

ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN DE TAREAS CONTEXTUALIZADAS SOBRE SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN EMPLEANDO GEOGEBRA

Contextualized task-solving strategies on solids of revolution using GeoGebra

Karkour-Afhim, M. y Albanese, V.

Universidad de Granada

Resumen

La integración de las tecnologías emergentes como los Softwares de Geometría Dinámica en entornos formales e informales ha reportado mejoras evidentes al proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría espacial. Desde el enfoque ontosemiótico, se analiza cómo varían las estrategias empleadas por un grupo de estudiantes de un club matemático para resolver unas tareas contextualizadas relacionadas con los sólidos de revolución. Los resultados revelan un cambio hacia un tipo de construcción empírica y una argumentación inductiva a medida que se avanza hacia tareas más complejas y con un mayor grado de generalización, estimulando de este modo la elaboración de conjeturas y la exploración durante la actividad matemática.

Palabras clave: *enfoque ontosemiótico, geometría espacial, software de geometría dinámica, sólidos de revolución, tareas contextualizadas.*

Abstract

The integration of emerging technologies such as Dynamic Geometry Software into formal and informal settings has yielded significant improvements in the teaching and learning process of spatial geometry. Using an ontosemiotic approach, this study analyzes how the solution strategies employed by a group of students in a mathematics club vary when solving contextualized tasks related to solids of revolution. The results reveal a shift toward empirical construction and inductive argumentation as they progress toward more complex tasks with greater degree of generalization, thus stimulating conjecture making and exploration during mathematical activity.

Keywords: *contextualized tasks, dynamic geometry software, ontosemiotic approach, solids of revolution, spatial geometry.*

INTRODUCCIÓN

La utilización en los centros educativos de las tecnologías emergentes como soporte de la actividad docente durante el proceso de enseñanza-aprendizaje hace cada vez más necesario un análisis riguroso del potencial impacto que estas tecnologías de la información (TIC) tienen sobre los discentes cuando son llevadas a la práctica en el aula (Marín-Díaz et al., 2022).

El empleo de Softwares de Geometría Dinámica (SGD) como GeoGebra permite contextualizar el estudio de la geometría espacial, y en particular el estudio de los sólidos de revolución, en situaciones cotidianas de la vida real (Iparraguirre-Villanueva et al., 2024). Su uso, cada vez más extendido en diversos campos (De Sousa et al., 2023), ofrece numerosas ventajas directamente relacionadas con la capacidad de relacionar representaciones digitales y el mundo real mediante el uso de tablets, teléfonos inteligentes u ordenadores (Zhang et al., 2023).

En este sentido, son numerosas las investigaciones que han mostrado los beneficios en el uso de softwares tridimensionales e inmersivos (Santos et al., 2014; Escrivá et al., 2018) puesto que reducen la carga cognitiva de la memoria al fomentar la denominada memoria virtual. En este estudio,

Karkour Afhim, M. y Albanese, V. (2025). Estrategias de resolución de tareas contextualizadas sobre sólidos de revolución empleando GeoGebra. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. 244-251). SEIEM.

emplearemos el Software de Geometría Dinámica GeoGebra 2D y GeoGebra 3D durante el diseño de tareas contextualizadas, siguiendo las indicaciones de Palm (2008) para el desarrollo de tareas auténticas, relacionadas con la construcción de sólidos de revolución y sus desarrollos planos, así como durante el registro de las respuestas producidas por un grupo de estudiantes para su posterior análisis cognitivo (Valori et al., 2022).

El objetivo de este trabajo es analizar la actividad matemática de unos estudiantes al resolver tareas contextualizadas relacionadas con los sólidos de revolución empleando el SGD GeoGebra. Para ello, se plantean las siguientes preguntas de investigación: ¿qué tipo de estrategias surgen para la construcción de sólidos geométricos de revolución empleando SGD en tareas contextualizadas? y ¿cómo varía la naturaleza de la argumentación empleada a medida que avanza el nivel de complejidad de dichas tareas?

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

El enfoque ontosemiótico (EOS) de la actividad matemática aporta de manera integradora una serie de supuestos y herramientas teóricas para el análisis de la actividad matemática, tanto profesional como escolar (Godino, 2024). Entre sus aportes originales, se encuentran tanto los significantes (expresión) de las funciones semióticas como los significados (contenido) que pueden ser objetos tanto ostensivos (materiales) como no ostensivos (constructos). Según esta teoría, en las prácticas matemáticas intervienen diversas clases de objetos (situaciones, lenguajes, conceptos y propiedades, procedimientos y argumentos) y procesos (construcción, modelización, visualización, etc.) (Godino, Batanero y Font, 2007). En esta línea, son numerosos los trabajos que han empleado el enfoque ontosemiótico en la resolución de problemas geométricos llevados a cabo mediante la articulación de secuencias de prácticas (Fernández et al., 2012) y, en particular, en su aplicación en la significación de elementos atribuidos a la geometría espacial (Pochulu, 2010; Sbitena et al., 2010). En el marco del EOS, Blanco et al. (2019) analizaron con 400 aspirantes a maestros las principales dificultades y errores relacionados con los procesos de visualización al resolver tareas de generación de sólidos de revolución, poniéndose de relieve la importancia del tratamiento de actividades que movilicen habilidades de visualización como el reconocimiento de posiciones, las relaciones espaciales y la rotación espacial.

Por otra parte, García y Martínez (2022) observaron un uso extendido por parte de unos estudiantes universitarios de la argumentación inductiva en la generación de nociones sobre el Teorema Fundamental del Cálculo al emplear GeoGebra, asociando el manejo de SGD con el proceso de razonamiento inductivo en la resolución efectiva de tareas. Por el contrario, Larios et al. (2017) diseñaron tareas relacionadas con la geometría del triángulo para alumnado de tercer curso de secundaria observando el uso explícito de habilidades de observación de objetos geométricos y de un razonamiento deductivo.

En este trabajo se emplea el enfoque ontosemiótico como herramienta para analizar y categorizar los procesos de construcción y argumentación en la actividad matemática al resolver tareas contextualizadas sobre sólidos de revolución creados con la herramienta GeoGebra.

METODOLOGÍA

La metodología es cualitativa y exploratoria (Cohen et al., 2002; Sierra, 2011). Participaron 12 jóvenes (codificados a continuación como P1, P2, ...P12) de edades comprendidas entre los 10 y 14 años integrantes de un club matemático que se lleva a cabo en horario extraescolar.

En una fase inicial de diseño, se crearon 5 tareas relacionadas con el estudio de sólidos de revolución, en las cuales se solicita la construcción de ciertos elementos geométricos y una explicación. Para su contextualización a la vida cotidiana se emplearon latas de refresco de capacidad determinada. En una segunda fase experimental, durante una sesión de dos horas, los participantes resolvieron las tareas individualmente frente al ordenador, reservando un momento inicial a la exploración de los

objetos y medición de sus características más relevantes empleando cinta de medir, papel y lápiz. Finalmente, se ha realizado un análisis de las producciones de los participantes, recogidas empleando los applets del SGD GeoGebra como se muestra en <https://www.geogebra.org/m/yzb5ywnx>.

Durante el análisis cognitivo se evaluará la actividad matemática de los participantes considerando como categorías el tipo de construcción empleada (algebraico, icónico, empírica, etc.), el tipo de argumentación empleada (deductivo, inductivo, etc.) e identificando estrategias que combinan un determinado tipo de construcción con un determinado tipo de argumentación, así como las posibles similitudes/discrepancias entre las construcciones emergentes producidas por los participantes y las esperadas, a la luz del EOS (Godino, 2024; Ticse et al., 2023).

Descripción de las tareas y resolución esperada (análisis epistémico)

Inicialmente, se realiza una breve introducción a la problemática de los sólidos de revolución y una contextualización real empleando latas de refresco comerciales de capacidad 330ml que el estudiantado explora manipulativamente. Cabe destacar que las tareas diseñadas, codificadas a continuación como T1, T2, ... T5, se presentan secuenciadas desde un nivel inferior de generalización en la T1 hasta un nivel superior de generalización en la T5.

En T1, las latas de refresco deben encajar en una máquina expendedora cuyo diámetro es de 6cm. La formulación es: *“Construye una vista en 2D de una de las bases de la lata indicando su área y perímetro”*. Posteriormente, se le pregunta sobre el procedimiento seguido durante la construcción. En GeoGebra la expresión algebraica del círculo de centro el origen de coordenadas y radio tres se puede obtener a partir del comando *Circunferencia(punto,radio)*, y la medida de la longitud de la circunferencia y su área puede realizarse mediante el comando *Perímetro(cónica)* y *Área(cónica)*, respectivamente. Sin embargo, se espera que los alumnos también empleen lenguaje icónico para construir la circunferencia , indicando un punto arbitrario como centro y la distancia entre este y otro punto que se considere como radio, y realice mediciones de áreas  y perímetros . La construcción esperada se muestra en la Figura 1.

En T2 se pretende progresar en la visualización de la problemática, pasando de la representación plana a una representación tridimensional. La formulación es: *“Construir una vista 3D de la lata de refresco mostrando su superficie y volumen en dicha vista”*. Para ello, se espera el empleo de la fórmula del volumen del cilindro de capacidad fija (330ml) para obtener su altura. Este cálculo puede realizarse o bien empleando expresiones algebraicas en la interfaz de GeoGebra, o bien empleando lápiz y papel. Una vez hallada dicha altura, se espera la construcción del cilindro (Figura 2) a partir del comando *Cilindro(circunferencia, altura)*, indicando como circunferencia la construida en T1. La medición del volumen puede realizarse, o bien empleando lenguaje algebraico, o bien icónico , y ha de mostrarse en la vista 3D junto al cilindro.

En T3 se presenta una variación, en esta ocasión la dimensión fijada es la altura de las latas de refresco que deben encajar en unas baldas separadas entre sí a 10cm. De este modo, se espera el cálculo, de manera algebraica, del radio del cilindro de volumen fijo (330ml) dada su altura constante igual a 10cm. La construcción esperada se muestra en la Figura 3.

En T4 se pretende dar cuenta del proceso de generalización durante la resolución de situaciones-problemas y se pide: *“Calcula la expresión que relaciona la altura de la lata con el radio de la base. Construye una simulación en 3D donde se aprecie cómo varía la altura del cilindro con el radio”*. Primeramente, se espera obtener la expresión algebraica que relaciona la altura con el radio de un cilindro de volumen constante (330ml). En este caso, se espera la incorporación de un deslizador accesible mediante el icono , el cual permitirá dar valores arbitrarios al radio, variando, en consecuencia, tanto la altura como la superficie total del cilindro. La construcción esperada se presenta en la Figura 4.

Figura 1

Construcción esperada en la Tarea 1

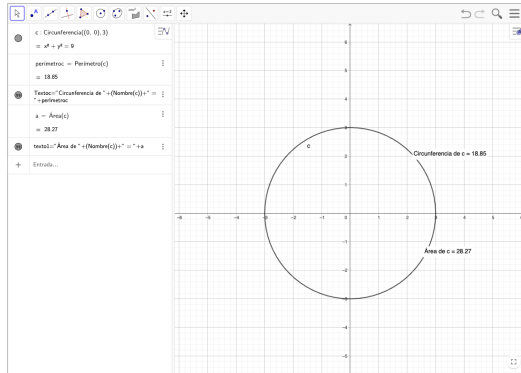


Figura 2

Construcción esperada en la Tarea 2

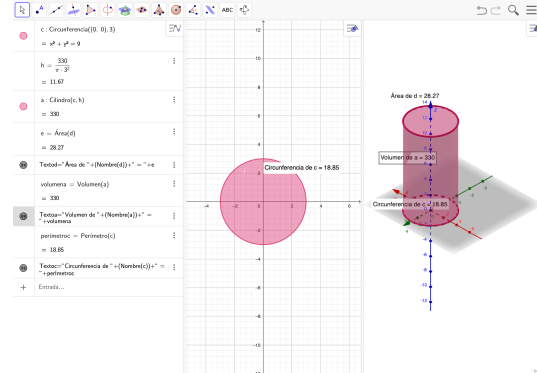


Figura 3

Construcción esperada en la Tarea 3

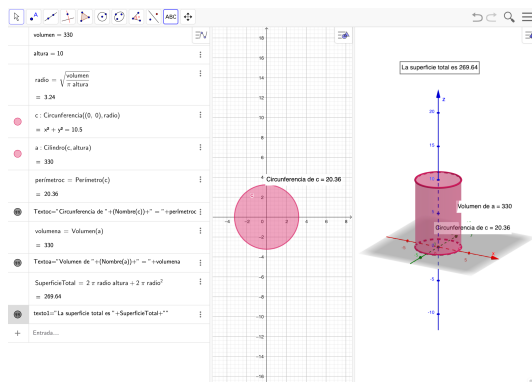


Figura 4

Construcción esperada en la Tarea 4

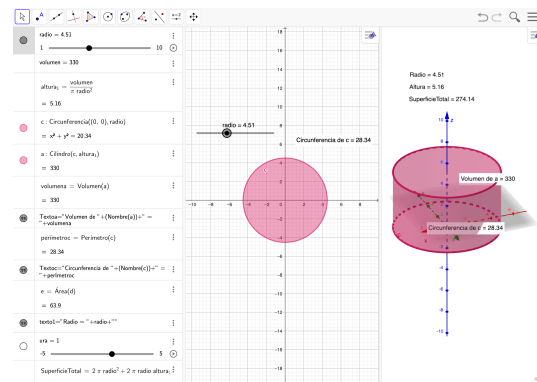


Figura 5

Construcción empírica de la Tarea 5

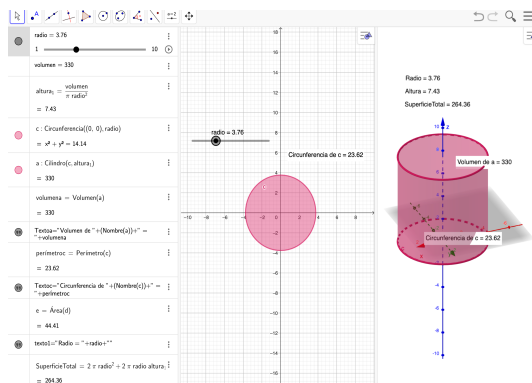
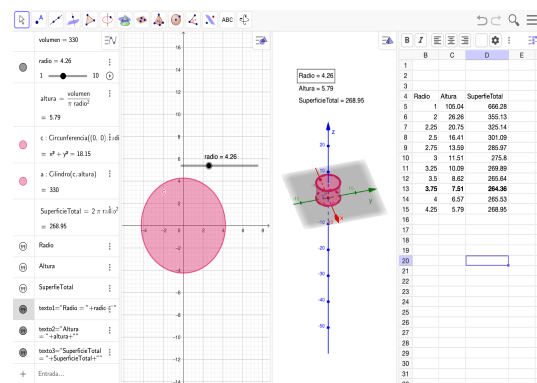


Figura 6

Construcción deductiva de la Tarea 5



Por último, en T5 se pretende optimizar la superficie del sólido de revolución de modo que se emplee la mínima cantidad posible de aluminio en su construcción. En este caso, se espera que se recurra a la tarea anterior para localizar, empíricamente, el cilindro de superficie óptima a partir del valor mínimo (Figura 5). Alternativamente, esta tarea puede realizarse empleando la vista de hoja de cálculo  mostrando una tabulación de los distintos valores de radio, altura y superficie total correspondiente, mostrando entre ellas la mínima posible (Figura 6).

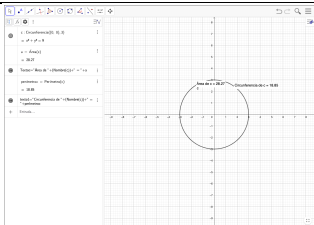
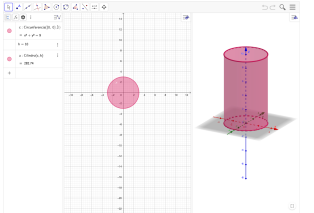
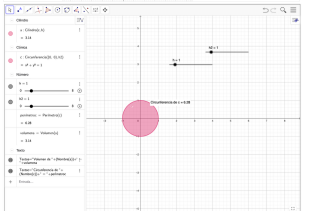
RESULTADOS Y DISCUSIÓN

A continuación, se describen las distintas categorías emergentes basadas en el análisis de las producciones matemáticas del estudiantado atendiendo al proceso *tipo de construcción* (empírica o algebraica) y al objeto *argumentación* (inductiva o deductiva) empleados durante la actividad matemática. La *construcción algebraica* se caracteriza por la utilización de un lenguaje analítico, ya sea en forma de comando, o mediante la expresión algebraica del concepto; a diferencia de la *construcción empírica* que emplea deslizadores que confieren a las variables valores ajustables arbitrariamente. Por otra parte, la *argumentación deductiva* se caracteriza por el empleo de reglas generales que, a partir de premisas bien definidas, llevan a una conclusión determinada, en contraste con la *argumentación inductiva*, que se basa en observaciones específicas para extraer conclusiones generales. Atendiendo a lo anterior, se encontraron en las producciones de los participantes las siguientes estrategias derivadas de la combinación de las categorías apenas descritas:

Estrategia Empírica-Inductiva (E-I): el participante realiza construcciones a partir de la creación de un deslizador para cada variable sin tener en cuenta la relación algebraica existente entre ambas variables, aumentando así el número de grados de libertad en la construcción. El argumento es de carácter inductivo en tanto que, si el valor del radio o la altura son datos de la tarea previa, el participante recurre a su generalización en las tareas siguientes. Una ejemplificación de estrategia que se incluye en esta categoría es la elaborada por P10 en T5.

Tabla 1

Categorización de las producciones matemáticas a partir de la construcción y el argumento

Participante -Tarea	Transcripción del argumento	Construcción	Categoría emergente
P4-T2	“Divido 6cm:2=3cm. Luego he construido primero una circunferencia de 3cm y luego he usado el icono de *medir*”		A-D
P7-T3	“Primero he construido una circunferencia como la anterior y luego construí un cilindro con una altura de 10 cm.”		A-I
P10-T5	“...una dimensión cilíndrica óptima, de la cual he sacado deslizadores para modificar y personalizar ... el cilindro.”		E-I

Estrategia Algebraica-Inductiva (A-I): en esta categoría el participante realiza construcciones a partir de la expresión analítica del concepto, ya sea mediante el empleo de su expresión algebraica o bien empleando su icono. Se emplea un argumento inductivo en la validación de sus resultados, como se muestra por ejemplo en la resolución de P7 a T3.

Estrategia Algebraica-Deductiva (A-D): en esta categoría el participante emplea un argumento deductivo de modo que, partiendo de los datos del enunciado, infiere el resultado de las variables que se piden en una tarea posterior de manera lógica, como se muestra en la resolución de P4 a T2.

Asimismo, en la Tabla 2 se recogen los resultados del análisis de las estrategias empleadas por los participantes en la resolución de cada tarea.

Tabla 2

Estrategias utilizadas por los participantes en cada tarea

Estrategia/Tarea	Tarea 1				
	1	2	3	4	5
E-I				P10	P10
A-I			P7, P9	P4, P7, P9	
A-D	P1-P4, P6-P11	P1-P4, P6, P7, P9-P11	P1-P4, P6, P10, P11	P1	
No contesta/ No concluye	P5, P12	P5, P8, P12	P5, P8, P12	P2-P3, P5, P6, P8, P10-P12	P1-P9, P11-P12

Se observa que en la resolución de la T1 la mayoría de participantes (10 sobre 12) construyó la circunferencia de radio 3 centrada en el origen empleando lenguaje algebraico a partir del comando *Circunferencia (punto, radio)*, argumentando de manera deductiva la obtención del radio a partir del diámetro de las latas, que en este caso coincidía con la ranura de la máquina expendedora (Estrategia A-D). En la explicación empleó un lenguaje icónico en la medición del perímetro y el área del círculo al ser más intuitiva su resolución en el applet de GeoGebra.

En cuanto a T2, los participantes P5, P8 y P12 presentaron dificultades a la hora de representar en el espacio el cilindro de capacidad indicada debido al nivel de generalización de la tarea. En este sentido, los que sí contestaron, emplearon un lenguaje algebraico durante la construcción a partir del comando *Cilindro (circunferencia, altura)* y un argumento deductivo (A-D).

Para resolver T3, algunos participantes emplearon un argumento de carácter inductivo en la validación de sus resultados (P7 y P9), cayendo en el error de suponer que, a pesar de variar la altura, el radio de todos los cilindros permanecía constante. En este caso, durante la construcción se empleó un lenguaje algebraico (A-I) mediante el comando *Circunferencia (punto, radio)*. Sin embargo, tal y como se muestra en la Tabla 2, se observó que la mayoría de los participantes que contestaron emplearon una estrategia A-D en su resolución, obteniendo algebraicamente el nuevo radio a partir de la fórmula que relaciona la altura dada con el volumen constante del cilindro.

En T4, se observó que la mayoría de los participantes que contestaron, lo hicieron utilizando un deslizador que les permitía conferir valores aleatorios a la longitud del radio de la base. A pesar de la incorporación del deslizador, se trata de una construcción algebraica y no empírica, puesto que GeoGebra asigna un deslizador por defecto a cualquier variable sin valores específicos asignados (A-I). En este caso, y a medida que aumentaba la dificultad de las tareas, P10 comenzó a emplear una construcción empírica mediante la incorporación de varios deslizadores induciendo valores a partir de los datos facilitados en la tarea anterior (E-I).

La tarea 5 sólo fue resuelta por P10 que empleó dos deslizadores para expresar la variabilidad tanto del radio de la base como de la altura durante la construcción del cilindro de superficie óptima, sin establecer ninguna relación algebraica entre ambos constructos (construcción empírica). Argumenta de manera inductiva (E-I) induciendo valores a partir de los datos facilitados en la tarea anterior.

Durante este estudio se observó un cambio de estrategia en la actividad matemática de los participantes a medida que se progresaba en el grado de generalización de las tareas (Blanco et al., 2019). En este sentido, cabe notar una tendencia a pasar de una estrategia algebraica-deductiva en las tareas T1 y T2 a una estrategia empírica-inductiva en las tareas T4 y T5, haciendo un mayor uso de las prestaciones que ofrecen los deslizadores del SGD durante el proceso de construcción.

Por otra parte, se observó que al emplear estrategias de razonamiento deductivo se estimuló en mayor medida el pensamiento geométrico, así como el desarrollo de la percepción y la visualización geométrica de los estudiantes gracias a la elaboración de conjeturas y a la exploración durante la argumentación en consonancia con lo expuesto en Larios et al. (2017).

Finalmente, a pesar de que se cuidó la progresión gradual en complejidad durante la presentación de las tareas, fueron varios los participantes que no contestaron o no concluyeron las tareas de mayor complejidad (T4 y T5), observándose un cambio en la naturaleza de la argumentación, por aquellos alumnos que sí contestaron, hacia un tipo de argumentación inductivo (García y Martínez, 2022).

CONCLUSIONES

El objetivo de este trabajo consistía en analizar la actividad matemática de los participantes de un club matemático durante la resolución de tareas contextualizadas empleando GeoGebra. Este objetivo se ha cumplido al diseñar, primeramente, una serie de tareas sobre sólidos de revolución y realizar un análisis de los resultados esperados de la actividad matemática. Finalmente, se estudiaron las producciones matemáticas a partir un análisis cognitivo realizado a la luz del EOS gracias a una categorización emergente basada en la construcción y argumentación.

Este trabajo presenta ciertas limitaciones debido al reducido número de participantes del club matemático, así como el tiempo asignado para la resolución de las tareas. Tampoco se conocía el nivel de familiarización y desenvolvimiento del alumnado con el SGD GeoGebra.

Como propuesta de futuras líneas de trabajo, cabría incluir diferentes sólidos de revolución en el diseño de tareas y analizar las posibles variaciones en términos de construcción y argumentación al incorporar prototipos virtuales elaborados con Realidad Aumentada.

BIBLIOGRAFÍA

- Blanco, T. F., Diego-Mantecón, J. M. y Sequeiros, P. G. (2019). Procesos de visualización en una tarea de generación y representación de cuerpos de revolución. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 33(64), 768-789. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v33n64a16>
- Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2002). *Research methods in education*. Routledge.
- García, D. y Martínez, M. (2022). Uso de GeoGebra y el razonamiento inductivo en un acercamiento al teorema fundamental del cálculo. *REMATEC*, 17 (42), 29–43. DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n42.p29-43.id449.
- De Sousa, R. T. de, Santiago, P. V. da S. y Alves, F. R. V. (2023). Software GeoGebra as a proposal for mathematical modeling problems. *Journal of Research in Science and Mathematics Education*, 2(2), 64–74. <https://doi.org/10.56855/jrsme.v2i2.319>
- Escrivá, M. T., Jaime, A. y Gutiérrez, Á. (2018). Uso de software 3D para el desarrollo de habilidades de visualización en Educación Primaria. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 7(1), 42-62. <https://doi.org/10.24197/edmain.1.2018.42-62>
- Fernandez, B. T., Godino, J. D. y Cajaraville-Pegito, J. A. (2012). An onto-semiotic approach to geometrical reasoning and spatial visualization. *Bolema-Mathematics Education Bulletin-Boletim De Educacao Matematica*, 26(42A), 39–63. <https://10.1590/S0103-636X2012000100004>
- Godino, J. D. (2024). *Enfoque ontosemiótico en educación matemática: Fundamentos, herramientas y aplicaciones*. Aula Magna Proyecto clave McGraw Hill.
- Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39(1-2), 127-135. <https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1>
- Iparraquirre-Villanueva, O., Paulino-Moreno, C., Chero-Valdivieso, H., Espinola-Linares, K. y Cabanillas-Carbonell, M. (2024). Integration of GeoGebra calculator 3D with augmented reality in mathematics

- education for an immersive learning experience. *International Journal of Engineering Pedagogy*, 14(3), 92–107. <https://doi.org/10.3991/ijep.v14i3.47323>
- Larios, O. V., Pino-Fan, L. R. y González, G. N. (2017). Esquemas argumentativos de estudiantes de secundaria en ambientes de geometría dinámica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 12, 39-57.
- Marín-Díaz, V., Sampedro-Requena, B. E. y Vega-Gea, E. (2022). La realidad virtual y aumentada en el aula de secundaria. *Campus Virtuales*, 11(1), 225-236. <https://doi.org/10.54988/cv.2022.1.1030>
- Palm, T. (2008). Impact of authenticity on sense making in word problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, 67(1), 37-58. <https://doi.org/10.1007/s10649-007-9083-3>
- Pochulu, D. M. (2010). Significance attached to the resolution of issues with dynamic geometry software during professional development. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa-Relime*, 13(3), 307–336.
- Santos, M. E. C., Chen, A., Taketomi, T., Yamamoto, G., Miyazaki, J. y Kato, H. (2014). Augmented reality learning experiences: Survey of prototype design and evaluation. *IEEE Transactions on Learning*, 7(1), 38-56. <https://doi.org/10.1109/TLT.2013.37>
- Sbitneva, L., Valdez Delgado, R. y Bulajich Manfrino, R. (Eds) (2010). The Eos-Theory applied to the teaching 3D-geometry course based on the vector algebra approach. En *Edulearn10: International Conference on Education and New Learning Technologies*, pp. 5976-5984. EDULEARN10 Proceedings.
- Sierra, V. M. (2011). Investigación en Educación Matemática: objetivos, cambios, criterios, método y difusión. *Educatio Siglo XXI*, 29(2), 173–198.
- Ticse, M., Salazar, J. V. F. y Vivas-Pachas, J. (2023). Trabajo matemático de estudiantes de secundaria en tareas sobre tasa de variación con el uso de GeoGebra. *PNA*, 17(4), 425-452. <https://doi.org/10.30827/pna.v17i4.24258>
- Valori, G., Giacomone, B., Albanese, V. y Adamuz-Povedano, N. (2022). Approaching Euclidean proofs through explorations with manipulative and digital artifacts. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 55(7), 1535-1566. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2022.2055503>
- Zhang, Y., Wang, P., Jia, W., Zhang, A. y Chen, G. (2023). Dynamic visualization by GeoGebra for mathematics learning: a meta-analysis of 20 years of research. *Journal of Research on Technology in Education*, 57(2), 437-458. <https://doi.org/10.1080/15391523.2023.2250886>