

MIRAR PROFESIONALMENTE LOS RAZONAMIENTOS DE LOS ESTUDIANTES Y LAS ACCIONES DEL PROFESOR

Teachers' noticing on students' reasoning and teachers' actions

Aguar, M.^a y Fernández C.^b

^aUniversidad Federal del ABC, ^bUniversidad de Alicante

Resumen

El objetivo es explorar cómo profesores de matemáticas de secundaria miran profesionalmente los razonamientos matemáticos usados por estudiantes en una tarea matemática y las acciones del profesor de aula, al analizar un vídeo de su propia práctica durante un curso de formación. Los participantes fueron siete profesores de matemáticas de escuelas de Brasil. El diseño del curso de formación se basa en el modelo PLOT. En este curso, una de las Tareas de Aprendizaje Profesional (TAP) fue la reflexión sobre episodios de vídeo sobre la implementación de clases que fueron planificadas por los profesores en el curso. Los resultados muestran que los profesores fueron capaces de identificar los razonamientos matemáticos usados por los estudiantes y las acciones de la docente que promovían los razonamientos matemáticos.

Palabras clave: mirada profesional, aprendizaje profesional, formación de profesores, tareas de aprendizaje profesional, razonamiento matemático.

Abstract

The aim is to explore how secondary school mathematics teachers notice students' mathematical reasoning in a mathematical task and the teachers' actions, by analysing a video of their own practice during a training course. The participants were seven mathematics teachers from schools in Brazil. The design of the training course is based on the PLOT model. In this course, one of the Professional Learning Tasks (TAP) was the reflection on video episodes about the implementation of a lesson plan made by the teachers in the course. The results show that the teachers were able to identify the mathematical reasoning used by the students and the actions of the teacher in the video that promoted mathematical reasoning.

Keywords: professional noticing, professional learning, teacher education, professional learning tasks, mathematical reasoning.

INTRODUCCIÓN

En Brasil, las últimas décadas han visto un aumento en el número de cursos de formación continua (Gatti et al., 2019); sin embargo, existe la necesidad de explorar si estos cursos de formación continua están desarrollando las competencias docentes en los profesores de matemáticas para su práctica de enseñar matemáticas. Una de estas competencias es la competencia docente de mirar profesionalmente, que en las dos últimas décadas las investigaciones han señalado que es una competencia relevante a ser desarrollada en los programas de formación inicial y continua (Didnyal et al., 2021; Fernández et al., 2018; Weyers et al., 2024).

La competencia mirar profesionalmente se vincula a prácticas profesionales específicas en la enseñanza de las matemáticas (Llinares, 2019) como: (i) dotar de sentido el pensamiento matemático de los estudiantes; (ii) analizar y seleccionar tareas matemáticas; (iii) planificar una lección o (iv) gestionar la discusión sobre los procedimientos usados por los estudiantes en el aula. Por lo que los

cursos de formación o procesos formativos de los profesores deberían enfatizar el desarrollo de la competencia vinculada a las prácticas profesionales.

En esta comunicación, se describe un curso de formación continua con profesores de matemáticas de educación secundaria, cuyo foco es el desarrollo de la competencia mirar profesionalmente vinculada a distintas prácticas profesionales. En particular, nos centramos en explorar cómo los profesores de matemáticas de secundaria miran profesionalmente los razonamientos usados por estudiantes en una tarea matemática y las acciones del profesor de aula, cuando analizan un vídeo de su propia práctica durante el curso de formación en el que estaban participando. A continuación, se describe el modelo teórico que organiza el diseño del curso de formación continua y la conceptualización de la competencia docente mirar profesionalmente en este estudio.

MARCO TEÓRICO

El modelo Professional Learning Opportunities for Teachers (PLOT)

El diseño del curso de formación sigue el modelo PLOT (Ribeiro y Ponte, 2020), que es un modelo teórico-metodológico cuyo propósito es organizar el diseño de procesos de formación para generar oportunidades de aprendizaje para la práctica profesional. El modelo se organiza en torno a tres dominios: Tareas de Aprendizaje Profesional (TAP); Rol y Acciones del Formador (PAF) e Interacciones Discursivas entre Participantes (IDP). En las TAP se subraya que los profesores necesitan oportunidades para aprender a través de experiencias relacionadas con sus propias prácticas profesionales. Por tanto, las TAP se componen de tareas matemáticas y registros de la práctica de enseñar matemáticas. Las TAP deben permitir movilizar y (re)construir el conocimiento matemático para la enseñanza (Ball et al., 2008) por tanto deben de contener preguntas con este foco. En relación con el PAF, cabe destacar la gestión del proceso formativo, valorando su organización y desarrollo a través de un enfoque exploratorio (Ponte y Quaresma, 2016) y que promueva la orquestación de discusiones didácticas y matemáticas entre los participantes (Stein et al., 2008). En el IDP, se tiene en cuenta que las discusiones promovidas en el proceso de formación incluyan discusiones matemáticas y didácticas (Ponte y Quaresma, 2016) que favorezcan la argumentación y justificación (Mata-Pereira y Ponte, 2017).

Desarrollo de la competencia mirar profesionalmente

La competencia mirar profesionalmente se entiende como la capacidad del profesor para identificar aspectos relevantes en una situación de enseñanza-aprendizaje, e interpretar dicha situación a partir de sus conocimientos profesionales para tomar decisiones (Fernández et al., 2018; Llinares y Fernández, 2021). Investigaciones previas han mostrado algunos contextos y herramientas que favorecen el desarrollo de esta competencia en los programas de formación inicial o continua. Una de estas herramientas es el uso de registros o representaciones de la práctica (Buchbinder y Kuntze, 2018; Fernández et al., 2018). Se consideran registros de la práctica materiales, planificaciones de clase, resoluciones de los alumnos a una tarea matemática o un diálogo entre un profesor y diferentes estudiantes y estos registros pueden estar en diferentes formatos (vídeo, escritos o cómic). Además, el uso de preguntas guía que ayuden a los profesores a centrar su mirada sobre un aspecto específico del registro de la práctica y el uso de lentes teóricas (documentos teóricos con información sobre la enseñanza y aprendizaje de un determinado concepto matemático procedente de investigaciones previas) también favorece el desarrollo de la competencia (Fernández y Choy, 2020; Llinares y Fernández, 2021).

En nuestro estudio, el foco de atención de la competencia mirar profesionalmente es la práctica de dotar de sentido el razonamiento de los estudiantes y las acciones del profesor. Conceptualizamos el razonamiento matemático en la línea de Lannin et al. (2011), que conciben el razonamiento “como un proceso evolutivo de conjeturar, generalizar, investigar el por qué y desarrollar y evaluar argumentos” (p.10). Este razonamiento implica una serie de procesos, entre los que consideramos

fundamentales en este estudio conjeturar, generalizar y justificar. Conjeturar implica razonar sobre relaciones matemáticas con el fin de hacer afirmaciones que se asumen provisionalmente como verdaderas (Lannin et al., 2011). Para Mata-Pereira y Ponte (2017), la construcción de una generalización matemática implica una afirmación sobre una propiedad, concepto o procedimiento que se pretende validar. La justificación puede definirse como un argumento lógico basado en ideas que ya se comprenden y, por tanto, justificar implica evaluar la validez de los argumentos (Lannin et al., 2011). Por otra parte, para las acciones del profesor nos centramos en cómo orquestar discusiones matemáticas en el aula según Stein et al. (2008).

MÉTODO

Los participantes fueron siete profesores de matemáticas de escuelas de los estados de São Paulo y Minas Gerais (Brasil) que se habían inscrito en un proceso de formación que fue ofrecido por la universidad para la comunidad de profesores de matemáticas. En este grupo de profesores había dos mujeres, una de las cuales enseñaba en una escuela pública del estado de Minas Gerais, y la otra no enseñaba en ese momento. Los demás eran cinco hombres, tres de los cuales eran profesores en escuelas públicas de São Paulo y dos estaban en formación inicial con experiencia en la enseñanza de las matemáticas.

El proceso de formación se realizó a lo largo de 15 reuniones presenciales de 4 horas cada una (1 reunión por semana). Las reuniones fueron organizadas por tres formadores, uno de los cuales era el primer autor. El proceso de formación basado en el modelo PLOT se dividió en cuatro etapas: (1) acogida y recogida de información previa de los profesores participantes, (2) talleres de formación con los profesores participantes, (3) experiencias en y sobre la práctica docente con los profesores participantes, y (4) sistematización del aprendizaje de los profesores participantes. En la etapa 3, donde se centra este estudio, los profesores participantes se dividieron en dos grupos y cada grupo desarrolló un ciclo de planificación, desarrollo y reflexión (PDR, Trevisan et al., 2020). El ciclo PDR tenía tres TAP, cada una asociada a uno de los momentos del ciclo: planificación conjunta de una lección, implementaron en un aula real y reflexión conjunta a partir de lo observado en el aula.

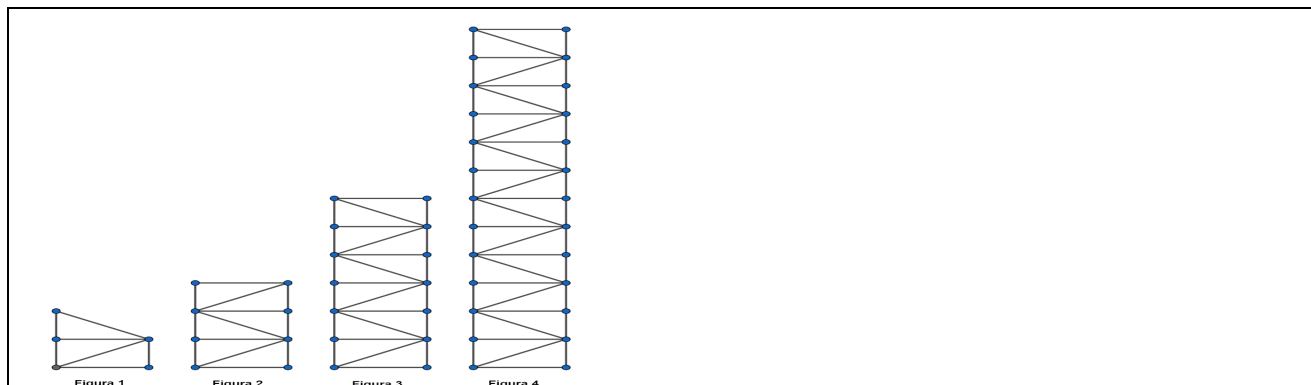
En la TAP de planificación, los grupos recibieron un guion adaptado de Serrazina (2017): (i) seleccionar una tarea matemática exploratoria que promueva el desarrollo de los procesos de razonamiento y los objetivos de aprendizaje relacionados; (ii) anticipar las dificultades de los alumnos y sus posibles estrategias para resolver la tarea y (iii) anticipar las posibles preguntas del profesor y las respuestas de los alumnos. Durante los talleres de formación (etapa 2 del proceso de formación), los participantes habían reflexionado y discutido sobre el guion de Serrazina (2017), sobre el enfoque de enseñanza exploratoria (Canavaro, 2011), considerando sus tres momentos específicos: apertura de la lección, trabajo autónomo de los alumnos -individualmente y/o en grupos- y discusión en grupo sobre cómo orquestar discusiones matemáticas en el aula, según Stein et al. (2008).

La TAP asociada a la reflexión conjunta tenía como objetivo: (i) comprender las estrategias de resolución de los alumnos; (ii) identificar los procesos de razonamiento matemático utilizados por los alumnos; (iii) identificar y comprender las actuaciones del profesor ante las estrategias de resolución de los alumnos; (iv) reflexionar sobre otras posibles actuaciones del profesor en el aula. En particular, en esta comunicación nos centramos en la tarea de reflexión conjunta. En esta TAP, los formadores elegían episodios de las lecciones implementadas por los profesores (vídeos de entre 2 y 5 minutos) que podían generar reflexión acerca de los objetivos previamente descritos de la TAP. Se muestra, a modo de ejemplo, uno de los episodios usados en el que uno de los profesores (Bela) implementa la tarea matemática de la Figura 1 en un aula de 3º de ESO. Esta tarea pretendía repasar las progresiones geométricas mediante una tarea exploratoria. Este episodio, llamado “Conversando sobre la figura 5”, se eligió porque un grupo de estudiantes había utilizado una estrategia de resolución para contar el número de triángulos de la figura 5 que no se había anticipado en la planificación. Las preguntas sobre las que tienen que reflexionar los profesores participantes están relacionadas con la

competencia mirar profesionalmente los razonamientos de los estudiantes y las acciones del profesor de aula: (i) ¿Creen que los alumnos fueron capaces de explicar la forma en que razonaron? Comenta. Y (ii) ¿Cómo intentó ayudarles el profesor? Comenta.

Figura 1

Tarea matemática realizada en la clase de Bela



Observa las figuras y responde.

- Dibuja la figura 5. ¿Cuántos triángulos tiene? Explica tu razonamiento.
- Escribe el número de triángulos de las 10 primeras figuras. ¿Cómo los has obtenido?
- ¿Qué relación hay entre el número de triángulos de la figura 4 y la figura 3? ¿Y entre la figura 4 y la figura 2? ¿Y entre la figura 4 y la figura 1? Describe la relación entre el número de triángulos de una figura determinada y el número de triángulos de la figura anterior.
- Describe la relación entre el número de triángulos de una figura cualquiera y el número de triángulos de la figura 1.
- Escribe una expresión que represente la relación anterior.

En el episodio (video), Bela solicita a un grupo de alumnos que comuniquen cómo lo han resuelto. En la Figura 2 incluimos el diálogo transcrito del vídeo de clase (episodio).

Figura 2

Diálogo transcrito del episodio “Conversando sobre la figura 5” (traducido al español)

Alumno: Es que hemos considerado también los triángulos equiláteros, no sólo los triángulos rectángulos.

Bela: Lo que dicen es que han considerado los triángulos de aquí [señala una de los triángulos rectángulos de la figura 1 que está proyectada en la pizarra] que posiblemente serían rectángulos y este de aquí [con el dedo en el triángulo isósceles de la figura 1 que están llamando los alumnos, equilátero] que tiene los mismos tres lados. Así que contaron así [la maestra cuenta con el dedo, señalando los triángulos de la figura 1] 1 triángulo equilátero y 1, 2, 3 [señalando los triángulos] triángulos rectángulos. ¿Cómo han llegado en la Figura 2?

El alumno tiene dificultades en verbalizar la relación entre los triángulos de la figura 1 respecto de la 2. Bela se da cuenta y se dirige a la pizarra y empieza a escribir el número de triángulos de cada figura.

Bela: Pues venga [Bela empieza a escribir en la pizarra] en la figura 1 hay 1 triángulo equilátero y 3 rectángulos. Y en la figura 2, ¿cómo lo han hecho? (...). Los rectángulos son el doble [escribe esta cantidad en la pizarra], así que son el doble y hay 6 rectángulos. Y los equiláteros, ¿cómo lo has hecho?

Alumno: Entonces la figura 1 no tiene un patrón, porque el número de triángulos equiláteros es impar, así que va a ser diferente.

Bela: Así que la figura 1 es una excepción. Entonces, [en la figura 2] ¿cuántos triángulos equiláteros hay?

Alumno: ¡Habrán dos! Y el total [de triángulos en la figura 2] será 8 [6 + 2]. (...)

Bela: Entonces, de la figura 2 a la figura 3, ¿dicen que hay un patrón?

Alumno: Hay un patrón que funcionó para el resto [de las figuras] (...). [En la figura 3] los triángulos rectángulos se van a duplicar.

Bela: En la figura 3 son 2×6 igual a 12 triángulos rectángulos [Bela lo anota en la pizarra].

Alumno: Los equiláteros, ¡van a aumentar otros tres!

Bela: Entonces, [los equiláteros] serían [el número de triángulos de la figura] de la anterior ¡más 3! $2 + 3$ son 5. [Bela hace anotaciones en la pizarra]. En total, 17 [triángulos].

Alumno: Sí, eso es.

Bela: ¿Funcionó para el siguiente [figura 4]?

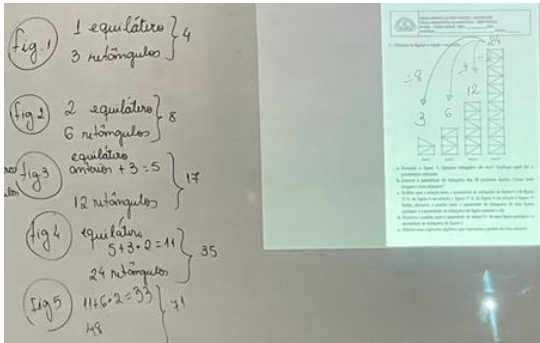
Alumno: ¡Sí! Salvo que este “más tres” [el número de triángulos equiláteros, que es el anterior más 3] se convertiría en otro 3×2 [en la figura 4]. Entonces sería 6×2 [en la figura 5].

Bela: Entonces el equilátero [en la figura 4] sería $5 + 3 \times 2$ igual a 11. ¿Es así?

Alumno: ¡Sí!

Bela: Aquí es el doble [Bela anota en la pizarra el número de triángulos rectángulos de la figura 4], así que hay 24 [número de triángulos totales, Bela anota en la pizarra]. Entonces, ¿hay 11 aquí? [Bela va a la figura 4 y cuenta los 11 triángulos equiláteros]. Con un total de $[11 + 24 = 35]$ triángulos en la figura 4] de 35. Tenemos una excepción en la figura 1. (...). ¿Han encontrado un patrón aquí? ahora tenemos que pensar cómo relacionamos este patrón con la figura 1.

Al final de esta conversación, la pizarra tiene el siguiente aspecto:



Los datos de esta investigación proceden de la discusión colectiva del grupo de profesores en el curso de formación que fueron grabadas en vídeo. En el análisis, dos investigadores nos centramos en identificar si los profesores fueron capaces de comprender las estrategias de resolución de los estudiantes identificando los procesos de razonamiento matemático (Lannin et al., 2011; Mata-Pereira y Ponte, 2017), y si fueron capaces de identificar las acciones de Bela (y otras acciones) en relación con la orquestación de discusiones matemáticas que promuevan el desarrollo de los procesos de razonamiento matemático en los estudiantes. El análisis fue realizado individualmente por los dos investigadores, y las discrepancias fueron discutidas hasta alcanzar un consenso.

RESULTADOS

Mirar profesionalmente las estrategias de resolución de los estudiantes

Los profesores fueron capaces de identificar errores en las resoluciones de los estudiantes. Por ejemplo, en el episodio descrito, identificaron el error cometido por el grupo de estudiantes con relación a la identificación de triángulos isósceles como equiláteros:

Tito: Pensaron en triángulos equiláteros que en realidad son isósceles.

Lui: Es otro problema, no la habíamos previsto [se refiere a esta resolución]. No habíamos previsto este triángulo isósceles que llamaron equilátero, fue una sorpresa. No hubo un momento [en clase] en que se les dijera [a los alumnos] que lo que estáis llamando equilátero es un triángulo isósceles.

Por otra parte, también fueron capaces de identificar procesos de razonamiento desarrollados por el grupo de estudiantes. Por ejemplo, en el episodio fueron capaces de identificar que el grupo de estudiantes estaban identificando un patrón (en los triángulos “equiláteros”) y por tanto estaban conjeturando. También identificaron que el grupo de estudiantes no fue capaz de generalizar:

Tom: Sí, están viendo un patrón. Pero no pueden generalizar.

Formadora: ¿Cuál es su proceso de razonamiento?

Lui: Conjeturar.

Formadora: ¿Cuál es el razonamiento que no pueden hacer?

Tom: Generalizar.

La discusión con foco en la estrategia usada por los estudiantes (no anticipada en la planificación) les permitió reflexionar sobre las características de la propia tarea y sus posibles modificaciones. En la discusión, discuten sobre la posibilidad de incluir los triángulos isósceles en las preguntas de la tarea y sobre si este cambio estaría fuera del objetivo de la tarea y sería otra tarea nueva.

Tito: Se me ocurrió dejar las figuras y modificar las preguntas así: Tratar de encontrar una relación para la formación de triángulos rectángulos, otra para triángulos isósceles y luego la relación de formación de todos los triángulos en general.

Lui: Pero con esta idea nos estamos alejando del objetivo de la tarea. Cuando planteamos esta tarea, nuestro objetivo era que al final llegaran al término general de la progresión geométrica. Que encuentren este nuevo camino, por mucho que haya enriquecido las discusiones, aleja al grupo del objetivo de la tarea, que era llegar al término general de la progresión geométrica.

Mirar profesionalmente las acciones del profesor (Bela)

En la discusión sobre la segunda pregunta ¿cómo intentó ayudarles el profesor?, los profesores fueron capaces de identificar varias acciones de Bela, como la organización del discurso y el uso de la representación simbólica para registrar la respuesta de la alumna en la pizarra:

Tom: [La profesora] organizó su discurso [en la pizarra].

Lima: La profesora ayudaba no sólo al grupo, a la chica que estaba hablando, sino a los otros grupos (...). Así que más o menos mediaba su diálogo [el de la alumna del grupo que hablaba] con los demás compañeros, utilizando la pizarra para registrar. Esto mostró a los alumnos otro tipo de representación de la situación. Así pudieron ver y oír al mismo tiempo.

Por otra parte, discutieron la acción tomada por Bela ante la resolución no anticipada en la planificación del grupo de estudiantes. Profesores como Tom o Tito lo vieron su acción como una oportunidad para explorar más allá del objetivo de la tarea inicial. Teo en cambio comentó que se tendría que haber matizado al inicio que únicamente se contaban los triángulos rectángulos. Con esta discusión, los profesores se dieron cuenta de la importancia y necesidad de anticipar las estrategias de resolución de los alumnos en la planificación.

Teo: Otra cosa que generó un poco de discusión en nuestro grupo es si en el inicio de la tarea ella debería haber matizado si contar o no contar los triángulos “equiláteros”. Creemos que debería haber dejado claro qué triángulos se tenían que contar al principio de la tarea (...).

Bela: En realidad, en relación con lo que nos ha señalado Teo, fue una sorpresa en su momento. Por más que hicimos [en la planificación], cambiamos la forma de la figura, nosotros no pudimos visualizar la forma de los triángulos “equiláteros”. Así que [la resolución de este grupo] fue una sorpresa en su momento.

Tom: ¡Es bonito! Demuestra que lo veían de otra manera (...).

Tito: La calma [de la profesora Bela en la pizarra] fue interesante porque la falta de previsión de esta resolución en la planificación resultó en una discusión que fue más allá de lo previsto.

Además, los profesores identificaron otras posibles acciones del docente, como solicitar a la propia alumna que saliera a la pizarra a explicar y escribir su resolución.

Lima: Otra forma era pedirle a la propia alumna que saliera a la pizarra a explicar su solución. (...).

Bela: Ellas salen a la pizarra a explicar, porque yo hago eso con ellas. (...) ¿Por qué decidí mediar y no llamarlas? Porque no había tiempo, tardarían mucho más en llegar a su razonamiento.

Lima: Creo que esto [que los alumnos salgan a la pizarra a explicar su solución] podría ser una práctica en otras tareas (...). Porque tenemos mucho potencial para desarrollar su comunicación. Es muy rico, que vayan a la pizarra y empiecen a sentir esta dificultad de cómo lo escribo, de cómo lo explico. Esto les planteará dificultades que les ayudarán a desarrollar otras habilidades que son importantes para el desarrollo matemático. Pero en este momento concreto, estoy de acuerdo. Quizá haya sido la mejor decisión.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Durante las discusiones colectivas, los profesores identificaron errores en las estrategias de resolución de los estudiantes y los procesos de razonamiento matemático (Lannin et al., 2011). Además, sus discusiones también tuvieron el foco en que la no anticipación de una estrategia en la planificación dificulta la actuación del profesor en el aula (Serrazina, 2017), y, por tanto, reflexionaron sobre la importancia de la anticipación en sus planificaciones. Por otra parte, los profesores reflexionaron sobre las características de la tarea matemática y las posibles modificaciones. Por tanto, los profesores participantes en el curso de formación fueron capaces de mirar profesionalmente las estrategias de los estudiantes identificando errores y los procesos de razonamiento matemático utilizados por los estudiantes y tomar decisiones sobre la tarea utilizada.

Con relación a las acciones del docente de aula para promover el razonamiento matemático de los estudiantes, los profesores fueron capaces de identificar acciones del docente con este objetivo; por ejemplo, el uso de la representación simbólica para registrar la respuesta de la alumna en la pizarra o la organización de su discurso. También destacaron la actitud tranquila de la docente ante la situación no anticipada en la planificación y reflexionaron sobre la acción tomada de no haber corregido el error (el uso de triángulos equiláteros) o de continuar usando los triángulos no anticipados en la planificación. Además, los profesores pensaron en otras posibles acciones como solicitar a los estudiantes que expliquen y escriban su resolución en la pizarra. Por tanto, los profesores fueron capaces de mirar profesionalmente las acciones de la profesora, identificando acciones de esta para promover el razonamiento matemático y otras acciones que podría haber ayudado a los estudiantes.

Los resultados muestran que los profesores fueron capaces de mirar profesionalmente las estrategias de resolución identificando los procesos de razonamiento matemático de los estudiantes, así como las acciones del profesor. Creemos que el diseño del curso de formación usando el modelo PLOT (Ribeiro y Ponte, 2020), en el que se utilizan TAP que están formadas por episodio de vídeo de su propia práctica y unas preguntas para su reflexión, y donde se discuten documentos teóricos que apoyan la reflexión de los profesores podría haber facilitado el desarrollo de la competencia mirar profesionalmente, al igual que se ha mostrado en otros programas de formación inicial donde se han usado representaciones de la práctica, preguntas guía y lentes teóricas (Fernández et al., 2018; Llinares y Fernández, 2021).

Agradecimiento

Este estudio fue financiado por el Consejo Nacional de Desarrollo Científico y Tecnológico – CNPq - Brasil. Proceso: 403031/2021-4.

Referencias

- Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407. <https://doi.org/10.1177/0022487108324554>
- Buchbinder, O. y Kuntze, S. (2018). Representations of practice in teacher education and research – Spotlights on Different Approaches. En O. Buchbinder y S. Kuntze, (Eds.), *Mathematics teachers engaging with representations of practice. A dynamically evolving Feld* (pp. 1–8). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-70594-1_1
- Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da matemática: Práticas e desafios. *Revista Educação e Matemática*, 115, 11 - 17.
- Dindyal, J., Schack, E. O., Choy, B. H. y Sherin, M. G. (2021). Exploring the terrains of mathematics teacher noticing. *ZDM – Mathematics Education*, 53(1), 1–16. <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01249-y>
- Fernández, C. y Choy, B. H. (2020). Theoretical lenses to develop mathematics teacher noticing. Learning, teaching, psychological and social perspectives. En S. Llinares, y O. Chapman (Eds.), *International Handbook of Mathematics Teacher Education: Volume 2. Tools and Proceses in Mathematics Teacher Education (Second Edition)* (pp. 337–360). Brill. https://doi.org/10.1163/9789004418967_013
- Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G., Valls, J. y Callejo, M. L. (2018). Noticing students' mathematical thinking: characterization, development and contexts. *Avances de Investigación en Educación Matemática (AIEM)*, 13, 39-61. <https://doi.org/10.35763/aiem.v0i13.229>
- Gatti, B. A., Barretto, E. S. S., Andre, M. E. D. A. y Almeida, P. C. A. (2019). *Professores do Brasil: Novos cenários de formação*. UNESCO.
- Lannin, J. K., Ellis, A. B. y Elliott, R. (2011). *Developing essential understanding of mathematical reasoning for teaching mathematics in prekindergarten-grade 8*. Reston: NCTM.
- Llinares, S. (2019). Enseñar matemáticas como una profesión. Características de las competencias docentes. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 18, 30–43.
- Llinares, S. y Fernández, C. (2021). Mirar profesionalmente la enseñanza de las matemáticas: características de una agenda de investigación em Didáctica de la Matemática. *La Gaceta de la RSME*, 24(1), 185-205.
- Mata-Pereira, J. y Ponte, J. (2017). Enhancing students' mathematical reasoning in the classroom: teacher actions facilitating generalization and justification. *Educational Studies in Mathematics*, 96(2), 169-186. <http://dx.doi.org/10.1007/s10649-017-9773-4>
- Ponte, J.P. y Quaresma, M. (2016). Teachers' professional practice conducting mathematical discussions. *Educational Studies in Mathematics*, 93(1), 51-66. <https://doi.org/10.1007/s10649-016-9681-z>
- Ribeiro, A.J. y Ponte, J.P. (2020). Um modelo teórico para organizar e compreender as oportunidades de aprendizagem de professores para ensinar Matemática. *Zetetiké*, 28, 1-20. <https://doi.org/10.20396/zet.v28i0.8659072>
- Serrazina, L. (2017). Planificação do ensino-aprendizagem da Matemática. En GTI (Ed.). *A prática dos professores: planificação e discussão coletiva na sala de aula* (pp. 9-32). APM.
- Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S. y Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, 10(4), 313-340. <https://doi.org/10.1080/10986060802229675>
- Trevisan, A. L., Ribeiro, A. J. y Ponte, J. P. (2020). Professional learning opportunities regarding the concept of function in a practice-based teacher education program. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 15(2), 1-14. <https://doi.org/10.29333/iejme/6256>
- Weyers, J., König, J., Scheiner, T., Santagata, R. y Kaiser, G. (2024). Teacher noticing in mathematics education: a review of recent developments. *ZDM–Mathematics Education*, 56, 249-264. <https://doi.org/10.1007/s11858-023-01527-x>

RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA CONTEXTUALIZADO QUE INVOLUCRA LA FUNCIÓN $f(n)=2n$ CON NIÑOS Y NIÑAS DE 5 AÑOS

Solving a contextualized problem involving the function $f(n)=2n$ with 5-year-old children

Anglada, L.^a, Cañadas, M. C.^b y Fuentes, S.^b

^a Centro Universitario María Inmaculada de Antequera, ^b Universidad de Granada

Resumen

En este estudio nos centramos en el enfoque funcional como aproximación al pensamiento algebraico en alumnado de 5 años. Nuestros objetivos de investigación son: (1) describir las respuestas de este alumnado a preguntas sobre un problema contextualizado que involucraba la función $f(n)=2n$ en sus formas directa e inversa, (2) describir las justificaciones a sus respuestas, y (3) describir cómo construyeron una tabla para representar casos particulares del problema. Recogimos información de una sesión de trabajo con una clase de 13 niños y niñas de 5 años. Los resultados muestran que en las respuestas del alumnado podemos evidenciar que estos identifican regularidades para casos particulares, tanto para la forma directa como la inversa de la función, y la mayoría, justificó sus respuestas. Además, construyeron una tabla de funciones, distinguiendo las variables y la relación entre ellas.

Palabras clave: educación infantil, estructuras, función inversa, pensamiento funcional, tablas de funciones.

Abstract

In this study, we focused on the functional approach as an approach to algebraic thinking in 5-year-old students. Our research objectives were: (1) to describe these students' responses to questions about a contextualized problem involving the function $f(n)=2n$ in its direct and inverse forms, (b) to describe the justifications for their responses, and (c) to describe how they constructed a table to represent particular cases of the problem. We collected data from a work session with a class of 13 5-year-old children. The results show that the students' responses revealed that they identified regularities for particular cases, both for the direct and inverse forms of the function, and the majority justified their responses. Furthermore, they constructed a table of functions, distinguishing the variables and the relationships between them.

Keywords: early childhood education, function tables, functional thinking, inverse function, structures.

INTRODUCCIÓN

Una de las aproximaciones al álgebra escolar recomendada para los alumnos en edad temprana es el pensamiento funcional (Carraher y Schliemann, 2007). El pensamiento funcional se centra en la relación entre dos cantidades que covarían (Blanton y Kaput, 2004). Establecer estas relaciones supone identificar la regularidad en el comportamiento entre variables (Blanton, 2008). De manera general, la regularidad es lo que se repite y, a partir de una regularidad observada, se prueba que esta sea válida para más casos particulares y, finalmente, para cualquier caso perteneciente a una situación dada (Pólya, 1966). Autores como Blanton y Kaput (2011) enfatizan la importancia de introducir el pensamiento funcional en la educación infantil, ya que el establecimiento de relaciones funcionales

surge intuitivamente en estos años. En nuestro trabajo asumimos que el alumnado de infantil tiene capacidad para establecer relaciones entre cantidades que covarían (e.g., Blanton y Kaput, 2004).

La representación de ideas algebraicas es una de las prácticas esenciales que Blanton et al. (2011) consideraron para el trabajo del pensamiento algebraico en el aula. En el contexto del pensamiento funcional, las representaciones permiten a los estudiantes expresar la relación entre cantidades que covarían. En particular, en este trabajo nos centramos en la representación mediante tablas. Las tablas son una representación que ayuda a organizar las ideas y el pensamiento a medida que el alumno las utiliza para documentar resultados y datos (López y Brizuela, 2024). Nos interesa esta representación ya que, a pesar de que es una representación con potencial en los primeros cursos, no ha sido muy explorada en estos niveles (Brizuela et al., 2021).

Otra de las prácticas esenciales del álgebra que vamos a considerar en este trabajo, y que es novedosa en estudios sobre pensamiento funcional en educación infantil, es la justificación. La justificación ayuda a determinar y explicar la verdad de una conjetura o afirmación (Blanton et al., 2011). También permite a los niños desarrollar argumentos para defender o refutar la validez de una idea matemática (Brizuela y Strachotta, 2024). Diseñamos una tarea en nuestro equipo de investigación en un entorno de resolución de problemas contextualizados, en forma de historia-problema¹, que involucraba la función $f(n) = 2n$ en sus formas directa e inversa. Trabajamos con materiales concretos, para que los propios niños pudieran validar sus respuestas.

Con este trabajo pretendemos contribuir a la investigación sobre pensamiento funcional de niños de educación infantil. Establecemos tres objetivos de investigación, con el foco puesto en el trabajo conjunto de toda la clase: (1) describir las respuestas de alumnado de último curso de educación infantil (5 años) a preguntas sobre un problema contextualizado que involucraba la función $f(n)=2n$ en sus formas directa e inversa, (2) describir las justificaciones a sus respuestas y (3) describir cómo construyeron una tabla para representar casos particulares del problema.

MARCO TEÓRICO Y ANTECEDENTES

El pensamiento funcional es un tipo de pensamiento algebraico, que se ocupa de la construcción, descripción, representación y razonamiento con y sobre las funciones y los elementos que las constituyen (Cañadas y Molina, 2016). Desde la perspectiva del contenido matemático, nos centramos en las funciones lineales con dos variables, cuyos conjuntos dominio e imagen son los números naturales. En este contexto, contemplamos dos tipos de relaciones entre las variables, la directa (de la variable dependiente con la variable independiente) y la inversa (en la que se intercambian los roles de las variables respecto a la relación directa), existentes entre cantidades que tienen capacidad de variación simultánea (Blanton y Kaput, 2004). La relación entre las variables de las funciones puede involucrar diferentes representaciones: (a) lenguaje natural-oral; (b) lenguaje natural-escrito; (c) pictórica; (d) numérica; (e) tabular y (f) notación algebraica (Carragher et al., 2008). En este trabajo nos centramos en la representación tabular. Las tablas son organizaciones gráficas donde la información se organiza según un doble eje que ordena y sistematiza datos de información relacionados entre sí (Campbell-Kelly et al., 2003). Llamamos tablas de funciones a las que permiten representar la relación entre variables. Las tablas de funciones son herramientas que apoyan el desarrollo temprano del pensamiento funcional (Tanisli, 2011).

En el pensamiento funcional es fundamental el estudio de regularidades (estructuras). Para que los niños identifiquen una regularidad, realizamos preguntas sobre casos particulares, de manera que a partir de algunos ejemplos hallen los valores de la variable dependiente y para nuevos valores específicos de la variable independiente x . Cañadas et al. (2016) en un estudio con alumnado de 2º de Educación Primaria (7 años) trabajaron con un problema contextualizado que involucraba la función $f(n)=2n$. Los niños y niñas expresaron la regularidad en sus respuestas mediante recurrencia “sumando dos cada vez” y mediante una estructura aditiva “sumando cada número consigo mismo”.

Los estudios sobre pensamiento funcional en educación infantil que abordan el trabajo con la función inversa son escasos. Anglada et al. (2022) diseñaron y aplicaron una tarea que involucraba las funciones $f(n)=n$, $f(n)=n+2$, $f(n)=n-1$ y $f(n)=2n$. Analizaron las respuestas de ocho niños de 5 años. En los resultados apreciamos que siete de los niños identificaron una estructura adecuada en preguntas relativas a las tres primeras funciones, para las formas directa e inversa. Para $f(n)=2n$, dos estudiantes identificaron una estructura correcta, tanto para la función directa como para la inversa. Fuentes y Cañadas (2024), en un estudio con una niña de 4 años, describieron los pasos que esta realizó para resolver dos tareas que involucraban las funciones $f(n)=n$ y $f(n)=3n$ y sus respectivas funciones inversas. Esta niña trabajó con las formas directa e inversa de las dos funciones sin dificultad.

Respecto a la justificación, Pinto (2021), en un estudio de caso, analizó las justificaciones de un niño de 5 años al resolver problemas que involucraban funciones lineales. Acosta et al. (2024) realizaron un estudio longitudinal con estudiantes de tres, cuatro y cinco años, sobre el tipo de justificaciones empleadas al trabajar con patrones repetitivos. Ambos estudios destacan la importancia de animar a los estudiantes a justificar sus respuestas.

Algunos autores enfatizan la importancia de indagar sobre cómo los niños interactúan con las tablas de funciones (e.g., Brizuela et al., 2021). Blanton y Kaput (2004) abordaron cómo niños de esta edad resolvieron un problema contextualizado que implicaba las funciones $f(n)=n$ y $f(n)=2n$. Estos autores describieron que los niños, con ayuda, utilizaron una tabla para organizar datos y establecieron relaciones entre variables. Brizuela et al. (2021) realizó un estudio de caso con un niño de 5 años, centrado en cómo este usaba y comprendía las tablas cuando resolvía problemas que involucraban las funciones $f(n)=n$, $f(n)=n+1$ y $f(n)=2n$. Estas tablas sirvieron al niño de andamiaje para la identificación de relaciones funcionales y de la generalización. Estos autores concluyeron que los niños y niñas pueden usar tablas como herramientas de organización y no solo “mirarlas”, sino también “mirar a través” de las tablas para desarrollar la comprensión de las relaciones funcionales.

En nuestro trabajo, a partir de un problema contextualizado que involucraba la función $f(n)=2n$ en sus formas directa e inversa, describimos las regularidades que evidenciamos en las respuestas de los niños y las justificaciones que dan a estas respuestas. También describimos cómo construyeron una tabla de funciones.

MÉTODO

Este estudio es cualitativo, de tipo exploratorio y descriptivo. La recogida de datos se llevó a cabo con una clase de 13 escolares del último curso de educación infantil (5 años) en el curso 2024/2025. Los niños y niñas pertenecían a un centro educativo público de Granada. La selección del centro educativo fue intencional, según la disposición del centro y de los docentes. Los niños y niñas habían trabajado en clase, en ambos casos, con algunos tipos de tablas como tablas de doble entrada, con elementos cualitativos y cuantitativos. Además, desde los 3 años, estos han participado en experiencias relativas al pensamiento algebraico, realizadas dentro del proyecto de investigación en el que se enmarca este trabajo (<https://www.pensamientoalgebraico.es>), durante las cuales tuvieron contacto con tablas de funciones utilizando material manipulativo (Anglada et al., 2024). La participación fue voluntaria y contamos con el permiso por parte del Comité de Ética de la Universidad de Granada (ref. 3468/CEIH/2023).

Para los objetivos planteados, diseñamos una sesión de 50 minutos con toda la clase. Diseñamos la tarea en el seno del proyecto de investigación en el que se enmarca este trabajo. Las tareas se basaron en la resolución de problemas contextualizados, presentados en forma de historia-problema. Dos de las autoras de este trabajo entraron al aula. Una actuó como investigadora docente y otra grabó y sirvió de apoyo. Ambas tomaron notas de sus observaciones en el aula. La tutora del grupo ayudó en la gestión del aula, pero no se implicó en nuestra propuesta.

Presentamos la historia-problema de forma oral y establecimos un diálogo continuo con los niños, basado en preguntas y respuestas. Utilizamos una gallina y huevos de juguete, y un espejo. La investigadora comenzó diciendo: “Esta gallina se llama Lina, es una gallina presumida y tramposa. Siempre quiere ser la que pone más huevos de todo el gallinero. ¡Oh!, es el momento de que nuestra gallina ponga huevos – la gallina desapareció y volvió con un huevo- ¿Veis cuántos huevos ha puesto nuestra gallina Lina?”. La investigadora continuó diciendo que Lina estaba triste por poner solo un huevo, entonces a Lina se le ocurrió una idea, poner el huevo delante de un espejo y así engañar a las demás gallinas y al granjero. Luego, preguntó a los niños: “¿qué es lo que ocurre al poner el huevo delante del espejo?”. La investigadora repitió el proceso con tres huevos. Después con dos, pero anticipando la respuesta de los niños para luego colocar los huevos frente al espejo y corroborar si estaban en lo correcto. Y así continuó con otros casos particulares con números entre 1 y 10. Luego, pasamos a trabajar la forma inversa de la función, planteándoles: “Si quiero que se vean en total 4 huevos, ¿cuántos huevos deberá poner la gallina?”. Repitió esta pregunta con distintos casos particulares. A continuación, preguntó qué es lo que ocurría al poner huevos delante de un espejo. Orientamos las preguntas para que fueran un ente facilitador del diálogo y de la justificación por parte de los alumnos. Algunas de las preguntas realizadas fueron: “¿Cómo pensaste que era [un número cualquiera]?”, “¿Cómo lo has hecho?”, “¿Por qué?”.

Después de esto, la investigadora dibujó los ejes de una tabla en la pizarra y puso el primer par de valores: “si la gallina pone un huevo, al ponerlo delante del espejo veremos dos”. A continuación los niños salieron por turnos a la pizarra añadiendo pares de valores de la función (ver Figura 1). Tuvimos presente proponerles valores no consecutivos para evitar la recursividad. Además, siguiendo recomendaciones de López y Brizuela (2024) formulamos preguntas que ponían la atención en las relaciones por filas de la tabla. Cada vez que un niño escribía una pareja de valores, le preguntábamos qué quería decir con lo que había escrito. Se abrió una discusión en clase y se confirmaba si todos los niños lo consideraban correcto o no. En caso de discrepancia lo comprobaban con el material.

Figura 1

Tabla Construida por los niños en la pizarra

miércoles 22-enero-2025

GALLINA	ESPEJO		
1	2	10	20
3	6	20	40
2	4	100	200
4	8	300	600
2	4		
4	8		

En este escenario, la variable independiente es el número de huevos que pone la gallina y la variable dependiente el número de huevos que se ven en total cuando acercamos el espejo. Para la forma inversa, se invierten los roles de las variables (i.e., se conoce el número de huevos que se ven en total al poner el espejo y se desconoce el número de huevos que ha puesto la gallina).

Análisis de datos

Transcribimos las videgrabaciones de las sesiones y realizamos un análisis de los datos a partir de estas transcripciones. Analizamos las respuestas de los niños a las preguntas de la investigadora referidas a casos particulares, para las formas directa e inversa de la función (objetivo 1 y 2). Nos centramos en cómo fueron estas respuestas y describimos: (a) si eran correctas o incorrectas, (b) si se apoyaron en el uso de material, (c) si las justificaron, (d) cómo eran estas justificaciones.

Por otro lado, analizamos la construcción por los niños de una tabla en la pizarra para representar la relación entre las variables (objetivo 3). Las categorías consideradas se basan en las de Torres et al. (2022), siendo: (a) ubicación de los pares de valores en las columnas adecuadas, (b) lectura de los pares de valores indicando a qué variable correspondía cada una y (c) representación de casos particulares distintos a los utilizados en la sesión de clase en la tabla.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Observamos que las respuestas del alumnado a las preguntas de la investigadora eran correctas, para las formas directa e inversa de la función, desde los primeros casos particulares. La mayoría de las veces, el alumnado respondía al unísono y de forma casi inmediata. Cuando la investigadora-docente les preguntaba cómo sabían la respuesta, recurrían a sumar el número de huevos que puso la gallina consigo mismo. Algunos ponían incluso otros ejemplos de parejas de casos particulares para justificar sus respuestas, utilizaron números mayores que 10, incluso números como 300, 400, 1000 etc. La estrategia de ir sumando un número consigo mismo, evidencia que identificaron una regularidad. No dieron una expresión de esta regularidad, pero tenían claro que debían sumar la cantidad de huevos que ponía la gallina con el mismo número que era el que se reflejaba y lo evidenciaban a través del trabajo con casos particulares. Para los primeros cuatro casos particulares usaron materiales para ratificar sus respuestas, pero después no.

A continuación, presentamos un extracto de la clase cuando trabajan con la función directa. Destacamos la interacción que se generó en el aula, donde la mayor parte de los alumnos aportó a la conversación. Para mantener el anonimato de los niños, les asignamos su número de lista habitual acompañado de una A (de “alumno”).

Investigadora (I): ¿Cuántos huevos ha puesto la gallina?

Todos (T): Tres.

I: Pero ella sigue queriendo más.

A8: Sigue haciendo trampa.

I: Cuando los ponga delante del espejo, ¿cuántos vamos a ver?

T: Seis, cuatro, ocho...

I: Vamos a comprobarlo.

A3: Uno, dos, tres, cuatro, cinco y seis.

I: A8 dice que sabía que iba a ser seis. A ver, cuéntame cómo.

A8: Es que tres más tres es seis.

I: ¿Alguien sabe por qué dijo tres más tres?

A1: Señó, una cosa. Veinte más veinte es cuarenta.

A6: Y cien más cien es doscientos.

A1: Y mil más mil dos mil.

A8: Mira, trescientos más trescientos es seiscientos.

A12: Infinito más infinito es infinito.

A13: Infinito más infinito. Es infinito y más allá.

Del fragmento anterior extraemos varias ideas interesantes en relación con nuestros objetivos. La primera es que los alumnos construyeron las respuestas en común. Al principio, al preguntarles por lo que vemos cuando la gallina pone 3 huevos, las respuestas variaban y danban como respuesta diferentes números pares (seis, cuatro, ocho). A continuación, con el material concreto, A3 contó los

huevos y sus reflejos, uno a uno. A8 intervino en la clase comentando que sabía que eran seis porque es tres más tres, evidenciando una estructura aditiva. Luego, varios compañeros pensaron números al azar y fuera de su ámbito numérico conocido y duplicaron el valor sumándolo consigo mismo (por ejemplo, $300+300=600$). Aquí dejaron de hacer referencia a las cantidades involucradas, de forma que recontextualizaron el problema (Carraher y Schliemann, 2002) de un contexto físico a uno matemático. Destacamos también la mención al infinito como número muy alto y que expresen “infinito más infinito”, que refuerza la idea de que han identificado una regularidad.

En cuanto a preguntas sobre la función inversa, extraemos el siguiente diálogo:

- I: Yo quiero que cuando ponga los huevos en el espejo se vean cuatro huevos. ¿Cuántos huevos debe poner la gallina?
- T: Dos, dos, dos...
- I: Vamos a comprobarlo [lo comprueba con el material]. Muy bien.
- I: Ahora quiero que se vean dos ¿Cuántos huevos debe poner la gallina?
- T: Uno (responden rápidamente y al unísono).
- I: ¿Y si ahora quiero ver seis?
- T: Tres.
- I: ¿Y si quiero ver ocho?
- T: Cuatro.
- A5: Cuatro y cuatro son ocho [sacando cuatro dedos en cada mano y poniendo una frente a la otra].

Observamos que el cambio en la forma de la función no generó dificultad. Como comentó A5, consiste en pensar ese ocho como una suma de números iguales, uno correspondiente a los huevos que puso la gallina y otro a su reflejo, lo que evidencia emparejando cuatro dedos de cada mano.

Respecto a la construcción de una tabla en la pizarra para representar la relación entre las variables, observamos que los niños desde el primer momento colocaron los datos en las columnas adecuadas. La investigadora escribió las dos primeras parejas de valores y trazó los ejes. Luego, continuaron los niños y niñas escribiendo en la tabla otras parejas. Al principio, las columnas no tenían encabezado, les preguntamos qué nombre podríamos ponerle y ellos mismos sugirieron llamarlas “gallina” a la de los huevos que esta ponía (a la izquierda) y “espejo” a la de lo que veían al poner los huevos frente al espejo (columna de la derecha). Cada vez que un niño añadía valores en la tabla, le pedíamos que nos dijera qué significaba lo que representaban en la tabla y lo hicieron correctamente. En varias ocasiones, paramos y leímos entre todos lo recogido en la tabla. Esto indica que reconocían los valores de las variables y la relación entre ellos. Algunos niños representaron en la tabla algunos valores distintos a los utilizados en la sesión de clase, como podemos ver en la Figura 1.

CONCLUSIÓN

En este trabajo hemos dado respuesta a tres objetivos de investigación. Hemos mostrado fragmentos del trabajo del alumnado en el aula que evidencian la relación entre las variables al trabajar con casos particulares, para las formas directas e inversa de la función, cómo justifican sus respuestas y cómo construyen y utilizan una tabla para organizar valores de una función.

La expresión verbal a estas edades es limitada, puede que esto justifique que no han llegado a dar una expresión de la regularidad para la relación entre las variables, pero por sus respuestas podemos evidenciar que la han identificado. Si comparamos el presente estudio con el de Cañadas et al. (2016) con alumnado de 7 años, observamos algunas diferencias, por ejemplo, en este los niños y niñas justificaron sus respuestas mediante recurrencia “sumando dos cada vez”. Esto podría deberse al tipo de tarea o a la presentación de valores de la variable independiente consecutivos. Otra diferencia es

que, usaban la expresión “duplicar” para expresar la regla seguida. A pesar de usar la expresión seguían una estructura aditiva sumando cada número consigo mismo, no llegaron a usar la estructura multiplicativa del doble. A parte de esto los resultados de los dos estudios son muy similares.

En línea con Brizuela et al. (2021) observar cómo los niños de 5 años construyen una tabla ayuda a profundizar en cómo estos relacionan los valores de dos variables. Parte de nuestros resultados confirman los de estudios previos (e. g., Anglada et al., 2024; Brizuela et al., 2021), evidenciando la capacidad de los niños y niñas de esta edad para construir y leer tablas de funciones. Consideramos una limitación el hecho de haber utilizado una función multiplicativa específica, habría que indagar sobre lo que ocurre con otras funciones lineales y sus inversas. Coincidimos con investigaciones previas donde se destaca que incluir cuestiones que involucren a la función inversa es viable en estas edades siempre y cuando el contexto y las tareas sean adecuadas (Anglada et al. 2022, Fuentes y Cañadas, 2024). En futuros trabajos sería interesante seguir indagando sobre esto y estudiar el uso de las tablas para descubrir relaciones entre variables.

Como aporte a la docencia, destacamos la inclusión de tareas de pensamiento funcional en un contexto en el que el alumnado puede anticipar respuestas y autovalidarlas. Además, utilizar la historia-problema como recurso permite una mejor gestión de las preguntas dirigidas a la función.

Agradecimientos

Este trabajo se ha realizado como parte del proyecto con referencia PID2020-113601GB-I00, financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033 y del proyecto con referencia PID2024-157106NB-I00.

Referencias

- Acosta, Y., Alsina, Á. y Pincheira, N. (2023). Computational thinking and repetition patterns in early childhood education: Longitudinal analysis of representation and justification. *Education and Information Technologies*, 1-26. <https://doi.org/10.1007/s10639-023-12051-6>
- Anglada, M. L., Cañadas, M. C. y Brizuela, B. M. (2022). Identificación de estructuras por niños de cinco años en una tarea que involucra funciones lineales en sus formas directa e inversa. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 149-157). SEIEM.
- Anglada, M. L., Fuentes, S. y Cañadas, M. C. (2024). Identificación y descripción de cambios cualitativos por niños de tres años. En M. Sánchez Aguilar, M. del S. García González y A. Castañeda (Eds.), *Perspectivas actuales de la Educación Matemática* (pp. 191-200). Editorial SOMIDEM. <https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S3/2024/01-19>
- Anglada, L., Pinto, E., Cañadas, M. C. y Fuentes, S. (2024). Five-year-olds expressing relationships while working with a function machine: approaches to the use of function tables. En A. Twohill, I. Isler-Baykal, E. Knuth, A. J. Ribeiro y J. Miller (Eds.), *Proceedings from ICME 15, Topic Study Group 1.2: Teaching and learning of early algebra* (pp. 1-4). ICME 15.
- Blanton, M. (2008). *Algebra and the elementary classroom: Transforming thinking, transforming practice*. Heinemann Educational Books.
- Blanton, M. L. y Kaput, J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. En M. Johnsen y A. Berit (Eds.), *Proceedings of the 28th International Group of the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 135-142). Bergen University College.
- Blanton, M. L. y Kaput, J. J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization. Advances in mathematics education* (pp. 5-23). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_2
- Brizuela, B. M., Blanton, M. y Kim, Y. (2021). A kindergarten student's use and understanding of tables while working with function problems. En A. G. Spinillo, S. L. Lautert y R. E. Borba (Eds.), *Mathematical reasoning of children and adults*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-69657-3_8

- Brizuela, B. M. y Strachota, S. (2024). When algebra makes you smile: Playful engagement with early algebraic practices. *Learning and Instruction*, 92, 101933. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2024.101933>
- Campbell-Kelly, M., Croarken, M., Flood, R. y Robson, E. (Eds.) (2003). *The history of mathematical tables: From Sumer to spreadsheets*. Oxford University Press.
- Cañadas, M. C., Brizuela, B. M. y Blanton, M. (2016). Second graders articulating ideas about linear functional relationships. *The Journal of Mathematical Behavior*, 41, 87-103. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.10.004>
- Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruiz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209-218). Comares.
- Carraher, D. W., Martínez, M. V. y Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM—Mathematics Education*, 40(1), 3-22. <https://doi.org/10.1007/s11858-007-0067-7>
- Carraher, D. W. y Schliemann, A. D. (2002). Is everyday mathematics truly relevant to mathematics education? En J. Moshkovich y M. Brenner (Eds.), *Everyday mathematics. Monographs of the Journal for Research in Mathematics Education* (11) (pp. 131-153). X
- Carraher, D. y Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 669-05). NCTM.
- Fuentes, S. y Cañadas, M. C. (2024). Direct and inverse functions in Pre-School: A case study on functional thinking with a 4 year-old. *Early Childhood Education Journal*. <https://doi.org/10.1007/s10643-024-01826-2>
- López, M. y Brizuela, B. M. (2024). Las tablas como herramientas algebraicas. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas* 106, 23-28.
- Pinto, E. (2021). La construcción y justificación de ideas matemáticas generales por un niño de 5 años: el rol de las representaciones manipulativas. *Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática*, 6(2), 144-164. <https://doi.org/10.34179/revisem.v6i2.1601>
- Pólya, G. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible*. Tecnos.
- Radford, L. (2018). The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school. En C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-Year-Olds* (pp. 3-25). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_1
- Tanisli, D. (2011). Functional thinking ways in relation to linear function tables of elementary school students. *The Journal of Mathematical Behavior*, 30(3), 206-223. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2011.08.001>
- Torres, M. D., Brizuela, B. M., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (2022). Introducing tables to second-grade elementary students in an algebraic thinking context. *Mathematics*, 10, 56. <https://doi.org/10.3390/math10010056>.

ⁱ Una historia-problema es una narración o relato que presenta una situación concreta y significativa, diseñada para motivar y contextualizar un problema matemático. Autores como Radford (2018) analiza cómo estas pueden servir para estructurar problemas y mejorar su comprensión.