

ANÁLISIS DE RAZONAMIENTOS ABDUCTIVOS POR DOCENTES EN FORMACIÓN: UN ESTUDIO EXPLORATORIO

Analysis of abductive reasoning by preservice teachers: an exploratory study

Arce, M. y Conejo, L.

Universidad de Valladolid

Resumen

La formación inicial de docentes de matemáticas ha de contemplar tareas formativas para revisar y desarrollar un adecuado conocimiento de los procesos de razonamiento y prueba. Se presentan resultados de la implementación con estudiantes para maestro de un experimento de enseñanza sobre la conjetura y demostración del teorema del ángulo inscrito. En concreto, se usa el modelo MTSK (Mathematics Teacher's Specialised Knowledge) y el marco REP (Role of Examples in Proving) para analizar los comportamientos al validar o refutar una posible justificación del teorema, basada en una relación falsa, propuesta como razonamiento abductivo. Se caracteriza el trabajo de cuatro parejas, de las que todas ellas fueron capaces de detectar contraejemplos de la relación con el guion proporcionado, pero solo una pareja evidenció comprender su rol para refutar la misma.

Palabras clave: *estudiantes para maestro, ejemplos y contraejemplos, razonamiento abductivo, MTSK.*

Abstract

The training of pre-service mathematics teachers must include formative tasks to revise and develop an adequate knowledge of reasoning and proving processes. This text presents results from the implementation of a teaching experiment with pre-service teachers on the conjecture and proof of the inscribed angle theorem. Specifically, MTSK (Mathematics Teacher's Specialized Knowledge) model and the REP (Role of Examples in Proving) framework are used to analyse behaviours when validating or refuting a possible justification of the theorem, based on a false relationship, that is proposed as an abductive reasoning. It is characterized the work of four pairs, all of whom were able to identify, with the provided script of questions, counterexamples to the relationship, but only one pair showed an understanding of their role in refuting the relationship.

Keywords: *preservice teachers, examples and counterexamples, abductive reasonings, MTSK.*

INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS

Hay un consenso sobre la importancia de los procesos de razonamiento y prueba en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, como uno de los procesos matemáticos clave (NCTM, 2000), y que se refleja en las competencias específicas en matemáticas que establece el actual currículo de la LOMLOE, también en Educación Primaria (MEFP, 2022). Como detallan Jeannotte y Kieran (2017), los procesos de razonamiento y prueba, que involucran tanto la indagación para detectar y establecer conjeturas como la validación o no de las mismas, ponen en juego muchas acciones y subprocesos distintos que justifican su importancia. En concreto, los razonamientos abductivos son fundamentales como generadores de hipótesis que se deben analizar y evaluar si son válidas o no (Meyer, 2010).

Los docentes tienen un papel fundamental en el diseño, implementación y gestión de actividades sobre los procesos de razonamiento y prueba, en las que existan momentos tanto de generación de hipótesis y conjeturas como de análisis de su validez y de construcción de justificaciones. Modelos como el *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* (MTSK) (Carrillo et al., 2018) destacan la

necesidad de un adecuado conocimiento del docente de las prácticas propias del quehacer matemático. Por ello, para hacer una adecuada gestión de este tipo de actividades, en su formación inicial deben enfrentarse a tareas formativas que permitan revisar y desarrollar ese conocimiento.

Esta comunicación está vinculada a la implementación de una tarea formativa con estudiantes para maestro de Educación Primaria (en adelante, EPM) basada en conjeturar y demostrar el teorema del ángulo inscrito en un entorno de geometría dinámica (Arce et al., 2023). En implementaciones previas, los EPM detectaron, a modo de razonamiento abductivo, una posible relación de distancias entre el ángulo inscrito y su central correspondiente que pudiera explicar la relación angular (Arce y Conejo, 2023), lo que nos llevó a incluir en la tarea un nuevo apartado para que los EPM analizaran la validez o no de esta hipótesis a través de un guion de preguntas. Cómo analizan futuros docentes la validez de posibles hipótesis es una línea de investigación poco explorada, pero este análisis es una habilidad necesaria para gestionar procesos de conjeturación y prueba en el aula. El objetivo de este trabajo es describir y caracterizar comportamientos representativos de EPM al analizar un razonamiento abductivo vinculado al teorema del ángulo inscrito a través de un guion de preguntas.

MARCO TEÓRICO

Dentro de las investigaciones sobre el profesor de matemáticas, una línea principal es la del conocimiento del profesor para poder desarrollar su labor docente (Skott et al., 2018). Skott et al. (2018) presentan varios modelos consolidados. En este trabajo usaremos uno de ellos, el modelo *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* (MTSK, Carrillo et al., 2018), como marco analítico. El MTSK, como otros modelos, distingue dos grandes dominios de conocimiento: el matemático y el didáctico del contenido matemático. En particular, haremos uso de dos de los tres subdominios establecidos dentro del conocimiento matemático, surgidos a partir de tomar como referencia las propias matemáticas; en concreto, el conocimiento de los temas (*Knowledge of Topics*, KoT) y el conocimiento de la práctica matemática (*Knowledge of Practices in Mathematics*, KPM).

El conocimiento de los temas (*Knowledge of Topics*, KoT) se asocia al conocimiento disciplinar de los contenidos matemáticos curriculares (Carrillo et al., 2018). En él se establecen cuatro categorías: las definiciones, propiedades y fundamentos matemáticos; los procedimientos asociados a los contenidos; los registros de representación y la fenomenología y aplicaciones de los contenidos.

El conocimiento de la práctica matemática (*Knowledge of Practices in Mathematics*, KPM) se asocia al conocimiento sobre las propias matemáticas, es decir, de aquellas actividades que, llevadas a cabo de un modo sistemático, suponen un pilar para hacer y construir conocimiento matemático y que conforman una base lógica de la que pueden extraerse reglas (Carrillo et al., 2018). Una de las categorías del KPM es la vinculada a la práctica de demostrar (Delgado-Rebolledo et al., 2022). Dentro de ella, el modelo MTSK incluye tanto el conocimiento sobre cómo desarrollar demostraciones (detección de patrones y regularidades, construcción de conjeturas, rol de ejemplos y contraejemplos) así como el conocimiento de diferentes métodos y tipos de demostración y su validez, y el conocimiento de las funciones de la demostración (Delgado-Rebolledo et al., 2022).

Tanto Meyer (2010) como Jeannotte y Kieran (2017), partiendo de las ideas originales del filósofo Charles S. Pierce, reconocen la existencia de tres grandes tipos de razonamiento en matemáticas: abductivo, inductivo y deductivo. Los razonamientos inductivo y deductivo han recibido mayor atención investigadora que el razonamiento abductivo, cuya caracterización ha evolucionado a lo largo de la historia y desde diferentes aproximaciones (Meyer, 2010). Una concepción amplia de los procesos de razonamiento y prueba, que involucren tanto los procesos de detección y establecimiento de posibles conjeturas como los procesos de desarrollo de una cadena lógica de razonamiento que permita validar o refutar conjeturas, ponen en valor al razonamiento abductivo, que entenderemos aquí como el proceso de formulación de posibles hipótesis que pudieran explicar y justificar una conjetura. Meyer (2010) y Komatsu y Jones (2022) destacan su rol de generación y descubrimiento

de nuevas ideas e hipótesis explicativas que sirvan de punto de partida para poder construir y verificar conocimiento matemático, con la ayuda de razonamientos tanto inductivos como deductivos.

En la fase de análisis de conjeturas y de posibles hipótesis que puedan explicar o no las mismas, juegan un papel muy importante los ejemplos y contraejemplos. Buchbinder y Zaslavsky (2019) proponen el marco REP (*Role of Examples in Proving*), posteriormente refinado por Vallejo-Vargas (2025), para analizar ese rol en la justificación de diferentes enunciados. En concreto, en enunciados universales (del tipo “Todo X es Y”), un ejemplo que satisfaga el enunciado es un ejemplo de apoyo (*supporting example*), que es insuficiente para probar la validez del enunciado (salvo que el dominio sea finito y se comprueben todos los casos); y un ejemplo que no satisfaga el enunciado es un contraejemplo (*counter-example*), que es suficiente para refutar el enunciado.

El marco MTSK recoge, dentro del subdominio KPM, el conocimiento de estos roles como parte del conocimiento que un docente de matemáticas necesita movilizar en el diseño y gestión de tareas con presencia de los procesos de razonamiento y prueba. Así, se hace necesario diseñar e implementar tareas formativas con el objetivo de revisar y desarrollar estos conocimientos durante la formación inicial del profesorado. En particular, en el marco de una tarea formativa vinculada a la relación angular del ángulo inscrito, se diseñó un applet GeoGebra y un guion de preguntas para que los EPM analizasen una posible hipótesis que en implementaciones anteriores de la tarea (Arce y Conejo, 2023) había surgido como posible explicación, a modo de razonamiento abductivo, a la relación angular conjeturada: el ángulo inscrito tiene la mitad de amplitud que su central correspondiente porque el vértice del ángulo inscrito está al doble de distancia del arco subtendido que el centro. Se pretende que los estudiantes, con la ayuda de la geometría dinámica como favorecedora de la producción de contraejemplos (Komatsu y Jones, 2022), puedan refutar la existencia de esta relación de distancias, y a partir de ahí rechazar que esta hipótesis implique el cumplimiento de la relación angular. No obstante, el manejo lógico de la implicación entre hipótesis y tesis al construir justificaciones también es algo complejo y que genera algunas dificultades habituales, como la *negación del antecedente* (considerar equivalente $p \Rightarrow q$ y $\neg p \Rightarrow \neg q$) y la *afirmación del consecuente* (considerar equivalente $p \Rightarrow q$ y $q \Rightarrow p$) (Herrera-Alva y Rodríguez, 2025).

MÉTODO: TAREA FORMATIVA, CONTEXTO Y ANÁLISIS DE LOS DATOS

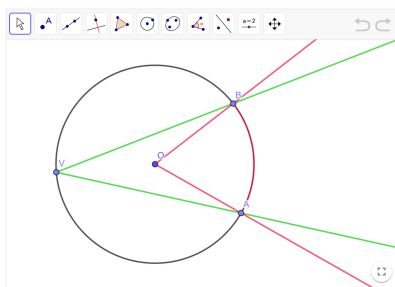
La investigación en la que está inmersa esta comunicación ha seguido una metodología de investigación basada en diseño (Molina, 2021); en concreto, se desarrolla un *experimento de enseñanza*, que consta de una tarea formativa con una secuencia de episodios de enseñanza donde pueden participar un docente-investigador, estudiantes e investigadores-observadores. La tarea formativa completa estaba centrada en el teorema del ángulo inscrito, y se diseñó siguiendo los principios de Lin et al. (2012) para actividades con foco en los procesos de conjeturar y demostrar. En concreto, contaba con dos fases para detectar y conjeturar la relación angular (con lápiz y papel y con GeoGebra). Posteriormente, se incitaba la transición de conjeturar a probar buscando generar la necesidad intelectual de explicar por qué la conjetura podía ser cierta. En la última fase, se buscaba que construyeran una justificación con la ayuda también de GeoGebra y una serie de preguntas guía (más información sobre la tarea formativa en Arce et al., 2023, y en Arce y Conejo, 2023).

En varios ciclos de implementación de la tarea emergió como posible hipótesis la relación de distancias del vértice al arco como posible explicación para el cumplimiento de la relación angular (Arce y Conejo, 2023), pero la estructura de la tarea no explotaba el análisis de estas posibles hipótesis. Buscando superar esto, introducimos una parte nueva en la tarea asociada al análisis de posibles hipótesis, a modo de razonamientos abductivos, que pudieran explicar la relación angular, a través de un applet GeoGebra y un guion de preguntas para guiar el análisis de su validez o no. Nos centramos justamente en la relativa a la relación de distancias, hipótesis que resulta falsa, lo cual buscamos que detecten los EPM a partir de la generación de contraejemplos con GeoGebra.

Esta parte comenzaba con la siguiente afirmación: “La amplitud de un ángulo inscrito es la mitad que la del ángulo central correspondiente porque la distancia entre el vértice del ángulo inscrito y el arco de circunferencia contenido dentro de dicho ángulo es el doble que la distancia entre el vértice del ángulo central correspondiente al ángulo inscrito y dicho arco”, y en la primera pregunta (P1) se pedía contestar si creían que era cierta y por qué. Debajo, se situaba un applet GeoGebra (ver Figura 1), denominado Applet 1, en el que podían explorar la relación, crear puntos nuevos, medir, etc.

Figura 1

Imagen inicial del Applet 1 que acompaña la afirmación que deben explorar para validar o refutar



Tras ello, se les planteaban las siguientes preguntas para orientar la exploración hacia la refutación de dicha afirmación y de la hipótesis que contiene, a través de la búsqueda de contraejemplos:

- (P2) Basándote en el Applet 1, ¿cómo medirías la distancia que hay del vértice O del ángulo central correspondiente al arco de circunferencia contenido dentro del ángulo AOB? ¿Es siempre la misma? Explica tu razonamiento.
- (P3) De acuerdo con tu respuesta a P2, escribe ejemplos de las mediciones que puedas hacer del vértice O al arco de circunferencia contenido dentro del ángulo AOB.
- (P4) Basándote en el Applet 1, ¿cómo medirías la distancia que hay del vértice V del ángulo inscrito al arco de circunferencia contenido dentro del ángulo AVB? ¿Es siempre la misma? Explica tu razonamiento.
- (P5) De acuerdo con tu respuesta a P4, escribe ejemplos de las mediciones que puedas hacer del vértice del ángulo inscrito V al arco de circunferencia contenido dentro del ángulo AVB.
- (P6) Teniendo en cuenta el análisis realizado, contesta a las siguientes preguntas: ¿Es cierta la Afirmación 1? ¿Por qué?

La tarea formativa se planteó en un grupo de 38 EPM, en una asignatura del Grado en Educación Primaria de 2.º curso, sobre geometría y su didáctica, en la primera parte de la asignatura. Los estudiantes contaron con 100 minutos para la tarea completa, destinando unos 15 minutos para la parte que aquí se describe. Los EPM conocían y habían usado GeoGebra en la asignatura, y habían trabajado en clase los diferentes tipos de ángulos en la circunferencia, pero no sus relaciones angulares. No hubo instrucción previa sobre procesos de razonamiento y prueba en esta asignatura. Durante la tarea, los EPM trabajaron en parejas, y los datos se recogieron mediante GeoGebra Classroom, lo que permitía tener las respuestas escritas a cada una de las preguntas planteadas, así como el resultado final de la manipulación del Applet 1 de cada pareja de EPM. Se aplicó una metodología de análisis de contenido para el análisis y la verificación de los contenidos de datos escritos. Las producciones de cada EPM fueron analizadas por ambos autores, para identificar elementos de conocimiento movilizados en cada pregunta del guion propuesto (aplicando el marco MTSK), así como el uso que realizan de los ejemplos y contraejemplos (con la ayuda del marco REP), con el fin de caracterizar los comportamientos de las diferentes parejas de EPM. Tras ello, se compartieron los resultados hasta llegar a un consenso en la descripción, caracterización e interpretación de lo desarrollado por cada pareja de EPM.

RESULTADOS: COMPORTAMIENTOS DE EPM ANTE UNA AFIRMACIÓN FALSA

De las 19 parejas, 14 respondieron que la afirmación era cierta en P1, y solo 6 de ellas refutaron la afirmación tras la experimentación guiada. Se muestran los resultados del análisis de las respuestas, utilizando los marcos MTSK y REP, de cuatro parejas (se usan seudónimos) de EPM, seleccionadas por su riqueza y representatividad dentro de los comportamientos detectados en el análisis del razonamiento abductivo proporcionado, al refutarlo o al expresar que mantienen su validez.

Caso de Leonor y Laura

Esta pareja de EPM responde a P1 indicando que la afirmación es cierta, con esta justificación:

Leonor y Laura: Sí porque el ángulo central empieza desde el centro de la circunferencia, entonces la distancia hasta el arco del ángulo central es el radio mientras que la distancia del ángulo inscrito es la diagonal, por lo que al estar más cerca el central su apertura es mayor con lo cual su ángulo es más grande que el inscrito cuya distancia es el doble y la amplitud del ángulo es la mitad al igual que su distancia que es el doble, es decir, es lo contrario.

La pareja identifica la distancia entre centro y arco como el radio (KoT movilizado: definiciones) y parece reconocer la distancia entre vértice del ángulo inscrito y arco como un diámetro, aunque lo llaman “diagonal” (debilidad del KoT: definiciones), lo que les lleva a reformular la afirmación propuesta añadiendo, con la expresión “es lo contrario” y su mención al doble-mitad, un patrón de proporcionalidad inversa entre distancia y amplitud angular (KPM movilizado: detección de patrones y regularidades). En P2 y P3, la pareja remarca que la distancia centro-arco es la misma al ser el radio de la circunferencia y no cambia al movernos sobre ella (KoT movilizado: definiciones, propiedades), pero precisan del respaldo de los ejemplos para asegurarse (“Para averiguar si estamos en lo cierto de que siempre mide lo mismo, hemos medido la distancia del vértice OA y la del vértice OB y, en ambas, nos sale 3,5 [...]”). Esto es una debilidad del KPM (rol de los ejemplos y contraejemplos) si se usa el ejemplo no como ejemplo de apoyo sino para complementar la validación de la afirmación.

En P4, la pareja, marcando en el Applet 1 las medidas de los segmentos VA (6,69 cm) y VB (6,71 cm), se da cuenta de que dependiendo de dónde estén el vértice del ángulo inscrito (V) y los lados del ángulo inscrito, esa distancia varía: “vemos que no es la misma debido a que influye dónde esté colocado cada lado del ángulo inscrito y no tiene por qué ser el mismo ya que no pasa por el centro y, por tanto, no es ni radio ni diagonal”. La pareja plasma únicamente los ejemplos de VA y VB para concluir que la distancia vértice-arco no se mantiene, lo que puede mostrar una fortaleza del KPM en relación con el uso de ejemplos y contraejemplos al considerar que con esos dos ya es suficiente. Tras contestar a estas preguntas, la pareja indica en P6 que la afirmación inicial no es correcta (“ya que hemos comprobado que la distancia de los vértices AVB y los vértices AOB no están relacionados entre sí”), al haber refutado la hipótesis de la relación de distancias con los contraejemplos detectados. El guion de preguntas planteado y el hecho de que la pareja comprenda que, si se encuentran contraejemplos de una afirmación, entonces dicha afirmación es falsa, ha servido para que refuten la afirmación dada inicialmente tras haber dicho en un principio que sí era correcta (fortaleza en el KPM: rol de ejemplos y contraejemplos), mostrando al final un rol alineado con el marco REP.

Caso de Úrsula y Aroa

Esta pareja escribe en P1 que cree que la afirmación es cierta, aunque en su respuesta tan solo aluden a la relación de distancias, y no a su vinculación con la relación angular: “Sí es cierta, ya que si medimos las distancias una es el doble de la otra”. En P2 y P3, la pareja afirma que la distancia del centro O al arco es siempre la misma, al ser el radio y justificándolo a partir de la definición de circunferencia (“Sería siempre la misma, ya que la medida del radio nunca cambia en una misma circunferencia, todos los puntos de una circunferencia están a la misma distancia del radio”), por lo que se movilizan adecuadamente los conocimientos necesarios (KoT movilizado: definiciones, propiedades; KPM movilizado: conocimiento de métodos y tipos de demostración y su validez).

Al pasar a la distancia del vértice del ángulo inscrito al arco, en P4 la pareja propone crear el diámetro que pasa por V y O para medir esa distancia, e indica que, si se usa el diámetro para ello, la distancia se mantendrá (KoT movilizado: definiciones, propiedades). Sin embargo, al solicitarles ejemplos de mediciones en P5, indican que: “De acuerdo con nuestra respuesta anterior [la respuesta en P4], solo existe una única opción, ya que el diámetro no tiene la misma medida que los segmentos VA y VB” tras marcar en el applet el segmento VA y su distancia (6,69 cm, distinta a los 7 cm que mide el diámetro, también marcado). Es decir, la pareja detecta segmentos de V al arco de menor amplitud que el diámetro, pero no detectan su rol como contraejemplos de la medición constante a través del diámetro y parecen descartarlos, manteniendo su respuesta en P4 (debilidad del KPM movilizado: rol de ejemplos y contraejemplos). Esto se aprecia de nuevo al final, con su respuesta en P6: “Sí, ya que el radio cuya medida es 3,5 cm es la mitad que la medida del diámetro que es 7 cm”.

En esta pareja, el KPM movilizado no se alinea con el marco REP (Buchbinder y Zaslavsky, 2019) mostrado en el marco teórico. La pareja mantiene su creencia inicial, sin cambiarla tras completar el guion de preguntas, usando el ejemplo del diámetro no como ejemplo de apoyo sino como ejemplo que justifica su afirmación. Además, no consideran los contraejemplos obtenidos (distancias VA y VB) como casos que refutan que la distancia de V al arco sea igual al diámetro, sino que los dejan fuera de su argumentación y no parecen darles valor frente a los ejemplos de apoyo.

Caso de Aitana y Lidia

Esta pareja contesta en P1 que la relación de distancias es cierta, basándose en la comprobación, a través de la medición, de algunos ejemplos en papel contruidos en la primera fase de la tarea formativa. Esta respuesta evidencia una debilidad en el KPM movilizado (diferentes métodos y tipos de demostración y su validez), al considerar los ejemplos como medio para validar la hipótesis. En P2 y P3, esta pareja afirma que la distancia centro-arco es siempre la misma al ser una circunferencia (KoT movilizado: definiciones, propiedades) y reflejan varios ejemplos en el Applet 1, creando tres puntos sobre el arco y los segmentos correspondientes. En dicho applet, esta pareja también ha creado otros tres puntos sobre el arco para dibujar las cuerdas que los unen con V (KoT movilizado: procedimientos), lo que les permite afirmar que las distancias vértice-arco no se mantienen porque el vértice no está en el centro de la circunferencia. Sin embargo, en P6 escriben:

Aitana y Lidia: Sí que es cierta, porque la amplitud del ángulo inscrito es la mitad del ángulo central correspondiente por lo que la distancia del vértice del ángulo inscrito al arco de la circunferencia es el doble que la distancia del ángulo inscrito al arco de la circunferencia.

Esta pareja no solo no ha interpretado adecuadamente el rol de los ejemplos tomados en P4 y P5 como contraejemplos de la afirmación planteada, sino que sigue indicando que es cierta y al justificarlo invierte el sentido de la implicación (error de *afirmación del consecuente*, Herrera-Alva y Rodríguez, 2025). Inferimos, a partir de su comportamiento inicial, que pueden estar considerando como justificada la relación angular del ángulo inscrito a partir del proceso realizado previamente en la tarea formativa de conjeturar esta relación y comprobarla con GeoGebra (debilidad del KPM: rol de ejemplos y contraejemplos, diferentes métodos y tipos de demostración y su validez).

Caso de Miriam y Leila

En la pregunta P1, esta pareja cree que es válida la afirmación, puesto que encuentra sentido a la relación planteada entre la hipótesis (relación de distancia) y la tesis (relación angular): “Sí, ya que tiene sentido que al estar el vértice más lejos, el ángulo sea menor, y si está el doble de lejos pues el ángulo será justo la mitad de pequeño”. En P2, la pareja afirma que la distancia del centro a cualquier punto del arco es siempre la misma por ser el radio de una circunferencia (KoT movilizado: definiciones, propiedades; KPM movilizado: conocimiento de métodos y tipos de demostración y su validez). En P3 añaden tres ejemplos de apoyo para lo afirmado en P2 (distancias OA, OB y OC iguales a 3,5 cm), aunque no están explícitamente marcadas esas distancias en el applet.

En la pregunta P4, la pareja describe lo que hace con GeoGebra para poder obtener la distancia del vértice al arco, a través de algún punto del arco (KoT movilizado: procedimientos): “Creamos un segmento desde V hasta un punto del arco para que al calcular la medida no seleccione la medida del arco”. Entre esta pregunta y P5, la pareja recoge la medición de cuatro segmentos ($VA = 6,69$ cm, $VB = 6,71$ cm, $VC = 6,94$ cm, $VD = 6,98$ cm), obtenidos con diferentes puntos del arco (extremos y puntos interiores). Sin embargo, no añaden nada más a su respuesta a estas preguntas, y en la pregunta final P6 indican que “Mantenemos nuestra opinión al respecto”. Es decir, el guion de preguntas no ha servido a la pareja para avanzar en el análisis del razonamiento abductivo planteado, puesto que no evidencian interpretar el rol que tienen los ejemplos obtenidos en P5 como contraejemplos de la hipótesis proporcionada (relación de distancias al arco), sobre la cual mantienen su impresión de que la explicación que aporta esta hipótesis tiene sentido para ellas. Esto supone una debilidad del KPM movilizado sobre el rol de los ejemplos y contraejemplos en los procesos de razonamiento y prueba.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En esta comunicación se muestran ejemplos de uso del marco REP, vinculado a la epistemología de las propias matemáticas, para complementar y refinar el uso analítico del marco MTSK (en particular, de su subdominio KPM, Delgado-Rebolledo et al., 2022) dentro del conocimiento del rol de ejemplos y contraejemplos en la práctica de demostrar. En particular, el fragmento de tarea formativa aquí analizado buscaba el análisis por EPM de una hipótesis de distancias que resulta falsa, para lo cual el rol de los contraejemplos resultaba crucial. En esta investigación se constata, como en Komatsu y Jones (2022), el potencial del entorno de geometría dinámica como facilitador del análisis y búsqueda de contraejemplos. Sin embargo, mientras que el estudio de Buchbinder y Zaslavsky (2019) con estudiantes de secundaria mostró que la interpretación del rol de los contraejemplos resultó ser una fortaleza para gran parte del alumnado, en este estudio varias parejas de EPM (como las de Aitana y Lidia, Úrsula y Aroa, Miriam y Leila) mostraron dificultades para interpretar el rol de los contraejemplos encontrados para poder refutar la posible hipótesis explicativa, lo que impacta en el efecto de esta parte de la tarea formativa frente a otras parejas de EPM (como Leonor y Laura) que sí aplicaron adecuadamente ese rol para revisar su concepción inicial sobre la validez de la hipótesis.

No obstante, las tres parejas mostradas con debilidades para interpretar el rol de los contraejemplos mostraron comportamientos diferentes en la pregunta P6, que pueden también estar relacionados con la mayor dificultad lógica de la situación global, en la que se busca refutar una posible hipótesis explicativa de la relación de distancias, a modo de razonamiento abductivo, pero no la propia tesis de del teorema del ángulo inscrito. En dos de ellas, interpretamos que el rol de los ejemplos no como ejemplos de apoyo sino como ejemplos que validan el resultado (dificultad persistente en los procesos de razonamiento y prueba, como indican Buchbinder y Zaslavsky, 2019; y Arce y Conejo, 2023) puede provocar esas dificultades. En un caso (Úrsula y Aroa), parece darse más valor a esos ejemplos de apoyo que a los contraejemplos. En otro (Aitana y Lidia), el error de afirmación del consecuente que cometen puede provenir de entender que la tesis de la relación angular ya está justificada a partir del trabajo empírico previo en la tarea formativa, e invierten el rol de hipótesis y tesis.

Por último, una tercera pareja (Miriam y Leila) no cambia en nada su respuesta sobre la validez de la afirmación antes y después de desarrollar el guion de preguntas, indicando que “tiene sentido” que la relación de distancias explique la relación angular y manteniendo su opinión aunque detectaran contraejemplos en las preguntas previas. Esta pareja puede estar dando más valor a tener una posible hipótesis explicativa para la tesis que a verificar su validez, un comportamiento también detectado en Arce y Conejo (2023) en una pareja que propuso la relación de distancias como posible explicación.

Agradecimientos

El trabajo está vinculado a la red MTSK, red de investigación de la AUIP, y ha sido apoyado por el Ministerio de Ciencia e Innovación de España (Referencia PID2021-122180OB-I00).

Referencias

- Arce, M. y Conejo, L. (2023). Comportamientos de estudiantes para maestro al enunciar razonamientos abductivos. En C. Jiménez-Gestal, A. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 139-146). SEIEM.
- Arce, M., Conejo, L. y Flores-Medrano, E. (2023). Knowledge mobilised in a teaching experiment about conjecturing and proving by elementary preservice teachers. En P. Drijvers, C. Csapodi, H. Palmér, K. Gosztonyi y E. Kónya (Eds.), *Proceedings of the Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13)* (pp. 3695-3702). Alfréd Rényi Institute of Mathematics y ERME.
- Buchbinder, O. y Zaslavsky, O. (2019). Strengths and inconsistencies in students' understanding of the roles of examples in proving. *The Journal of Mathematical Behavior*, 53, 129-147. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2018.06.010>
- Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 20(3), 236-253. <https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981>
- Delgado-Rebolledo, R., Zakaryan, D. y Alfaro-Carvajal, C. (2022). El conocimiento de la práctica matemática. En J. Carrillo, M. A. Montes y N. Climent (Eds.), *Investigación sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK): 10 años de camino* (pp. 57-69). Dykinson. <http://doi.org/10.14679/1454>
- Herrera-Alva, J. G. y Rodríguez, A. (2025). Trayectoria hipotética de aprendizaje sobre la inferencia lógica negación del antecedente. *Enseñanza de las Ciencias*, 43(1), 119-138. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.6046>
- Jeannotte, D. y Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 96, 1-16. <https://doi.org/10.1007/s10649-017-9761-8>
- Komatsu, K. y Jones, K. (2022). Generating mathematical knowledge in the classroom through proof, refutation, and abductive reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 109, 567-591. <https://doi.org/10.1007/s10649-021-10086-5>
- Lin, F-L., Yang, K-L., Lee, K-H., Tabach, M. y Stylianides, G. (2012). Principles and task design for conjecturing and proving. En G. Hanna y M. de Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education* (pp. 305-325). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-2129-6_13
- Meyer, M. (2010). Abduction—A logical view for investigating and initiating processes of discovering mathematical coherences. *Educational Studies in Mathematics*, 74, 185-205. <https://doi.org/10.1007/s10649-010-9233-x>
- Ministerio de Educación y Formación Profesional (MEFP) (2022). *Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria*. Autor.
- Molina, M. (2021). Investigación de diseño educativa: un marco metodológico en evolución. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 83-97). SEIEM.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and standards for School Mathematics*. Autor.
- Skott, J., Mosvold, R. y Sakonidis, C. (2018). Classroom practice and teachers' knowledge, beliefs and identity. En T. Dreyfus, M. Artigue, D. Potari, S. Prediger y K. Ruthven (Eds.), *Developing research in mathematics education: Twenty years of communication, cooperation and collaboration in Europe* (pp. 162-180). Routledge.
- Vallejo-Vargas, E. A. (2025). The role of examples in proving and disproving: extending an existing framework. *Educational Studies in Mathematics*, 119, 101-116. <https://doi.org/10.1007/s10649-024-10378-6>