

ENTORNO COMPUTACIONAL Y EDUCACIÓN MATEMÁTICA: UNA REVISIÓN DEL ESTADO ACTUAL

Myriam Codes Valcarce. Universidad Pontificia de Salamanca.

Dr. Modesto Sierra Vázquez. Universidad de Salamanca.

Introducción

Hace más de veinte años, se comenzaron a introducir las nuevas tecnologías en el aula de matemáticas. Primero fueron las calculadoras, después las calculadoras gráficas y, en los últimos años, software de cálculo simbólico ejecutado en un ordenador personal. Se han realizado muchas instigaciones en didáctica de las matemáticas en las que se introduce un entorno de trabajo con ordenadores para aprovechar las ventajas que ofrece, sin olvidar las dificultades adicionales que originan. Otras investigaciones, se centran en estudiar el impacto de este nuevo entorno en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Los tópicos matemáticos en los que se centran las investigaciones son variados, desde la geometría hasta el cálculo, pasando por el álgebra y la aritmética. Existen dos marcos teóricos principales que determinan el paradigma en el que se desarrollan las investigaciones, el constructivismo y el instrumental. Si bien los dos tienen como objetivo común mejorar la enseñanza y el aprendizaje de distintos tópicos matemáticos, discrepan en el modo de llevar a cabo esta mejora.

El punto principal de discrepancia de estos dos enfoques es el valor otorgado al trabajo técnico. Bajo el enfoque instrumental, se piensa que nuestra forma de interactuar con los objetos matemáticos está determinada y expresada a través de tareas y técnicas que le dan forma y valor, y del discurso técnico y teórico circundante. Por ello, se apoya en la teoría antropológica de Chevallard, que le permite integrar la dimensión institucional y defiende el papel de las técnicas y los instrumentos como mediadores del conocimiento matemático. El enfoque constructivista, centra su atención en el aspecto cognitivo del aprendizaje y no otorga el mismo valor al trabajo técnico, que está asociado a la automatización de tareas y esto, en ocasiones, a la falta de comprensión.

Mientras que la teoría antropológica sostiene que el conocimiento avanza con la automatización de tareas y técnicas, el enfoque constructivista mira con recelo los automatismos que pueden encubrir una falta de comprensión. Desde la perspectiva constructivista, el

conocimiento matemático se forja desarrollando destrezas cognitivas como la intuición, interiorización, abstracción,....

Estos dos paradigmas, además de tener en común el interés por mejorar la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, utilizan la noción de esquema que introdujo Piaget. Desde el constructivismo, el esquema de un individuo es la ‘totalidad del conocimiento que para él está conectado (consciente o inconsciente) con un tópico matemático particular’ [Asiala, 1996]. Resulta de organizar estructuradamente la colección de objetos, procesos y acciones que el individuo posee. Desde la instrumentalización, es ‘la organización invariante de conductas para una clase de situaciones dada’ [Trouche, 2004]. Tiene tres funciones principales: una función pragmática (permite al agente hacer algo), una función heurística (permite al agente anticipar y planear acciones) y una función epistémica (permite al agente entender algo).

En una posición moderadora, en cuanto al uso de las nuevas tecnologías en el aula de matemáticas, B. Buchberger propone el principio de caja blanca/caja negra que proclama un uso comedido, dependiendo de la fase de aprendizaje en la que se encuentre el tópico matemático para el cual se utiliza el ordenador. La idea que subyace en este principio, es secundada por diversos autores que comparten la utilización del ordenador en el aula de forma controlada. Dana-Picard y Steiner [Dana-Picard, 2003], sostienen que el alumno ha de utilizar comandos de bajo nivel para fomentar la creatividad; cuando se ha superado la comprensión del concepto en cuestión, se pueden utilizar comando de alto nivel para realizar cálculos que ya han sido interiorizados.

La revisión bibliográfica que se cita a continuación, desprende que las investigaciones en didáctica de la matemática y nuevas tecnologías tratan de responder a preguntas del tipo: ¿cómo utilizar las nuevas tecnologías para enseñar matemáticas?, ¿qué tópicos matemáticos se pueden enseñar en este nuevo entorno?, ¿hay que modificar el currículo, y si es así, cómo?, ¿cuáles son las actitudes de los alumnos hacia el uso de las nuevas tecnologías?,.... A pesar de que las investigaciones aportan soluciones parciales sobre ciertos tópicos concretos, estas preguntas quedan abiertas. Al margen del marco teórico sobre el que se desarrollen las investigaciones, y del las preguntan que se planteen, existen ciertas reflexiones que se repiten en muchas de ellas. Algunas de estas conclusiones comunes, referentes a la utilización de nuevas tecnologías en el aula, son:

- i) Sin una buena planificación, los efectos son negativos.
- ii) No es la panacea a los problemas de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

- iii) Requieren un cambio profundo en la enseñanza.
- iv) Existen ciertas ventajas e inconvenientes que se manifiestan en algunos entornos, en concreto con calculadoras gráficas, y con el uso de software específico en ordenadores personales.
- v) Existe una resistencia social e institucional al empleo de nuevas tecnologías en el aula.
- vi) ¿Están preparados los profesores para los cambios que se avecinan al introducir nuevas tecnologías en el aula?
- vii) Hace más compleja la tarea del alumno y del profesor, ya que el nuevo entorno demanda un aprendizaje para su correcto manejo.
- viii) Requiere una renovación de los recursos pedagógicos.
- ix) Las nuevas tecnologías, junto con el trabajo cooperativo, mejoran el aprendizaje.

Heid [Heid, 2003] afirma que ‘la tecnología puede afectar al aprendizaje de los alumnos, a la interacción profesor-alumno, al acceso de los alumnos a las ideas matemáticas y a la naturaleza de la enseñanza de las matemáticas.’ Esto es suficiente para justificar tantos esfuerzos destinados a esclarecer esta temática.

Enfoque instrumental

En los años 80, se produce en Francia un movimiento para introducir nuevas tecnologías en la enseñanza de las matemáticas. Una década después, el equipo de investigación al que pertenece Artigue, se incorpora a una iniciativa del ministerio de educación para reflexionar sobre la potencia de los sistemas de cálculo simbólico en la enseñanza de las matemáticas a nivel de secundaria. Con el software Derive, se lleva a cabo una investigación en la que se trabaja a partir del enfoque antropológico, desarrollado por Chevallard. La elección de este marco teórico, se debe fundamentalmente a dos motivos: [Artigue, 1997]

- ‘Permite trabajar la dimensión social e institucional de la integración de las nuevas tecnologías en la enseñanza de la matemática, frente al análisis epistemológico y cognitivo que más impera’.
- Ayuda a reflexionar sobre la dimensión técnica e instrumental del trabajo matemático, que en análisis más conceptuales quedan en un segundo plano. ‘Para Chevallard, los objetos matemáticos no existen por sí mismos, sino que emergen de sistemas de prácticas, prácticas que son necesariamente institucionales,...’.

Este paradigma, concierne a la complejidad de la relación entre el trabajo técnico y el conceptual. Desde este modelo, no se pueden tener en cuenta estos problemas sin considerar el contexto institucional, las restricciones que impone y las potencialidades que ofrece a la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. En palabras de Artigue, la evolución tecnológica provoca un cambio en las necesidades matemáticas de las técnicas, que no se puede identificar fácilmente si no se le da la importancia debida al trabajo técnico. Estas necesidades, surgen ligadas a la implementación en el ordenador del conocimiento matemático y asociadas a la evolución de las representaciones semióticas. El enfoque antropológico proporciona un marco adecuado para cuestionarse este tipo de cambios y sus posibles efectos en la enseñanza y el aprendizaje. [Artigue, 2001]

Desde la perspectiva del enfoque antropológico, ‘los objetos matemáticos (...) son entidades que surgen de la práctica en una institución dada. Estas prácticas o “praxeologías”, como las llama Chevallard, se describen en términos de tareas que contienen los objetos, en términos de técnicas utilizadas para resolver esas tareas y en términos de un discurso que explica ambas y justifica las técnicas. Chevallard distingue dos niveles en ese discurso: el tecnológico y el teórico (...). Analizar la vida un objeto matemático en una institución, entender el significado en la institución del “conocimiento/compreensión de un objeto”, es identificar las praxeologías que entran en juego. En este punto, juega un papel esencial las “técnicas”.’ [Artigue, 2001].

El elemento clave de este paradigma es la génesis instrumental, que Trouche [Trouche, 2003], define como ‘un proceso complejo, que requiere tiempo y conexiona las características de la herramienta (sus potencialidades y sus restricciones) y la actividad del individuo, su conocimiento, formando un método de trabajo’.

Algunos trabajos relevantes que tratan de investigaciones bajo este paradigma instrumental son: [Artigue, 1997], [Artigue, 2001], [Drijvers, 1999], [Drijvers, 2002], [Guin, 1999], [Guin, 2002], [Guin, 2005], [Lagrange, 2000], [Trouche, 2003], [Troche, 2004].

Enfoque constructivista

El trabajo de Piaget es el punto de partida de las investigaciones bajo el paradigma constructivista. Según esta escuela, el conocimiento de un individuo se construye con la encapsulación de procesos y acciones en objetos matemáticos. Se van a comentar dos corrientes en las que el ordenador juega un papel importante en el aprendizaje de la matemática, tanto es así, que en ambas se ha desarrollado un software específico para materializar sus teorías.

En los trabajos de Dubinsky y el grupo RUMEC, el ordenador se utiliza como fuente de experiencia, a través de la programación, para favorecer las construcciones mentales que llevan al alumno a tematizar un esquema.

En la corriente de Tall y Gray, el ordenador, juega el papel de herramienta en forma de organizador genérico y, según el caso, cibernético. El organizador genérico, ha de ayudar al alumno a conseguir experiencias que le proporcionen una estructura cognitiva sobre la que pueda construir conceptos abstractos. Así, con una secuencia diferente a la tradicional encapsulación por repetición de tareas hasta hacerlas rutinarias, se puede desarrollar una imagen del concepto más rica. [Tall, 1993].

En ambos casos, el ordenador se utiliza como herramienta que facilita la construcción de esquemas mentales ricos. En el caso del paradigma RUMEC, apoyándose en una instrucción diseñada a partir de la descomposición genética del tópico matemático y aplicando el ciclo ACE. En la teoría del “procepto”, a través de la experimentación de ejemplos y contraejemplos.

Teoría APOE

La teoría APOE, (Acción, Proceso, Objeto, Esquema) se basa en la teoría de Piaget sobre la construcción del conocimiento. Ed Dubinsky y su grupo de investigación RUMEC, han desarrollado numerosos trabajos en este marco teórico, con la pretensión de analizar cómo aprenden los estudiantes ciertos tópicos de matemáticas avanzadas. En las múltiples experiencias que han llevado a cabo con esta metodología, han trabajado distintos tópicos matemáticos, desde la matemática discreta hasta el cálculo.

En el texto de Asiala (1996), se describe esta metodología para la investigación en el aprendizaje de las matemáticas y el desarrollo del currículum basado en esa investigación. Proponen un ciclo que comienza con el análisis teórico, seguido del diseño e implementación de una instrucción y finaliza con el análisis de los datos recogidos. Con los resultados de este análisis, se modifica la instrucción y se completa otro ciclo. El análisis teórico del concepto que se pretende investigar, concluye en una descomposición genética de dicho concepto, que según Asiala es ‘una descripción de las construcciones mentales específicas que un estudiante puede desarrollar para la comprensión del concepto’. La descomposición genética no es única, depende de la formación y la experiencia del investigador y es susceptible de ser modificada tras un primer análisis. Esto, lleva al diseño de una unidad didáctica cuyo principal objetivo es que el alumno construya el modelo cognitivo propuesto por el investigador. La instrucción se lleva a cabo con una muestra que, tras su análisis, hace que el investigador se cuestione el planteamiento

teórico inicial y corrija la instrucción para llevarla de nuevo al aula y analizar su impacto. Este ciclo continúa hasta que el investigador considere que ha depurado la teoría y el proceso de instrucción.

El grupo RUMEC, lleva a cabo la instrucción en el aula siguiendo el ciclo ACE. En un aula de informática, se realizan Actividades que requieren la programación con el ordenador, ‘para favorecer las construcciones mentales sugeridas en el análisis teórico’. Aunque pueden implicar un elemento de descubrimiento, el principal objetivo es ‘facilitar una base de experiencia’. Después, se discute en la Clase las actividades realizadas con lápiz y papel, basadas en las practicadas con el ordenador. El objetivo de esta puesta en común, es que el alumno reflexione sobre lo que ha hecho. Por último, se realizan Ejercicios tradicionales, que se manda como tareas que ha de realizar el alumno fuera de clase. Con ellos, se pretende que el alumno ‘refuerce lo que ha construido’.

Este ciclo instructivo, se realiza en un ambiente de trabajo cooperativo, que ‘favorece la reflexión en el alumno de los procedimientos que realiza’. Precisamente, la facilitación del trabajo cooperativo, es uno de los aspectos que algunos investigadores destacan del trabajo en un entorno computacional.

Según esta teoría, la construcción del conocimiento pasa por tres etapas: Acciones, Procesos y Objetos, que concluyen en la formación del Esquema.

Fiel a la descripción de Asiala [Asiala, 1996], las **acciones**, son transformaciones de objetos que se perciben por el individuo como algo que es, en cierta medida, externo. La construcción de acciones, es el primer objetivo de la instrucción. Las acciones, se interiorizan en **procesos** cuando se repiten y el alumno reflexiona sobre ellas. El individuo, percibe un proceso como algo interno a él. Los procesos, se encapsulan en **objetos** cuando se perciben como una totalidad sobre la que se realizan transformaciones. Este paso de encapsular procesos en objetos, suele resultar muy complicado, y sólo unos pocos llegan a él. ‘El **esquema** de un individuo, es la totalidad del conocimiento que para él está conectado (consciente o inconsciente) con un tópico matemático particular’. Resulta de organizar estructuradamente la colección de objetos, procesos y acciones que el individuo posee. Cuando el individuo trata al esquema como un objeto en sí mismo, se dice que ha tematizado el esquema.

Con la instrucción, se pretende que el alumno construya un esquema del tópico matemático según la estructura marcada por la descomposición genética del concepto en cuestión. Adaptando la noción de esquemas de Piaget y García, se describen tres etapas por las

que evolucionan los esquemas, la triada. Cada una de las etapas, se caracteriza por ‘el grado de construcción de relaciones entre los elementos constitutivos del esquema’ [Trigueros, 2003]. En la primera etapa, **intra-**, se construyen algunas relaciones entre los elementos del esquema, que se encuentran mayoritariamente aislados. La etapa **inter-**, supone una toma de conciencia de estas relaciones. En la última etapa, **trans-**, se posee una comprensión total del esquema. Llegado a este punto, el individuo puede tematizar el esquema.

Bajo este paradigma, se han realizado investigaciones relacionadas con diversos tópicos matemáticos, como función, derivada, integral definida, teoría de grupos,...

Noción de “procepto”

Hace más de una década, Tall y Gray [Gray, 1994] introdujeron la noción de “**procepto**” para designar la ‘combinación de un proceso y un concepto representados por el mismo símbolo’.

Un **proceso**, es la ‘representación cognitiva de una operación matemática’, que se implementa con un procedimiento. Este, es un algoritmo específico, formado por una secuencia coherente de acciones y decisiones que se ejecutan paso a paso. Cada proceso, se puede implementar mediante distintos procedimientos. Los símbolos matemáticos con los que describimos estos procesos, pueden, a veces, describir también el **concepto** matemático asociado a dicho proceso. Esta doble interpretación de los símbolos, como concepto y como proceso, es lo que llaman “**procepto**”.

Cuando hablan de conocimiento procedimental, aluden al conocimiento focalizado en la manipulación rutinaria de objetos. El conocimiento conceptual, es más flexible y rico en relaciones. El alumno que piensa de manera **proceptual**, es capaz de reconocer el carácter ambiguo de los símbolos que representan un tópico, como proceso y como concepto, logrando con ello una forma más eficiente de aprendizaje.

Los entornos de aprendizaje basados en nuevas tecnologías, facilitan la exploración y la experimentación de un concepto antes de definirlo formalmente. Para obtener los beneficios que pueden aportar, es necesario un buen diseño de actividades, sin olvidar el papel del profesor como mediador y guía. Para ello, Tall [Tall, 2000] propone el ‘**principio de construcción selectiva**’ basado en el diseño de software que permita al estudiante centrar su foco de atención en la parte conceptual mientras el ordenador lleva a cabo, de manera oculta, la parte procedimental. Así, mientras que con un enfoque tradicional el alumno ha de familiarizarse con la parte rutinaria antes de conocer el concepto subyacente, con este enfoque, el ordenador realiza

estas tareas rutinarias, permitiendo el contacto del alumno con el concepto antes, después o durante la fase procedimental [Tall, 1993]. En su teoría, define los **organizadores genéricos** como entornos que permiten explorar ejemplos y contraejemplos de procesos o conceptos, mediante la ejecución de instrucciones que introduce el usuario a través de comandos. El organizador genérico se limita a realizar su labor de herramienta, dejando para el usuario la labor de control y el poder de decisión sobre la corrección de los resultados. Cuando un organizador genérico permite, además, programar acciones, se le llama **organizador cibernético** [Tall, 1990].

La complejidad con la que el ordenador manipula internamente los proceptos, hace que se clasifiquen en tres tipos, operacionales, plantilla o estructurales [Tall, 1995]. Los operacionales requieren programar un algoritmo sencillo que los efectúe, mientras que los plantilla se manipulan de distinta forma según el contexto. Los estructurales, requieren de una programación más compleja, utilizando más algoritmos para su ejecución. Según esta clasificación, un **procepto**, puede ser, por ejemplo, operacional para la máquina, pero no para el estudiante.

Algunos trabajos relevantes que tratan de investigaciones bajo este paradigma constructivista son: [Asiala, 1996], [Ayres, 1988], [Breidenbach, 1992], [Dubinsky, 1995], [Dubinsky, 2001], [Gray, 1994], [Mackie, 2002], [McDonald, 2000], [Tall, 1990], [Tall, 1993], [Tall, 1995], [Tall, 2000], [Tall, 2001].

El principio de la caja-blanca / caja-negra.

Las dos posturas extremas en cuanto a la utilización de nuevas tecnologías en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, son la de aquellos que defienden no utilizar las herramientas informáticas en el proceso de enseñanza-aprendizaje por el peligro que suponen al reducir ciertas habilidades de los estudiantes, y aquellos que consideran que la herramienta es la panacea para los problemas rutinarios y que habrá que poner hincapié en enseñar a manejar la herramienta. Con objeto de reducir la distancia entre estas dos posturas contrapuestas, Buchberger propuso, en 1989, su principio White-Box / Black-Box, sustentado por un modelo de enseñanza basado en lo que él denomina la espiral de la creatividad o de la invención.

En este modelo, el tópico matemático que se enseña pasa por dos fases, la fase de caja blanca (White-Box) y la de caja negra (Black-Box). En la fase de caja blanca, el tópico matemático es nuevo para el alumno y no debe utilizarse el ordenador para aquellos algoritmos que le atañen directamente. En la fase de caja negra, el alumno ha superado la etapa de aprendizaje de este tópico y puede utilizar el ordenador para ejecutar el algoritmo referido al

concepto ya aprendido. Cuando alude en su discurso al uso de las nuevas tecnologías, se refiere a la utilización del ordenador para ejecutar un algoritmo matemático. En la propuesta de Buchberger, el uso del ordenador toma una postura intermedia entre las expuestas anteriormente, de modo que ni se repudia, ni se asume sin restricciones, si no que se emplea, en mayor o menor medida, dependiendo de la fase de aprendizaje en la que se sitúe el tópico matemático. Las restricciones que imperan en cada fase, han de ser controladas por el profesor, para facilitar la interiorización de los conceptos que se pretenden transmitir.

Uno de los ejemplos propuestos por Buchberger, que ilustra perfectamente este modelo, concierne al tema de los sistemas lineales y no lineales [Buchberger, 2003]. Cuando se enseñan sistemas lineales, el tópico de operaciones aritméticas está en la fase de caja negra, por lo que es óptimo utilizar el ordenador para realizar estas operaciones. Algunos tópicos, como los sistemas triangularizables, algunos sistemas lineales, el teorema de Gauss o el algoritmo de Gauss, están en la fase de caja blanca, por lo que no se debe utilizar el ordenador para realizar algoritmos que involucren la solución directa de estos problemas, como por ejemplo, resolver un sistema lineal de ecuaciones. El ordenador se utiliza de modo restringido.

Prosiguiendo en la espiral de aprendizaje, los sistemas no lineales se enseñan cuando se ha superado la fase de aprendizaje de los sistemas lineales, por lo que, ahora, el algoritmo de Gauss está en fase de caja negra y es conveniente utilizar el ordenador para, por ejemplo, resolver un sistema lineal por el método de Gauss, ya que la caja blanca la forman ahora los sistemas no lineales. Se sigue utilizando el ordenador, pero con otra restricción.

La espiral de aprendizaje es recursiva, porque lo que en un momento es una caja blanca, se convierte en caja negra una vez superada su instrucción.

Esta propuesta para el uso del ordenador en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, en la que sólo se permite manejar con el ordenador aquellos conceptos que ya se conocen, va en la línea de la reflexión de Monaghan (citado en [Stacey, 2002]), que propone que el alumno realice ‘a mano’ aquellos algoritmos que jueguen un papel importante en el desarrollo cognitivo, o aquellos que contienen un principio que sea importante para un desarrollo posterior. En este sentido, el algoritmo de Gauss para resolver un sistema lineal de ecuaciones, juega un papel importante cuando se están estudiando los sistemas lineales, y deja de ser relevante cuando el alumno ha interiorizado este proceso y su resolución no le aporta conceptualmente nada.

Otros enfoques

Como se ha planteado anteriormente, existe una amplia diversidad de investigaciones sobre el uso de las nuevas tecnologías en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Algunas de estas, se centran en las actitudes de los estudiantes hacia el uso de las HCS, en su influencia en el diseño del currículum, en la evaluación de los conocimientos de los alumnos o en su impacto al trabajar en un entorno de resolución de problemas. A continuación, se citan algunos de estos trabajos que muestran ciertos resultados relevantes. Algunos de estos trabajos no desvelan resultados demasiado trascendentes pero a través de ellos se pone de manifiesto el interés que despierta la incorporación del ordenador al aula, los beneficios y los inconvenientes que se observan en entornos específicos de.

Desde la posición de los alumnos

En este apartado, se citan trabajos centrados en las actitudes de los alumnos hacia el uso de HCS en el aula de matemáticas: [Balderas, 1999], [Breidenbach, 1992], [Camacho, 2001 (a)], [Camacho, 2001 (b)], [Camacho, 2001 (c)], [Galbraith, 1998], [McDonald, 2000], [Soto-Johnson, 1998].

El papel del profesor

En este apartado, se presentan trabajos que, en su totalidad o de soslayo, centran su atención en la enseñanza, por lo que el papel del profesor toma mayor protagonismo: [Balderas, 1999], [Guin, 2005], [Kendal, 2002], [Stacey, 2002].

Enseñanza tradicional versus nuevas tecnologías

En este apartado, se incluyen trabajos en las que se utiliza un grupo de control para comparar algún aspecto de la enseñanza y el aprendizaje en un entorno tradicional y con nuevas tecnologías.: [Ayres, 1988], [Heid, 1988], [O'Callaghan, 1998], [Palmiter, 1991], [Stacey, 2002], [Soto-Johnson, 1998].

Propuestas curriculares

En este apartado, se incluyen investigaciones en las que se describen y valoran diversos diseños curriculares llevados al aula. También se citan trabajos en los que se sugiere algún tipo de propuesta para utilizar las nuevas tecnologías en el aula de matemáticas: [Balderas, 1999], [Breidenbach, 1992], [Buchberger, 2003], [Camacho, 2003 (a)], [Camacho, 2003 (b)], [Guzmán, 1991], [Guin, 1999], [Troche, 2004].

Obstáculos debidos a las HCS.

Las investigaciones de P. Drijvers, [Drijvers, 2000] y [Drijvers, 2002], destacan por el análisis que realiza de los obstáculos que aparecen cuando se incorporan las HCS en el aula de matemáticas. Desde la perspectiva del enfoque instrumental, la definición de obstáculo como falta de equilibrio entre la parte técnica y la parte conceptual en el proceso de instrumentalización, desencadena la evidencia de que el trabajo que requiere superar un obstáculo, beneficia al proceso de aprendizaje. Aunque los detalles de esta conclusión no son compartidos por otras corrientes, la lista de obstáculos que presenta, aunque no sea en su totalidad, sí en gran parte, es corroborada por otras investigaciones en las que se ha hecho hincapié en los problemas que aparecen cuando se incorpora el ordenador a la clase de matemáticas: [Artigue, 1997], [Balderas, 1999], [Gleason, 2001], [Guin, 1999], [Lagrange, 2000], [Mackie, 2002].

Propuesta

Desde nuestra perspectiva, el entorno computacional aporta una herramienta de la que hay que considerar sus ventajas, para aprovecharlas, e inconvenientes, para intentar evitarlos. De él se espera que:

- i) Proporcione un entorno que atraiga a los alumnos.
- ii) A pesar de las dificultades intrínsecas del uso de una herramienta informática, esto no sea un nuevo obstáculo difícil de superar. El hecho de que los alumnos sean estudiantes de ingeniería informática, ayuda a que este obstáculo se pueda vencer.
- iii) Favorezca la visualización y la interpretación de las representaciones gráficas y geométricas, proporcionando las condiciones necesarias para que el alumno maneje distintos registros: analítico, geométrico y gráfico.
- iv) Contribuya a la experimentación y libere al alumno de tediosos cálculos y de los errores asociados a ellos.
- v) Introduzca un entorno de trabajo actual y contribuya a que sea familiar para el alumno, ya que vivimos en una sociedad en la que los ordenadores forman parte de nuestro entorno diario.

La ventaja de llevar a cabo la instrucción con alumnos que estudian ingeniería informática, es el interés que manifiestan frente a un ordenador y la familiaridad con la que se

desenvuelven en este entorno. A pesar de ello, es inevitable que se sientan incomodados por un software novedoso y que aparezcan ciertas dificultades (inherentes a este entorno) que se han puesto de manifiesto en algunas investigaciones, como la correcta interpretación de los resultados que se obtienen en la pantalla del ordenador y la adaptación al entorno para saber qué tienen que ordenar al programa para que realice aquello que esperan. La sintaxis del lenguaje con el que se comunica el usuario con la máquina requiere un entrenamiento que no siempre es posible impartir debido a la densidad de los temarios y a las exigencias del cumplimiento de los mismos. Este es un factor que dificulta el empleo de software de cálculo simbólico en el aula de matemáticas.

Balderas, [Balderas, 1999], muestra la clasificación de Zhao de siete tipos distintos de productos directos de software matemático (los productos indirectos, son aquellos entornos, como los editores de fórmulas o las páginas de internet de contenido matemático, que se utilizan en la actividad matemática, pero no resuelven problemas matemáticos). A su vez, distingue entre aquellos específicos para la educación matemática y los que no tienen ningún propósito didáctico. Maple se encuentra en este último grupo de programas, en los que es esencial el papel del profesor para establecer una estrategia didáctica que guíe la instrucción.

El uso del ordenador, no va a sustituir la clase tradicional de cálculo si no que va a servir de ayuda para cambiarla por otra en la que se preste más atención a aspectos como el enfoque geométrico y gráfico, o estimular el trabajo intuitivo del alumno e introducirle en el quehacer matemático: observar, experimentar, conjeturar y probar.

Bibliografía

- [Artigue, 1997] Artigue, M (1997). Le logiciel 'DERIVE' comme révélateur de phénomènes didactiques liés à l'utilisation d'environnements informatiques pour l'apprentissage. *Educational Studies in Mathematics*. 33. pp133-169
- [Artigue, 2001] Artigue, M. (2001). Learning mathematics in a CAS environment: the genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. Artículo presentado en CAME 2001, Freudenthal Institute, University of Utrecht. Disponible en: <http://www.lonlab.ac.uk/come/freudenthal/1-Presentation-Artigue.pdf>
- [Asiala, 1996] Asiala, M; Brown, A; Devries, DJ (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education, en Jim Kaput, Alan H. Schoenfeld, Ed Dubinsky (Ed.). *Research in Collegiate Mathematics Education II, Conference Board of the Mathematical Sciences (CBMS), Issues in Mathematics Education*. 6, pp. 1-32.

- [Balderas, 1999] Balderas, A., (1999). The influence of information technology in the daily work of mathematics teachers. *International Conference on Mathematics Education into the 21st Century: Societal Challenges, Issues and Approaches*. El Cairo, Egypt.
- [Breidenbach, 1992] Breidenbach, D.; Dubinsky, E.; Hawks, J.; Nichols, D. (1992). Development of the process conception of function. *Educational Studies in Mathematics*. 23. pp 247-285.
- [Buchberger, 2003] Buchberger, B. (2003). The White-Box and Black-Box. Usage of Mathematical Software Systems. *Simposio "Matemáticas y nuevas tecnologías: ¿qué aprender, cómo enseñar?* Universidad Complutense de Madrid, Fundación Ramón Areces.
- [Camacho, 2003 (a)] Camacho, M.; Depool, R.; Socas, M., (2003). La integral definida. Una propuesta de enseñanza utilizando el DERIVE. Reflexiones sobre la enseñanza del Precálculo y el Cálculo. Aceptado para publicar.
- [Camacho, 2003 (b)] Camacho, M.; Depool, R., (2003). Un estudio gráfico y numérico del cálculo de la integral definida utilizando el programa de cálculo simbólico (PCS) Derive. *Educación Matemática*. 15 (3), pp. 119-140.
- [Camacho, 2001 (a)] Camacho, M.; Depool, R., (2001). La evolución de las actitudes de los estudiantes cuando utilizan CAS (Computer Algebra System) para el aprendizaje de los conceptos de cálculo. En, Camacho, M.; Morales, A; Socas, M. M (eds.): *Formación del profesorado e investigación en educación matemática III*. pp. 319-338.
- [Camacho, 2001 (b)] Camacho, M.; Depool, R., (2001). Un análisis comparativo de las actitudes de estudiantes de primero de ingeniería hacia el uso de ordenadores y programas de cálculo simbólico para el aprendizaje de los conceptos de cálculo. En Beitia, G (ed.): *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 14*. Grupo Editorial Iberoamérica. México. pp. 603-610.
- [Camacho, 2001 (c)] Camacho, M.; Depool, R., (2001). Actitudes de los estudiantes hacia el uso de un software para el aprendizaje de las matemáticas. En, Camacho, M.; Morales, A; Socas, M. M (eds.): *Formación del profesorado e investigación en educación matemática III*. pp. 27-42.
- [Dana-Picard, 2003] Dana-Picard, T.; Steiner, J. (2003). Enhancing conceptual insight using a CAS. Disponible en: <http://www.lonklab.ac.uk/come/events/reims/3-ShortPres-DanaPicard.pdf>

- [Drijvers, 2000] Drijvers, P. (2000). Students encountering obstacles using CAS. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*. 5 (3), pp. 189-209.
- [Drijvers, 2002] Drijvers, P. (2002). Learning mathematics in a computer algebra environment: obstacles are opportunities. *ZDM*. 34 (5), pp. 221-228.
- [Dubinsky, 1995] Dubinsky, E. (1995). ISETL: A programming language for learning mathematics. *Communications on Pure and Applied Mathematics*. 48, pp. 1-25.
- [Dubinsky, 2001] Dubinsky, E.; McDonald, M.A. (2001). APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research, in Derek Holton et al. (eds.), *The teaching and learning of mathematics at University level: An ICMI study*, Kluwer, Netherlands, pp. 273-280.
- [Galbraith, 1998] Galbraith, P.; Haines, C. (1998). Disentangling the nexus: attitudes to mathematics and technology in a computer learning environment. *Educational Studies in Mathematics*. 36 (3), pp. 275-290.
- [Gleason, 2001] Gleason, J. (2001). The use of a Computer Algebra System in first year college mathematics classes. Disponible en: <http://www.graddiv.ucsb.edu/academic/ccut/portfolios/gleason/portfolio/caspaper.pdf>.
- [Gray, 1994] Gray, E.; Tall, D. (1994). Duality, ambiguity, and flexibility: a “proceptual” view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*. 25 (2) pp116-140.
- [Guin, 1999] Guin, D.; Trouche, L. (1999). The complex process of converting tools into mathematical instruments: the case of calculators. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*. 3, pp. 195-227.
- [Guin, 2002] Guin, D.; Trouche, L. (2002). Mastering by the teacher of the instrumental genesis in CAS environments: necessity of instrumental orchestrations. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*. 34 (5), pp. 204-211.
- [Guin, 2005] Guin, D.; Trouche, L. (2005). Distance training, a key mode to support teachers in the integration of ICT? *CERME 4, Fourth Congress of the European society for Research in Mathematics Education*. España. Disponible en: <http://cerme4.crm.es/Papers%20definitius/9/Guin-Trouche.pdf>
- [Guzmán, 1991] Guzmán, M. de (1991). Los riesgos del ordenador en la enseñanza de la matemática. *Actas de las Jornadas sobre Enseñanza Experimental de la Matemática en la Universidad*. Manuel Abellanas y Alfonsa García (eds.), pp. 9-27.

- [Heid, 1988] Heid, M.K., 1998. Resequencing skills and concepts in applied calculus using the computer as a tool. *Journal for Research in Mathematics Education*. 19 (1), pp. 3-25.
- [Heid, 2003] Heid, M.K., 2003. Research on technology and the teaching and learning of mathematics. *International Conference on Research and Development in Mathematics and Science Education*. Disponible en: <http://clnet.org/archive/dfgnsf/docs/KielUSPlenaryPapers.pdf>.
- [Kendal, 2002] Kendal, M., Stacey, K. (2002). Teachers in transition: moving towards CAS-supported classrooms. *ZDM*. 34 (5), pp. 196-203
- [Lagrange, 2000] Lagrange, J.B. (2000). L'intégration d'instruments informatiques dans l'enseignement : une approche par les techniques. *Educational Studies in Mathematics*. 43, pp. 1-30.
- [Mackie, 2002] Mackie, D (2002). Using computer algebra to encourage a deep learning approach to calculus. Disponible en : <http://www.math.uoc.gr/ictm2/Proceedings/pap415.pdf>
- [McDonald, 2000] McDonald, MA.; Mathews, DM. ; Strobel, KH. (2000). Understanding sequences: a tale of two objects, en Jim Kaput, Alan H. Schoenfeld, Ed Dubinsky (Eds). *Research in collegiate mathematics education. IV. Conference Board of the Mathematical Sciences (CBMS), Issues in Mathematics Education*. 8, pp. 77-102.
- [O'Callaghan, 1998] O'Callaghan, B. R., (1998). Computer-intensive algebra and students' conceptual Knowledge of functions. *Journal for Research in Mathematics Education*. 29 (1), pp. 21-40
- [Palmiter, 1991] Palmiter, J. (1991). Effects of a computer algebra system on concept and skill acquisition in calculus. *Journal for Research in Mathematics Education*. 22 (2), pp. 151-156.
- [Soto-Johnson, 1998] Soto-Johnson, H. (1998). Impact of technology on learning infinite series. *The International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education*. 5 (2), pp. 95-109.
- [Stacey, 2002] Stacey, K., Kendal, M., Pierce, R. (2002). Teaching with CAS in a time of transition. *The International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education*. 9 (2), pp 113-127.
- [Tall, 1990] Tall, D. (1990). Using computer environments to conceptualize mathematical ideas. *Proceedings of Conference on New Technological Tools in Education*. Singapore: Nee Ann Polytechnic. pp. 55-75.

- [Tall, 1991] Tall, D. (1991). *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- [Tall, 1993] Tall, D. (1993). Technology and mathematics education. En R. Biehler, R. W. Scholz, R. Strässer, B. Winkelmann (eds). *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, pp. 189-199.
- [Tall, 1995] Tall, D. (1995). The psychology of symbols and symbol manipulators: what are we doing right? Versión reducida publicada en *Proceedings of the Seventh Annual International Conference on Technology in College Mathematics Teaching*. Addison-Wesley, pp. 453-457.
- [Tall, 2000] Tall, D. (2000). Cognitive development in advanced mathematics using technology. *Mathematics Education Research Journal*. 12 (3) pp. 210-230.
- [Tall, 2001] Tall, D.; Smith, D., Piez, C., (2001). Technology and calculus. *Borrador disponible en*: <http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2002z-tech-calc-smith-piez.pdf>.
- [Trigueros, 2003] Trigueros, M. (2003). El uso de la noción de esquema en el análisis de la solución de problemas complejos. *Actas de las XIX Jornadas del SI-IDM*, Organizadas por el grupo DMDC del SEIEM. Córdoba. Disponible en: <http://www.ugr.es/local/jgodino/siidm.htm>
- [Trouche, 2003] Trouche, L. (2003). Managing the complexity of human/machine environment (CBLE): guiding student's process command through instrumental orchestrations. Artículo presentado en CAME 2003, Freudenthal Institute, University of Utrecht. Disponible en: <http://www.lonklab.ac.uk/come/events/reims/2-Presentation-Trouche.doc>
- [Trouche, 2004] Trouche, L., (2004). Environnements informatisés et mathématiques: quels usages pour quels apprentissages?. *Educational Studies in Mathematics*. 55, pp. 181-197.