

USOS OPERACIONALES Y RELACIONALES DEL SIGNO IGUAL EN ALUMNADO DE TERCERO DE PRIMARIA EN TAREAS DE IGUALDAD NUMÉRICA

Relational uses of the equal sign in justifications provided by third-grade students working on equalities

Jiménez-Gutiérrez, J.^a, Adamuz-Povedano, N.^a, Fernández-Ahumada, E.^a y Ramos-Rodríguez, E.^b

^aUniversidad de Córdoba, ^bPontificia Universidad Católica de Valparaíso

Resumen

Este trabajo indaga en los usos operacionales y relacionales del signo igual que los estudiantes de tercero de Primaria evidencian en sus justificaciones al trabajar en tareas sobre la estructura de igualdad con expresiones numéricas abiertas y propiedades aritméticas. La muestra está compuesta por un grupo de seis estudiantes elegidos por diversidad en el desempeño matemático, respuestas destacadas y participación activa. Entre otros hallazgos se observó que el alumnado fue capaz de cuestionarse la suficiencia de sus argumentos operacionales según la tarea y, aunque predominaron los usos operacionales, también se identificaron usos relacionales. Esto revela un contexto favorable para avanzar hacia una comprensión relacional del signo igual en cursos anteriores a los que se sugieren en la literatura.

Palabras clave: álgebra temprana, pensamiento algebraico, pensamiento relacional, signo igual, estructura de igualdad.

Abstract

This study delves into the operational and relational uses of the equal sign that 3rd graders show in their justifications. Students needed to develop these justifications working on tasks on the equality structure, in open numerical sentences and observing instantiations of the arithmetical properties. The sample is composed of a group of six students chosen for diversity in mathematical performance, outstanding answers and active participation. Among other results, it was observed that students were able to question the sufficiency of their operational arguments according to the task and, although operational uses predominated, relational uses were also identified. This reveals a favourable context for moving towards a relational understanding of the equals sign in earlier grades than suggested in the literature.

Keywords: Early algebra, algebraic thinking, relational thinking, equal sign, equality structure.

INTRODUCCIÓN

Durante las dos últimas décadas, las sucesivas contribuciones en el marco del *Early Algebra* han permitido que los estudiantes se inicien en prácticas sobre álgebra a partir de edades más tempranas. En España, esto se ha incluido en las últimas modificaciones del Real Decreto ley por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria (2022), pasando de estar reservada la iniciación al álgebra de la etapa de educación secundaria a la de infantil. Adelantar estos contenidos y formas de hacer habituales del álgebra no significa que los estudiantes pasen a utilizar letras para representar números desde el principio (Blanton et al., 2018). Más bien, se persigue asentar una comprensión profunda del concepto de número desde la que se permita hacer natural la transición de un uso concreto de las operaciones y los números hacia formas más generales y abstractas de razonamiento donde el uso de letras como números se incorpore de forma natural a su proceso de

aprendizaje (Stephens et al., 2017). Estas modificaciones curriculares justifican los estudios y propuestas didácticas dentro de esta línea dadas las nuevas necesidades educativas.

Para abordar nuestro estudio consideramos el marco teórico sobre pensamiento algebraico temprano propuesto por Blanton et al. (2018) que presentan según las cuatro prácticas de (i) generalización, (ii) representación de generalizaciones, (iii) justificación de generalizaciones y (iv) razonamiento con generalizaciones. Dichas prácticas derivan de las áreas principales del pensamiento algebraico de Kaput (2008), (i) hacer y expresar generalizaciones utilizando sistemas de símbolos formales y convencionales y (ii) actuando sobre símbolos en un sistema simbólico organizados a través de una sintaxis establecida. Más recientemente, encontramos el trabajo de Kieran (2022) que describe el pensamiento algebraico temprano de forma multidimensional compuesto por las áreas de pensamiento analítico, pensamiento estructural y pensamiento funcional. Ambos marcos explican en algún punto el tratamiento del signo igual y de la forma de interpretarlo que tienen los estudiantes. Blanton et al. (2018) presentan una secuencia didáctica en el mismo trabajo centrándose en las primeras lecciones en el entendimiento del signo igual de forma relacional. Por su parte, en Kieran (2022) se destaca la necesidad de indagar en este campo ya que la forma que se ha visto, tanto en libros de texto como en guías didácticas, de introducir a los estudiantes al uso del signo igual ha sido fundamentalmente instrumental. La comprensión del signo igual desde un sentido relacional se ha vinculado a una comprensión estructural del concepto de las ecuaciones, así como del desempeño en problemas de ecuaciones equivalentes (Knuth et al., 2006).

La pregunta que guía esta investigación es ¿qué usos del signo igual pone de manifiesto el alumnado de tercero de Educación Primaria en tareas sobre estructuras de igualdad y propiedades aritméticas? Así, planteamos como objetivo de este trabajo describir el uso operacional y relacional que mostraron los estudiantes al trabajar estas tareas.

MARCO TEÓRICO

El signo igual, aunque no cuente con una definición unificada (Cañadas, 2023), está relacionado con el conteo, estimación y cálculo, así como el concepto de número y operaciones aritméticas. Permitirse comprender el concepto de número en un sentido amplio deja un espacio abierto a la expresión de este en múltiples formas haciendo uso del signo igual, con el que la relación de equivalencia se sostiene con la igualdad de valor (Rittle-Johnson et al., 2011). En aritmética, las relaciones de equivalencia se establecen por el uso del signo igual y en el caso de mismidad de valor numérico, estaríamos hablando de la igualdad (Bouvier y George, 2000; Molina, 2006).

En el caso de la igualdad en álgebra, Molina (2006) distinguió dos tipos de relaciones: cuando hay una coincidencia del objeto matemático y representante (ej., $1 = 1$) o cuando hay una coincidencia de valor numérico de las expresiones aritméticas como $2 + 5$ y $3 + 4$. La igualdad debe ser vista como un caso específico dentro de la noción de equivalencia donde las expresiones a ambos lados del signo igual se refieren al mismo objeto matemático. Las sentencias numéricas serían expresiones aritméticas que contienen el signo igual y construyen una proposición o argumento declarativo que pueden ser verdaderas o falsas. El uso de igualdades numéricas abiertas y sentencias numéricas fueron sugeridas por Carpenter et al. (2003) para el desarrollo del pensamiento relacional. En Mason et al. (2009) plantean que algunos estudiantes responden sin realizar cálculos aparentes y quizás pensando en casos cercanos o dentro de un rango de posibilidades que les es familiar, de forma que da la impresión de que han interiorizado la generalidad. Estas afirmaciones generales según los autores podrían estar expresando una comprensión estructural limitada. El ejemplo que plantean para las frases numéricas es $173 - 35 + 35 = 173$. Los estudiantes podrían responder sin realizar cálculos y de forma general, pero sugieren que la visión puede estar limitada porque no se hayan enfrentado antes, o no consideren al dar esta respuesta, aquellos casos en los que el número que resta es mayor que el primer número, es decir, los casos en los que $a > b$ en $a - b + b = a$. Otros estudios se han centrado en

cómo lograr una transición firme hacia un pensamiento relacional de manera que los estudiantes estén preparados para ser introducidos a cursos de álgebra más formal.

Para realizar la clasificación de los usos utilizaremos las categorías operacional y relacional basándonos en las definiciones de Matthews et al. (2010). La categoría operacional engloba los niveles operacional rígido y operacional flexible donde los alumnos serían capaces de resolver expresiones con una única operación a la izquierda, en la forma convencional " $a + b = c$ ", o en otras formas no convencionales " $c = a + b$ ". Y la categoría relacional abarca los niveles relacional con apoyo computacional, donde podrían resolver tareas del tipo " $a + b + c = a + _$ ", y relacional sin necesidad de cómputo, donde demostrarán una comprensión de propiedades aritméticas de equivalencia. La principal línea que separa estas dos categorías es que, en la categoría operacional, los estudiantes centran toda su atención en el signo igual como símbolo que "pide" realizar un cálculo. Sin embargo, en la categoría relacional la atención estará puesta en que la operación va a tener que satisfacer además una condición de equivalencia con lo que está al otro lado del signo igual.

Finalmente, en estudios previos se han sugerido diferentes momentos para introducir el sentido relacional del signo igual atendiendo a diferentes momentos del aprendizaje de las matemáticas. El estudio de Rodal y Storeli (2023) plantea introducir el sentido relacional una vez que los estudiantes utilizan el signo igual como indicador de equivalencia; Rittle-Johnson et al. (2011) apuntan a cuando los estudiantes comienzan a comparar ambos lados de una ecuación, que sería hacia quinto grado.

MÉTODOS

Esta investigación sigue un paradigma cualitativo de naturaleza exploratoria y descriptiva. El estudio se lleva a cabo en un colegio público de Córdoba elegido intencionalmente dada la colaboración y disponibilidad de los profesores con los investigadores. Los sujetos de estudio fueron todos los estudiantes de tercer curso ($N=83$) de cuatro clases diferentes. De ellos se extrajo una muestra de seis estudiantes como casos ilustrativos importantes, elegidos según los criterios de homogeneidad, estar en diferentes niveles de desempeño matemático, haber destacado de alguna forma en sus respuestas y razonamientos, y haberse mostrados participativos. Los estudiantes han participado desde el primer curso de Educación Primaria en un programa de desarrollo del sentido numérico, donde el signo igual se ha trabajado a través de diversas tareas como símbolo con polivalencia de significado (lo que queda, lo que falta, el total, resultado de una comparación...) y para construir certezas simbólicas a partir de hechos numéricos manipulando expresiones según las posibles relaciones.

La recogida de datos se llevó a cabo en dos momentos, el primero en una sesión de clase con todo el grupo en una prueba inicial y el segundo, en entrevistas semiestructuradas individualizadas. Ambos momentos de recogida de datos se desarrollaron en el mes de noviembre y en junio del curso académico 2023/2024. Tanto la prueba inicial como las entrevistas se registraron audiovisualmente. El rol de los profesores e investigadores durante la prueba inicial fue de supervisión y, al final, un investigador desarrolló una puesta en común con los estudiantes. La prueba duró aproximadamente 60 minutos, mientras que la puesta en común tomó 15 minutos de otro día. En el caso de las entrevistas, un investigador entrevistaba y al menos uno actuó como observador. El entrevistador guio la entrevista con cada estudiante. La función de la persona que entrevista era facilitar que el estudiante se involucrara en explicar aquello que estaban pensando para acceder a sus razonamientos, donde se hizo uso de fichas complementarias a las tareas que se presentaron. Las tareas que trabajaron los estudiantes durante las entrevistas constaron de seis preguntas extraídas de la prueba inicial. Nos centraremos en dos preguntas que trabajan la estructura de igualdad y propiedades aritméticas que se muestran en la Tabla 1. Una de las preguntas contenía tres tareas que trabajaban la igualdad numérica (Blanton et al., 2018) en sentencias numéricas abiertas (Molina, 2006) con estructuras de adición y multiplicación (Freudhental, 1983) con respuesta cerrada. La otra pregunta contenía seis tareas sobre las propiedades aritméticas de conmutación, elemento neutro, etc. en sentencias numéricas verdaderas (Molina, 2006), en estructuras de adición y multiplicación (Freudhental, 1983), siendo preguntas de

respuesta abierta que permiten trabajar sobre una variedad de casos particulares de las propiedades aritméticas como ejemplificaciones de las propiedades generales (Venkat et al., 2019). Ambas se centran en la práctica de justificación según Blanton et al. (2018).

Tabla 1

Descripción de las tareas extraídas de la prueba inicial para las entrevistas

1. Escribe sobre cada raya los números que hagan que la expresión sea verdadera.	a. $_ + 30 = 34$ b. $30 + 4 = _ + 3$ g. $7 \cdot _ = 0$	
2. ¿Qué se puede observar en las siguientes expresiones? Explícalo.	a. $22 + 3 = 3 + 22$ b. $0 + 20 = 20$ c. $(33 + 2) + 5 = 33 + (2 + 5)$	d. $8 \cdot 5 = 5 \cdot 8$ e. $40 = 40 \cdot 1$ f. $(3 \cdot 5) + (3 \cdot 6) = 3 \cdot (5 + 6)$

La prueba inicial incluía dos preguntas, respondidas por escrito, que se utilizaron posteriormente para guiar la interacción de los estudiantes en las entrevistas. Además, en el momento de las entrevistas, nos ayudamos de unas fichas complementarias que nos permitieron ahondar en sus razonamientos, fomentar la reflexión y permitir la autocorrección, prevaleciendo la respuesta tras la autocorrección. El esquema que se siguió fue dejarles tiempo para que respondiesen por escrito los apartados de la primera pregunta y luego se revisaron sus respuestas con el investigador. Se utilizó una ficha complementaria que mostraba respuestas de compañeros ficticios que eran correctas si habían respondido incorrectamente y viceversa. Esto les permitió argumentar su autocorrección o el error que cometido en las respuestas de estos compañeros ficticios. La pregunta dos se fue analizando apartado por apartado en interacción con los investigadores. Tras la respuesta de los estudiantes, se les mostró otras fichas que incluían ejemplos de las propiedades aritméticas de la pregunta dos. Estos ejemplos combinaban números con figuras, números con letras o solamente números, figuras o letras.

Para analizar los datos, comparamos en una primera fase las respuestas escritas que dieron a la pregunta uno en los momentos de la prueba inicial y luego las de las entrevistas. En este mismo proceso se revisó el registro audiovisual, previamente transcrito, referente a la pregunta uno para asegurarnos de las respuestas finales que dieron los estudiantes. Para el registro escrito de la pregunta uno se utilizó la codificación de respuesta no respondida (NR), incorrecta (I) y correcta (C). Reconocemos que dentro de una respuesta incorrecta puede haber apreciación operacional, u otras, y lo mismo ocurre con las correctas. El registro audiovisual en esta pregunta sirvió para discernir luego el tipo de uso dándose las categorías de no respondida (NR), uso operacional (O), relacional (R) y otras categorías (OC). Entendemos por operacional aquellas respuestas que basen las respuestas en cálculos, y relacional cuando la justificación ponga el foco en otros aspectos de la expresión como el orden, símbolos o signos y conceptos numéricos o propiedades aritméticas donde el cálculo o no está, o solamente se utilizó como apoyo, por ejemplo, para verificar finalmente que el valor operado de las expresiones a ambos lados del signo igual coincide. Utilizamos la misma clasificación para el análisis de las justificaciones tanto escritas como verbales de los estudiantes a la pregunta dos.

RESULTADOS Y ANÁLISIS

Presentamos en esta sección los resultados identificando los usos operacionales y relacionales del signo igual en las respuestas de los estudiantes a las preguntas una y dos de los cuestionarios. Para referirnos a los estudiantes usaremos E1, E2... hasta E6 y para los investigadores que guiaron las entrevistas I1 e I2.

En un primer lugar, se compararon las respuestas escritas que dieron en la prueba inicial con la argumentación final que dieron durante las entrevistas. En la pregunta uno, encontramos que todos los participantes hicieron un uso operacional del signo igual. Solo hubo dos alumnos que el 1.b lo respondieron incorrectamente y en las entrevistas se autocorrigieron. En cuanto a la pregunta dos, es

de destacar que se registraran más justificaciones del tipo relacional en las pruebas escritas que durante las entrevistas. En general, todos llegaron a apreciar el cambio de orden de los números que representaban la propiedad conmutativa tanto para la suma como para la multiplicación. Y en pocas ocasiones utilizaron argumentación relacionada con los cálculos para justificar las tareas. En las otras encontramos que, por un lado, algunos que justificaron en la prueba inicial de forma relacional, en la entrevista dieron solo argumentación centrada en los cálculos. Además, solo se registró un valor del tipo OC durante las entrevistas donde el E2 respondió “es igual” al observar el apartado 2.e. Esta respuesta no se puede clasificar en las categorías que hemos utilizado, y parece que pudiera haberse respondido por azar o sin previa reflexión ya que este alumno se mostró muy callado durante las entrevistas y argumentaba en muchas ocasiones con respuestas tipo sí/no. En los demás casos pudimos codificar en las categorías O y R, lo que podría sugerir que se abandonan niveles inferiores al operacional y podrían comenzar a explorar usos relacionales del signo igual.

El carácter cerrado de la pregunta uno permitió identificar luego en las entrevistas el porqué de los errores, ya que permitió comprobar que todos los que se equivocaron en algún apartado fue debido a un uso operacional. No obstante, aquellos que respondieron correctamente, justificaron también con argumentos operacionales lo que nos lleva a preguntarnos si es porque encuentran más fácil dar argumentos de este tipo o si por el contrario es que tienen interiorizado el signo igual de esta manera. Por otro lado, todos los estudiantes necesitaron autocorregirse en la sección 1.b durante las entrevistas, salvo el E5. Los casos de E1 y E2 son ilustrativos para el tipo operacional.

E1 se autocorrije en 1.b:

- I1: ¿Qué te parece que ha hecho? Ah... ¿Sí? ¿Estás de acuerdo con él?... Cuéntame, ¿qué es lo que has visto?
- E1: Treinta y uno más tres, da treinta y cuatro.
- I1: Porque... ¿tú qué habías hecho antes?
- E1: Treinta y cuatro más tres.

El estudiante 2 reacciona de forma similar:

- I1: Mira aquí. Cuéntame ¿qué has hecho aquí?
- E2: Treinta más cuatro, treinta y cuatro. Sumarle tres.
- I1: Ah. Mira lo que ha hecho otra persona de otra clase. ¿Qué te parece? ¿Está bien o está mal?
- E2: Está bien. [...]
- I1: Porque tú has puesto... ¿a qué equivale? ¿cuánto vale eso? [...]
- E2: Treinta y siete.

Es interesante que todos ellos fueron capaces de encontrar más lógicas o razonables las respuestas dadas por los estudiantes ficticios cuando respondieron incorrectamente. Las expresiones en 1.a y 1.b permitieron detectar usos operacionales del signo igual en las entrevistas. Incluso vimos cómo E4 consideró que en la tarea 1.b a la expresión le faltaba un igual detrás de la expresión y suma de nuevo cuando dijo “el siguiente lo he hecho treinta más cuatro serían treinta y cuatro, pero luego si le sumo este tres me saldrían treinta y siete”. Tras ver la respuesta de sus compañeros y reflexionar, su explicación final fue “que treinta más cuatro serían treinta y cuatro, menos tres serían treinta y uno”.

Para la segunda tarea, ahondaremos primero en el caso de la E4. Respondió operacionalmente a todos los apartados, sin embargo, cuando revisó las fichas con ejemplos de propiedades que también incluían figuras e incógnitas en 2.a y 2.d, fue capaz de identificar rápidamente qué ejemplos de propiedades se parecían más a la de la tarea. Esto podría llevar a pensar que pudo haber una apreciación relacional ya que le bastó una lectura rápida de los ejemplos para responder. Aun así, por sus justificaciones, el caso de esta estudiante parecía ser sólido operacional.

- I2: Y fíjate en esta de aquí. ¿Qué es lo que está pasando?
- E4: Ah. Que treinta y tres más dos son treinta y cinco, con cinco, son cuarenta. Y ahora, dos más cinco son siete y treinta y tres más siete son cuarenta.
- I2: Vale. Y... ¿qué es lo que está pasando? Porque me lo has dicho de formas diferentes. Me has dicho números diferentes, ¿no?
- E4: Pues que de diferentes formas te pueden dar el mismo resultado.
- I2: Pero ¿y por qué hay diferentes? ¿cómo lo has reconocido tú que son diferentes? ¿qué es lo que has visto diferentes? [...]
- E4: [...] Sí. Eh. Bueno. Aquí dos más cinco y aquí en vez de que sean treinta y tres más dos, pues hemos sumado directamente el dos más cinco y después se lo han sumado al treinta y tres.
- I2: Vale. O sea, que lo que has empezado sumando es diferente el uno del otro. ¿Y en qué te has fijado para hacerlo diferente?
- E4: Pues en esta he sumado y en esta he restado.

Esta estudiante computó los números dentro de los paréntesis de forma inconsciente y no fue capaz de determinar lo que le estaba indicando por dónde empezar operando. Hasta que vio las respuestas de sus compañeros. Primero dijo que los ejemplos que más se asemejaban eran los de la ficha que mostraba la propiedad conmutativa, pero cuando vio la que tenía los ejemplos de la asociativa, concluyó que esta última era más similar:

La estudiante confunde la asociativa con la conmutativa:

- I2: ¿En qué se parecen?
- E4: En que están todas sumando, pero está cambiando el orden. Igual que aquí [señala 2.c] [...] Sí, porque treinta y tres más dos, más cinco. Y después, Treinta y tres, más dos más cinco.

Ahora se le muestran ejemplos de la propiedad asociativa:

- I2: ¿Qué ves aquí? En esta de aquí. ¿Se parece más? ¿Se parece menos?
- E4: Esta se parece más. [...]
- I2: [...] Y entonces, ¿qué diferencias encuentras de una a otra por ejemplo?
- E4: En que unas están en paréntesis y otras no.

Observamos algunos casos de respuestas del tipo relacional para la propiedad conmutativa de la suma y multiplicación del E1 “están cambiando los números de sitio” en 2.a en las entrevistas, muy similar a lo que escribió en la prueba inicial. En el caso del estudiante E3, ofreció respuestas tipo relacional en la prueba inicial en 2.b y 2.c a los que respondió “si tiene cero o nada es igual” y “si tiene los números desordenados es igual” respectivamente. El hecho de que luego en las entrevistas ofreciera argumentos operacionales es algo que tener en cuenta.

Durante las entrevistas hemos podido observar que los estudiantes no esperaban que hubiese dos números sumando a la derecha del signo igual en la tarea 1.b. Hubo una alumna que afirmó no haber visto el último sumando y por eso no lo había sumado al principio. En la misma línea, en la tarea 2.e de la prueba inicial la E1 afirmó “que estaba al revés” refiriéndose a que como el resultado aparecía a la izquierda y la operación estaba a la derecha, se había escrito al revés. Esto se vio luego durante las entrevistas en alumnos que podían acercarse a un uso relacional del signo igual, lo que da pistas de que consideran el signo igual de forma operacional o relacional según el caso. La E4 tanto en la prueba inicial como durante las entrevistas pensó que la tarea 1.b estaba incompleta y había que volver a sumar la expresión de la derecha, llegando a añadir un signo igual y un treinta y siete en su respuesta en la prueba inicial. En la entrevista autocorrigió al ver la respuesta de los compañeros ficticios. Al igual que otros estudiantes que respondieron incorrectamente en un principio. Por otro

lado, no se observó ningún caso donde hubiesen respondido correctamente y, posteriormente, hubiesen cambiado su respuesta por la incorrecta de los compañeros ficticios, sino que explicaron el error cometido. Esto nos lleva a preguntarnos ¿por qué han decidido quedarse con la respuesta que es correcta en todos los casos que respondieron incorrectamente? ¿reconocen intuitivamente que la respuesta correcta lo es porque hace que se cumpla la igualdad a ambos lados? Más allá de las tareas de la propiedad conmutativa, vimos una amplia dependencia de estrategias de cálculo para responder a las preguntas. Aunque las fichas incluyesen figuras y letras y pudiesen identificar la ficha de ejemplos que se parecía más a la tarea correspondiente del cuestionario, la estrategia principal que se vio fue la de ir calculando y comprobando a ambos lados. Llamó la atención también el caso del E3, que usó una estrategia que no se vio en los otros participantes. Este estudiante resolvió un ejemplo de la ficha complementaria que trataba la propiedad distributiva de la suma con la multiplicación asignando el valor uno a la figura que se encontraba fuera del paréntesis, esto le facilitó la comprobación de los cálculos a ambos lados del igual.

A modo de resumen, algunas de las estrategias vistas en las respuestas de los estudiantes fueron: sustitución de símbolos por valores numéricos para comprobar veracidad de las propiedades, uso de restas para calcular los valores que faltaban en las sentencias numéricas abiertas, también prestaron atención al orden en que se presentaron los números en las tareas y hubo un caso que, intuitivamente, se fijó en los paréntesis y calculó manteniendo el orden que le indicaban.

En términos generales, encontramos usos tanto operacionales como relacionales del signo igual con mayor peso del operacional. Sin embargo, haber encontrado usos relacionales en tareas concretas y en alumnos de diferente desempeño de nuestra muestra, contrasta con resultados que recogen solo una pequeña minoría maneja un sentido relacional del signo igual en el nivel de tercero, y que se mostraría en mayor medida en cuarto y especialmente en quinto curso de Educación Primaria (Rittle-Johnson et al., 2011). Por otro lado, los resultados obtenidos en nuestro trabajo están en consonancia con lo sugerido por Rodal y Storeli (2023), cuando apuntan que un desarrollo del sentido numérico en etapas tempranas, como los alumnos de nuestra muestra, sería clave para adquirir una comprensión relacional del signo igual.

CONCLUSIONES

El objetivo de este estudio perseguía aportar una descripción detallada de los tipos de usos del signo igual en los estudiantes de nuestra muestra, para dar respuesta a la pregunta sobre cómo son estos usos en los estudiantes de tercero de Educación Primaria. Podemos concluir que el objetivo se ha cumplido satisfactoriamente, donde destacamos como principal resultado haber hallado evidencias de usos relacionales del signo igual en tercero de Educación Primaria. Entre las limitaciones que enfrenta este estudio tenemos que la naturaleza de nuestros datos es de tipo cualitativo únicamente y, además, por el número de participantes no podríamos generalizar nuestros resultados. Esperamos que dichos resultados puedan ser igualmente de utilidad en futuras investigaciones que exploren propuestas específicas y personalizadas orientadas al desarrollo de un sentido relacional del signo igual en los estudiantes, y también aquellos que profundicen en la comprensión de cómo entienden los estudiantes de Educación Primaria el signo igual.

Agradecimientos

Este trabajo se ha realizado como parte del proyecto con referencia PID2020-113601GB-I00, financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033 y participando en el “Programa Erasmus+. Movilidad de Estudiantes de Doctorado a terceros países no asociados (KA171). Curso 2023/24” (estancia en la PUCV del primer autor).

REFERENCIAS

- Blanton, M., Brizuela, B., Stephens, A., Knuth, E., Isler, I., Gardiner, A., Stroud, R., Fornger, N. y Stylianou, D. (2018). Implementing a framework for early algebra. En M. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice* (pp. 27–49). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_2
- Bouvier, A. y George, M. (2000). *Diccionario de matemáticas* (2ª edición). Ediciones Akal.
- Cañadas, M. C. (2023). Una panorámica de las investigaciones sobre pensamiento numérico y pensamiento algebraico. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 3-9). SEIEM.
- Carpenter, T. P., Franke, M. L. y Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Heinemann.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Reidel.
- Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? En J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades*. Routledge.
- Kieran, C. (2022). The multi-dimensionality of early algebraic thinking: Background, overarching dimensions, and new directions. *ZDM—Mathematics Education*, 54, 1131-1150. <https://doi.org/10.1007/s11858-022-01435-6>
- Knuth, E. J., Stephens, A. C., McNeil, N. M. y Alibali, M. W. (2006). Does understanding the equal sign matter? Evidence from solving equations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 37(4), 297-312. <https://doi.org/10.2307/30034852>
- Mason, J., Stephens, M. y Watson, A. (2009). Appreciating mathematical structure for all. *Mathematics Education Research Journal*, 21(2), 10-32. <https://doi.org/10.1007/BF03217543>
- Matthews, P. G., Rittle-Johnson, B., Taylor, R. S. y McEldoon, K. L. (2010). *Understanding the equals sign as a gateway to algebraic thinking* [Resumen]. Society for Research on Educational Effectiveness.
- Ministerio de Educación y Formación Profesional. (2022). Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. Boletín Oficial del Estado (BOE), no. 52, 2 de marzo de 2022. <https://www.boe.es/buscar/act.php?id=BOE-A-2022-3296>
- Molina, M. (2006). *Desarrollo del pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria* [Tesis doctoral, Universidad de Granada] <https://dialnet.unirioja.es/servlet/tesis?codigo=1210>
- Rittle-Johnson, B., Matthews, P. G., Taylor, R. S. y McEldoon, K. L. (2011). Assessing knowledge of mathematical equivalence: A construct-modeling approach. *American Psychological Association*, 103(1), 85-104. <https://doi.org/10.1037/a0021334>
- Rodal, C. y Storeli, S. (2023, July). What can an algebra bridge between number sense and equal sign in early childhood look like? *Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13)*. Alfréd Rényi Institute of Mathematics; Eötvös Loránd University of Budapest. <https://hal.science/hal-04422808>
- Stephens, A. C., Ellis, A. B., Blanton, M. y Brizuela, B. M. (2017). Algebraic thinking in the elementary and middle grades. En J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 386-420). National Council of Teachers of Mathematics.
- Venkat, H., Askew, M., Watson, A. y Mason, J. (2019). Architecture of mathematical structure. *For the Learning of Mathematics*, 39(1), 13-17. <https://www.jstor.org/stable/26742004z>