



**Departamento de Análisis Matemático
y Didáctica de la Matemática
UNIVERSIDAD DE VALLADOLID**

UN RECURSO PARA LA ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DEL CÁLCULO MENTAL

EDUCACIÓN PRIMARIA

Ortega del Rincón, Tomás
Ortiz Vallejo, María

1. INTRODUCCIÓN

La necesidad del trabajo del Cálculo Mental (CM) en el aula, se plasma en las recomendaciones que hace la comunidad educativa, ya sea a través de organismos nacionales o internacionales, por ejemplo, el informe Cockcroft (1982, Pág. 92), NCTM National Council of Teachers of Mathematics (2003, Pág.37), la LOGSE, etc., así como con la presencia de este tema en los distintos congresos, simposios, jornadas, etc.

Sin embargo no son pocos los autores que denuncian el abandono del CM en las aulas de Educación Primaria y Secundaria, el escasísimo tratamiento que se hace del mismo en los libros de texto, y la más que deficiente instrucción que, en general, tiene lugar en la formación del profesorado. La primera aserción es compartida, entre otros, por Willian M. Carroll (1996), que afirma que en las aulas se sigue insistiendo en el cálculo algorítmico estándar en detrimento del CM. La segunda aserción la hemos comprobado analizando libros de texto de distintas editoriales y observando que lo que se presenta en los pocos textos en que aparece, es totalmente aleatorio, no percibiéndose ningún criterio de selección ni de graduación de dificultades. Por último, a través de entrevistas mantenidas con profesores que no trabajan el CM en sus aulas, nos justifican su actitud con respuestas como: falta de tiempo para acabar el programa, no se presentan actividades en los libros de texto, tienen mucho trabajo y la preparación de actividades les supone mucho tiempo de preparación, no lo dominan, etc.

Por todo lo anterior, nos parece muy importante que el profesor posea una herramienta de trabajo que no tenga que construir, por ejemplo, una "guía de actividades" que le permita, día a día de la semana, trabajarlas en el aula, sabiendo que previamente han sido seleccionadas y analizadas. Con este objetivo, un grupo de profesores de la Universidad de Valladolid, que trabajamos en un proyecto de investigación pedagógica, subvencionado por la Junta de Castilla y León, hemos preparado dichas guías para 1º, 2º y 3º Ciclo de E. Primaria. Esta guía de actividades, está pensada y realizada teniendo en cuenta las numerosas investigaciones que sobre este hecho se han llevado a cabo, tanto a nivel nacional como internacional. Citamos entre otros a: Alfred Hope, J. (1984), Plunquet (Dickson, 1991), Según Meindert (1997), Hidalgo S. y otros (1999), Fuson y Brian (1990)(Martínez Montero 2000), etc. Así mismo, merece capítulo aparte, por la gran información que nos proporcionó, la tesis doctoral de B. Gómez Alfonso (1994).

En esta línea de investigaciones, durante una serie de años, hemos llevado a cabo diversos proyectos con profesores en los C.P.R. (C.F.I.E) de Palencia y Valladolid, lo cual nos ha permitido profundizar y extraer diversas consideraciones a tener presente a lo largo del proceso enseñanza-aprendizaje del CM, como:

- Los errores más habituales que comenten los niños cuando resuelven las cuatro operaciones se deben a que no recuerdan las tablas; lo cual nos indica la necesidad de insistir en la memorización de las mismas como uno de los pilares para el CM
- Es conveniente introducir un mayor número de actividades, problemas, que conlleven aplicaciones de los conocimientos.
- Los niños están motivados en todos los casos. No hace falta premios; la respuesta del alumnado siempre es excelente y no se cansan.
- Es importante la continuidad, puesto que cuando no la hay se observan retrasos.
- Recomiendan aplicarlo a la resolución de problemas.
- La totalidad de los profesores están satisfechos con la experiencia.
- Debe hacerse desde los primeros cursos de Primaria.
- El tiempo "perdido" se gana a la hora de resolver operaciones.
- El tiempo no debe sobrepasar de 10 a 15 minutos; algunos consideran que es mejor hacerlo en los minutos finales antes de acabar la clase, puesto que parece que les despista menos.
- Es conveniente tener presente a los alumnos que van más retrasados.
- La habilidad en este tipo de cálculo se consigue con la práctica, siendo importante aprovechar cualquier situación en el aula.
- No es conveniente exigir un tiempo de respuesta demasiado corto.

2. VENTAJAS DE LA PRÁCTICA DEL CM

Veamos algunas ventajas que puede generar el trabajo de este tipo de cálculo en el aula:

a) Desde un punto de vista de formación matemática. Ayuda a profundizar en la comprensión de los números, puesto que los tiene que transformar, por ejemplo: $27 + 8 = (20 + 7) + 8$. Colabora en la profundización de las estructuras numéricas, relacionando las operaciones entre sí y haciendo uso de sus propiedades, por ejemplo: $27 + 8 = (20 + 7) + 8 = 20 + (7 + 8) = 20 + 15 = 35$. Mejora las operaciones con los grandes números. Ayuda a controlar el cálculo de aproximación. La realización sistemática de este tipo de ejercicios, mejora la exactitud en los resultados y por tanto el rendimiento aritmético.

b) Desde un punto de vista relacionado con el desarrollo de las capacidades. Puede incidir en el desarrollo de: la concentración, puesto que distraerse puede significar tener que empezar de nuevo. La capacidad de organización, puesto que tiene que pensar, paso a paso, todo el procedimiento que quiere seguir y este sea el más eficaz. El rigor, para no saltarse ninguna componente del proceso y a su vez adecuadamente realizada. La lógica, puesto que implica tener que reflexionar para llevar a cabo el mejor procedimiento. La memoria, de la que tiene obligatoriamente que hacer uso, ya sea a corto como a largo plazo. La autonomía puesto que el procedimiento es totalmente personal. La imaginación y creatividad para emplear cada vez el procedimiento que le parezca más idóneo.

También tenemos que tener presente que el hecho de resolver correctamente una operación que depende sólo y exclusivamente del alumno, incide en la adquisición de una cierta seguridad, que unido con la práctica en este tipo de cálculos, ayuda a ver y apreciar positivamente el resto de las Matemáticas, así como a tener una actitud más relajada en la

resolución de los problemas cotidianos relacionados con la Aritmética y las Matemáticas en general.

c) Desde un punto de vista utilitario. Puesto que, por una parte se pueden aplicar estos conocimientos a las restantes áreas y a la vida práctica del individuo, que ante cualquier cálculo posee una seguridad que puede favorecerle, ya sea desde la cuenta de un supermercado, hasta las primeras perspectivas de una operación.

3. CONTENIDOS Y ACTIVIDADES PARA EL CM

Si preguntamos a un grupo de personas sobre el proceso que han seguido para resolver un determinado cálculo aritmético y que nos concreten los pasos de los que se han valido para llegar al resultado, nos podemos encontrar con un gran abanico de respuestas. Estas cuestiones las hemos ido planteando a lo largo de estos últimos años a diversos colectivos: maestros, alumnos de la E.U.E y alumnos de doctorado. Veamos algunos ejemplos de respuestas más habituales correspondientes a la resolución de la siguiente suma:

$$\begin{aligned}58 + 97 &= 5 \text{ y } 9 = 14, 8 \text{ y } 7 = 15, \text{ me llevo } 1, 155 \\&= 8 \text{ y } 7 = 15, 5 \text{ y } 9 = 14, \text{ me llevo } 1, 155 \\&= (58 + 90) + 7 = 148 + 7 = 155 \\&= 8 + (50 + 97) = 8 + 147 = 155 \\&= (50 + 90) + 8 + 7 = 140 + 15 = 155 \\&= (58 - 3) + (97 + 3) = 55 + 100 = 155 \\&= (58 + 2) + (97 - 2) = 60 + 95 = 155 \\&= 97, 107, 117, 127, 137, 147 + 8 = 155 \\&= (5 + 9) \times 10 + (8 + 7)\end{aligned}$$

Analizando cada uno de estos procedimientos, vemos que unos resuelven la operación como si estuvieran haciendo el algoritmo escrito (como con lápiz y papel), otros, para facilitarse los cálculos, descomponen uno o dos de los sumandos y posteriormente los asocian, otros perciben y calculan lo que queda para la decena más próxima y suman - restan el número que les interesa, otros van sumando de diez en diez, etc. Al mismo tiempo que se sirven de otros conocimientos, como: recordatorio de las tablas, manejo de propiedades, valor relativo de los números, etc. Entendemos, por tanto, que cada procedimiento va a depender, en gran medida, del dominio de una serie de contenidos básicos, que son los que van a influir en la elección de la estrategia de resolución, de forma que cada individuo tenderá, consciente o inconscientemente, a hacer uso de aquellas componentes básicas que mejor domine o le resulten más fácil o manejables.

De acuerdo con estas premisas, creemos que el trabajo del CM en el aula debe desarrollarse partiendo del dominio de determinados contenidos y su posterior puesta en práctica, como:

3.1 Lo que denominamos conocimientos básicos, puesto que sin ellos sería difícil operar, como son, los relacionados con el campo numérico que trabajamos y con el entorno que conlleva la resolución de las operaciones que se van a efectuar.

3.2 Presentación de diversas estrategias, cuya misión es facilitar y simplificar los cálculos.

3.3 Por último, la puesta en práctica de los conocimientos adquiridos, a través de ejercicios, problemas, juegos y material didáctico

3.1 Conocimientos básicos para el aprendizaje del cálculo mental.

3.1.1 Conocimientos básicos relacionados con el número.

- a) Numeración.
- b) Equivalencias.

3.1.2. Conocimientos básicos relacionados con las operaciones.

- a) Las tablas
- b) Propiedades
- c) Productos notables

3.2 Estrategias más habituales.

3.2.1 Estrategias aditivas

3.2.2 Estrategias multiplicativas

3.3 Aplicaciones

3.3.1 Ejercicios

3.3.2 Problemas orales

3.3.3 Juegos

4. CONTENIDOS Y ACTIVIDADES PARA EL CM APROXIMADO

Dentro del cálculo mental, existe lo que denominamos **Cálculo mental aproximado (C.M.A)**. Es un cálculo que resulta muy útil, puesto que normalmente en la vida diaria, no se dispone de lápiz ni papel, ni de tiempo y muchas veces es suficiente con saber una respuesta aproximada. Se caracteriza por contener varias fases, una primera, cuyo objetivo es facilitar el cálculo a costa de perder precisión y en la que se reformulan los datos originales con unas técnicas determinadas, lo cual dará lugar a la elección de los números que van a intervenir en el cálculo con la cantidad de dígitos necesarios; una segunda fase en que se confirma si se posee la capacidad mental para poder realizar ese cálculo sin necesidad de utilizar otros medios auxiliares y finalmente, una tercera fase en la que se realiza el cálculo propiamente dicho.

El optar por uno de los dos tipos de cálculo presentado, el exacto y el aproximado, va a depender en gran manera de los datos de partida, de la exactitud de la respuesta que se demande y de la habilidad del calculista.

4.1 Conocimientos básicos

4.2 Principales estrategias

- a) Reformulación
 - a.1) Redondeo
 - a.2) Truncamiento
 - a.3) Sustitución
- b) Procesos de traslación
- c) Procesos de compensación

4.3 Aplicaciones

5. DISTRIBUCIÓN DE LOS CONTENIDOS Y ACTIVIDADES (para 3° ciclo)

Los contenidos y actividades a lo largo de estos dos cursos, están distribuidos en los siguientes apartados:

- * Numeración. Se sigue insistiendo en el conocimiento del número; en este caso con números mayores de 100.000.

- * Tablas y propiedades de las operaciones. Memorización de todas las tablas. Manejo de las propiedades aditivas y multiplicativas.

- * Equivalencias y productos notables. Ya sea con fracciones, decimales y porcentajes.

- * Ejercicios básicos. Preparados para facilitar los caminos de resolución de las estrategias.

- * Estrategias. Se presentarán a lo largo de los dos cursos una serie de estrategias de carácter aditivo y multiplicativo.

- * Estrategias libres. Llamadas así porque el alumno puede seguir el procedimiento que prefiera.

- * Aproximación. Con ejercicios relativos al redondeo o truncamiento del número y a las operaciones aditivas y multiplicativas.

- * Problemas y juegos. Tendrán carácter aditivo o multiplicativo, dependiendo del tipo de operación que se trabaje.

El cuaderno que presentamos consta de tres apartados, en el primero y segundo hacemos la programación para cada día de la semana de cada curso del ciclo, un total de treinta semanas para quinto y treinta para sexto. El tercer apartado del cuaderno comprende una serie variada de juegos, que pueden trabajarse en los dos cursos. La secuencia que seguimos normalmente a lo largo de la semana es la siguiente: los lunes ejercicios relacionados con el conocimiento del número, puesto que su dominio es básico para el resto de actuaciones. Los martes ejercicios relacionados con el aprendizaje de hechos o de preparación de estrategias, los miércoles se les presentarán diferentes estrategias, con el fin de que conozcan distintos procedimientos, a la vez que puede aplicar estos conocimientos a los problemas, los jueves, más estrategias o se les propone estrategias libres, junto a resolución de problemas y el viernes es el día de repaso. Normalmente al final de cada semana ponemos una nota para el profesor, en la que comentamos algunos puntos, que pueden resultar orientativos respecto al trabajo que se está llevando a cabo con los ejercicios de la semana.

Nota. Al principio, es probable que no se pueda llevar a cabo la sesión entera, puesto que requiere entrenamiento y concentración y ésta se consigue poco a poco; es conveniente que cada sesión, desde el primer día, se trabaje con un ambiente de tranquilidad y de motivación. Si se diera el caso en donde el estudio del CM se hace por primera vez en un segundo o tercer nivel, sería recomendable que el profesor tendiera a seguir la secuencia que acabamos de presentar, suprimiendo aquellos conocimientos que el alumno tenga dominados.

5.1 Ejemplo de una semana de 5º curso

16ª semana (5º curso de E. Primaria)

Lunes:

* Partiendo el profesor de un número cualquiera, sumar o restar cada niño de la clase una cantidad fija.

* ¿Qué números resultarían si restamos 1000 a los siguientes números?: 123456, 345002, 9802018

* Leer los números anteriores y sumarles 10000

Martes:

* Recitar la tabla de multiplicar del 8 cambiando el orden de los factores

* Resuelve y memoriza las siguientes divisiones: $8 : 1 = 8$, $16 : 8 = 2$, $16 : 2 = 8$, $24 : 8 = 3$, $24 : 3 = 8$, $32 : 8 = 4$, $32 : 4 = 8$, $40 : 8 = 5$, $40 : 5 = 8$, $48 : 8 = 6$, $48 : 6 = 8$, $56 : 8 = 7$, $56 : 7 = 8$, $64 : 8 = 8$, $72 : 8 = 9$, $72 : 9 = 8$, $80 : 8 = 10$, $80 : 10 = 8$, $88 : 11 = 8$, $88 : 8 = 11$, $96 : 8 = 12$, $96 : 12 = 8$

* Calcular los siguientes resultados: $9 \times 8 = 72$, $8 \times 5 = 40$, $4800 : 8 = 600$, $22 \times 8 = 176$,...

Miércoles:

* Estrategia libre. Multiplicar por 7 el siguiente número y explicar el método que has empleado: 13×7

* Aplica el método que más te gusta para resolver: 15×7 , 28×7 , 48×7

* Problema. ¿Qué número será aquel que después de multiplicarle por 7 te quede en 420?

Jueves:

* Estrategia. Propiedad distributiva: $48 \times 5 = (40 + 8) \times 5 = 200 + 40 = 240$; $8 \times 99 = 8 \times (100 - 1) = 800 - 8 = 792$

* Aplicar esta propiedad a las siguientes operaciones: 7×99 , 7×27 , 41×7

* Problema: Mi madre tiene ahora 42 años ¿en qué año nació? Explica cómo has hecho la operación.

Viernes:

* Repaso de la semana o juegos

Nota: La estrategia del jueves resulta muy práctica para la multiplicación, puesto que con la descomposición del factor mayor se puede facilitar el resto de cálculos.

BIBLIOGRAFÍA

- Codina R. y otros (1992) "*Fer Matemàtiques*". Universitat de Barcelona. Barcelona.
- Dickson L y otros (1991) "*El aprendizaje de las matemáticas*". Labor. Barcelona.
- García Pérez P. (2002) "Actividades de cálculo mental" (3º ciclo de Enseñanza Primaria". García Pérez P. Valladolid
- Gimenez J. y Gironde L.(1993) "*Cálculo en la escuela. Reflexiones y propuestas*". Editorial Grao.
- Gómez Alonso B. "*Numeración y cálculo*". Edit. Síntesis.
- Gómez Alonso B. (1995): "*Los métodos de cálculo mental vertidos por la tradición reflejada en los libros de aritmética*". Rev. UNO, nº 5.
- Gómez Alonso B. (1994): "*Los métodos de cálculo mental en el contexto educativo: un análisis en la formación de profesores*". Comares. Granada.
- Hidalgo S. y otros (1999): "*Evolución y destrezas básicas para el cálculo y su influencia en el rendimiento escolar en matemáticas*". Rev. Suma, n.30.
- Meindert Beishuizen (1997). "*La aritmética mental: ¿el recuerdo mental o las estrategias mentales?*" Leinden University en Netherland.MT septiembre 1997.
- Martínez Montero (2000)."*Una nueva didáctica del cálculo para el siglo XXI*" Cisspraxis, SA. Barcelona.
- Ortiz Vallejo Mª. (1994-1995). Proyecto de investigación educativa sobre: "*Los errores en los algoritmos*" Curso de estrategias metodológicas para la enseñanza de las Matemáticas en E. Primaria. CPR de Palencia 94-95.
- Ortiz Vallejo Mª. (1997-1998). "*Estrategias de cálculo mental*". Dentro del curso "Cálculo mental y estimación en cálculo y medida". CPR de Palencia
- Ortiz Vallejo Mª. (1999-2000). Proyecto de investigación y curso de Cálculo mental. Dirigido a profesorado de Primaria y Secundaria. C.P.R. de Valladolid.
- Ortega Tomás y Ortiz Vallejo Mª.(2000). "*Diseño de una intervención para la enseñanza-aprendizaje del cálculo mental en el aula*". Rev. Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Vol. 5. Núm.3. noviembre 2002, pp. 271-292. México.
- Ortega Tomás y Ortiz Vallejo Mª.(2003). "*Niveles de Dominio de los Conceptos Básicos de educación Infantil. Cálculo mental*". Revista. Boletín GEPEM, nº 43. Páginas 49-78. Brasil.
- Ortega Tomás y Ortiz Vallejo Mª.(2005). "*Jerarquía holística de las dificultades asociadas a las estrategias aditivas de cálculo mental*". En proceso de publicación.
- Pereda Ortiz del Río. L. (1986). "*Matemáticas - Ciclo medio de E.G.B. Didáctica del cálculo mental*." Edit. Colección Magisterio. Derio. Bilbao.
- Segovia I. y otros (1989) "*Estimación en cálculo y medida*". Síntesis. Madrid.
- Torra M. y otros (1994): "*Matemáticas. Educación Primaria 1º, 2º y 3º ciclo*." MEC. Madrid.
- William M. Carroll (1996) "*Mental Computation of Students in a Reform-Based Mathematics Curriculum*" Rev. School Science and mathematics. Vol. 96, num. 6. October 1996.
- Libros de texto de Primaria de distintas editoriales.