

APORTACIONES DE LA CONFIGURACIÓN EPISTÉMICA AL ESTUDIO DE LA INTEGRAL IMPROPIA

Contributions of the epistemic configuration for the study of the improper integral

Igolnikov, N.^a y Rivas, M.^b

^aUniversidad de Buenos Aires, ^bUniversidad de Granada

Resumen

Esta comunicación informa sobre un estudio teórico de las configuraciones epistémicas de la integral impropia. Se ha optado por el uso de herramientas propuestas desde el marco teórico-metodológico del enfoque ontosemiótico, el cual orienta las acciones de análisis y sustenta la producción de los resultados informados. Desde la perspectiva de este enfoque, se plantean avances en la producción de un posible significado de referencia para el objeto Integral Impropia, a partir de un análisis ontosemiótico de cuatro resoluciones expertas de un problema propuesto en el ámbito de formación de profesores, con el fin de identificar objetos y procesos matemáticos involucrados en los sistemas de práctica correspondientes. Las configuraciones epistémicas producidas permiten poner en relación el uso de los marcos geométrico, analítico y algebraico, el tipo de argumentos empleados y el rol de los procesos de cálculo en los distintos tipos de práctica.

Palabras clave: didáctica del análisis matemático, enfoque ontosemiótico, integral impropia.

Abstract

This paper reports on a theoretical study of the epistemic configurations of the improper integral. We have opted for the use of tools from the theoretical-methodological framework of the ontosemiotic approach, which orients the actions of analysis and sustains the production of the reported results. From the perspective of this approach, progress is made in the production of a possible reference meaning for the Improper Integral object, based on an ontosemiotic analysis of four resolutions of a problem proposed in the field of teacher training, in order to identify mathematical objects and processes involved in the corresponding systems of practice. The epistemic configurations produced allow us to relate the use of geometric, analytical and algebraic frameworks, the type of arguments used and the role of calculation processes in the different types of practice.

Keywords: didactics of mathematical analysis, ontoSemiotic approach, improper integrals.

INTRODUCCIÓN

Algunos estudios han abordado aspectos del estudio didáctico-matemático del objeto integral impropia. Una de las principales aportaciones encontradas es la de González-Martín (2005), quien realiza en su tesis doctoral un análisis de este objeto en términos de sus dimensiones epistémica, didáctica y cognitiva. En particular, el autor identifica, tanto en el desarrollo histórico del mismo como en los materiales utilizados para su enseñanza, que la integral impropia se caracteriza por ser una generalización del objeto integral definida, en estrecho vínculo con la conceptualización del objeto funcional $f(x) = \int_a^x f(t)dt$. Esta generalización puede tener lugar tanto por vía de considerar intervalos de integración no acotados (integrales impropias de tipo I), como de considerar funciones no acotadas en el dominio de integración (integrales impropias de tipo II).

Mateus-Nieves y Font-Moll (2021) realizan una extensa revisión bibliográfica e historiográfica con la intención de caracterizar la complejidad epistemológica del objeto Integral a partir de un análisis historiográfico, reinterpretando fuentes primarias en términos de la clasificación moderna de integrales definida, indefinida e impropia, complementando trabajos como el de Crisóstomo (2012) orientados específicamente al objeto Integral Definida. Así, los autores proponen tres Configuraciones Globales Epistémicas para la integral vista como un objeto en sí. La integral impropia es parte de la Configuración Epistémica 3, asociada a la “fundación del cálculo integral”, involucrada entre los distintos objetos primarios que la componen, aunque los autores mencionan que las diferentes configuraciones “are partial displays and explanations of the emergent object, emerging from mathematical practices useful to present and formalize specific situations such as: types of integral, (...) applications of improper integrals in complex analysis, to name a few” (Mateus-Nieves y Font Moll, 2021, p. 21). En este orden de ideas, el presente trabajo pretende profundizar en el estudio de la complejidad del objeto integral, al indagar concretamente el objeto integral impropia y producir configuraciones epistémicas específicas obtenidas a partir del estudio de las prácticas matemáticas asociadas a este objeto.

Mojica et al. (2021) realizan un estudio de caso donde analizan diferentes producciones de estudiantes en las que está involucrado el objeto Integral Impropia, concluyendo que su comprensión no se orienta a una definición formal, sino que se encuentran más próximas a una de tipo intuitivo, destacando la preferencia de estos por el tratamiento algebraico de las mismas (Mojica et al, 2021, p. 49). Esta tendencia de los estudiantes hacia los procedimientos de cálculo algebraico, al resolver integrales impropias, ha motivado el análisis de resoluciones del problema objeto de estudio que posiblemente no se corresponden rigurosamente con lo solicitado en el mismo. Se ha pretendido abordar las posibles soluciones, incluso la del cálculo algebraico que posiblemente, aunque es adecuada, presenta la menor eficiencia.

Esta comunicación, como se ha referido, se propone complementar las aportaciones derivadas de los trabajos referidos a partir de la realización de un estudio de corte teórico con el fin de identificar objetos y significados matemáticos en torno al concepto de integral impropia. Concretamente mediante el estudio de cuatro posibles resoluciones dadas a un problema de integral impropia se producen cuatro configuraciones epistémicas de los objetos matemáticos (elementos lingüísticos, conceptos/definiciones, procedimientos, propiedades y argumentos) puestos en juego en cada resolución. El foco en el análisis ontosemiótico de las resoluciones del cual emergen para la propuesta de las configuraciones epistémicas, centradas en el concepto de Integral Impropia, constituye uno de los principales ejes de esta complementariedad. Se ha tomado como referencia la guía de problemas de un curso de formación de futuros profesores, en la asignatura "Análisis de una variable: Integración", de la cual ha sido tomado el problema objeto de análisis.

MARCO TEÓRICO-METODOLÓGICO

Se asumirá el Enfoque OntoSemiótico (EOS) como marco teórico-metodológico, desde el cual se interpretan las matemáticas como una actividad, un sistema de procesos y objetos culturalmente compartidos, y un sistema de signos (Godino, 2024).

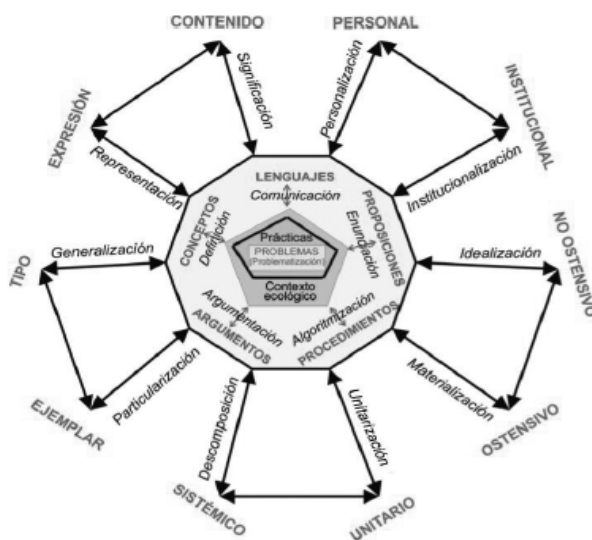
El EOS se posiciona epistemológicamente a partir de considerar la naturaleza pragmática del conocimiento matemático, el cual incluye tanto una familia de prácticas como una red de objetos y procesos interrelacionados. En la Figura 1 se presenta la configuración ontosemiótica de prácticas objetos y procesos, en la que se puede observar la distinción entre objetos primarios (Situaciones-Problema, Lenguajes, Conceptos, Propositiones, Procedimientos y Argumentaciones) y secundarios, organizados en cinco dualidades (Personal-Institucional, Expresión-Contenido, Extensivo-Intensivo, Sistémico-Unitario, Ostensivo-No ostensivo), las cuales tienen asociadas sus correspondientes procesos.

Así, el sentido de un objeto matemático resulta relativo y dependiente del contexto donde tiene lugar, de modo que el significado global de un objeto matemático es entendido por los tipos de problema en los que participa y los sistemas de práctica empleados para resolverlos, conjuntamente a un ámbito institucional determinado donde ello tiene lugar. Este significado global puede ser comprendido a través de los significados parciales o de referencia.

Esta manera de concebir el significado (global o parcial) de un objeto matemático pone de relieve la necesidad de instrumentar y concebir un segundo nivel de análisis enfocado en un tipo de Situación-Problema y la secuencia de prácticas involucrada para resolverlo.

Figura 1

Configuración ontosemiótica de prácticas, objetos y procesos (Godino, 2024, p. 69)



El constructo teórico “Configuración ontosemiótica de prácticas, objetos y procesos” permite realizar análisis ontosemióticos de la resolución de problemas, enfocado en la identificación de objetos y procesos matemáticos involucrados en cada una de las prácticas elementales implicadas en la resolución. Luego, estos análisis dan lugar a la configuración epistémica de la tarea, siendo la Configuración Epistémica una red de objetos emergentes de sistemas de prácticas y las relaciones establecidas entre ellos (Godino, 2024). En esta comunicación, se presentan sistemas de prácticas involucrados en cuatro resoluciones de una Situación-Problema sobre integral impropia, y el análisis ontosemiótico realizado permite identificar estos objetos y procesos emergentes, posibilitando la propuesta de configuraciones epistémicas basadas en ello, lo cual se considera un aporte a la construcción de un significado de referencia y, por ende, una parte del significado global del objeto integral impropia.

De manera complementaria, se considera la noción de Registro de Representación, caracterizado como cualquier sistema semiótico en el que se pueden realizar “las tres actividades fundamentales ligadas a la semiosis (Duval, 1993, p.3): representación (del objeto), tratamiento (transformación de una representación en el mismo registro) y conversión (transformación cambiando de registro). Esto permite el análisis de las resoluciones en términos del uso de registros gráfico-cartesiano, algebraico y funcional. Asimismo, se considera la noción de Marco (Douady, 1986), entendido como “un dominio de la matemática que está suficientemente bien identificado por sus objetos, por las relaciones entre ellos, y por los tipos de representación y tratamiento que moviliza” (Balacheff, 2005, p.185). En este contexto, la Integral Impropia puede ser entendida desde el marco geométrico -como el área de una región determinada- y analítico (este último conceptualizado explícitamente en Rogalsky (2001)).

En lo relativo a la metodología, dado que el objetivo de este trabajo es contribuir a una caracterización teórica del objeto matemático “Integral Impropia” haciendo uso de herramientas de análisis teórico-metodológicas propuestas por el EOS, esto supone que la metodología de trabajo se encuentra estrechamente relacionada con la propia estructura del sistema teórico que la sustenta. En este sentido, elementos teóricos y metodológicos se encuentran interrelacionados, puesto que la tarea de caracterizar teóricamente orienta el tipo de estudio a ser realizado, a la vez que este último realiza aportaciones que enriquecen el corpus teórico en el cual tiene lugar. Específicamente se ha implementado para el desarrollo de la investigación en proceso, los siguientes procedimientos: (a) Revisión inicial de la literatura, que ha proporcionado algunos referentes antes mencionados en torno al estudio de la Integral Impropia. (b) Elección del problema a analizar, el cual es parte de una guía de problemas de una asignatura de un curso de formación de futuros profesores de matemáticas. El problema elegido (ver Figura 2) incluye en su consigna la “anticipación” sobre la divergencia o convergencia de las integrales en cuestión, lo que conjuntamente con las características de las mismas habilita no solo una amplia gama de resoluciones sino también de argumentos. Asimismo, la diversidad involucrada, incluye el empleo de diversos marcos, registros, propiedades y relaciones. (c) Diseño de las soluciones expertas (desde la perspectiva de los significados institucionales), las cuales son realizadas por los investigadores. (d) Análisis ontosemiótico de las resoluciones, los cuales son también realizados por los investigadores. Tanto las resoluciones como sus análisis se realizan, en el desarrollo de un proyecto de investigación más amplio aún en proceso. (e) Producción de las configuraciones epistémicas basadas en la revisión de la literatura y en los análisis ontosemióticos realizados. (f) Análisis de las configuraciones epistémicas para identificar sus posibles aportaciones al trabajo docente.

RESULTADOS PRINCIPALES

Presentamos en la Figura 2 el problema elegido.

Figura 2

Problema elegido para el análisis ontosemiótico de resoluciones

Anticipar si las integrales siguientes convergen o divergen.

$$\text{a. } \int_{-\infty}^{+\infty} e^x dx \quad \text{b. } \int_{-\infty}^{+\infty} (t^4 + 2t^2) dt \quad \text{c. } \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt[3]{x^2} dx$$

El análisis ontosemiótico se centrará en el ítem b., realizado sobre cuatro resoluciones, a partir del cual no solo se resaltan conceptos, representaciones, argumentos y procesos puestos en juego, sino que se extiende el análisis realizado a los otros ítems.

Resoluciones propuestas y configuraciones epistémicas

Llamaremos a las resoluciones R1, R2 (presentadas en la Tabla 1), R3 y R4 (que, por su extensión, se encuentran disponibles junto a los análisis ontosemióticos de cada resolución en <https://acortar.link/ywjemz>), respectivamente.

R1 es una resolución sintética y formal. R2 se apoya fundamentalmente en el cambio al marco geométrico, aspecto que resulta indisociable del desarrollo del concepto de Integral y de su expresión en diferentes libros de texto (Crisóstomo 2012; González-Martin, 2005; Mateus-Nieves y Font-Moll, 2021). R3 y R4 tienen un carácter predominantemente algebraico, en consonancia con lo identificado por Orton (1983) y Mojica et al. (2021) en las resoluciones de estudiantes.

El análisis ontosemiótico realizado a R1 la enmarca completamente en el marco analítico. Las proposiciones que permiten resolver el problema pueden ser demostradas también en este marco. La estructura y los argumentos empleados se asemejan a una demostración matemática formal. Aunque la idea que subyace a esta resolución es la de la integral impropia como un límite, esto no es

explícitamente empleado. Esta es una resolución adecuada tanto desde el punto de vista de la pertinencia como de la eficiencia para la resolución.

Tabla 1

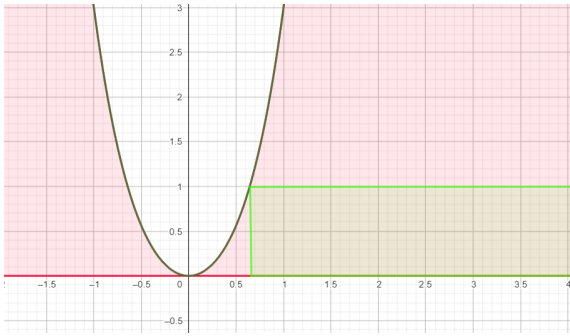
Resoluciones analítica y geométrica

R1: Resolución Analítica	R2: Resolución Geométrica
La función integrada $f(x) = x^4 + 2x^2$ es una función no negativa, ya que está expresada como una suma de términos no negativos. Como la función es de tipo polinómico, es continua en toda la recta real, y su límite en el infinito es infinito. En consecuencia, la integral diverge.	Si la función integrada es no-negativa, la pregunta por si la integral converge o diverge puede ser interpretada como la pregunta por si el área bajo la curva es finita o infinita. Si el área bajo la curva es infinita entonces la integral impropia diverge. La función integrada $f(x) = x^4 + 2x^2$ es una función no negativa, ya que está expresada como una suma de términos no negativos. Para analizar si el área bajo la curva es o no infinita, se produce un gráfico (ver Figura 3) de la misma donde analizar. A partir del gráfico se puede observar que es posible incluir dentro de la región a analizar un “rectángulo infinito”. Como el área bajo la curva es mayor que el área del rectángulo infinito, que es infinita, el área bajo la curva es infinita, por tanto la integral diverge.

El análisis ontosemiótico realizado a R2 permite observar que la positividad de la función posibilita el cambio de marco. Esto habilita la conversión entre el registro simbólico y el gráfico cartesiano, dando lugar a un proceso de materialización y, consecuentemente, al uso de la proposición empleada en la última línea de R2. Todo ello requiere movilizar una red de objetos y procesos de carácter diferente al de R1.

Figura 3

Gráfico de la función integrada en el ítem b., incluyendo un rectángulo infinito (sombreado verde) en la región denotada por la integral impropia (sombreado rojo)



Asimismo, se observa que es posible extrapolar este tipo de argumentos para las integrales propuestas en los ítems a. y c., en la medida en que estos se apoyan esencialmente en el carácter continuo, positivo y no acotado de las funciones integradas, características que son comunes en los ítems mencionados. A partir de las características compartidas por estas resoluciones, se plantea la hipótesis de que esta extrapolación es posible para una clase más amplia de funciones y de problemas. Ello permite proponer las configuraciones epistémicas Analítica y Geométrica, presentadas en la Tabla 2.

Tabla 2

Configuraciones epistémicas: analítica y geométrica

Configuración epistémica analítica (CEAim)	Configuración epistémica geométrica (CEGim)
--	---

Situaciones-Problema: Estudio de la convergencia integrales impropias de tipo I o sobre toda la recta real para funciones no-negativas. Estudio de propiedades generales de integrales impropias. Procedimientos: Analizar la positividad, el carácter acotado o no de la función integrada, y su límite en infinito. Comparación directa con otras funciones. Lenguaje: Funcional, algebraico y analítico. Conceptos: Función, cota, continuidad, límite, orden. Propiedades: Propiedades de la integral (linealidad, aditividad, orden). Criterios de comparación directa de integrales. Argumentos: deductivos.	Situaciones-Problema: Cálculo de integrales impropias para funciones no-negativas, en cuya región pueda incluirse otra de área infinita, o que esté incluida en otra región cuya área es finita. Procedimientos: Analizar la positividad de la función integrada y la posibilidad de incluir regiones infinitas o incluirla en regiones finitas. Lenguaje: Geométrico y funcional. Conceptos: Inclusión de regiones, borde, área, infinito numérico y geométrico. Propiedades: Comparación de áreas entre regiones incluidas unas en otras, aditividad de áreas. Argumentos: visualización, deductivos.
--	---

Los análisis ontosemióticos realizados a R3 y R4 muestran que se caracterizan por el uso de objetos de carácter analítico-algebraico involucrado en el cálculo explícito de $\int_0^{+\infty} (x^4 + 2x^2)dx$ lo que implica resoluciones considerablemente más extensas que las anteriores. Análogamente a lo referido en el caso de R1 y R2, es posible extrapolar el tipo de resolución a los ítems a) y c), toda vez que las funciones integradas tienen primitivas que pueden hallarse en una tabla. En el caso de R3, la argumentación se apoya en una red de conocimientos muy densa, involucrando argumentos y proposiciones considerablemente generales y abstractos como el Teorema Fundamental del Cálculo, la Regla de Barrow, la linealidad del operador integral, entre otros, mientras que R4 se presenta coincidente con R3 a nivel operatorio, pero marcadamente distinta en cuanto al tipo de argumentación, de carácter más bien formal-algorítmico, lo cual guarda coincidencias con el tipo de resoluciones que han encontrado González-Martín (2005), Mojica et al. (2021) y Orton (1983) en sus respectivos estudios. En este sentido, mientras R3 se apoya en un conjunto de argumentos y propiedades generales, para el caso de R4 el propio algoritmo funcionaría autotecnológicamente (Chevallard, 1999, p.225) respecto de la técnica, enfatizando la diferencia a nivel de argumentos entre ambas resoluciones. Como resultado de estos análisis se obtienen las configuraciones epistémicas presentadas en la Tabla 3.

DISCUSIÓN/CONCLUSIÓN

La pertinencia y eficacia de las resoluciones R1 y R2 ha permitido poner de relieve la relevancia del marco analítico y geométrico para la conceptualización de la integral impropia, teniendo en cuenta que la razón de ser del concepto de integral se encuentra íntimamente ligada al problema del cálculo de áreas de regiones de borde curvo (González-Martín, 2005). Los análisis ontosemióticos han conducido a la posibilidad de extrapolación de estas resoluciones a los ítems a. y c. y de esto ha surgido el supuesto de que una clase más amplia de situaciones-problema pueden ser abordadas a partir de considerar este marco (por ejemplo, aquellas cuya función integrada sea continua, positiva y no acotada, para las cuales sea posible comparar sus representaciones gráficas con rectángulos infinitos). Ello ha quedado sugerido en las configuraciones CEAIM y CEGim.

Tabla 3

Configuraciones epistémicas algebraico-analítica impropia y formal-algorítmica impropia

Configuración Epistémica Analítico-Algebraica Impropia (CEAIM)	Configuración Epistémica Formal-Algorítmica Impropia (CEFAim)
--	---

Situaciones-Problema: Cálculo de integrales impropias de funciones con primitiva que se puede obtener mediante técnicas de integración. Procedimientos: Reducir el problema al cálculo de un límite de una integral definida, apelando a relacionar esta última con un proceso de cambio acumulado. Cálculo de primitivas mediante tablas de integrales, método de sustitución y partes. Lenguaje: Algebraico y funcional. Conceptos: Transformación algebraica, función, límite, derivada, integral. Propiedades: Propiedades de la integral (linealidad, aditividad) y del límite. Regla de Barrow. Teorema Fundamental del Cálculo. Argumentos: deductivos.	Situaciones-Problema: Cálculo de integrales impropias de funciones con primitiva obtenible mediante técnicas de integración. Procedimientos: Reducir el problema al cálculo de un límite de una integral definida, apelando para esta última a un procedimiento bien establecido de cálculo. Descomposición de integrales y límites. Lenguaje: Algebraico y funcional (formal) Conceptos: Transformación algebraica, límite, integral. Propiedades: Del proceso de cálculo de límites e integrales. Argumentos: Deductivos y procedimentales.
--	---

Por otra parte, los procedimientos de la CEFAim resultan eficaces para situaciones donde se puede calcular la primitiva de una función, involucrando una menor densidad conceptual y carga cognitiva que los de la CEAAim. De hecho, emplear todos los argumentos de la CEAAim cada vez que debe realizarse una tarea de ese tipo no sería lo más eficiente. Esto habilita la manifestación frecuente de una CEFAim en los procesos de resolución de integrales impropias, lo que coincide con los resultados obtenidos por González-Martín (2005), Mojica et al. (2021) y Orton (1983). No obstante, para la experticia que debe tener el profesorado, se requiere el manejo de ambas configuraciones, puesto que ante una hipotética resolución dada por un estudiante a un problema de integral impropia cuyo procedimiento fuese similar a R4, se podría interpretar que la realiza poniendo en juego la CEFAim, incluso cuando ha hecho un uso no ostensivo de las relaciones, propiedades y argumentos característicos de la CEAAim. En cualquier caso, ante la manifestación de una CEFAim, sería necesario interrogar al resolutor para determinar cuál de las dos configuraciones se ha puesto en juego en sí, puesto que la sola observación del proceso de resolución no informa de manera pertinente al respecto. En este orden de ideas, trabajos similares a los de González-Martín (2005), Mojica et al. (2021) y Orton (1983) podrían realizar con mayor precisión sus conclusiones atendiendo al uso de una u otra configuración epistémica por parte del resolutor. Esto coincide con lo señalado por Burgos et al. (2021, p. 34) al referirse a lo que sucede en las prácticas matemáticas, cuyo análisis no debe reducirse a la sola observación de los conceptos y procedimientos puestos en juego.

El posicionamiento al que conduce hacerse consciente de esta red de objetos permite capturar de manera más fina las diferentes interpretaciones que pueden ser dadas a los procesos de resolución de un problema por parte de un sujeto, las cuales pueden ser reconocidas por medio de sus configuraciones epistémicas. Estas consideraciones permiten enfatizar la complementariedad de este trabajo con respecto al de Mateus-Nieves y Font-Moll (2021), en el que la elaboración de configuraciones epistémicas para el objeto Integral se apoya en la identificación de objetos primarios a partir de una vasta indagación historiográfica, en el que la integral impropia es vista en el marco de una configuración epistémica más general. En esta comunicación se informa específicamente sobre la resolución de un problema, lo cual constituye una mirada particular, minuciosa y -por ende- diferente, respecto del mismo objeto, que es parte del complemento requerido para la producción de un significado global u holístico en torno al objeto Integral Impropia. Más aún, en las cuatro configuraciones epistémicas presentadas se han incluido los diferentes objetos primarios inferidos a partir del análisis ontosemiótico de las prácticas empleadas en las resoluciones propuestas (<https://acortar.link/ywjemz>). A partir de ello, y del análisis desplegado en este trabajo, se observa la incorporación de nuevos objetos primarios en relación con las configuraciones epistémicas propuestas por Crisostomo (2012) y Mateus-Nieves y Font-Moll (2021).

De este modo, dado que el objetivo de realizar un estudio teórico que permita aproximarse a posibles significados parciales del objeto Integral Impropia, las configuraciones epistémicas específicas propuestas permiten tomar en consideración al menos cuatro perspectivas que podrían formar parte de dichos significados parciales: el analítico, el geométrico, el analítico-algebraico y el formal-algorítmico.

Referencias

- Burgos, M., Bueno, S., Godino, J. D. y Pérez, O. (2021). Onto-semiotic complexity of the definite integral. Implications for teaching and learning Calculus REDIMAT–*Journal of Research in Mathematics Education*, 10(1), 4-40. <https://doi.org/10.17583/redimat.2021.6778>
- Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico, *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221-266.
- Crisóstomo, E. (2012) Idoneidad de procesos de estudio del cálculo integral en la formación de profesores de matemáticas: Una aproximación desde la investigación en didáctica del cálculo y el conocimiento profesional. [Tesis de Doctorado, Universidad de Granada], Granada.
- Balacheff, N. (2005). Marco, registro y concepción. *Revista EMA*, 9, 181-204. http://funes.uniandes.edu.co/1498/1/116_Balacheff2005Marco_RevEMA.pdf
- Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 5-31. <https://revue-rdm.com/1986/jeux-de-cadres-et-dialectique/>
- Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, 37-65, IREM de Strasbourg.
- Godino, J. D. (2024). *Enfoque ontosemiótico en Educación Matemática. Fundamentos, herramientas y aplicaciones*. McGraw Hill-Aula Magna.
- González-Martín, A. (2005). La generalización de la integral definida desde las perspectivas numérica, gráfica y simbólica utilizando entornos informáticos: problemas de enseñanza y aprendizaje. [Tesis doctoral, Universidad de La Laguna].
- Mateus-Nieves, E. y Font-Moll, V. (2021). Epistemic Complexity of the Mathematical Object “Integral”. *Mathematics*, 9(19), 2453. <https://doi.org/10.3390/math9192453>
- Mojica, A., Rodríguez, F. M. y Valencia, J. (2020). Understanding of university students about improper integral. *International Journal of Research in Education Methodology*, 11, 36–54. <https://doi.org/10.24297/ijrem.v11i.8681>
- Orton, A. (1983). Students’ understanding of differentiation. *Educational Studies in Mathematics*, 14(3), 235-250.
- Rogalski, M. (2001). Les changements de cadre dans la pratique des mathématiques et le jeu de cadres de Régine Douady. In: *Actes de la journée en hommage à Régine Douady*. IREM Paris 7.