CARÁCTER ARITMÉTICO O ALGEBRAICO, ISOMORFÍA Y COMPLEJIDAD DE LOS PROBLEMAS DE LA FAMILIA DE PROBLEMAS ARITMÉTICO-ALGEBRAICOS

Fernando Cerdán
Departamento de Didáctica de las Matemáticas
Universidad de Valencia

Resumen

En este trabajo se utilizan unos objetos matemáticos, los grafos trinomiales, como metalenguaje, para representar los problemas aritmético-algebraicos. Usando ese metalenguaje se analiza en qué sentidos se puede calificar a un problema como aritmético o algebraico. Se consideran distintas estructuras del problema sobrepuestas al grafo trinomial del problema y se utilizan éstas para distinguir clases de isomorfía entre problemas. Y también se muestra cómo algunas características del grafo trinomial pueden usarse como elementos para elaborar una teoría sobre la complejidad de los problemas.

0.- INTRODUCCIÓN

Este trabajo forma parte de una serie de estudios sobre la Familia de problemas aritmético-algebraicos (FPAA). Concretamente consta de algunos elementos de la parte teórica que pretende utilizarse de soporte en la parte empírica. En él se es fiel a la teoría de niveles en el estudio de la resolución de problemas (Puig y Cerdán, 1989; Puig, 1996), que postula en el nivel 1 la necesidad de estudiar con detalle el problema en ausencia del resolutor, o al menos dejando a éste fuera de escena. Para ello se utilizan los Grafos trinomiales (GT) introducidos por Fridman (1990) como elementos de la problemología, que permiten, como veremos, limitar la actuación del resolutor a la lectura del problema. La sustitución del texto de un problema por un GT posibilita descargar algunos elementos de la teoría de GT y utilizarla para el estudio de los problemas. Esto se hará aquí para el estudio de su carácter aritmético o algebraico, donde se retoma y continúa un trabajo anterior (Puig y Cerdán, 1990). En la clasificación de los problemas de la FPAA, el asunto puede darse por concluido para los problemas de una etapa, la clasificación de los problemas de dos etapas se trató en el primer simposio de la SEIEM (Castro, 1998; Puig, 1998), y para otros problemas que se resuelven por medio de ecuaciones se evitará la tendencia a considerar como estructura del problema la de "la ecuación" que los resuelve. Para estos últimos Rubio (1994) insiste en que los estudiantes proporcionan múltiples representaciones –ecuaciones, no todas equivalentes– para un mismo problema. Aquí, se planteará el problema de la clasificación definiendo clases de problemas isomorfos en virtud de la estructura del problema que deseemos considerar. Por último se esbozará el asunto de la complejidad de los problemas de la FPAA, para los que Rubio (1994) reclama una "teoría de la complejidad".

1.- GRAFOS TRINOMIALES

Definición. Se llama grafo trinomial (GT) de orden *n* a un sistema finito enlazado de *n* aristas con tres vértices, que pueden ser claros y oscuros, definidos en cada una de ellas, dos en los extremos de la arista y otro sobre ella, y de los cuales por lo menos uno es un vértice claro, mientras que los demás pueden ser oscuros.

Se llama orden de un vértice al número de aristas que concurren en él.

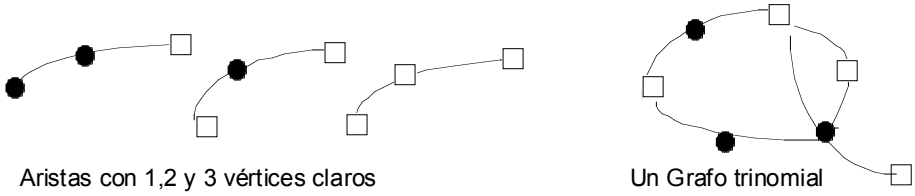

fig.1

Equivalencia. Dos GT son equivalentes cuando existe una correspondencia entre ellos que intercambia aristas y vértices de uno y otro GT preservando los vértices situados sobre ellas y los ordenes de éstos. Más precisamente:
Sean **G** y **G'** dos GT de orden **n**. Sea $\mathbf{A_i}$ la arista número **i** del GT **G** y $\mathbf{B_k}$ la arista número **k** del GT **G'**. Sean $\mathbf{a_j^r}$ y $\mathbf{b_i^p}$ los vértices número **j** de G e **i** de G', de ordenes **r** y **p** respectivamente. Los grafos **G** y **G'** se dicen equivalentes si para cualquier numeración arbitraria de los vértices de **G** existe una numeración de los vértices de **G'** tal que:

1) A cada arista $\mathbf{A_i}$ de **G** le corresponde una arista $\mathbf{B_k}$ de **G'** y sólo una.
2) A cada vértice $\mathbf{a_j^r}$ de **G** le corresponde un vértice $\mathbf{b_i^p}$ de **G'**, donde se cumple que **p** = **r**.
3) Si los vértices $\mathbf{a_{i1}^{r1}}$, $\mathbf{a_{i2}^{r2}}$, $\mathbf{a_{i3}^{r3}}$ pertenecen a la arista $\mathbf{A_i}$ de **G**, entonces los vértices $\mathbf{b_{j1}^{p1}}$, $\mathbf{b_{j2}^{p2}}$, $\mathbf{b_{j3}^{p3}}$ pertenecen a la arista correspondiente $\mathbf{B_k}$ de **G'.**

Destrucción, oscurecimiento. La destrucción de un GT consiste en la transformación sucesiva de un GT de orden *n* en otro de orden *n*-1 por medio de la eliminación de una arista hasta dejarlo reducido a un GT de orden cero. Esta destrucción también puede considerarse como oscurecimiento del GT, si se interpreta como la transformación sucesiva de los vértices claros de una arista en oscuros hasta la obtención de un GT que posea todos sus vértices oscuros.
Para describir la destrucción del GT se recurre a dos nociones: las de entrada y movimiento sobre el GT.
Se llama entrada al GT a una arista que posea dos vértices oscuros.
El movimiento sobre el GT que puede realizarse cuando el GT tenga entradas consiste en:
Entrando al GT, se avanza por la arista de entrada hasta llegar a un vértice claro, vértice que transformamos en oscuro.
Eliminamos dicha arista del GT y proseguimos moviéndonos por el GT siempre que sea posible.
Los movimientos por el GT pueden llevar a la total destrucción del GT o a un GT sin entradas.
La Figura 2 muestra el oscurecimiento de un GT.

OSCURECIMIENTO DE UN GRAFO TRINOMIAL

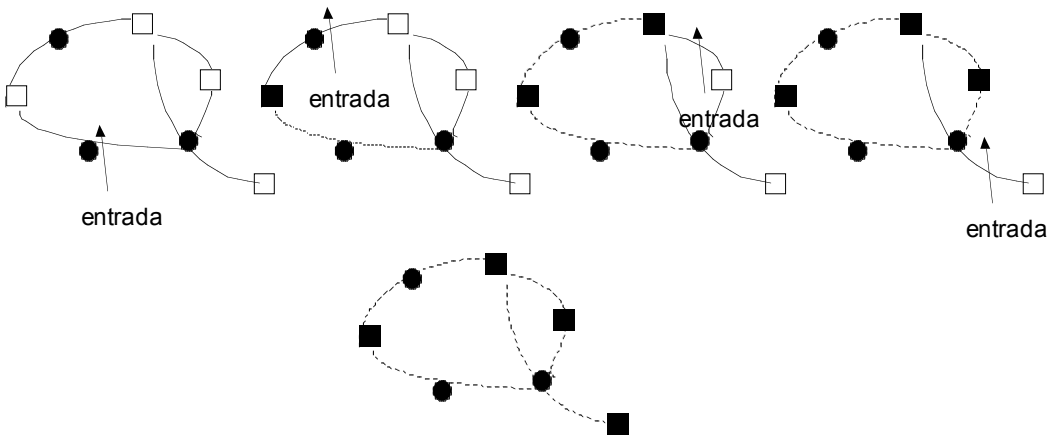

fig.2

Los GT se clasifican en abiertos o cerrados según tengan o no entradas, y en encadenados o mixtos según puedan ser oscurecidos total o parcialmente.

2.- PROBLEMAS TERNARIOS Y GT

Un problema ternario es un problema en el que:
1) Se dan cantidades conocidas y desconocidas.
2) Todas las cantidades conocidas y desconocidas están ligadas por relaciones ternarias. Una relación se dice ternaria si en ella intervienen tres elementos.
3) Cada relación contiene al menos una cantidad desconocida.
4) Las relaciones, en el caso que haya más de una, se hallan ligadas entre sí por una o dos cantidades.
5) El objeto del problema consiste en la determinación de una o varias de las cantidades desconocidas.
La mayor parte de los problemas de la FPAA son problemas ternarios ya que las relaciones que suelen presentarse en ellos son aditivas, multiplicativas o de proporcionalidad; en las primeras intervienen siempre elementalmente tres elementos, mientras que una relación de proporcionalidad en la que intervienen cuatro elementos puede reducirse a dos relaciones ternarias reduciendo a la unidad. Los problemas en los que intervienen estas relaciones son susceptibles de representarse por GT.
La obtención de un GT de un problema requiere una lectura analítica del texto del problema que lo reduzca a cantidades conocidas y desconocidas y relaciones entre éstas. La representación de las cantidades conocidas y desconocidas respectivamente como vértices oscuros y claros de aristas, que se correspondan con las relaciones entre dichas cantidades, proporcionan un GT del problema. Ver en la Figura 3 los GT de los problemas:

ABRIGOS. En un taller de confección disponen de 4 piezas de tela de 50m cada una para hacer trajes y abrigos. Piensan hacer 20 trajes que necesitan 3m de tela cada uno y abrigos que necesitan 4m de tela cada uno. ¿Cuántos abrigos pueden hacer?
HENO. Unos granjeros almacenaron heno para 40 días. Sin embargo el heno era de mejor calidad de la que pensaban y ahorraron 100 kg por día. Así tuvieron heno para 60 días. ¿Cuánto heno almacenaron?

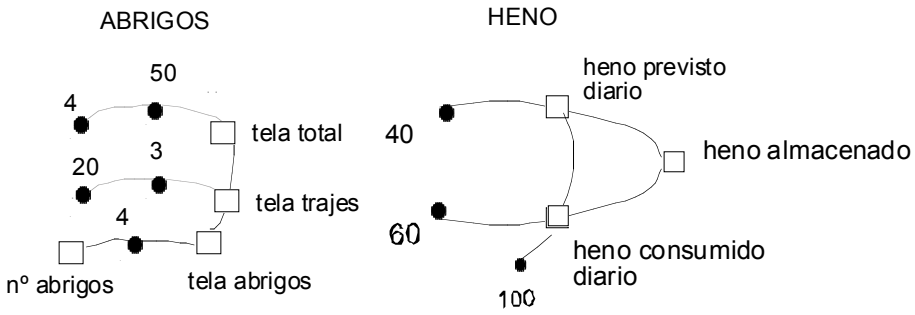

fig.3

3.- OSCURECIMIENTO DEL GT Y SOLUCIÓN DEL PROBLEMA.

El oscurecimiento del GT puede entenderse como la solución del problema si se interpreta el oscurecimiento de un vértice claro como la determinación de la cantidad desconocida que representa, cantidad que vendrá expresada en función de las cantidades conocidas representadas por los vértices oscuros de la arista eliminada y la relación que dicha arista representa. Oscureciendo cualquier GT abierto y encadenado se obtendrán expresiones aritméticas para todos los vértices claros. Ver el oscurecimiento de ABRIGOS en la Figura 4.

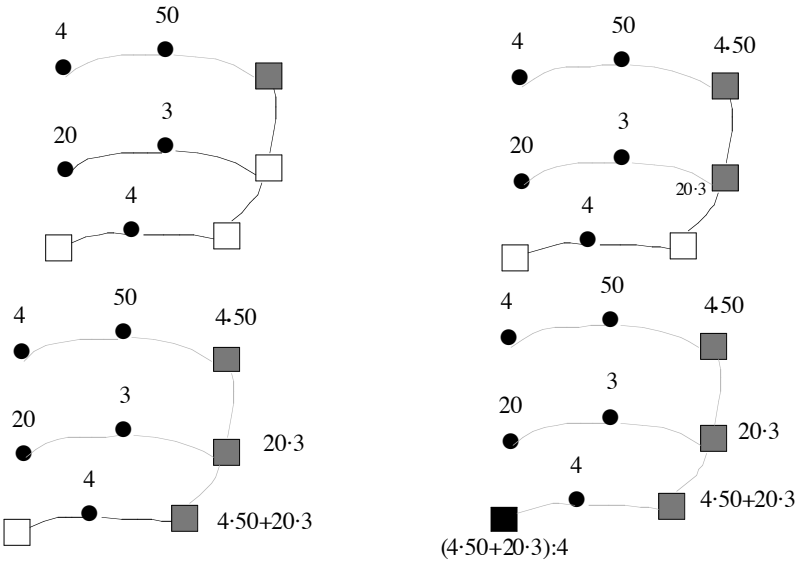

Figura 4

Lo hecho para ABRIGOS no es posible para los GT cerrados, dado que no poseen entradas y no se puede por tanto determinar cantidad alguna. En este caso, nos podemos servir del artificio algebraico de considerar lo desconocido como conocido y, oscureciendo un vértice, dotar al GT de una entrada, designando la cantidad que representa por medio de una literal, y ahora, como antes, podemos proceder a oscurecer los vértices claros, a los que atribuiremos en este caso expresiones algebraicas. Los vértices a los que podemos atribuir dos expresiones algebraicas nos permiten escribir ecuaciones. Ecuaciones cuya solución es la del problema. En la Figura 5 se ilustra el oscurecimiento del problema HENO.

Oscurecimiento del problema HENO

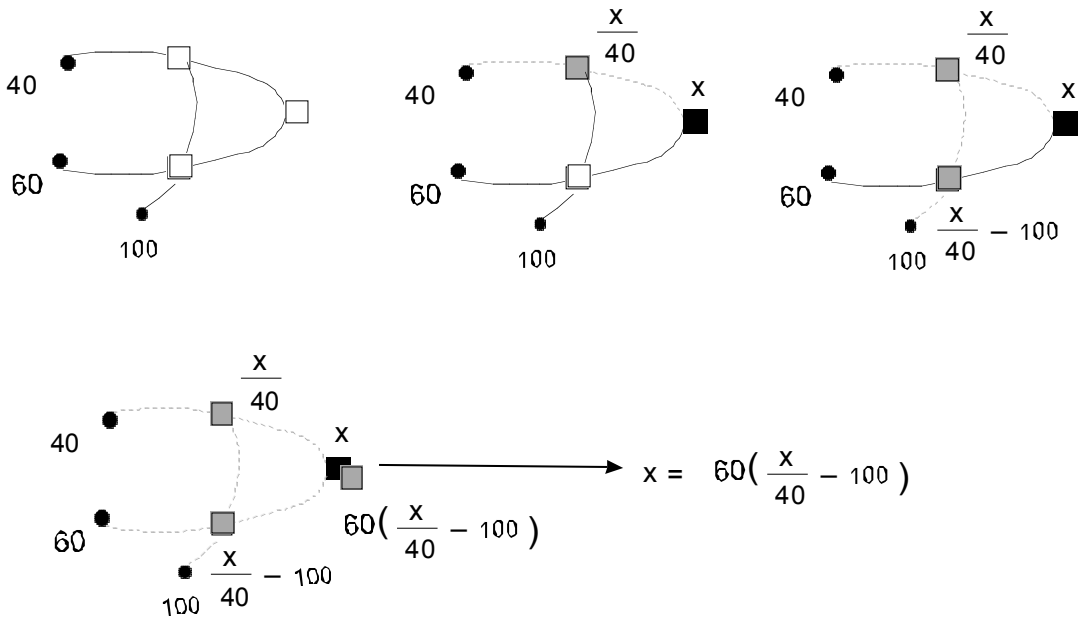

fig.5

4.- CARÁCTER ARITMÉTICO O ALGEBRAICO DE UN PROBLEMA.

La posibilidad de calificar a un problema como aritmético o algebraico y lo que podría tenerse en cuenta para atribuir una u otra calificación es una cuestión que ya estudiamos en Puig y Cerdán (1990), donde se concluye que no se puede calificar al problema sino al texto intermedio. El texto intermedio se produce en la traducción usando el método de análisis-síntesis y se califica según la síntesis sea posible en el sistema matemático de signos del álgebra o la aritmética. En este sentido hay tres grupos de problemas en la FPPA: 1) problemas para los cuales se producirían de modo *natural* textos intermedios aritméticos, 2) problemas para los cuales un *análisis superficial* produciría textos intermedios algebraicos, mientras que un *análisis más profundo* produciría textos intermedios aritméticos y 3) problemas para los cuales sería casi imposible producir un texto intermedio aritmético.

Este punto de vista deja la decisión de calificar en manos del método de resolución o del resolutor que lo utiliza y sus habilidades en su manejo. Por su lado, los GT permiten también abordar ésta cuestión. Para ello, empezaremos por llamar GT aritmético a un GT abierto y encadenado y GT algebraico a un GT cerrado.

La construcción del GT de un problema a partir de su texto requiere el análisis de cantidades y relaciones y una tarea posterior que presente las cantidades entretejidas en una red conexa. El análisis distingue entre conocidas y desconocidas y señala las cantidades que están entrelazadas por una relación. La tarea de entretejer señala las cantidades que presentan polisemia al pertenecer a dos o más relaciones y las considera como nodos en el GT que se está construyendo. Pues bien, llamemos a este modo de leer el problema, que posibilita la construcción de un GT de un problema, leer el problema de modo analítico. Y llamaremos lectura analítica del problema (LA) a una lectura de modo analítico que se represente por un GT que contenga como vértices, al menos, la incógnita y los datos del problema.

Así, si tenemos diferentes LA de un mismo problema, tendremos diferentes GT para el mismo. La decisión del carácter aritmético o algebraico del problema puede tomarse sobre el GT que representa la LA, y atribuir el carácter aritmético o algebraico no al

problema sino a su LA diciendo: esa LA de ese problema es aritmética**,** o esa LA de ese, el mismo o diferente, problema es algebraica.

Para ilustrar lo dicho, consideremos algunas lecturas del problema del HENO, tomadas de producciones de los alumnos del experimento descrito en Puig (1994). De ellas, unas serán LA y otras no lo serán.

Las lecturas de modo analítico de la Figura 6 son LA:

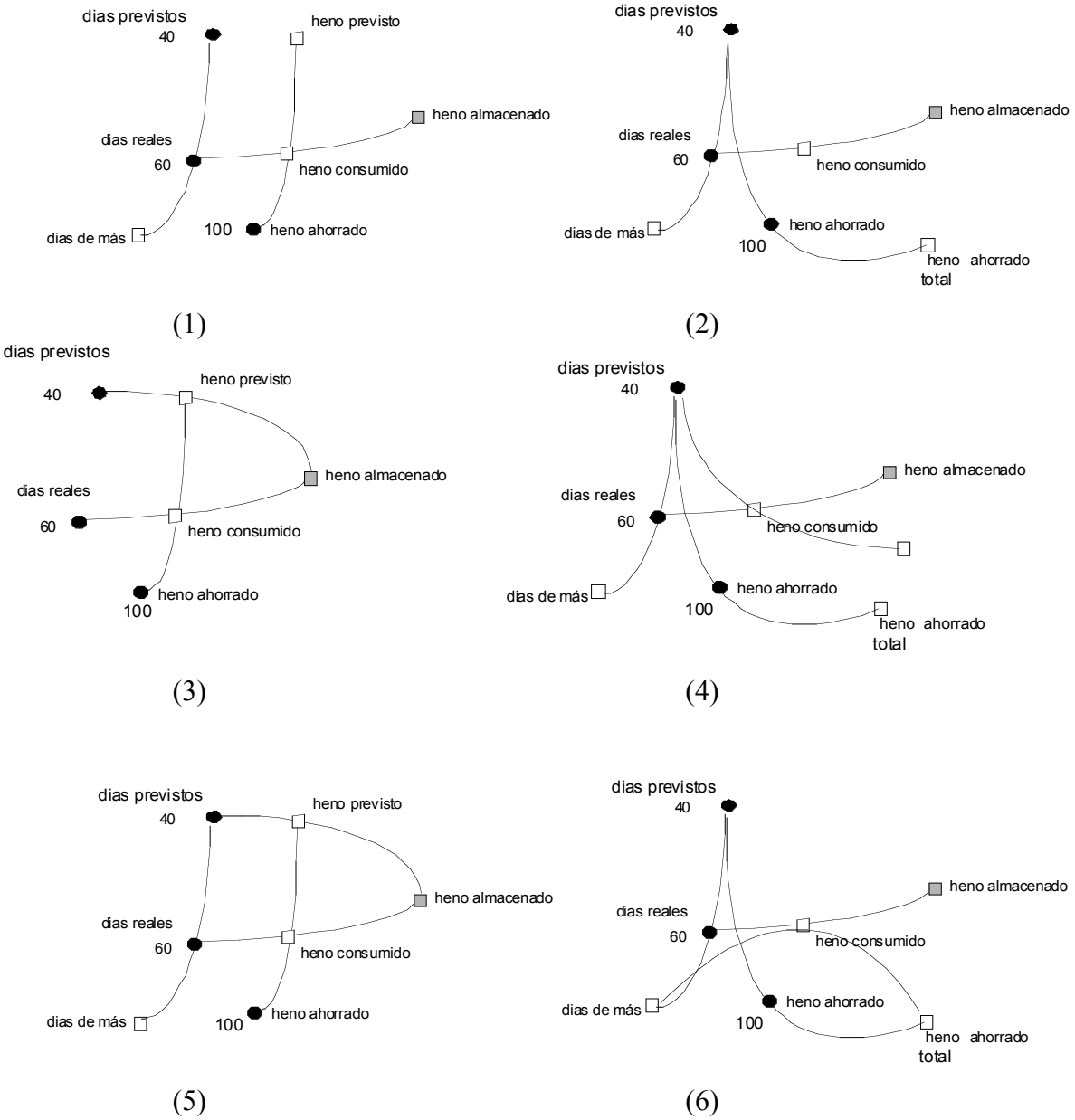

Figura 6

Y no son LA las de la Figura 7:

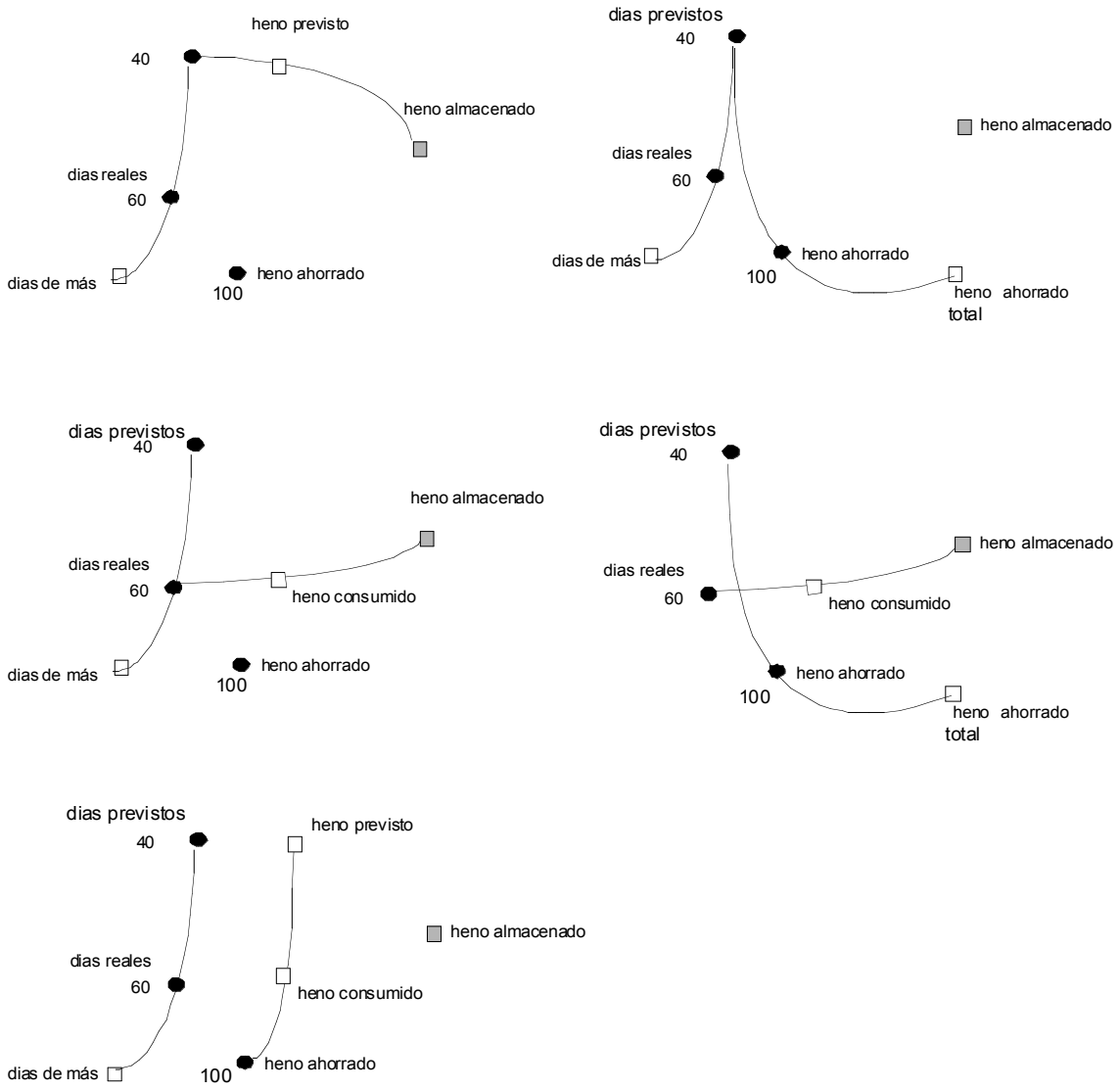

Figura 7

Puede verse que las LA (1), (2), (3), (4) y (5) son algebraicas, mientras que la LA (6) es aritmética.

En la línea de usar la LA para atribuir uno u otro calificativo, podemos exigirle a ésta los mínimos requisitos posibles.

Diremos que una LA es una LA mínima si el GT que la representa tiene el menor orden entre los ordenes de los GT que representan LA. Esto quiere decir, naturalmente, que las relaciones establecidas que incluyen la incógnita y los datos, a las que la LA hace mención, son las menos de las posibles. Tomando las LA de HENO consideradas, las LA (1), (2), (3) son mínimas y (4), (5), (6) no lo son. Obsérvese que las LA mínimas anteriores son algebraicas.

Si queremos empobrecer la LA en otro sentido podemos recurrir al GT que represente una LA mínima y que tenga el número mínimo de vértices claros. En nuestro caso, la LA mínima (3), que es algebraica.

Por otro lado, es posible considerar un GT que contenga todas las cantidades y relaciones que pueden producirse para el problema, con un conjunto de herramientas de

producción delimitado. A este GT le llamamos GT teórico del problema (GTT) (Cerdán, en ejecución). Para HENO es posible producir el GTT de la Figura 8, donde se muestra en trazo grueso el GT de una LA mínima.

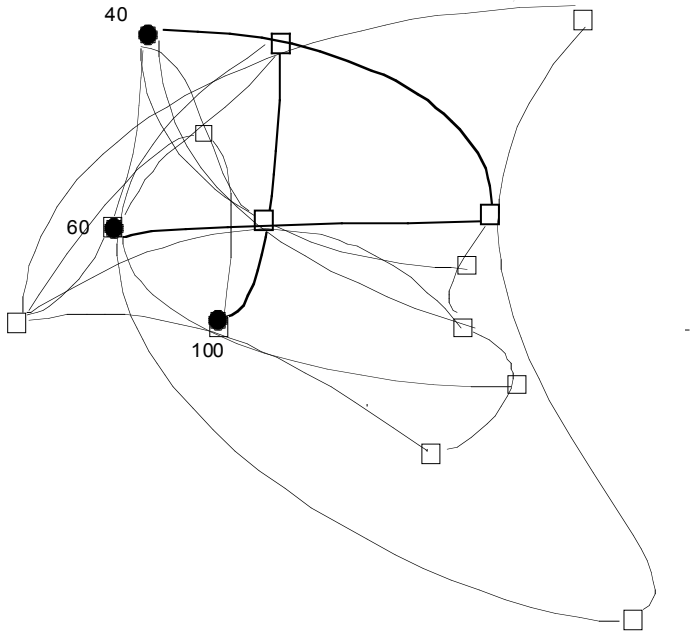

Figura 8

Como en este GTT se pueden representar asimismo todas las soluciones del problema que se pueden obtener con ese conjunto de herramientas, se puede en este GTT tomar una decisión sobre el carácter aritmético o algebraico del problema, calificando ahora su solución. Así, diremos que un problema tiene solución aritmética, si en el GTT del problema existe, al menos, un subgrafo que es una LA y ésta es aritmética. Y diremos que un problema tiene solución algebraica, si en el GTT del problema existe, al menos, un subgrafo que es una LA y ésta es algebraica. HENO tiene ambas clases de soluciones.
Dado que la FPAA que constituye nuestro mundo de problemas sólo incluye problemas con estos dos tipos de solución, diremos que un problema es aritmético si tiene al menos una solución aritmética y diremos que un problema es algebraico si el problema carece de soluciones aritméticas. En este sentido, de los problemas de 5 únicamente el problema HOMBRES Y DINERO es algebraico.

5.- PROBLEMAS ISOMORFOS, PROBLEMAS EQUIVALENTES.

Diremos que un problema P_1 es isomorfo a un problema P_2 si sus GT son equivalentes.
Definición delimitada por su propio contenido a los problemas ternarios.
Nota. Esta definición y las que siguen están enunciadas para los problemas dados por GT. Si se quieren establecer entre problemas dados por su enunciado verbal, esta definición y las que siguen pueden modificarse para referirlos mediante LA así:
P_1 y P_2 son isomorfos si existen LA_1 y LA_2, LA mínimas de P_1 y P_2, tales que los GT que las representan son equivalentes.
Y los criterios de isomorfía deben matizarse. Esto no se trata aquí.
Tomando como ejemplo los problemas siguientes dados por su GT de la Figura 9

ALCANZAR. Un automóvil parte de un punto A con velocidad uniforme de 40 km/h hacia otro punto B. Dos horas después sale de A hacia B otro automóvil con velocidad uniforme de 60 km/h. Dígase a qué distancia de A se encuentran.
AVIONETA. Una avioneta vuela a 240 km/h a favor del viento y a 200 km/h en contra del viento. Puede llevar carburante para 4 horas. La avioneta sale del aeropuerto en la dirección del viento. ¿Hasta qué distancia podrá llegar si ha de regresar al aeropuerto sin agotar el carburante?
ENCONTRAR. Un tren parte de Madrid dirección Valencia con una velocidad de 150 km/h y otro de Valencia dirección Madrid con una velocidad de 200 km/h. La distancia entre Madrid y Valencia es de 430 km. Dígase a qué distancia de Madrid se cruzan ambos trenes.
RUBLOS. Una escuela rusa compra libros para la biblioteca. Si los paga con billetes de 3 rublos, la escuela tiene que dar 8 billetes más que si los paga con billetes de 5 rublos. ¿Cuánto cuestan los libros?
CHOCOLATES Y CARAMELOS. Una profesora tiene 120 chocolates y 192 caramelos para repartir –a partes iguales cada tipo de dulce– entre los alumnos de su grupo. Si cada alumno recibe tres caramelos más que chocolates, ¿cuántos son los alumnos?
LANA Y ALGODÓN. El metro de lana cuesta 150 pts. menos que el metro de algodón. Cuatro metros de lana y 5 metros de algodón cuestan 3000 pts. ¿Cuánto cuesta un metro de lana y cuánto un metro de algodón?
HOMBRES Y DINERO. Divido 60 entre un cierto número de hombres y cada uno recibe la misma cantidad. Despues añado 2 hombres y ahora dividiendo 60 entre ellos cada uno recibe dos menos que antes. Se requiere cuántos hombres hay y cuánto recibe cada uno.

Los GT por los que los problemas vienen dados, que aquí corresponden a LA mínimas:

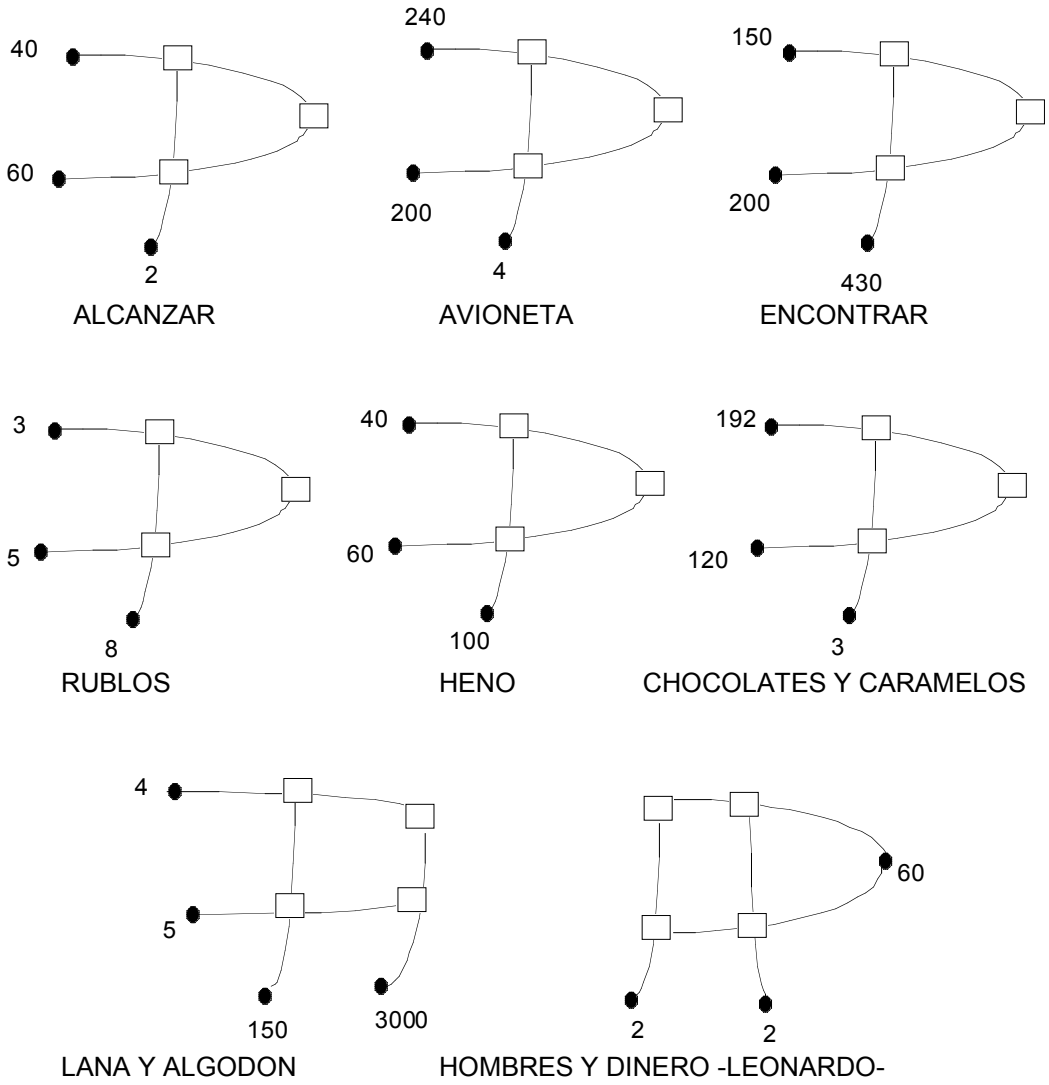

Figura 9

De los problemas ejemplo, son isomorfos los seis primeros, mientras no lo son con los dos últimos, ni estos mismos entre sí.
La isomorfía distingue problemas por lo que distingue el GT: número de cantidades conocidas y desconocidas, relaciones y arquitectura del entramado de relaciones.
La distinción entre relaciones aditivas y multiplicativas puede hacerse recurriendo a representar las aristas del GT en disposición vertical las aditivas y horizontal las multiplicativas. La definición de equivalencia de GT puede adaptarse para GT en la misma disposición, modificando la condición 1). Así podremos decir:
P_1 es r-isomorfo a P_2 si sus GT son equivalentes y están en la misma disposición.
Para facilitar el paso del texto del problema a su GT, los GT de la Figura 9 están en disposición.
El GT no distingue operaciones. Esta distinción puede hacerse orientando las aristas. Para distinguir multiplicación de división, por ejemplo así: una arista del GT diremos que está orientada cuando sus vértices están numerados 1, 2, 3, de modo que el número 2 corresponde al vértice central y los números 1 y 3 a sus extremos. Si la arista está en disposición horizontal, atribuimos el vértice número 3 a la cantidad producto. Cabe observar que esta orientación permite a su vez organizar las cantidades extensivas e intensivas atribuyendo el vértice 2 a la cantidad intensiva.
Un GT está orientado multiplicativamente si las aristas que representan relaciones multiplicativas lo están. Se puede extender la equivalencia de GT para GT orientados modificando la condición 2):
Un problema P_1 es m-isomorfo a un problema P_2 si sus GT orientados multiplicativamente son equivalentes.
Ahora, los GT orientados multiplicativamente de los problemas que eran isomorfos se orientarán (Figura 10):

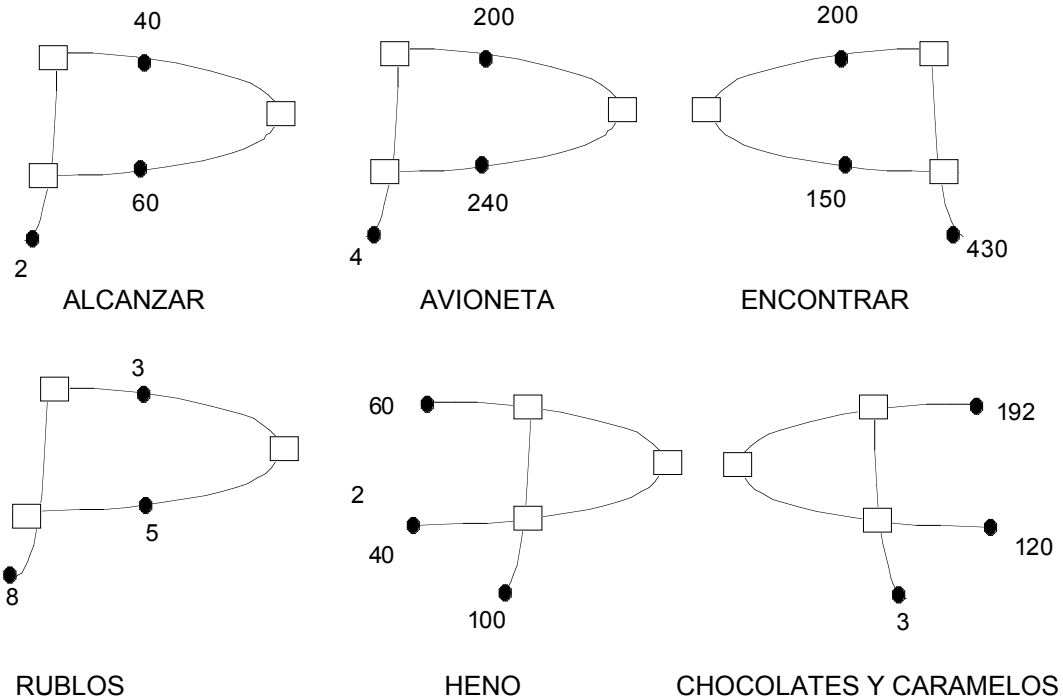

Figura 10

Los problemas HENO, RUBLOS, CHOCOLATES Y CARAMELOS no son m-isomorfos, mientras que ALCANZAR sí lo es con AVIONETA. Los problemas ENCONTRAR y AVIONETA tampoco lo son, debido a su simetría de aspecto, al igual ocurre con HENO y

CHOCOLATES Y CARAMELOS. Por otro lado, los problemas RUBLOS y ALCANZAR son m-isomorfos. La isomorfía de ENCONTRAR y AVIONETA se debe a que el GT no distingue adición y sustracción.
Orientando, de modo análogo, las aristas que representan relaciones aditivas, diremos:
Un problema P_1 se dice a-isomorfo a un problema P_2 si sus GT aditivamente orientados son equivalentes.
Un problema P_1 se dice operativamente-isomorfo (o-isomorfo) a un problema P_2 si sus GT totalmente orientados son equivalentes.
De todos los problemas ejemplo sólo ALCANZAR Y RUBLOS son o-isomorfos.
Si elegimos para matizar la isomorfía la dirección de lo semántico, podemos proceder así:
Dotémonos con una paleta de colores $P = (C_1, C_2, C_3\ldots, C_n)$.
Diremos que un GT está coloreado con la paleta P si cada una de sus aristas tiene atribuido uno de los colores C_i de la paleta P.
Para colorear un GT de un problema de la FPAA puede procederse así: Dispóngase de una paleta con los colores del arco iris. Atribúyase un color a cada una de las categorías semánticas Cambio, Combinación, Comparación, Igualación, Isomorfismo de medidas, Comparación multiplicativa y Producto cartesiano. Coloréese la arista del GT con el color adecuado de la relación aditiva o multiplicativa que representa.
Extiéndase la equivalencia de GT a grafos coloreados.
Entonces: Un problema P_1 es semánticamente isomorfo (s-isomorfo) a un problema P_2 si sus GT coloreados son equivalentes.
Y: Un problema P_1 es equivalente a un problema P_2 si son s-isomorfos y o-isomorfos.
De donde resulta que dos problemas equivalentes difieren casi exclusivamente en lo que deviene del contexto en que están enunciados y del tipo de números usados para expresar las cantidades. Esto es, en los significados de las cantidades y las operaciones entre éstas que provienen de dicho contexto.

6.- COMPLEJIDAD DE LOS PROBLEMAS Y A MODO DE CONCLUSIÓN.

Los criterios de isomorfía apuntados separan los problemas de la FPAA en clases de problemas isomorfos, una organización de estas clases según cierta jerarquía debería contemplar diversos aspectos. De ahí que las descripciones de complejidad de un problema que siguen son una propuesta para su consideración, y una manera de hacer posible la elaboración de hipótesis para la observación empírica donde mayor complejidad pueda traducirse, en algún sentido, en dificultad.
Haremos esto sin prestar atención al carácter aritmético o algebraico del problema. Por lo cual, si se distinguen los problemas por este carácter, en alguno de los sentidos apuntados, la complejidad debe considerarse por separado para unos y otros problemas.
Complejidad Relacional: Diremos que un problema P_1 tiene más complejidad de tipo R que otro problema P_2 si su GT es de mayor orden.
Complejidad en cuanto a lo desconocido: Diremos que un problema P_1 tiene más complejidad de tipo x que otro problema P_2 si su GT posee más vértices claros.
Complejidad que deviene de la intervención de lo desconocido en las relaciones (sobre las aristas): Diremos que un problema P_1 tiene más complejidad de tipo Rd que otro problema P_2 si alguna de las aristas del GT de P_1 tiene más vértices claros que las aristas del GT de P_2.
Complejidad del entretejido de relaciones (sobre los vértices claros): Diremos que un problema P_1 tiene más complejidad de tipo Er que otro problema P_2 si en alguno de los vértices del GT de P_1 concurren más aristas que en los vértices del GT de P_2.

Estas cuatro complejidades en los sentidos indicados por ellas, al igual que la clasificación de los problema vía isomorfías, no están formuladas sin atender a la demanda de explicar algunos fenómenos que pueden describirse a partir de la observación empírica, sino que intentan hacer posible que éstos se expliquen en términos de un cuadro teórico, que no sea meramente construido para explicar lo observado, sino que permita, en algún sentido, predecirlo y comunicarlo en esos términos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Castro, E.; Castro, E.; Rico, L.; Gutiérrez, J.; Tortosa, A.; Segovia, I.; González, E.; Morcillo, N. y Fernández, F. (1998). Problemas aritméticos compuestos de dos relaciones. En Rico, L. y Sierra, M. (Eds.) *Actas del Primer Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 69-82). Granada: SEIEM / Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Cerdán, F. (en ejecución). *Estudios sobre la familia de problemas aritmético-algebraicos*.

Fridman, L. M. (1990). Los grafos trinomiales como metalenguaje de los problemas. *Matemáticas*. *Revista del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora*, núm. 17-18, pp. 51-59.

Puig, L. (1996). *Elementos de Resolución de Problemas*. Comares. Granada, 1996

Puig, L. (1998). Clasificar y significar. En Rico, L. y Sierra, M. (Eds.) *Actas del Primer Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 113-127). Granada: SEIEM / Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Puig, L. y Cerdán, F. (1989). *Problemas Aritméticos Escolares*. Madrid: Síntesis.

Puig, L. y Cerdán, F. (1990). Acerca del carácter aritmético o algebraico de los problemas verbales. En Filloy, E. y Rojano, T. (Eds.) *Memorias del Segundo Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática* (pp. 35-48). Cuernavaca, Morelos: PNFAPM.

Rubio, G. (1994). *Modelos Didácticos para Resolver Problemas Verbales Aritmético Algebraicos*. Tesis doctoral. CINVESTAV del IPN. México.