos que se pretendan recopilar. Veamos algunos ejemplos.

A) Relación entre conjuntos, tanto discretos como continuos

Imagínate que del conjunto de todos los números naturales $\{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ borramos un millón de números.

a) ¿Cuántos quedan?, ¿por qué?

b) ¿Cuál de los dos conjuntos siguientes crees que contendrá más números:

$\{1, 2, 3, 4, \dots\}$ ó $\{1.000.001, 1.000.002, 1.000.003, \dots\}$?, ¿por qué?

c) ¿Cuál de los dos conjuntos siguientes crees que contendrá más números:

$\{1, 2, 3, 4, \dots\}$ ó $\{3, 6, 9, 12, \dots\}$?, ¿por qué?

(Todos los niveles)

Ordena de menor a mayor los siguientes conjuntos y **explica tu respuesta**:

a) Número de estrellas

d) Número de puntos que caben en un cuadrado de 10 cm de lado

c) Números naturales: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$

b) Número de granos de arena en la Tierra

e) Número de células que forman el cuerpo humano

(1º a 4º ESO)

Compara las líneas A, B y C de la figura.

a) ¿Cuál de ellas es más larga A, B o C?

b) ¿Cuál de ellas contiene más puntos A, B o C?

Justifica tu respuesta

(Todos los niveles menos 1º y 2º de ESO)

a) ¿Cuántos valores (x, y) , reales, satisfacen la ecuación $x + 2y - 3 = 0$?

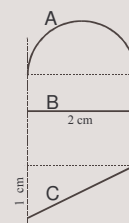
¿Qué significa dicho resultado?

b) Si x sólo pudiese tomar valores en el intervalo $[3, 5]$,

¿cuántas soluciones tendría ahora dicha ecuación?

c) ¿En cuál de los dos casos anteriores se obtiene un número mayor de soluciones, en a) o en b)?, ¿por qué?

(Bachillerato y Universidad)



Supón que tienes que rellenar el interior de un cuadrado de 10 cm de lado con puntos. ¿Puedes indicar qué cantidad de puntos cabrían?. ¿Y en uno de 30 cm de lado?. **Explica tus respuestas**

(Todos los niveles)

B) Aproximación al continuo

Supón que divides un segmento por la mitad y te quedas con una de las partes. Si esta operación la repites todas las veces que desees, ¿qué obtendrás al final?. **Justifica tu respuesta.**

(Todos los niveles)

Considera un número positivo cualquiera; a continuación lo divides entre dos; el resultado lo vuelves a dividir entre dos; el resultado de nuevo entre dos y así sucesivamente. ¿Qué resultado se obtendrá al final?, ¿por qué?

¿Cuál es el número decimal más pequeño entre 2 y 3, si excluyes a ambos?. Si es posible averiguarlo, indica cuál es dicho número; si no es posible, explica por qué.

(Todos los niveles)

Considera un bombo de lotería enorme con todos los números naturales. ¿Cuál es la probabilidad de extraer un 5?, ¿y la de extraer alguno de los números que hay entre 1 y 10.000.000?. **Justifica tu respuesta.**

C) Sumas infinitas

Si tienes el conjunto de segmentos de la figura, donde la longitud de cada uno es la mitad del anterior, y los vas uniendo uno junto a otro, obtendrás un segmento más largo. ¿Cuánto medirá el segmento cuando los hayas unido todos?

a) 2 metros b) Una longitud tan grande que no se puede medir
c) 3 metros d) Infinito

Explica tu respuesta. *(Todos los niveles)*

La suma de las áreas de los triángulos sombreados de la figura es:

a) Finita b) Infinita c) No se puede calcular

Justifica tu respuesta. *(Todos los niveles menos 1º y 2º de ESO)*

Considera la suma $\frac{1}{10} + \frac{2}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{4}{10000} + \dots$, su resultado *(Bachillerato y Universidad)*

a) es un número finito, ¿cuál? b) es un número infinito, ¿por qué? c) no se puede calcular, ¿por qué?

D) Expresión libre de la idea de infinito

Escribe al menos tres palabras, expresiones o frases que signifiquen lo mismo que infinito. También puedes realizar un dibujo sobre el infinito. *(Todos los niveles)*

¿Crees que existen diferentes tamaños de infinito?. Si es así, indica un ejemplo de cada uno de ellos; en caso contrario justifica tu respuesta. *(Bachillerato y Universidad)*

¿Cómo introducirías el concepto de infinito a un estudiante de 2º de ESO?. ¿Y a uno de 2º de Bachillerato?

¿Es correcta la expresión $4 + 5 = 4?$. Si lo es, ¿significaría esto que en un hotel gigantesco con infinitas habitaciones, todas ocupadas, se podrían alojar cinco personas más?. **Explica tu respuesta.**

La estructura de los distintos cuestionarios se presenta en la **Tabla 3**

		ESO				BTO		UNI	
		1	2	3	4	1	2	1	
C O M U N		6							
		9							
		3							
						10			
9	C1/C2								5
11	C1/C2								3
15	C1/C2								3
15									14
Items/nivel		1	2	3	4	1	2	1	Exclusivas

Tabla 3: Estructura de los cuestionarios

Como ya hemos indicado, en cada nivel no universitario se han utilizado dos test diferentes (C1/C2), si bien en alguno de los casos se incluían preguntas comunes. En el nivel universitario, a su vez, se aplicaron tres tipos de test (C1/C2/C3) con la finalidad de incorporar a las cuestiones *comunes* con los niveles anteriores, algunos aspectos más formales. Así, se ha mantenido un determinado

número de preguntas invariables a lo largo bien de todos los niveles y cursos, bien de algunos de ellos; por ejemplo, si observamos la **Tabla 3** podemos ver que 6 de los ítems han permanecido a lo largo de todos los cursos, 9 de ellos desde 3º de ESO hasta el primer curso universitario, etc. Por otra parte, cada cuestionario contenía preguntas *exclusivas* del mismo; así el nivel correspondiente a 1º y 2º de ESO presenta 5 ítems propios que no se repiten en otros cursos. El enunciado de las cuestiones *comunes* presentaba una dificultad, debía ser asequible, en su contenido, a los niveles inferiores sin ser trivial a los superiores con el fin de evitar la desmotivación y el consiguiente rechazo de cualquiera de ellos. El objetivo de estas preguntas es el de establecer una línea de conexión a lo largo de ciertos tramos de edades que permita analizar la evolución de las respuestas de manera más precisa que si utilizamos sólo preguntas distintas para distintos niveles. Por su parte, las preguntas *exclusivas* pretendían incluir contenidos correspondientes a la situación actual de los sujetos con el fin de medir su incidencia en la paulatina construcción del concepto que estudiamos.

Así mismo, se ha registrado un conjunto de datos propios de cada alumno y alumna que han realizado el cuestionario, tales como género, calificaciones en matemáticas en los dos últimos cursos y situación socioeconómica de la familia medida a través del nivel de estudios y la profesión de los padres. Esta información nos permitirá estudiar su influencia tanto en la evolución del concepto a nivel formal como la capacidad y riqueza de vocabulario para expresarse sobre el mismo, dado el carácter básicamente intuitivo con que se presenta en la mayor parte de las edades consideradas.

El tiempo del que disponían los alumnos para responder a los cuestionarios siempre fue de 50 minutos; no obstante, en 1º y 2º de ESO nunca se superaron los 40 minutos y, en cambio, en el resto de los niveles fue preciso ampliar a 55 minutos en la mayoría de los casos.

3.1.2.- PARA EL PROFESORADO

El cuestionario elaborado para el profesorado -exclusivamente de secundaria- pretendía recabar tres tipos de datos. En primer lugar se les solicitaba que indicasen, dentro del listado de temas correspondientes al programa de cada curso, cuáles habían impartido hasta el momento de realizar los alumnos su cuestionario. También debían indicar la referencia del libro de texto utilizado, si tal era el caso. Y, por último, se les pedía que indicasen, para cada uno de los niveles que impartían, qué referencias al infinito introducían en sus clases: ejemplos, definiciones, ejercicios, imágenes, paradojas, ... Con esta información se podrá tener una referencia, si no exhaustiva sí orientadora del tipo de *imágenes mentales* a las que tiene acceso el alumnado en el desarrollo habitual de su instrucción. Se pueden encontrar diversos estudios de casos sobre las creencias del profesorado en las referencias bibliográficas (PENALVA, 1996 y SBARAGLI, 2004).

3.2.- ENTREVISTAS.

Este tipo de instrumento para la obtención de información adicional se ha aplicado con el objetivo de matizar las ideas más recurrentes recogidas en las respuestas a los cuestionarios escritos: definición de punto, equivalencia entre infinitos, naturaleza del infinito, concepciones del continuo y su relación con el infinito, etc. Para evitar la mediación excesiva e inductora en los diálogos por parte del entrevistador, se organizaron las entrevistas a partir de parejas de alumnos y alumnas, en general del mismo nivel y, si era posible, enfrentados en algunas de sus respuestas con el fin de que fuesen ellos los que utilizasen sus propios argumentos para refutarse y resolver contradicciones. Si bien es cierto que en la mayoría de los casos no ha sido fácil, a veces ni siquiera posible, que entablasen una discusión autónoma sobre la cuestión en debate, sí podemos decir que en las ocasiones en que ha ocurrido ha resultado una experiencia reveladora, recogiendo perspectivas que no se manifestaron explícitas en la lectura de los cuestionarios y que, sin duda, ayudarán en la interpretación de comportamientos generalizados. La entrevista, semiestructurada, giraba en torno a algunas preguntas y respuestas seleccionadas para cada pareja de alumnos en particular, atendiendo a la inconsistencia de estas últimas, a su incoherencia con otras respuestas, a su originalidad, etc. En ocasiones se les recordaba lo que habían respondido por escrito -unos dos meses antes aproximadamente- con el fin de

observar sus comportamientos pero, en general, se les pedía que comenzasen respondiendo de nuevo a fin de localizar contradicciones, la adquisición de grado de madurez que entonces no se daba o bien de constatar un cierto nivel de continuidad en sus concepciones.

Se realizaron un total de 34 entrevistas a 68 alumnos. La duración de las mismas osciló entre 25 y 35 minutos. La distribución de las mismas por niveles y por tipos de cuestionarios se presentan en la **Tabla 4**. La transcripción de las mismas aún no se ha completado.

	Alumnos entrevistados	C1	C2
1º ESO	8	2	6
2º ESO	10	4	6
3º ESO	10	5	5
4º ESO	10	4	6
1º BTO	14	7	7
2º BTO	16	6	8

Total 68

Tabla 4: distribución de entrevistas

4.- ESTADO ACTUAL DE LA INVESTIGACIÓN.

Hasta el momento se ha efectuado un primer análisis de los datos obtenidos en los cuestionarios del alumnado con el fin de acotar las diferentes categorías de respuestas encontradas y diseñar la presentación final de los resultados. Se está en el proceso de introducir y definir ciertos parámetros que permitan recoger de manera sintética toda la información proporcionada por aquellos así como representar gráficamente tanto la evolución de la madurez del concepto como las diferentes correlaciones entre las variables consideradas. Para el tratamiento informático se hará uso del software SPSS con el fin de optimizar el proceso de datos y la interpretación de los resultados.

En cuanto a las entrevistas, ya se ha efectuado la transcripción de las mismas con una duración aproximada de dieciséis horas y, a continuación, se procederá a sistematizar los tipos de comportamientos hallados con el fin de incorporarlos al análisis de los cuestionarios.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. DUBINSKY, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking, 356-366. *Advanced Mathematical Thinking*, Tall, D (ed). Kluwer Academic Publisher. Dordrecht
2. DUBINSKY, E., WELLER, K., McDONALD, M.A. y BROWN, A. (2005). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An APOS analysis, Part 2. No publicado
3. DUVAL, R. (1983). L'obstacle du dédoublement des objets mathématiques. *Educational Studies in Mathematics*, 14, 386-414
4. DUVAL, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, 37-65
5. FISCHBEIN, E., TIROSH, D. & HESS, P. (1979). The intuition of infinity. *Educational Studies in Mathematics*, 10, 2-40
6. FISCHBEIN, E. (1987). *Intuition in Science and Mathematics*. Reidel, Dordrecht.
7. FISCHBEIN, E. (2001). Tacit models of infinity. *Educational Studies in Mathematics*, 48 (2/3), 309-29
8. GARBIN, S. (2000). *Infinito actual: inconsistencias e incoherencias en estudiantes de 16-17 años*. Tesis doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona
9. GARBÍN, S. y AZCÁRATE, C. (2002). Infinito actual e inconsistencias: acerca de las incoherencias en los esquemas conceptuales de alumnos de 16-17 años. *Enseñanza de las Ciencias*, 20 (1), 87-113
10. GARDINER, A. (1985). Infinite processes in elementary mathematics. How much should we tell the children?. *Mathematical Gazette*, 69, 448, 77-87
11. GRAY, E. y TALL, D. (2001). Relationships between embodied objects and symbolic concepts: an explanatory theory of success and failure in mathematics. *Proceeding de PME25*, Utrecht, 65-72
12. LAKOFF, G. y NÚÑEZ, R.E. (2000). *Where Mathematics Comes From*. Basic Books
13. MONAGHAN, J. (2001). Young people's ideas of infinity. *Educational Studies in Mathematics*, 48 (2/3), 239-57
14. NÚÑEZ, R.E. (2005). Conceptual Metaphor and the Cognitive Foundations of Mathematics: Actual Infinity and Human Imagination. Próxima publicación en *Journal of Pragmatics*
15. PENALVA, M.C. (1996). *Estudio sobre la comprensión del concepto de número cardinal de un conjunto infinito*. Tesis no publicada. Valencia
16. SBARAGLI, S. (2004). *Teachers' Convictions on Mathematical Infinity*. Tesis no publicada. Bratislava
17. TALL, D.O. y VINNER, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics* 12(2), 151-169
18. TALL, D.O. y GRAY, E. (1994). Duality, ambiguity and flexibility: a "proceptual" view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 25, 2, 116-140.