

La regla de tres en Vallejo y su época

Bernardo Gómez Alfonso

- Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Valencia

Resumen

- Nuestro objeto de este estudio es la *regla de tres* y sus métodos de resolución.
- El enfoque investigador es el del *análisis histórico epistemológico* propio de la didáctica de las matemáticas
- Se centra en el *Tratado Elemental* de Vallejo y su época.
- Nos interesan caracterizar sus aportes a la enseñanza, reflejados en :
 - **Su método** : orden, enlace y fundamento de las matemáticas objeto de nuestro estudio.
 - **Sus concepciones epistemológicas**, reflejadas en las definiciones, los ejemplos o problemas y los procedimientos de resolución que enseña.
 - **Su relación** con el desarrollo matemático de la época en que se insertan.

Justificación y objetivos

- La importancia escolar de la *regla de tres* es de sobra conocida, por sus aplicaciones, por su valor matemático y por su recurrencia en la enseñanza.
- Está ligada a los problemas de estructura multiplicativa, los cuáles han sido objeto de interés para la investigación didáctica reciente en el marco de la psicología del aprendizaje. Pero el enfoque investigador sobre este tema ha dejado por cubrir huecos que corresponden al *análisis histórico epistemológico*.
- Pretendemos cubrir uno de estos huecos: el de la enseñanza de la *regla de tres* en España en un periodo clave (*) para comprender la educación y formación matemática española actual.

(*) de las Cortes de Cádiz (1812) a la regulación de los niveles educativos por la ley *Moyano* (1857)

El Tratado Elemental de Vallejo

Al comenzar el siglo XIX el interés por el estudio de la matemática no se situaba tanto en las instituciones civiles como en las militares. Los matemáticos de estas instituciones no realizaron aportaciones a las matemáticas en sí mismas, pero ofrecieron obras enciclopédicas en las que se presentaban avances del siglo XVIII que no se habían publicado o difundido en España.

Sintetizaban y copiaban a autores precedentes, reelaborando sus ideas y preocupándose por el rigor, coherencia interna y método de presentación de las mismas.

Ejercieron la doble función de dar una visión general de las matemáticas y la de ofrecer libros de texto actualizados para las instituciones en las que trabajan sus autores, contribuyendo a mejorar la enseñanza y a renovar la bibliografía matemática española.

Tal vez, la más importante de estas obras fue el *Tratado Elemental* de Vallejo, que comenzó a publicarse en 1813 en 5 tomos. De sus diversas reediciones, hemos estudiado la cuarta de 1841, la cual es fruto del periplo europeo que realizó Vallejo por razones políticas. En 1951, fue aprobada en el concurso de textos para la segunda enseñanza.

La intención didáctica del *Tratado* de Vallejo

Vallejo dedica un capítulo introductorio a explicar *el método* que ha seguido en el texto y a dar recomendaciones para el estudio de las matemáticas.

Su método, resulta de conciliar *la claridad, la sencillez, la facilidad en la ejecución de las operaciones y la exactitud*.

Para ello, atiende a la *elección de doctrina, modo de exponerla y extensión*; a la observación de sus estudiantes y a someter los borradores al juicio de sus alumnos.

Las recomendaciones para el estudio de las matemáticas, son el fruto de sus observaciones y experiencia como profesor y de la lectura de autores contemporáneos que han tratado este tema y se resumen en:

- un buen método de estudio, que se sintetiza en la metáfora de la escalera;
- la lectura detenida y repetida de los párrafos hasta que se conserve en la memoria la sucesión de las ideas;
- y entender y memorizar las reglas por repetición sobre los ejemplos que trae el libro.

La regla de tres de las matemáticas tradicionales

Los problemas de *La Regla de Tres* aparecen desde las primeras aritméticas conocidas.

Son problemas para cuya solución se establecían reglas fijas que dependían de una igualdad de razones. Su fundamento matemático se relacionaba con los conceptos de la teoría de las razones y proporciones que se remonta a Euclides.

En los libros aritmética se ubicaban en un bloque de contenidos dedicado a la comparación de números que comenzaba por desarrollar la teoría y seguía con una larga lista de situaciones prácticas.

Los nombres propios de estas situaciones eran :

- *La regla de tres simple* hallar el cuarto proporcional conocidos los otros tres) y *compuesta*,
- *La regla de compañías* (reparto del beneficio),
- *La regla conjunta* (cambio de moneda, trueques),
- *La regla de aligación* (precio medio, composición de mezcla/aleación en cantidades convenidas),
- *La regla de interés* (beneficio de un capital a una tasa convenida),
- *La regla de descuento* (comercial),
- *La regla de falsa posición* (usar números arbitrarios y supuestos para encontrar el verdadero).

Los ritos de la regla de tres simple en la época de Vallejo

La larga tradición en la enseñanza de la regla de tres dio lugar a un modelo sustentado en la idea que el aprendizaje es una cuestión de adiestramiento en torno a ciertos ritos: empleo de palabras clave, ordenación de los términos de acuerdo con normas prescritas, etc.

Las *palabras clave*, tal y como aparecen en Vallejo (1841), eran las *causas* y los *efectos*, las *circunstancias*, la *especie*, el *supuesto* y la *pregunta*:

La Regla de tres es la que enseña a determinar los efectos por medio de las causas o las causas por medio de los efectos, cuando se conoce el enlace o dependencia que tienen entre sí.

La regla de tres puede ser de dos modos: simple y compuesta; la simple es aquella en que para determinar el efecto o la causa que se busca, solo se necesita atender a una circunstancia; y compuesta es aquella en que se necesita atender a dos o más circunstancias.

La regla de tres simple se subdivide o puede ser de otros dos modos: directa o inversa; directa es aquella en que se trata de averiguar el efecto que produce una causa, o la causa de que proviene un efecto, cuando se conoce el efecto producido por una causa de la misma especie; y la inversa es aquella en que se trata de averiguar la causa que se necesita para producir, junta con otra dada, el mismo efecto que han producido ya otras dos causas de la misma especie

...

Toda cuestión que conduce a una regla de tres, ha de constar de dos partes, a saber, del supuesto y la pregunta; en el supuesto se da la dependencia que tiene la causa con el efecto, y en la pregunta la causa o efecto que se da para determinar el efecto o causa que se busca (pgs.. 348-351)

Los ritos de la enseñanza tradicional

El resto de rituales, tal y como aparecen en Lacroix (1846), son los siguientes:

- distinguir los términos de cada especie,
- examinar el término desconocido
- comprobar la existencia de proporción,
- ordenar los términos según las normas prescritas: *la forma en cuadro*.
- plantear la proporción y, si la proporcionalidad es directa, calcular un extremo de la proporción multiplicando los medios y dividiendo este resultado por el otro extremo.

Es necesario distinguir en primer lugar los dos términos de cada especie, y examinar si el término desconocido debe ser mayor o menor que el correspondiente de su especie. Hecho esto, habremos de estar bien seguros de que el cuociente del término mayor de la segunda especie, dividido por el menor de la misma, es igual al cuociente del mayor término de la primera especie, dividido por el más pequeño de ésta; y de este modo nos resultará la proporción:

*El término mas pequeño de la primera especie
es al mayor de la misma
como el término menor de la segunda especie
es al término mayor de esta otra (Lacroix, 290)*

El método algebraico para los viejos problemas aritméticos

Al comenzar el s. XIX, era una creencia generalizada que los métodos algebraicos eran mejores que los métodos aritméticos para resolver determinados problemas de larga tradición aritmética.

El método algebraico tenía, según Lacroix, dos partes:

1. traducir al lenguaje algebraico las condiciones del problema o relaciones que establece, lo que llamamos “poner el problema en ecuaciones;
2. deducir de la ecuación la fórmula que nos indique la serie de operaciones que debemos ejecutar con las cantidades conocidas para determinar el valor de la incógnita, esto es lo que se llama resolver la ecuación o despejar la incógnita.

Dado que se puede plantear la resolución de los problemas de proporcionalidad considerando las razones como fracciones y la proporción como ecuación, se optó por sacar este tema, que incluye a la regla de tres y las que dependen de ella, de la aritmética y llevarlo al álgebra después del estudio de las ecuaciones.

Así lo hace Vallejo, con un problema de móviles y otro de dos falsas posiciones.

El método algebraico para los viejos problemas aritméticos

Así lo hace Vallejo, con un problema de móviles y otro de dos falsas posiciones.

Hallándose acantonados dos ejércitos, y tratándose de poner en movimiento, con el fin de entrar en campaña en una misma provincia, distando entre sí dichos ejércitos 68 leguas, el primero sale tres días antes que el segundo, y anda 6 leguas al día, y este cuatro. Se pregunta a qué distancia se encontrarán?

Representando por x lo que andaba el primero, y por z lo que andaba el segundo, y restando de 68 lo que andaba en los tres días que anticipó el primero queda 50, y se plantea, del modo siguiente: $x+z=50$; $\frac{x}{6} = \frac{z}{4}$. Y resulta que el primero andaba 30 leguas (y 18 que llevaba andadas 48) y 20 el segundo

Un padre con el fin de estimular a su hijo a que estudie, le dice: por cada día que sepas la lección te doy 10 reales, pero por cada día que no la sepas me has de dar 4; al cabo de 15 días le tuvo que dar el padre 66 reales, se pregunta, ¿cuántos días estudió y cuántos no?

El método de reducción a la unidad

Muchos estudiantes no llegaban al álgebra, ya que terminaban sus estudios con la aritmética y se consideraba que los problemas de proporcionalidad eran la culminación de los estudios del escolar. Ante esa tesitura, comenzó a imponerse un método basado en un estilo de razonamiento que no requiere de las proporciones ni de las ecuaciones:

Sino del *análisis* de la cuestión y la deducción de las consecuencias que resultan de este análisis, para encontrar la solución sin tener que depender del recuerdo de reglas más o menos artificiosas.

Una de las formas de este método analítico será conocida bajo el nombre de *método de reducción a la unidad*. Consiste en buscar el valor de la magnitud de la misma especie de la incógnita que corresponde a un valor de la otra magnitud igual a 1

Aparece en Lacroix de la siguiente manera:

Supongamos en primer lugar que habiéndose sabido con entera certeza que 13 varas de un cierto lienzo han costado todas 130 reales, se nos pregunte ¿cuántos reales costarán al mismo precio 18 varas del mismo lienzo?

Por descontado nos será muy fácil determinar el verdadero precio de cada vara de lienzo, hallando el cuociente 10 reales que resulta de la división del valor total 130 reales por las 13 varas que se suponen compradas primeramente, y ya que sabemos este precio, si lo multiplicamos ahora por 18, que es el número de varas de la segunda compra, nos resultará por producto 180 reales, verdadero valor total que se nos preguntaba.

El método de reducción a la unidad en Vallejo

Vallejo hace suyo el método de reducción a la unidad para dar el fundamento de la regla de tres, pero no como método de solución.

Supongamos ante todas cosas que la regla de tres es directa, y que se pide el efecto que producirá una cantidad c sujeta a las mismas circunstancias en que la cantidad a ha producido el efecto b ; como nosotros no conocemos este efecto que buscamos, le llamaremos x , y tendremos que siendo b el efecto que ha producido la cantidad a , $\frac{b}{a}$ será el efecto que habrá producido cada unidad de las que contenga a ;

y como c debe ser de la misma especie que a , y está sujeta a las mismas leyes, por cada unidad que contenga producirá $\frac{b}{a}$; luego toda la cantidad c producirá tantas veces el efecto $\frac{b}{a}$ como unidades haya en c ; luego el efecto de c estará representado por $\frac{b}{a} \times c$, y por lo mismo será $x = \frac{b}{a} \times c = \frac{bc}{a}$, que quitando el divisor da $ax = bc$ o poniendo en proporción será $a:b::c:x$ ó $ac::bx$

Ya que una vez dado el fundamento viene la regla

Luego, en general, para plantear una regla de tres directa se deberá poner por primer término la cantidad principal del supuesto, después cualquiera de las otras dos, a saber, la relativa del supuesto o la principal de la pregunta, después la otra y el cuarto término de la proporción será lo que se busca; que para encontrarle no hay mas que multiplicar el segundo por el tercero, y partir esto por el primero

y la práctica, basada en la proporción con el viejo lenguaje de puntos, lo que nos retrotrae a las viejas prácticas rituales.

Entendido esto pasaremos a resolver algunos ejemplos .

1º Se sabe que 300 soldados han abierto en un tiempo cualquiera 1200 varas de trinchera; para abrir 6000 varas en el mismo tiempo, cuantos soldados se necesitarán? Aquí la cantidad principal y su relativa son 1200 varas y 300 soldados, luego plantearemos la cuestión del modo siguiente:

$$1200 \text{ v}^s : 6000 \text{ v}^s :: 300^s : x : x = \frac{300 \times 6000}{1200} = \frac{300 \times 5 \times 12}{12} = 300 \times 5 = 1500$$

y saco que se necesitan poner a trabajar 1500 hombres.

El método de reducción a la unidad en la regla de tres inversa

Vallejo define la *regla de tres inversa* de una manera peculiar a nuestros ojos, ya que no se sustenta en la inversión de la relación multiplicativa, sino en la inversión de la pregunta.

*La regla de tres simple se subdivide o puede ser de otros dos modos: **directa** o **inversa**;*

***directa** es aquella en que se trata de averiguar el efecto que produce una causa, o la causa de que proviene un efecto, cuando se conoce el efecto producido por una causa de la misma especie;*

*y la **inversa** es aquella en que se trata de averiguar la causa que se necesita para producir, junta con otra dada, el mismo efecto que han producido ya otras dos causas de la misma especie*

El ejemplo ayudará a entender la definición

Sé que 15 pares de mulas han transportado de la era en 6 días 60 cahices de trigo; si quiero averiguar cuantos pares de mulas se necesitarán para transportar los mismos 60 cahices en 10 días

Para dar el fundamento de la regla utiliza la reducción a la unidad. Con ella deduce la igualdad de razones y la relación multiplicativa inversa que usamos hoy como definición.

Supongamos que la regla de tres sea inversa, y que se sepa que las dos cantidades a y b , consideradas como causas, han producido otra cantidad K , que consideramos como efecto; y que se busque la causa B de la misma especie que b , la cual, junta con la dada A , de la misma especie que la a , han de producir el mismo efecto K . Si la a obrase sola y produjese el efecto K , cada unidad de a obraría el efecto $\frac{K}{a}$ pero no solo obra la unidad de a , sino que obra al mismo tiempo la causa b , resulta que el efecto de cada unidad de a que acabamos de señalar, será tantas veces mayor como exprese el valor de b ; luego para tener lo que produce cada unidad de a sola, deberemos dividir $\frac{K}{a}$ por b , y será dicho efecto $\frac{K}{ab}$. Ahora, por la misma razón será $\frac{K}{AB}$ el efecto que produzca cada unidad de A ; pero como a y A son de una misma especie, los efectos que produzca cada una de sus unidades serán los mismos, y tendremos que $\frac{K}{AB} = \frac{K}{ab}$ o quitando divisores $ABK = abK$, o dividiendo por K será

$$AB = ab, \text{ que da } A:a :: b:B$$

luego de la regla de tres inversa se ha de escribir por primer antecedente la cantidad principal de la pregunta, y por medios la cantidad principal y relativa del supuesto; después se multiplican los medios, se parte por el extremo, y el resultado es la causa que se busca (p. 353).

Vallejo muestra una pésima visión de futuro ya que critica abiertamente el *método analítico* para la enseñanza de los principiantes. Método que terminará por imponerse.

Lagrange, hablando de la regla de tres, dice que no presenta ninguna dificultad para los que hayan adquirido el espíritu analítico; cuya proposición ha pasado a algunos libros elementales sin tener presente, que el objeto de esta clase de obras es el que los principiantes adquieran dicho espíritu analítico; ... Donde se ve que para hacer dicho examen se necesita poseer o tener un espíritu del que no todos están dotados; y por lo mismo nuestra regla, que no exige más que el conocimiento de las cantidades de una misma especie para plantear inmediatamente la proporción, está mas al alcance de los principiantes (Vallejo, p. 351).

Epílogo

Comenzamos elogiando el *Tratado* de Vallejo porque permitió oxigenar la literatura matemática española. Pero siendo realistas, el análisis del texto aporta argumentos para sustentar el comentario que le dedica Rey Pastor en su famoso discurso de la Universidad de Oviedo:

Después de esto, la lectura de la obra de (...) Vallejo, y su comparación con la de Lacroix, reflejo de la matemática europea del siglo XVIII, nos desconsuela, sí, pero no nos sorprende” (Rey Pastor. 1913. p. 63).

Referencias

- Lacroix, S. F. (1846). *Tratado elemental de Aritmética* compuesto en francés para uso de la Escuela Central de las cuatro naciones por S. F. Lacroix y traducido segunda vez por don Josef Rebollo y Morales, catedrático de los Caballeros Pages de S. M., Tomo I. setima edición. Madrid: En la Imprenta Real.
- Vallejo, Jose M. (1841). *Tratado Elemental de Matemáticas* escrito de orden de S. M. para uso de los caballeros seminaristas del seminario de nobles de Madrid y demás casas de educación del Reino. Cuarta edición corregida y considerablemente aumentada. Tomo I. Parte primera, que contiene la Aritmética y Álgebra. Madrid. Imp Garrayasaza.