

ESTUDIO DE ALGUNOS PROBLEMAS MULTIPLICATIVOS EN LOS QUE INTERVIENE LA DIVISIÓN DE FRACCIONES

Mauricio Contreras del Rincón

I.E.S. Benicalap (Valencia)

Bernardo Gómez Alfonso

Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Valencia

LA PROBLEMÁTICA

Las razones que nos han llevado a realizar este estudio las hemos agrupado en tres apartados:

- 1) A partir de los trabajos de Kieren (1976 y 1985), Fishbein y otros (1985), se sabe que existe una diversidad de constructos y modelos de fracción y división. ¿Cómo se presentan e interrelacionan en la enseñanza? ¿Cuáles son sus efectos en las actuaciones de los estudiantes?
- 2) En los currículos actuales predominan dos algoritmos algebraicos para la división de fracciones, el de productos cruzados y el de “invertir y multiplicar”. ¿Afecta este hecho al reconocimiento de la división de fracciones en problemas contextualizados?
- 3) Históricamente y en la actualidad predomina la idea de considerar la división de fracciones como una ley de composición u operación ternaria, con dos entradas (inputs) y una salida (output). Sin embargo, hemos observado en nuestra experiencia docente que los estudiantes tienden a utilizar un esquema de “regla de tres” para resolver los problemas relativos a la división de fracciones. ¿Es la división de fracciones una operación cuaternaria o una ley de composición?

OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

De acuerdo con las preguntas formuladas en el apartado anterior, nos hemos planteado tres objetivos:

- 1) Indagar cómo se presentan e interrelacionan en la enseñanza constructos, contextos y modelos de la división de fracciones y qué efecto tiene esto en las realizaciones de los estudiantes.
- 2) Investigar si el modelo usual de enseñanza condiciona el reconocimiento de los problemas de división de fracciones en contextos diferentes.
- 3) Investigar la incidencia en las realizaciones de los estudiantes de los modelos cuaternario o de “regla de tres” y ternario o de ley de composición, para plantear y resolver problemas multiplicativos contextualizados relativos a la división de fracciones.

HIPÓTESIS DE LA INVESTIGACIÓN

Las hipótesis de la investigación que aquí presentamos son las siguientes:

- 1) El modelo usual de enseñanza condiciona el reconocimiento en contexto de la división de fracciones y el enfoque de resolución.
- 2) Hay contextos más favorables y menos favorables a la utilización de un determinado algoritmo para la división de fracciones.
- 3) Más que una ley de composición en la que intervienen tres elementos (dos entradas y una salida), la división de fracciones implica, para los estudiantes, una relación entre cuatro elementos, de acuerdo con el esquema de una tabla de proporcionalidad.

METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

La investigación usa como marco de referencia la idea de Modelo Teórico Local (MTL) de Filloy (1999), y se centra en la construcción del modelo de enseñanza.

La construcción del modelo de enseñanza

Para construir el modelo de enseñanza utilizamos el análisis histórico–epistemológico de los problemas multiplicativos que involucran división de fracciones. Este análisis nos permite establecer un conjunto de variables de tarea, localizadas en distintas épocas históricas, que hemos denominado: constructos, algoritmos, contextos y modelos físicos.

De forma simultánea al análisis histórico–epistemológico, hemos realizado una revisión de textos de enseñanza antiguos y modernos, con el fin de localizar valores de las variables de tarea en diversas épocas históricas. También con la misma finalidad, hemos revisado algunas de las investigaciones recientes (en particular, Yamaguchi y Jwsaki, 1999)

A partir de esta revisión de textos, hemos seleccionado un conjunto de 29 problemas de diferentes épocas históricas y los hemos caracterizado de acuerdo con las variables de tarea, usando como marco teórico las ideas del análisis estructural (Vergnaud, 1983, 1988) y el análisis dimensional (Schwartz, 1981, 1988).

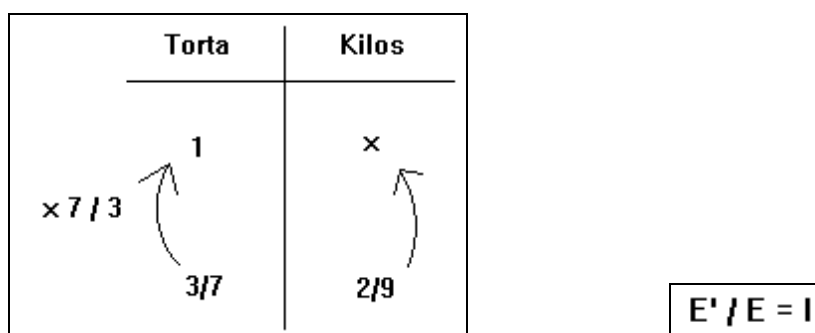
Caracterización de los problemas

Mostramos a continuación algunos ejemplos del tipo de análisis realizado para caracterizar los problemas seleccionados:

Ejemplo 1: Peso de la torta

3/7 de torta pesan 2/9 de kilo. ¿Cuánto pesa la torta? (Rey Pastor y Puig Adam, 1932, pp. 211 y 212)

a) Estructura y enfoque de resolución:



En este caso se desconoce el valor unitario, por tanto el problema es de división–partición y el enfoque de resolución es escalar.

Desde el punto de vista dimensional, hay que dividir 2/9 kilos entre 3/7 tortas, es decir, hay que hacer un cociente de cantidades extensivas de distintos espacios de medida, para obtener una cantidad intesiva (los kilos que pesa cada torta).

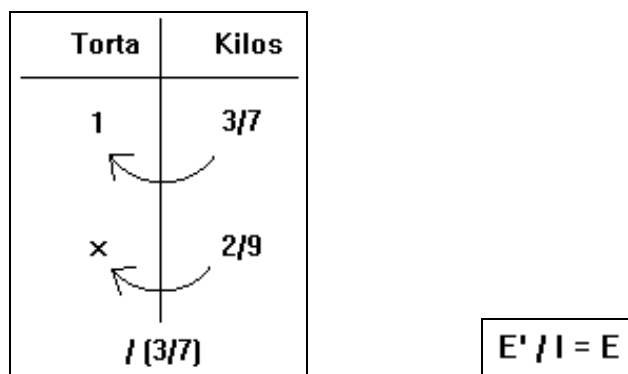
b) Variables de tarea:

El modelo es circular de torta, el contexto es de medida, puesto que se pide el peso de la torta, el constructo es de comparación o medida y de partición.

Ejemplo 2: Porción de torta

Si cada torta pesa $\frac{3}{7}$ de kilo, ¿qué porción de torta tendré con $\frac{2}{9}$ de kilo? (Rey Pastor y Puig Adam, 1932, pp. 211 y 212)

a) Estructura y enfoque de resolución:



A diferencia del ejemplo anterior, ahora se conoce el valor unitario; por tanto, el problema es de división-agrupación y su enfoque de resolución es funcional, ya que hay que dividir entre el valor unitario ($\frac{3}{7}$).

Desde el punto de vista dimensional, hay que dividir $\frac{2}{9}$ kilos entre $\frac{3}{7}$ kilos / torta, es decir, hay que dividir una cantidad extensiva del segundo espacio de medida entre una cantidad intensiva (el valor unitario) para obtener una cantidad extensiva del primer espacio de medida (porción de torta).

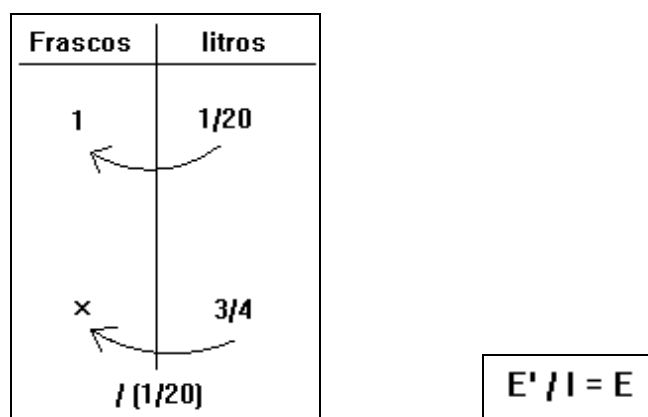
b) Variables de tarea:

Al igual que en el ejemplo anterior y el modelo es circular de torta, el contexto es de medida, pero ahora el constructo es de agrupación.

Ejemplo 3: Perfume

Un frasco de perfume tiene una capacidad de $\frac{1}{20}$ de litro. ¿Cuántos frascos de perfume se pueden llenar con el contenido de una botella de $\frac{3}{4}$ de litro? (Colera, Gaztelu y otros, 1997, p. 54)

a) Estructura y enfoque de resolución:



Aunque el contexto es completamente diferente, este problema tiene la misma estructura que el problema del ejemplo anterior. Como se conoce el valor unitario, se trata de un problema de división-agrupación y el enfoque de resolución es funcional, ya que hay que dividir entre el valor unitario ($1/20$).

Dimensionalmente hay que dividir una cantidad extensiva del segundo espacio de medida (litros) entre una cantidad intensiva (el valor unitario, que se mide en litros / frasco) para obtener una cantidad extensiva del primer espacio de medida (frascos).

b) Variables de tarea:

En este caso, el modelo es de recta numérica, ya que podemos representar en la recta numérica las fracciones $1/20$ y $3/4$ y tratar de alcanzar $3/4$ por adición repetida de la fracción $1/20$. El contexto es de medida y reparto y el constructo es de agrupación.

La fase experimental

Una vez caracterizados los problemas, pasamos al diseño del cuestionario. Para ello, se realizaron dos estudios pilotos sucesivos, el primero con estudiantes de 4º de E.S.O. del I.E.S. Balears de Valencia y el segundo con estudiantes de segundo ciclo de E.S.O. del mismo centro. Entre ambos pilotajes transcurrió un período de tiempo de 30 días. Como consecuencia de estos pilotajes se fueron descartando algunas de las tareas que no resultaron discriminantes o que eran redundantes.

El cuestionario definitivo consta de un conjunto de ocho tareas, en las que se recogen problemas de tres clases: a) un solo espacio de medida, b) isomorfismo de medida, y c) producto de medidas. Además, en estas tareas intervienen cinco tipos de contextos: a) escalas, b) medidas, c) ábacos, d) tasas, y e) grifos. Se ha procurado que las tareas difieran en algún valor de las variables de tarea.

La muestra a la que se pasó el cuestionario definitivo está compuesta por 31 estudiantes del I.E.S. Benicalap de Valencia, pertenecientes a un grupo-clase de 3º de E.S.O. La prueba tuvo lugar en la primera semana de junio, de forma que los estudiantes tenían ya experiencia en el trabajo con fracciones. Para contestar los ítems, disponían de una calculadora científica con teclas de fracción.

Análisis de respuestas

Una vez realizada la prueba, se pasó al análisis de las actuaciones de los estudiantes, mediante el estudio de las respuestas al cuestionario. Mostramos como ejemplo, los resultados obtenidos en las tareas relativas a “Tortas” (ejemplos 1 y 2).

1) Resultados

1.1) Sobre los enfoques de resolución:

Un total de 10/18 estudiantes utilizan un esquema cuaternario de proporcionalidad simple y solamente 2/18 recurren al esquema ternario de ley de composición. Por tanto, el enfoque cuaternario es mayoritario en esta tarea.

1.2) Sobre las variables de tarea:

Se observa que el contexto de medida no influye en esta tarea, mientras que el constructo de partición sí que ejerce cierta influencia. La forma de presentación de los datos (variable no prevista inicialmente en el diseño de la investigación) influye en alguna de las respuestas. Solamente 1/18 estudiante utiliza un modelo físico de tarta para representar el problema.

2) Ejemplos de respuestas

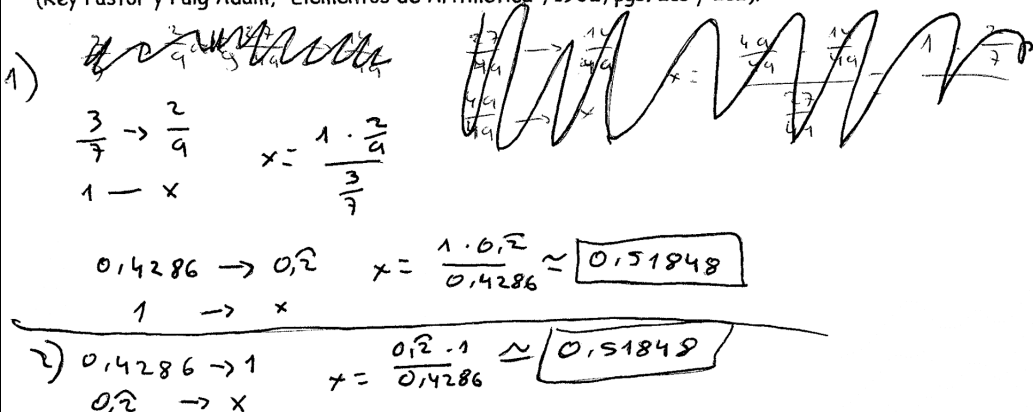
Alumno 1 (Fer)

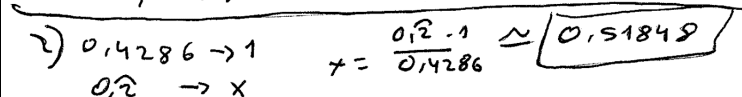
2.- TORTAS

1) $\frac{3}{7}$ de torta pesan $\frac{2}{9}$ de kilo. ¿Cuánto pesa la torta?

2) Si cada torta pesa $\frac{3}{7}$ de kilo, ¿qué porción de torta tendré con $\frac{2}{9}$ de kilo?

(Rey Pastor y Puig Adam, "Elementos de Aritmética", 1932, pgs. 211 y 212).

1) 

2) 

El estudiante utiliza un esquema cuaternario en los dos apartados, pero usa el mismo enfoque de resolución en los dos casos, aplicando la regla de tres estándar.

Alumna 26 (Mercé)

2.- TORTAS

1) $\frac{3}{7}$ de torta pesan $\frac{2}{9}$ de kilo. ¿Cuánto pesa la torta?.

2) Si cada torta pesa $\frac{3}{7}$ de kilo, ¿qué porción de torta tendré con $\frac{2}{9}$ de kilo?.

(Rey Pastor y Puig Adam, "Elementos de Aritmética", 1932, pgs. 211 y 212).

1) $\frac{3}{7} \rightarrow \frac{2}{9}$ $\frac{1}{7} \rightarrow \frac{2}{9} : \frac{3}{1} = \frac{2}{27}$
 $\frac{7}{7} \rightarrow x$ $\frac{7}{7} = \frac{2}{27} \cdot \frac{7}{1} = \frac{14}{27}$
 La torta pesa $\frac{14}{27}$ kg

2) $\frac{3}{7} \rightarrow \frac{7}{7}$ $\frac{7}{7} \cdot \frac{2}{9} = \frac{14}{9} : \frac{3}{7} = \frac{98}{189}$
 $\frac{2}{9} \rightarrow x$
 Tendré $\frac{98}{189}$ de torta.

La estudiante utiliza un esquema cuaternario en los dos casos, pero con diferente enfoque de resolución. En el apartado (1) su enfoque de resolución es escalar, ya que hace transformaciones escalares en el primer espacio de medida, para trasladarlas al segundo espacio de medida. Así, conociendo el peso de $\frac{3}{7}$ de torta, calcula el peso de $\frac{1}{7}$ de torta (dividiendo por $\frac{3}{1}$) y para obtener el peso de la torta entera halla el peso de $\frac{7}{7}$ multiplicando por $\frac{7}{1}$. Sin embargo, en el apartado (2) no usa el mismo enfoque de resolución, ya que aplica una regla de tres estándar, pero en dos pasos.

RESULTADOS Y CONCLUSIONES

En este apartado indicamos los resultados y conclusiones de la investigación, agrupados en tres apartados: a) estructura y enfoques de resolución, b) influencias de las variables de tarea, y c) sobre las hipótesis de la investigación.

a) Estructura y enfoques de resolución.

Hemos localizado tres enfoques de resolución diferentes. La descripción y la incidencia de cada uno en cada una de las ocho tareas se muestra a continuación:

a.1) Uso de un esquema cuaternario de proporcionalidad simple, mediante el planteamiento de una regla de tres, siguiendo el orden literal del enunciado.

Tarea 1	Tarea 2	Tarea 3	Tarea 4	Tarea 5	Tarea 6	Tarea 7	Tarea 8
15/16	10/18	0/14	0/14	11/26*	5/20	0/20	19/23

a.2) Uso de un esquema ternario (ley de composición) de división de fracciones.

Tarea 1	Tarea 2	Tarea 3	Tarea 4	Tarea 5	Tarea 6	Tarea 7	Tarea 8
0/16	2/18	5/14	8/14	9/26*	11/20	15/20	0/23

a.3) Planteamiento de una ecuación.

Tarea 1	Tarea 2	Tarea 3	Tarea 4	Tarea 5	Tarea 6	Tarea 7	Tarea 8
0/16	0/18	5/14	2/14	0/26	0/20	0/20	0/23

Se observa que el enfoque cuaternario es mayoritario en las tareas correspondientes al isomorfismo de medidas, salvo en las tareas 6 y 7, en las que el contexto favorece más el enfoque ternario. Cuando la incidencia del esquema cuaternario es muy alta, la incidencia del esquema ternario es prácticamente nula. El enfoque de resolución a través del planteamiento de una ecuación es minoritario y solamente tiene incidencia en el caso de un solo espacio de medida y en el producto de medidas.

b) Influencias de las variables de tarea.

Hemos localizado unos valores de las variables de tarea que tienen influencia en los distintos enfoques de resolución. El criterio para afirmar que un valor favorece un esquema de resolución consiste en ver si dicho enfoque de resolución es mayoritario entre las respuestas de los estudiantes en aquellas tareas en las que interviene ese valor. De acuerdo con este criterio, hemos observado que:

b.1) Contextos:

b.1.1) Favorecen el esquema ternario los contextos de medida, cambio de escala y cálculo de tasas.

b.1.2) Favorece el esquema cuaternario el contextos de grifos.

b.1.3) Favorece el esquema de ecuación el contextos de ábacos.

b.2) Constructos:

b.2.1) Los constructos que favorecen el esquema ternario son: partición y reparto y comparación o medida.

b.2.2) Los constructos que favorecen el esquema cuaternario son el de agrupación y el de razón-proporción.

b.2.3) Favorece tanto el esquema ternario como el enfoque de ecuación el constructo de factor perdido de una multiplicación.

b.3) Modelos:

El uso de modelos físicos en la resolución de las tareas es prácticamente inexistente. El modelo de recta numérica (bastante habitual en la enseñanza) no tiene incidencia en las respuestas de los estudiantes. Los modelos circular de tarta y rectangular favorecen más el esquema ternario.

b.4) Algoritmos:

Los algoritmos más usados por los estudiantes en sus respuestas, ordenados en sentido decreciente, según frecuencias, son los siguientes:

- Conversión de las fracciones en decimales y división de decimales.
- Productos cruzados.
- “invertir y multiplicar”.
- “producto de extremos partido por producto de medios”.
- Uso de la tecla $a^{b/c}$ de la calculadora en modo FRAC.

c) Sobre las hipótesis de la investigación.

c.1) Hipótesis 1

La hipótesis 1 es cierta: El modelo de enseñanza condiciona tanto el reconocimiento en contexto de la división de fracciones como el enfoque de resolución.

c.2) Hipótesis 2

La hipótesis 2 no es cierta: los contextos no influyen necesariamente en los algoritmos que utilizan los estudiantes. Más que el contexto es el constructo el que influye en el planteamiento del problema, o tal vez la acción combinada del contexto y del constructo. Además, hemos observado que existen otras variables (no tenidas en cuenta en el diseño inicial de la investigación) que influyen en las realizaciones de los estudiantes. Así, habría que investigar la influencia tanto de la estructura sintáctica del enunciado, como de la forma de presentación de los datos.

c.3) Hipótesis 3

Hemos observado en las respuestas de los estudiantes que se usa preferentemente el esquema cuaternario, frente al esquema ternario o ley de composición, aún incluso cuando la tarea propuesta es de tipo ternario.

La hipótesis 3 es cierta en el caso de un isomorfismo entre dos espacios de medida M_1 y M_2 , pero no en el caso de un producto de medidas. Por tanto, esta hipótesis debería reformularse de la siguiente forma: “En el caso de un isomorfismo entre dos espacios de medidas, la división de fracciones implica una relación entre cuatro elementos, uno de los cuales es la unidad, y se puede esquematizar mediante una tabla de proporcionalidad”.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

- Colera, J, Gaztelu, I, De Guzmán, M, y García, J. E. (1997). *Matemáticas 2º ESO*. Madrid: Anaya.
- Filloy, E. y otros (1999). *Aspectos teóricos del álgebra educativa*. Grupo Editorial Iberoamérica. México, DF.
- Fischbein, E.; Deri, M.; Nello, M. y Marino, M. (1985). The role of implicit models in solving problems in multiplication and division. *Journal for research in mathematics education*. 16, 1, pp. 3-21.
- Kieren, T. (1976) On the mathematical, cognitive and instructional foundations of rational numbers. En R. Lesh (Ed.). *Number and Measurement: Papers from a research workshop*. Columbus, OH: ERIC/SMEAC. pp. 101-144.
- Kieren, T., Nelson, D y Smith, C. (1985). Graphical algorithms in partitioning tasks. *The Journal of Mathematical Behaviour*, N° 4, pp. 24–36.
- Rey Pastor, J. y Puig Adam, P. (1932). *Elementos de Aritmética*. Col. Elemental intuitiva. Tomo I. Sexta Edición. Madrid: Imp. A. Marzo.
- Schwartz, J. L. (1981). *The role of semantic understanding in solving multiplication & division word problems*. Final report to NIE (Grant NIE–G–80–0144). MIT, Cambridge, MA.
- Schwartz, J. L. (1988). Intensive quantity and referent transforming arithmetic operations. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades*, Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum; Reston, VA: NCTM. pp. 41–52.
- Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisitions of mathematics concepts and processes*. London: Academy Press. pp. 127–174.
- Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Numbers concepts and operations in the middle grades*. Hillsdale, NJ: Erlbaum; Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics. pp. 141–161.
- Yamaguchi, T. y Jwasaki, H. (1999). La división de fracciones no es una división, sino una multiplicación. *Proceedings of the 23 Conference of PME Vol.IV*. Pp.4–337/4–344.