ANÁLISIS DE SIGNIFICADOS PERSONALES DE LOS ESTUDIANTES ACERCA DE LA INTEGRAL DEFINIDA

Ángel Contreras de la Fuente. Universidad de Jaén.
Lourdes Ordóñez Cañada. IES « Albariza ». Mengíbar (Jaén).

Resumen: En el enfoque ontológico semiótico de la cognición matemática (EOS) (Godino, 2002), los significados personales constituyen uno de los constructos más importantes de cara a poder establecer lo que Chevallard denomina saber del alumno. En este trabajo, parte de uno más amplio correspondiente a una Memoria de Tesis en elaboración, se analizan los significados personales de estudiantes de 2º de bachillerato, en torno a la concepto de integral definida, por medio de las respuestas dadas a los ítems de un cuestionario piloto elaborado por los autores y según las entidades primarias presentes en la actividad matemática.

1. INTRODUCCIÓN

El Cálculo Integral juega un papel esencial, como conjunto de nociones básicas, en la instrucción del Cálculo Infinitesimal elemental. Sin embargo, la tendencia que se observa en la enseñanza de los conceptos implicados en la integración es la de seguir un desarrollo casi exclusivamente algebraico, ligado a la operación inversa de la derivación. Esto supone que el estudiante llega a conocer las diversas técnicas algorítmicas, pero a costa de permanecer sin una contextualización adecuada el proceso de integración.

Se trata de un problema didáctico de gran importancia en los currículos de diferentes países y, por tanto, generador de numerosos trabajos de investigación. Así por ejemplo, Wenzelburger (1994) señala: "El Cálculo Integral se introduce normalmente como el método "inverso" del Cálculo Diferencial, lo cual se puede justificar y comprobar desde el punto de vista matemático. Sin embargo, para muchos alumnos permanece el concepto abstracto de un Cálculo Diferencial "inverso" sin significado, ya que no pueden relacionar fácilmente la derivación e integración como tales procesos inversos." (p. 7)

Cuando nos situamos en el nivel académico del Bachillerato de la Comunidad Autónoma de Andalucía, observamos que el concepto de integral ha desaparecido totalmente del primer curso. En cambio, en segundo curso la enseñanza de la integral se desarrolla bajo la perspectiva de objeto de conocimiento, lo que induce a pensar que, dado este tratamiento didáctico que parece alejarnos de su desarrollo exclusivo como herramienta de cálculo, los alumnos pueden adquirir ciertos significados en cuanto a las nociones básicas del Cálculo Integral.

Sin embargo, los resultados aportados por la experiencia como profesora de la asignatura de Matemáticas del citado nivel académico de una de las autoras de este trabajo, además de los resultados que se han podido contrastar en diversos trabajos de investigación —Ordóñez y Contreras, 2001; Ordóñez y otros, 2002; Contreras y otros, 2003 — muestran que los estudiantes tienen dificultades para lograr la emergencia del objeto integral, encontrándonos con verdaderas renuncias, tanto institucionales como personales, a lograr el aprendizaje de dicho objeto. Es decir, en las instituciones de Bachillerato, junto al fenómeno de renuncia al aprendizaje se da el de la algebrización del Cálculo Integral, los cuales, obviamente, inciden negativamente en la enseñanza-aprendizaje del concepto.

Consideramos que estos fenómenos didácticos de perversión del contrato didáctico, se potencian por el fenómeno educativo-social de las Pruebas de Acceso a la Universidad (PAU), puesto que los profesores se ven obligados a preparar a sus alumnos sufriendo verdaderas restricciones institucionales ya que deben restringirse a aquellos aspectos de los temas que "pueden caer" en las pruebas, los cuales están bastante delimitados y centrados en contenidos mínimos. Además, como el profesor dispone de los modelos de pruebas de años anteriores, podemos decir que éstas determinan un currículum oculto que le servirá de referente básico en la preparación de sus clases. El resultado produce efectos negativos en la formación matemática al perderse contenidos que luego son absolutamente necesarios en las titulaciones universitarias. Es decir, refiriéndonos al Cálculo Integral, nos encontramos con tipos de problemas muy concretos, bastante sesgados hacia cálculo algorítmico, en el que las áreas se calculan aplicando un método rutinario, renunciando a otros aprendizajes muy importantes y esenciales para lograr la emergencia del objeto integral (relacionados, en general, con la determinación de resultados totales de procesos de cambio).

Estas consideraciones nos ha llevado a proponer como temática de investigación el estudio de los significados institucionales y personales (Godino y Batanero, 1994, 1998) del concepto integral definida en segundo de Bachillerato y su relación con las restricciones institucionales que imponen el currículum actual y las PAU. Dicha temática tiene una triple faceta: epistemológica (en relación con los significados institucionales), cognitiva (de los significados personales) y curricular (de las restricciones institucionales).

Este trabajo es un estudio piloto, parte de uno más amplio correspondiente a una Memoria de Tesis en elaboración, en el que nos centraremos en el análisis y caracterización de los significados personales de los estudiantes de 2º de Bachillerato, en cuanto al objeto integral definida, una vez implementada la enseñanza.

2. MARCO CONCEPTUAL

Nuestro objetivo primario es estudiar los fenómenos que acontecen en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas y en particular del concepto de integral definida. Adoptamos una posición que se sitúa tanto en el programa cognitivo como en el epistemológico. Compartimos con el primero la preocupación por los procesos cognitivos del sujeto desde un punto de vista semiótico, como pueden ser la construcción de los significados personales o la interpretación de los símbolos puestos en juego. Por otra parte asumimos que es fundamental problematizar el propio conocimiento matemático, no considerándolo como transparente lo que supone posicionarnos dentro del programa epistemológico.

Este doble enfoque cognitivo e institucional nos parece fundamental para explicar los distintos fenómenos que se producen en la enseñanza-aprendizaje de una forma rica y realista, abordando la dimensión epistemológica, cognitiva e instruccional que podemos distinguir en todo proceso de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas. En este doble sentido surgen las nociones de significados institucionales y personales propuestos por Godino y Batanero (1994) como herramientas prácticas para el análisis de dichas situaciones consideradas como emergentes de sistemas de prácticas socialmente compartidas. Esto permite entender los significados, en su doble dimensión personal-institucional, como los sistemas de prácticas (operativas y discursivas) realizadas por una persona, o en el seno de una institución, para resolver un campo de problemas.

Con esto, en el EOS se entiende la comprensión, esencialmente, como una competencia que posee el alumno y no tanto un proceso mental. Desde este punto de vista, diremos que un alumno comprende un determinado objeto matemático cuando lo usa de manera competente en diversas prácticas. Es decir, la capacidad se traduce en la realización de prácticas que son evaluables públicamente.

Entidades primarias:

La relación entre los signos usados para codificar el conocimiento y los contextos que sirven para establecer el significado del mismo ha sido modelizada por diversos autores mediante esquemas de tipo triangular. Entre estos esquemas destacan los propuestos por Frege, Peirce, Ogden y Richards, así como la interpretación que hace Steinbring de ellos y que denomina el triángulo epistemológico. Los elementos que incluye Steinbring son concepto, signo / símbolo y objeto / contexto de referencia. Inspirados en esta tríada, así como en la tripleta conceptual de Vergnaud (1982), y con la intención de progresar en una ontología y una semiótica de dichos objetos matemáticos que permita una mejor descripción y análisis de la actividad matemática y de sus procesos de comunicación, en Godino (2002) se esboza un modelo teórico que incluye los siguientes tipos de entidades primarias, atendiendo a la función que desempeñan en la actividad matemática:

(1) Lenguaje (términos, expresiones, notaciones, gráficos). En un texto vienen dados en forma escrita o gráfica pero en el trabajo matemático pueden usarse otros registros (oral, gestual). Mediante el lenguaje (ordinario y específico matemático) se describen otros objetos no lingüísticos:

(2) Situaciones (problemas más o menos abiertos, aplicaciones extramatemáticas o intramatemáticas, ejercicios, ...); son las tareas que inducen la actividad matemática.

(3) Acciones del sujeto ante las tareas matemáticas (operaciones, algoritmos, técnicas de cálculo, procedimientos).

(4) Conceptos, dados mediante definiciones o descripciones (número, punto, recta, media, función, ...)

(5) Propiedades o atributos de los objetos mencionados, que suelen darse como enunciados o proposiciones.

(6) Argumentaciones que se usan para validar y explicar las proposiciones (sean deductivas o de otro tipo).

Estos seis tipos de objetos, que podemos calificar de matemáticos porque se ponen en juego en la actividad matemática, son los constituyentes primarios de otros objetos más complejos u organizaciones matemáticas, como los sistemas conceptuales, teorías, etc.

Las entidades lingüísticas tienen un papel representacional —se ponen en lugar de las restantes— y también instrumental, o sea deben contemplarse además como instrumentos de la actividad matemática. Aunque mucha actividad matemática es mental, poco podríamos avanzar en el trabajo matemático si no tuviéramos el recurso de la escritura, la palabra y los restantes registros materiales.

Una cuestión importante es que los objetos matemáticos se pueden considerar desde dos **facetas o dimensiones duales** dependiendo del juego de lenguaje en que participan, que son: personal-institucional; ostensiva-no ostensiva; intensiva-extensiva; expresión-contenido; elemental-sistémica. En este trabajo sólo comentaremos expresión contenido que viene asociada con la noción de función semiótica.

Expresión-contenido: Hjelmslev (1943) en su teoría del lenguaje usa las nociones de signo, expresión y contenido. La palabra signo la aplica a la entidad generada por la conexión entre una expresión y un contenido, que son los funtivos entre los que la función de signo establece una dependencia. También establece la semiótica connotativa como aquella en la que el plano de la expresión está constituido por otra semiótica.

<table>
<tr><td>Expresión</td><td>Contenido</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Expresión</td><td>Contenido</td></tr>
</table>

Los distintos objetos que intervienen en las prácticas matemáticas no se deben concebir como entidades aisladas, sino puestas en relación unos con otros. La distinción entre expresión y contenido y su correspondencia por medio de una función semiótica nos permite tener en cuenta el carácter esencialmente relacional de la actividad matemática. La **función semiótica** se entiende como la correspondencia entre un antecedente (expresión) y un consecuente (contenido) establecida por un sujeto (persona o institución) de acuerdo con un cierto criterio o código de correspondencia. En la TFS se considera que cualquier objeto puede desempeñar el papel de expresión o contenido en una función semiótica.

Por último, se define le conflicto semiótico como: “Toda disparidad o desajuste entre los significados atribuidos a una misma expresión por dos sujetos (personas o instituciones) en interacción comunicativa” (Godino, 2002, p. 258).

3. EVALUACIÓN DE SIGNIFICADOS PERSONALES

Un aspecto importante de la enseñanza –aprendizaje de las matemáticas es la evaluación del aprendizaje del estudiante por parte del profesor, de tal modo que habrá que confrontar al significado implementado con el efectivamente adquirido, todo ello teniendo en cuenta las restricciones propias de toda prueba de evaluación. Ahora bien, la cuestión se plantea en cómo evaluar lo que no se conoce, esto es, si queremos evaluar el conocimiento matemático de los estudiantes debe dilucidarse la naturaleza del propio conocimiento.

El EOS proporciona criterios para la elaboración de una teoría de la evaluación del conocimiento matemático. Como se señala en Godino (2003): “Podremos describir el proceso de evaluación indicando que el significado de un objeto O_I para un sujeto p desde el punto de vista de la institución I: es el subsistema de prácticas personales asociados a un campo de problemas que son consideradas en I como adecuadas y características para resolver dichos problemas.” (pp. 131-132).

Si tenemos que el campo de problemas C de la integral definida en la institución I (la clase de matemáticas de 2º de Bachillerato) ha dado lugar a un objeto O_I con significado $S(O_I)$, que es el significado institucional implementado de la integral definida, en una persona puede dar lugar a un objeto O_p con significado personal $S(O_p)$. Pues bien, a la intersección de ambos sistemas de prácticas $(S(O_I)\cap S(O_p))$ es lo que, desde el punto de vista de la institución, se considera como prácticas correctas. Por tanto, es lo que la persona comprende o conoce del objeto O, desde la perspectiva de I. El resto de prácticas serán consideradas erróneas por dicha institución.

La idea pragmática de considerar a los objetos matemáticos como sistemas de prácticas y la diferenciación entre significado institucional y significado personal introduce, en la problemática didáctica, el estudio de la estructura y caracterización de estas entidades teóricas. Como indica Godino (2003): “Esta caracterización se puede concebir como una ‘medida’, no en un sentido psicométrico o matemático estricto, sino en su sentido más general, estos es, como categorización de valores de variables... Por tanto, puede contribuir a superar la ilusión de trasparencia determinista que se adopta frecuentemente cuando se consideran estos problemas.” (p. 221).

En el EOS, el problema de la evaluación de los conocimientos matemáticos de los estudiantes puede enfocarse desde nuevas perspectivas. Lo que se entiende clásicamente por el sistema cognitivo del sujeto (esquemas, concepciones, estructuras conceptuales, representaciones, etc.), que es una realidad muy compleja, puede verse operativizada por medio del análisis ontosemiótico, utilizando las seis entidades primarias de la actividad matemáticas: lenguaje; situaciones-problema, acciones, conceptos, propiedades y argumentaciones, junto a los constructos de función semiótica y conflicto semiótico.

4. ANÁLISIS DE CONTENIDO DEL CUESTIONARIO PILOTO

Como paso previo a la elaboración del cuestionario definitivo que permita evaluar los significados personales de los alumnos respecto de la noción de integral definida, se elaboró un cuestionario piloto, el cual consta de diez ítems, aunque, por razones de espacio, sólo se analizarán tres de dichos ítems. El objetivo es doble. Por una parte, se pretendía analizar la eficacia de la herramienta para el análisis de los significados personales, buscando puntos conflictivos en su elaboración. Por otra parte, confrontar el análisis a priori, buscando mejorar el cuestionario definitivo.

Este cuestionario piloto fue aplicado a 16 estudiantes de dos centros diferentes de la provincia de Jaén durante el curso 2002-03, una vez terminada la instrucción. Para su elaboración se han tenido en cuenta las aportaciones de diferentes trabajos de investigación acerca de la enseñanza aprendizaje de la integral definida (Turégano,1994, Labraña, 2001),así como libros de texto de 2º de Bachillerato (Anaya, 2001) y las PAU de los últimos años.

El análisis a priori consiste en un análisis ontosemiótico de cada cuestión, entendiendo por "*análisis ontológico-semiótico* (o simplemente, análisis semiótico) de un texto matemático a su descomposición en unidades, la identificación de las entidades puestas en juego y las funciones semióticas que se establecen entre los mismos por parte de los distintos sujetos" (Godino, 2003, p. 155).

En concreto, en la situación-problema se analiza cada cuestión particular indicando las características importantes en relación con los objetivos. Respecto del lenguaje, se busca observar qué ***tipos*** de lenguaje son los más utilizados por los estudiantes, por lo que en este análisis a priori se indicaran los tipos de lenguaje que se espera que usen. Del mismo modo, para las argumentaciones, siguiendo a Duval, hemos considerado dos ***tipos***: retórica si el estudiante justifica un enunciado, o heurística si justifica una acción que realiza. Es importante señalar que si el alumno sólo realiza unas acciones sin explicar nada, no se ha considerado que había una argumentación puesto que ésta no es de carácter explícito.

En cuanto a los conceptos y proposiciones las hemos puesto dentro de un mismo apartado ya que buscamos establecer en este análisis las reglas que moviliza un estudiante para resolver el problema mencionado. Dado el carácter exploratorio, además, nos hemos centrado en las proposiciones falsas como fuente de conflictos semióticos potenciales.

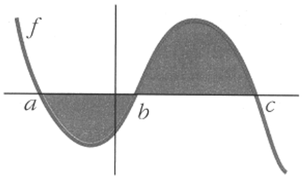
En el caso de las acciones, se ha buscado determinar los pasos encaminados a resolver la situación-problema entendido como trama de funciones semióticas que un estudiante potencial debe de establecer. Si es necesario se han considerado diferentes posibilidades, en cuyo caso será interesante analizar cual es la que más se utiliza, por ejemplo.

Por último hemos considerado en este análisis del contenido los errores divididos en dos categorías: debidos a conflictos semióticos propios de la integral definida y errores debidos a conflictos semióticos propios de otros conceptos que intervienen en la resolución de la situación.

Cuestión 2) De las siguientes expresiones:

$$a)\int_a^c f(x)dx \quad b)\left|\int_a^c f(x)dx\right| \quad c)\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx \quad d)-\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx$$

determina cuál, o cuáles de ellas, nos dan el área limitada por la gráfica de f y el eje de las abscisas. Debes justificar extensamente el por qué de la aceptación, o rechazo, de cada uno de los apartados.



(Esta cuestión está tomada de Colera y otros, 2001, p. 400)

Análisis de contenido

1)

Objetivo general:

- Analizar los significados personales acerca de $\text{SIR}_{\text{ÁREA}}$ y detectar posibles conflictos semióticos asociados a dicho significado.

Objetivos específicos:

- Discriminar la expresión analítica del área dada por la integral definida.
- Analizar la interpretación gráfica de la integral definida y su relación con el área.

2)

Significados institucionales de referencia subyacentes:

$\text{SIR}_{\text{ÁREA}}$

3) Entidades primarias:

a) Situación-problema: se busca establecer el grado de comprensión del alumno según los niveles descritos en la literatura de la integral como área, puesto que los apartados a, b y c sitúan al alumno en el nivel descriptivo u operativo (Turégano 1994).
b) Lenguaje: se espera que se utilice fundamentalmente el lenguaje natural y, eventualmente, el gráfico.
c) Argumentaciones: van a hacer argumentaciones de tipo retórico.
d) Conceptos y proposiciones: Se pueden utilizar varias proposiciones falsas:
PF1: la integral definida nos proporciona el área.
PF2: basta tomar el valor absoluto para obtener el área.
PF3: se verifica la propiedad:

$$\left|\int_a^c f(x)dx\right| = \left|\int_a^b f(x)dx\right| + \left|\int_b^c f(x)dx\right|$$

PF4: Basta tener en cuenta los puntos de corte para que la integral nos de el área por sí misma.

e) Acciones: se realizarán:

Lenguaje gráfico ↔ Lenguaje analítico (al considerar las expresiones) → Lenguaje gráfico (se realiza una elección) → Lenguaje natural (para justificar)

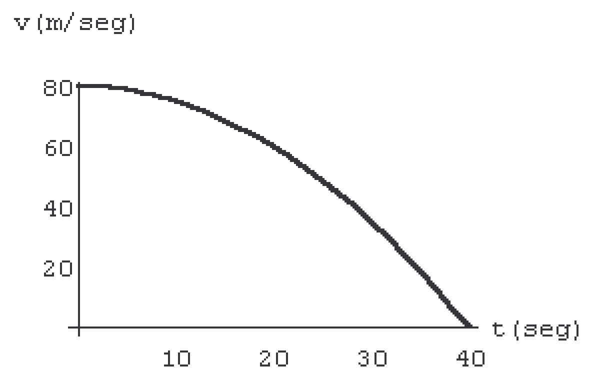
4) Los errores en las contestaciones debidos a conflictos semióticos asociados a la integral definida.

Cada una de las propiedades falsas anteriores lleva un conflicto semiótico asociado. Además, se considerarán también aquellos otros conflictos semióticos asociados a la integral definida, aunque no correspondan a las propiedades falsas.

5) Los errores en las contestaciones debidos a conflictos semióticos no asociados a la integral definida, sino a otros conceptos.

Cuestión 5) Un coche de Fórmula 1 se queda sin propulsión debido a una rotura de embrague. Se estima que a partir de ese momento (t=0) su velocidad, en metros por segundo, viene dada por $v=80-0.05t^2$, cuya gráfica puedes comprobar que es la de la figura adjunta.

- ¿Qué distancia habrá recorrido a los 20 segundos?
- ¿Qué distancia recorre entre los 20 y los 40 segundos?
- ¿Qué distancia recorrerá hasta pararse?



(Esta cuestión está tomada de Turégano 1994, y aparece también en Labraña, 2001).

Análisis de contenido

1)

Objetivo general:

Analizar el SIR_{RPC}.
Detectar posibles conflictos semióticos asociados a este significado.

Objetivos específicos:

- Analizar la noción de integral definida en un problema de modelización del movimiento acelerado.
- Analizar la aplicación de la propiedad:

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

- Detectar el CSMU.

2)

Significados institucionales de referencia subyacentes:

SIR_{RPC}

3) Entidades primarias:

a) Situación-problema: el enunciado. Se trata de estudiar si el alumno asocia el espacio recorrido por el móvil con el área comprendida entre los extremos.
b) Lenguaje: analítico y numérico.
c) Argumentaciones: de carácter explícito. Van a hacer argumentaciones de tipo heurístico (justifica las acciones).
d) Conceptos y proposiciones: Se puede utilizar una proposición falsa: "Como espacio es velocidad por tiempo o velocidad por tiempo más un medio de la aceleración por el tiempo al cuadrado, basta calcular la velocidad para los valores correspondientes y aplicar la fórmula que corresponda".

El conflicto semiótico sería el CSMU.

La propiedad que pueden aplicar es la de la aditividad de los intervalos de la integral:

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

e) Acciones: pasos encaminados a la resolución de la situación-problema:
e.1. Para resolver el primer apartado se realizarán:
Lenguaje natural $\rightarrow$ Gráfica (implícita o explícitamente) $\rightarrow$ Aplicación de la integral definida $\rightarrow$ Cálculo de la integral.
e.2. Para resolver el segundo apartado se realizarán:
Lenguaje natural $\rightarrow$ Gráfica (implícita o explícitamente) $\rightarrow$ Aplicación de la integral definida $\rightarrow$ Cálculo de la integral.
e.3. Para calcular el área del tercer apartado hay dos posibles vías:
1) Lenguaje natural $\rightarrow$ Gráfico (implícito o explícito) $\rightarrow$ Aplicación de la integral definida $\rightarrow$ Cálculo de la integral definida de 0 a 40.
2) Lenguaje natural $\rightarrow$ Gráfico (implícito o explícito) $\rightarrow$ Aplicación de la aditividad del intervalo $\rightarrow$ Cálculo de las integrales definidas.
Una posibilidad para aquellos alumnos que utilicen la propiedad falsa, y por tanto fórmulas extraídas de la Física para resolver la situación es: e.4. Del lenguaje natural al analítico (aplicación de fórmulas) y de éste al numérico.

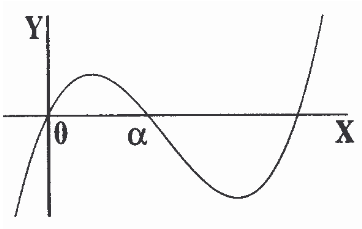
4) Los errores en las contestaciones debidos a conflictos semióticos asociados a la integral definida.

La propiedad falsa anterior lleva un conflicto semiótico asociado que hemos denominado CSMU.

5) Los errores en las contestaciones debidos a conflictos semióticos no asociados a la integral definida, sino a otros conceptos.

Cuestión 4') Consideramos $F(x) = \int_0^x f(t)dt$. Si fuese f la función cuya gráfica aparece en el dibujo, indica si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones justificando las respuestas lo más extensamente que puedas:

1. $F(\alpha) = 0$ 2. $F'(\alpha) = 0$ 3. F es creciente en el intervalo $(0,\alpha)$.



(Esta cuestión corresponde a las pruebas de acceso a la universidad de septiembre de 2002 y fue trabajada en clase por los estudiantes previamente).

Análisis de contenido

1)

Objetivo general:

- Detectar los significados personales acerca del teorema fundamental del Cálculo Integral y de la integral definida como área.
- Detectar posibles conflictos semióticos asociados.

Objetivos específicos:

- Observar si el alumno conoce teorema fundamental del Cálculo Integral y, por tanto, que F'(x)=f(x).
- Observar si el estudiante es capaz de efectuar el cambio del $SIR_{ÁREA}$ al $SIR_{INV\ DER}$.

2)

Significados institucionales de referencia subyacentes: $SIR_{ÁREA}$ y $SIR_{INV\ DER}$.

3) Entidades primarias:

a) Situación-problema: el enunciado. El enunciado busca detectar posibles confusiones de identificación entre la integral definida y la propia función, así como observar la flexibilidad para utilizar ambos significados de la integral según convenga a cada apartado.

b) Lenguaje: natural, gráfico y analítico.

c) Argumentaciones: de carácter retórico.

d) Conceptos y proposiciones: Se pueden utilizar las siguientes proposiciones falsas
PF1: En 1) una proposición falsa que aplican es: "Es verdadera porque la gráfica corta al eje OX en α".
PF2: En 2) una proposición falsa es: "Es verdadera, puesto que si F(α)=0, entonces F'(α)=0."
El conflicto semiótico asociado es el anterior.
PF3: En 3) una proposición falsa es: "Es falsa, ya que F(x) es creciente hasta α/2 y decreciente desde ese punto hasta α."

e) Acciones:
En el apartado 1, caben tres vías:
a) Del enunciado al teorema fundamental del Cálculo Integral, de éste a su tesis F'(x) = f(x), de éste a que F(x)≠f(x), por último a que F(α)≠0.

b) Del enunciado a que F(α) es el área barrida de 0 a α, de aquí a la gráfica, de ésta a que el área es $\neq$0, por último a que F(α)$\neq$0.
c) Del enunciado a la gráfica, de ésta a que F=f, y de ahí a que F(α)=f(α)=0.

En el apartado 2: Del enunciado al teorema fundamental del Cálculo Integral, de éste a que F'(α)=f(x), de aquí a la gráfica, por último a que F'(α)=f(α)=0.

En el apartado 3, caben las dos vías siguientes:
a) Del enunciado a que F(α) es el área barrida de 0 a α, de ésta a que A(x) es una función creciente, por último a que F es creciente en (0,α).
b) f>0, luego F'=f, por tanto, F es creciente.

4) Los errores en las contestaciones debidos a conflictos semióticos asociados a la integral definida.

El conflicto semiótico asociado a las tres proposiciones es el siguiente: "Confundir la función integral definida con la función dada" que hemos denominado CSf(x). Otro conflicto semiótico proviene de confundir integral y derivada y le hemos denominado CStf

5) Los errores en las contestaciones debidos a conflictos semióticos no asociados a la integral definida, sino a otros conceptos.

5. ANÁLISIS DE RESULTADOS DE LAS RESPUESTAS DE LOS ESTUDIANTES

Se ha utilizado el programa SPSS para la codificación de datos, cuyos resultados han dado lugar a las tablas que aparecen a continuación. Se han destacado aquellas entidades que hemos considerado más significativas atendiendo a la información que aportan.

Cuestión 2

Tabla 1

ENTIDADES PRIMARIAS	CUESTIÓN 2				
CONCEPTOS Y PROPIEDADES	PF1	PF2	PF3	PF4	No hay propiedades falsas
	1 (6,3%)	2 (12,5%)	4 (25%)	2 (12,5%)	7 (43,8%)
CONFLICTOS SEMIÓTICOS	Debidos a propiedades falsas		Otros conflictos semióticos de la integral definida	Conflictos semióticos debidos a otros conceptos	
	9 (56,25%)		2 (12,5%)	1 (6,3%)	

Esta cuestión estudia los significados personales de los estudiantes en cuanto al significado de referencia $SIR_{ÁREA}$, analizando los conflictos semióticos potenciales asociados. Se trata, por una parte, de ver si se expresa correctamente el área por medio de la expresión analítica de la integral definida; por otro, de estudiar la interpretación gráfica de la integral definida y su relación con el área.

En esta cuestión son especialmente relevantes los conceptos y propiedades y los conflictos semióticos. En primer lugar observamos que hay un estimable porcentaje de estudiantes, el 25%, que muestra en sus respuestas la propiedad falsa PF3 ("$\left|\int_a^c f(x)dx\right| = \left|\int_a^b f(x)dx\right| + \left|\int_b^c f(x)dx\right|$") Corresponde a aquellos estudiantes que responden que b) es cierta por este motivo y muestran una importante confusión pues estiman que para calcular el total basta con calcular cada trozo y sumarlo, lo que les puede llevar a no distinguir entre integral y área. Probablemente provenga de las prácticas que realizan en clase donde la mayoría de los ejercicios se resuelven así, lo que no les ha posibilitado ver la diferencia entre ambas expresiones.

En segundo lugar, un 12,5% de estudiantes tiene la propiedad falsa PF2 ("basta tomar el valor absoluto de la integral definida para obtener el área") lo que refleja la confusión total entre integral y área, son estudiantes que no entenderán la integral como el resultado de un proceso de cambio, sino que la verán solamente como un área geométrica descontextualizada, lo que les puede ser un obstáculo en problemas de modelización. Un porcentaje similar afirman que: "basta tener en cuenta los puntos de corte para que la expresión integral nos dé el área pedida", que corresponde a la propiedad falsa PF4, lo que indica un conocimiento escolar que no se recuerda bien, quizás porque es una regla sin sentido para ellos. Por último, un estudiante, que corresponde al 6,3%, muestra la PF1 ("la integral definida da directamente al área"), incidiendo claramente en la confusión entre integral y área que, probablemente provenga de una enseñanza muy sesgada a este tipo de significado.

Lógicamente, las propiedades falsas conducen directamente a conflictos semióticos por lo que aparecen 9 estudiantes, el 52,25%, por tratarse de "desajuste entre los significados atribuidos a una misma expresión por el estudiante y la institución". Hay dos casos, un 12,5%, de estudiantes que muestran conflictos semióticos debidos a la integral definida, por ejemplo, por tomar las áreas fuera de los intervalos. Por último, se da un caso, el 6,3%, que corresponde a un conflicto semiótico que hemos considerado asociado al concepto de opuesto pues contesta que d) no puede ser cierta porque tiene delante un signo negativo y, sin embargo, debe ser positiva por ser un área.

Cuestión 5

Tabla 2

<table>
<tr><th>ENTIDADES PRIMARIAS</th><th colspan="9">CUESTION 5</th></tr>
<tr><td rowspan="2">LENGUAJE</td><td colspan="2">Natural y analítico</td><td colspan="2">Analítico y numérico</td><td colspan="3">Analítico, numérico y natural</td><td colspan="2">Blanco</td></tr>
<tr><td colspan="2">2 (12,5%)</td><td colspan="2">11 (68’7%)</td><td colspan="3">2 (12,5%)</td><td colspan="2">1 (6,3%)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">ARGUMENTACIONES</td><td colspan="2">Heurística</td><td colspan="5">Ninguna</td><td colspan="2">Blanco</td></tr>
<tr><td colspan="2">3 (18,8%)</td><td colspan="5">12 (75%)</td><td colspan="2">1 (6,3%)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">CONCEPTOS Y PROPIEDADES</td><td colspan="2">Aditividad</td><td colspan="3">Nociones MU</td><td colspan="3">Otros</td><td>Blanco</td></tr>
<tr><td colspan="2">5 (31,3%)</td><td colspan="3">5 (31,3%)</td><td colspan="3">4 (25%)</td><td>1 (6,3%)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">CONFLICTOS SEMIÓTICOS</td><td>CSMU</td><td colspan="2">Otros de la integral definida</td><td colspan="3">Debidos al cálculo numérico</td><td colspan="2">Debidos a las operaciones de integración</td><td>Blanco</td></tr>
<tr><td>5 (31,3%)</td><td colspan="2">2 (12,5%)</td><td colspan="3">4 (25%)</td><td colspan="2">4 (25%)</td><td>1 (6,3%)</td></tr>
</table>

Esta cuestión analiza el significado SIR_{RPC} de los resultados de los procesos de cambio y los posibles conflictos semióticos potenciales.

Se busca, primeramente, analizar el uso de la integral definida en un problema de movimiento acelerado. En segundo lugar, se estudia la aplicación de la propiedad de aditividad de la integral definida. Por último, se intenta detectar el conflicto semiótico del movimiento uniforme.

En esta cuestión analizamos el lenguaje y las argumentaciones además de las entidades de la cuestión anterior. Por una parte, el uso del lenguaje indica que la mayoría de los alumnos analizados utilizan el lenguaje analítico y numérico en sus respuestas, el 68,7%, mientras que sólo el 25% emplea el lenguaje natural. Si observamos además las argumentaciones: 3 estudiantes, un 18,8%, utiliza un discurso heurístico en sus explicaciones, es decir, comenta los pasos que se van dando en el proceso de solución, podemos concluir que estos estudiantes no están acostumbrados a explicar qué están haciendo aunque se les pidió que lo hicieran. Parece que conciben las resolución de un problema, y por extensión las Matemáticas, como un conjunto de reglas que hay que aplicar y que no es necesario justificar, basta con que "esté bien". Quizás sería necesario exigirles que justificaran sus acciones, lo que creemos incidiría positivamente en su aprendizaje al hacerles reflexionar sobre sus propias prácticas.

En los conceptos y propiedades, puede observarse que solamente el 31,3%, utiliza la propiedad de aditividad en sus respuestas para contestar el apartado 3. Un alto porcentaje vuelve a realizar acciones de forma rutinaria. El mismo porcentaje anterior, 31,3%, considera erróneamente que se trata de un movimiento uniforme o uniformemente acelerado, desentendiéndose de la integral definida y acudiendo a las clásicas fórmulas del movimiento: $e=v.t$; $e=v.t-1/2at^2$. Esto nos indica que la transferencia al contexto físico no es una cuestión transparente en absoluto.

En cuanto a los conflictos semióticos, se han detectado 5 estudiantes, el 31,3%, que muestran el conflicto semiótico del movimiento uniforme. Otros dos, el 12,5%, tienen conflictos asociados a la elección errónea de los límites de integración. Por último, en un 25% aparecen conflictos debidos al cálculo numérico, y el mismo porcentaje por operaciones erróneas en la integración, lo que nos parece muy significativo en el nivel en el que hemos pasado esta prueba y la escasa dificultad de las funciones a integrar.

Cuestión 4'

Tabla 3

<table>
<tr><th>ENTIDADES PRIMARIAS</th><th colspan="6">CUESTIÓN 4'</th></tr>
<tr><td rowspan="2">ACCIONES APARTADO 1</td><td>Este apartado en blanco</td><td>Utilizan el TFC</td><td>Utilizan el área</td><td>Utilizando la igualdad F=f</td><td>Otros casos</td><td>Blanco</td></tr>
<tr><td>1 (6,3%)</td><td>2 (12,5%)</td><td>4 (25%)</td><td>2 (12,5%)</td><td>3 (18,8%)</td><td>4 (25%)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">ACCIONES APARTADO 2</td><td colspan="2">Este apartado en blanco</td><td colspan="2">Utilizan el TFC</td><td>Otros casos</td><td>Blancos</td></tr>
<tr><td colspan="2">2 (12,5%)</td><td colspan="2">8 (50%)</td><td>2 (12,5%)</td><td>4 (25%)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">ACCIONES APARTADO 3</td><td colspan="2">Este apartado en blanco</td><td colspan="2">Utilizan el TFC</td><td>Otros casos</td><td>Blanco</td></tr>
<tr><td colspan="2">3 (18,8%)</td><td colspan="2">6 (37,5%)</td><td>3 (18,8%)</td><td>4 (25%)</td></tr>
</table>

Se trata de una cuestión que, además, del propio interés en cuanto al estudio de significados, se planteó en los exámenes de las pruebas de acceso y que fue resuelta en las clases de los estudiantes que han intervenido en el estudio. Sin embargo, sólo tres de ellos, el 18,8%, responde correctamente a la misma, lo que puede indicar, junto con el número de alumnos que deja esta pregunta en blanco el alto grado de dificultad que tiene.

En la cuestión se busca detectar los significados personales correspondientes al teorema fundamental del cálculo (TFC) y la integral definida como área desde un contexto gráfico, además de los conflictos semióticos potenciales asociados. Otro objetivo importante de la cuestión consiste en indagar los posibles cambios entre los significados $SRI_{ÁREA}$ y $SRI_{INV\ DER}$.

El lenguaje más utilizado por los alumnos es el natural y analítico, en un 37%, seguido por el natural, con un 25%. Hay un caso en el que se usan los tres tipos de lenguaje, natural, gráfico y analítico.

En cuanto a los conceptos y propiedades, un 50% de los estudiantes utilizan en sus razonamientos propiedades de la derivada, dos de ellos tiene la propiedad falsa PF1 ("es verdadera porque la gráfica corta al eje OX en α"); y, uno de ellos, muestra la propiedad falsa PF2 ("es verdadera porque como $F(\alpha)=0$, entonces $F'(\alpha)=0$). Por este motivo, se tiene que 3 estudiantes, el 18,8%, muestra el conflicto semiótico CSf(x) ("confundir la integral definida con la función dada"). Además, 1 estudiante confunde integral con derivada ("CStf") lo que puede indicar un conocimiento escolar muy pobre. Por último, 3 alumnos, muestran conflictos semióticos propios de la derivada, al utilizar en sus razonamiento propiedades falsas de la derivada, mostrando la gran complejidad de esta noción.

En esta cuestión, además, nos parecen especialmente importantes las acciones que se realizan para resolver cada apartado pues dan cuenta de la parte de significado que moviliza el alumno. Para el apartado 1 sólo el 25% utilizan el área para su razonamiento, lo que nos parece un porcentaje bajísimo dado que es el significado más trabajado en clase. Quizás provenga de que viene en un contexto que recuerda más al TFC y por lo tanto lleva al estudiante a movilizar esta relación olvidando las otras. Llama la atención que 2 alumnos utilizan el TFC por lo que no pueden asegurar que sea falsa, sólo saben que no tiene por qué ser verdadera pero no son capaces de encontrar otro recurso que les lleve a asegurar la falsedad de la cuestión.

En esta línea un alto porcentaje del número de estudiantes saber contestar correctamente al apartado 2 que requiere el TFC, el 50%. Mientras que en el apartado 3 nadie utiliza el área en su razonamiento.

Por último señalar que de los 4 estudiantes que utilizaron el área para resolver el apartado 1, 3 de ellos realizaron el apartado 2 por el TFC. Son estos 3 estudiantes (18,8%) los que consideramos que han alcanzado un mayor grado de comprensión ya que no solamente han adquirido ambos significados sino que son capaces de utilizarlos de forma flexible en diferentes contextos.

Reconocimientos:

Trabajo realizado en el marco del Proyecto de Investigación MEC-FEDER: SEJ2004-06637/EDUC.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

COLERA, J. y cols. (2001), Matemáticas II, Madrid: Anaya.

CONTRERAS, A. y cols. (2003), Análisis de manuales de 1º y 2º del Bachillerato-LOGSE en institutos de Educación Secundaria de la provincia de Jaén, en cuanto a los conceptos básicos del Cálculo Infinitesimal derivada e integral definida, bajo la perspectiva de la teoría de los obstáculos epistemológicos, Instituto de Estudios Giennenses.

GODINO, J. D. y BATANERO, C. (1994), Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques.* 14 (3) 325-355.

GODINO. J.D. (2002), Un enfoque ontológico semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 22(2/3) 237-284.

GODINO, J.D. (2003), *Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática*, Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada, pp. 1-318.

HJEMSLEV, L. (1943), *Prolegómenos a una teoría del lenguaje,* Madrid: Gredos, 1971.

LABRAÑA, P.A. (2000), *La avaliación das concepcións dos alumnos de COU e bacharelato acerca do significado do cálculo integral*, Tesis Doctoral, Universidad de Santiago de Compostela.

ORDÓÑEZ, L. y CONTRERAS, A. (2003), El análisis de manuales en la enseñanza de la integral definida. En E. Castro, P. Flores, T. Ortega, L. Rico y A. Vallecillos (eds) *Investigación en Educación Matemática. Séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 277-287). Granada: Universidad de Granada.

VERGNAUD, G. (1982), Cognitive and developmental psychology and research in mathematics education: some theorical and metodological issues, *For the Learning of mathematics*, vol. 3, nº 2, pp. 31-41.

TURÉGANO, P. (1994), Los conceptos en torno a la medida y el aprendizaje del Cálculo Infinitesimal, Tesis doctoral, Universidad de Valencia.

WENZELBURGER, E. (1994), *Cálculo Integral*, Grupo Editorial Iberoamérica: México D.F.