

INTRODUCCIÓN AL LOGARITMO COMO MEDIDA DE LAS CIFRAS DE UN NÚMERO

Introduction to logarithms as counting the number of digits

Martín-Barcala, A., González-Astudillo, M. T. y Molina, M.

Universidad de Salamanca

Resumen

Tradicionalmente, el logaritmo se introduce como la inversa de la exponencial, lo que puede generar dificultades. Presentamos una sesión sobre el logaritmo como medida de las cifras de un número, con estudiantes de cuarto de ESO, aportando evidencia empírica sobre su efectividad. El análisis, basado en el marco teórico-metodológico Abstracción en Contexto, identificó las acciones epistémicas durante las actividades. Los resultados muestran que este modelo básico facilita la comprensión y funcionamiento de la escala logarítmica, aunque los estudiantes lo asimilan más como una propiedad del logaritmo que como una definición central.

Palabras clave: concepto, logaritmo, AiC, modelos básicos.

Abstract

Traditionally, logarithms are introduced as the inverse of exponentials, which can create difficulties. This study presents a session where students construct the concept of a logarithm as a measure of a number's digits, providing empirical evidence of its effectiveness. The analysis, based on the Abstraction in Context framework, identified epistemic actions during the activities. The results show that this approach enhances the understanding of the logarithmic scale, though students tend to perceive it more as a property of logarithms rather than a core definition.

Keywords: concept, logarithm, AiC, basic models.

INTRODUCCIÓN

El logaritmo, creado para simplificar cálculos astronómicos, fue vinculado con la exponenciación por Euler en 1765, lo que facilitó su operatividad. Esta definición prevalece en la educación secundaria y se puede encontrar en muchos de los libros de texto actuales (Martín Barcala et al., en prensa).

Pese a su importancia, muchos estudiantes lo consideran difícil de entender y a menudo no logran su comprensión (DePierro et al., 2008) mostrando errores comunes en su manejo, desde confusiones con conocimientos previos hasta mal uso de sus propiedades (Aziz et al., 2017; Hoon et al., 2010).

La definición de logaritmo como inversa de la exponencial puede contribuir a estas dificultades, llevando a un aprendizaje memorístico (Weber, 2016). Para mitigar esto, se han propuesto enfoques alternativos. Panagiotou (2011) sugiere una aproximación histórica para mostrar que los logaritmos no son arbitrarios, sino respuestas a problemas concretos, mientras que Weber (2016) aboga por un enfoque basado en múltiples interpretaciones conceptuales. Sin embargo, la propuesta de este último se hace a nivel teórico y es necesario contrastar con evidencias empíricas sus afirmaciones.

Según el currículo vigente de Matemáticas de Castilla y León, el logaritmo se introduce por primera vez en 4º de Educación Secundaria, con alumnos de 15-16 años. En este contexto, buscando profundizar en las vías de aprendizaje del logaritmo en su primer contacto educativo, se pretende responder a la siguiente pregunta de investigación: ¿Qué acciones epistémicas tienen lugar en el proceso de construcción del concepto de logaritmo a partir del modelo básico como medida de las

cifras de un número? Para ello, se plantea como objetivo identificar dichas acciones epistémicas en una sesión diseñada para alumnos de 4º de Educación Secundaria.

MARCO TEÓRICO

Este estudio se basa en dos conceptos clave: los Modelos Básicos (Weber, 2016) y la Abstracción en Contexto (Hershkowitz et al., 2001). Los Modelos Básicos nos permiten favorecer la comprensión del logaritmo al adaptarse a los conocimientos y la experiencia previa de los estudiantes, lo que facilita su accesibilidad. A partir de estos modelos, se han diseñado tareas que promueven la construcción del concepto. Por otro lado, la Abstracción en Contexto permite examinar cómo los alumnos desarrollan y estructuran su comprensión del logaritmo a lo largo del proceso de aprendizaje.

Modelo básico como medida del número de cifras de un número

Vom Hofe y Blum (2016) describen los “modelos básicos” como representaciones mentales viables y robustas que permiten captar conceptos y procedimientos matemáticos tal como están representados en el ámbito mental. Este constructo, también denominado “ideas básicas” o “imágenes individuales” (Vom Hofe, 1998), describe interpretaciones estándar de conceptos matemáticos. No obstante, Vom Hofe (1998) destaca una visión empírica basada en cómo los estudiantes comprenden y aplican estos conceptos, identificando tres aspectos clave: vincular el significado del concepto con experiencias previas, generar una representación mental operativa e identificar su aplicación en contextos reales mediante estructuras matemáticas.

Al no haberse descrito previamente, en la literatura al respecto, modelos básicos para el logaritmo, Weber (2016) identifica cuatro conceptualizaciones entre las que, para los propósitos de esta comunicación, destacamos la siguiente:

(BM2) El logaritmo (decimal) de un número b indica el número de dígitos de b , menos uno.

Para Weber (2016), el potencial de este modelo básico radica en la posibilidad de responder ciertas preguntas sobre el número de dígitos y el orden de magnitud con la ayuda de los logaritmos.

Por otro lado, este modelo trata los logaritmos como números y los sitúa en un contexto familiar. Los estudiantes están familiarizados con este contexto desde sus primeras clases de matemáticas, ya que el conteo y la notación posicional se abordan y practican extensamente en la educación primaria (Weber, 2016). Este modelo constituye una conceptualización operacional y no estructural (Sfard, 1991) pues se centra en una aplicación de los logaritmos y no en sus propiedades matemáticas.

Abstracción en contexto

Según Schwarz et al. (2009), la abstracción se entiende como una reorganización vertical de conocimientos previos que da lugar a un nuevo constructo. El modelo teórico de Abstracción en Contexto permite analizar cómo se desarrolla un nuevo concepto a través del estudio de las interacciones de los estudiantes (Butuner e Ipek, 2023). Este proceso se compone de tres fases: la identificación de la necesidad de un nuevo constructo, su surgimiento y su posterior consolidación mediante su aplicación en distintos contextos (Valongo y Felgueiras, 2022).

Este modelo también distingue tres acciones epistémicas (Hershkowitz et al., 2001): R-acciones (Recognizing), B-acciones (Building-with) y C-acciones (Constructing). Las R-acciones ocurren cuando los estudiantes identifican estructuras que han utilizado anteriormente en otras situaciones y son capaces de adaptarlas, a nivel estructural, a la situación actual según lo necesitan. Las B-acciones implican la utilización de estas estructuras en combinaciones diferentes y apropiadas para responder a una pregunta o avanzar hacia un objetivo determinado, mientras que las C-acciones se producen al integrar constructos previos y producir un nuevo constructo por matematización vertical. Estas últimas representan el primer uso o mención del nuevo constructo y, generalmente, incluyen R-acciones y B-acciones, formando un proceso anidado (Schwarz et al., 2009).

METODOLOGÍA

El presente estudio forma parte de un experimento de enseñanza de naturaleza cualitativa en el marco del paradigma de las investigaciones de diseño (Collins et al., 2004). Este experimento consta de cuatro sesiones y tiene como objeto de investigación el aprendizaje del concepto de logaritmo a través de una enseñanza basada en los cuatro modelos básicos propuestos por Weber. En particular, aquí se analiza la primera parte de la segunda sesión del experimento, en su segundo ciclo de implementación (Molina et al., 2011), que se ciñe al uso de la interpretación conceptual del logaritmo como el número de cifras (el “orden de magnitud”) de un número en la base correspondiente.

Diseño e implementación de la sesión de trabajo en el aula

La sesión constó de once cuestiones o tareas diseñadas con el propósito de generar en los estudiantes la necesidad de construir nuevos conocimientos y facilitar la transición del pensamiento informal al formal. Estas tareas guiaban progresivamente a los alumnos hacia la comprensión del logaritmo como una medida de la cantidad de cifras de un número. Para ello, se buscó que los ejercicios estuvieran enmarcados en un contexto conocido para los estudiantes, como el de los terremotos y su magnitud, permitiéndoles abordarlos con los recursos conceptuales que ya poseían.

La propuesta se organizó en dos partes. En la primera, aquí analizada, se promovió la construcción del concepto a través de cuestiones que favorecieran la asociación entre el logaritmo decimal y la cantidad de cifras de su argumento. En la segunda, entregada tras completar la primera, se enfatizaba la formalización del concepto, haciendo explícito el modelo básico, y se practicó el cálculo aproximado de logaritmos decimales a su parte entera. Además, se relacionó el modelo básico con la representación e interpretación de gráficos logarítmicos.

La sesión se llevó a cabo en un aula de 4º de Educación Secundaria con 29 estudiantes que en la sesión anterior habían trabajado con una actividad introductoria enmarcada en el mismo estudio, donde se les presentó el logaritmo como una sucesión de divisiones (Martín Barcala et al., en prensa). Los alumnos se organizaron en siete grupos de 4 o 5 integrantes, colaborando durante los 50 minutos de la clase de matemáticas. El docente-investigador, a cargo de la sesión, supervisó el desarrollo de la actividad y proporcionó orientación cuando fue necesario para asegurar la comprensión de los enunciados y de las instrucciones de la tarea.

El trabajo en equipos se fundamentó en una visión sociocultural del aprendizaje. La interacción entre los estudiantes les permitió construir conocimientos de manera conjunta y expresar sus ideas, lo que fomentó explicaciones colectivas que difícilmente habrían surgido de forma individual (Cobb, 1995).

Análisis de los datos

Para el análisis de los datos se utilizaron las respuestas escritas de los grupos a las actividades planteadas, las notas de campo registradas durante la experimentación y las videograbaciones de las discusiones en los equipos, que fueron posteriormente transcritas. Además, se complementó la información mediante la observación de los videos, prestando especial atención al lenguaje corporal y a las acciones realizadas en momentos de silencio o cuando la calidad del audio era deficiente. Esto resultó útil en situaciones como la superposición de conversaciones dentro del grupo o la consulta por parte del grupo de resultados anteriores dentro de la misma tarea.

Para este estudio, se seleccionó uno de los grupos de estudiantes atendiendo a la calidad y la coherencia, tanto del discurso como de las grabaciones, de manera que se facilitara la descripción del proceso por el que se llega a operativizar este modelo básico del logaritmo.

El análisis se llevó a cabo mediante el software MAXQDA, tomando como referencia cada una de las actividades de la sesión, estableciendo unidades de análisis a las que se asignaron las acciones epistémicas según el marco teórico AiC. Para garantizar la precisión de esta clasificación, los autores del artículo contrastaron y discutieron conjuntamente la asignación realizada.

RESULTADOS

Se presentan los resultados organizados en tres apartados: contextualización, formación del constructo y aplicación. Los extractos que se incluyen aparecen de manera cronológica según se fueron sucediendo a lo largo de la sesión. Por limitaciones de espacio se han omitido las partes de la transcripción en las que no se hace explícita ninguna acción epistémica. En la descripción se indican mediante corchetes las intervenciones de los alumnos en las que se ve reflejada cada afirmación.

Contextualización e introducción del logaritmo como magnitud de un terremoto.

La primera parte de la tarea (Figura 1) sitúa a los alumnos en un contexto real y les dirige hacia cálculos sencillos donde se producen las primeras R-acciones al reconocer como constructos previos y relevantes la aplicación de fórmulas matemáticas [3], las operaciones en notación científica [2] y la expresión de los resultados en notación decimal [4].

Figura 1

Actividad adaptada de Garfunkel et al. (2002)

El 1 de mayo de 1997 tuvo lugar en California y América Central un terremoto que alcanzó un 7,1 de magnitud en la escala de Richter. Las intensidades registradas por el sismógrafo a lo largo de ese día se recogen en la siguiente tabla:

Hora	6:22 h	9:45 h	11:37 h	16:25 h	20:12 h	22:07 h
Intensidad	$1,233 \times 10^{14}$	$3,991 \times 10^{13}$	$2,518 \times 10^{18}$	$3,991 \times 10^{15}$	$2,576 \times 10^{13}$	$1,262 \times 10^{14}$

El instrumento utilizado para detectar estos movimientos se llama sismógrafo, y el temblor más pequeño que puede detectar tiene una intensidad $I_0 = 2,0 \cdot 10^{11}$. Dado el amplio rango de valores posibles y con el propósito original de separar el gran número de terremotos pequeños de los menos frecuentes terremotos mayores observados en California en su tiempo, el geólogo Charles Richter creó la ahora conocida como “escala de Richter”, una función logarítmica que se usa para medir la magnitud de los terremotos.

Para ello, primero introdujo el concepto de intensidad relativa, siendo ésta el resultado de dividir la intensidad obtenida entre I_0 . Realiza los cálculos y completa la tabla (expresando el resultado en **notación decimal**):

Tabla 1

Hora	6:22 h	9:45 h	11:37 h	16:25 h	20:12 h	22:07 h
Intensidad (I)	$1,233 \times 10^{14}$	$3,991 \times 10^{13}$	$2,518 \times 10^{18}$	$3,991 \times 10^{15}$	$2,576 \times 10^{13}$	$1,262 \times 10^{14}$
Intensidad relativa (I/I ₀)	616,5	199'55	$1'259 \cdot 10^7$ 1259 0000	19.550	128'8	781

1. Marta: “...Realiza los cálculos y completa la tabla expresando el resultado en notación decimal.” Vale... Entonces... ¿Cómo se hace esto?
2. Manuel: $300'991$... O sea, $3'991$ por 10 a la 13, partido $2'0$ por 10 elevado a la 11
3. Manuel: Lo dice aquí...qué hay que dividir esto entre esto
4. Marta: $199'55$, ¿No?

Además, esto da lugar a una primera B-acción cuando al sorprenderse por haber obtenido un número tan grande, uno de los alumnos cae en la cuenta y reflexiona acerca del orden de magnitud de un número en función del exponente de su expresión en notación científica [8].

5. Manuel: $2'518$ por 10 a la 18, entre... 2, 0... ¿No? ...12.590.000
6. Marta: ¿Este? ¿El tercero?

7. José y Marta: Imposible
8. Manuel: es qué es a la 18...

Formación del constructo de logaritmo como el “orden de magnitud” de un número.

Más adelante, tras hallar los logaritmos de las intensidades relativas (Figura 2), surge la necesidad de calcular el argumento de un logaritmo sabiendo su valor [9-10], es decir, el “antilogaritmo”. Para ello los alumnos realizan una serie de B-acciones [11-17], que originariamente dan lugar a un razonamiento erróneo basado en una visión directamente proporcional de los datos [16].

Figura 2

Cálculo de la magnitud de un terremoto dada su intensidad relativa

Como puedes observar, seguimos obteniendo un rango de valores muy grande y poco manejable. Richter definió la magnitud de un terremoto como el logaritmo decimal (en base 10) de su intensidad relativa. Utiliza la función *log* de la calculadora para completar la siguiente tabla (redondea a un decimal):

Tabla 2

Hora	6:22 h	9:45 h	11:37 h	16:25 h	20:12 h	22:07 h
Intensidad (I)	$1,233 \times 10^{14}$	$3,991 \times 10^{13}$	$2,518 \times 10^{18}$	$3,991 \times 10^{15}$	$2,576 \times 10^{13}$	$1,562 \times 10^{14}$
Intensidad relativa (I/I ₀)	616,5	199'55	12.590.000	19.550	128'8	781
Magnitud log (I/I ₀)	2,8	2'3	7'1	4'3	2'1	2'9

9. Marta: “Vuelve a observar la tabla fijándote en la intensidad relativa de los terremotos de magnitud 2'1, 2'3, 2'8 y 2'9. ¿Entre qué valores de la intensidad relativa se obtendría una magnitud de entre 2 y 3?”
10. Marta: Vale, pues... ¿Cómo lo encontramos?
11. Manuel: A lo mejor hay que poner 2 logaritmo...
12. Marta: ¿Por qué va a ...?
13. Manuel: Logaritmo por 2
14. Marta: ¿Por qué vamos a tener que poner 2 logaritmo?
15. Manuel: 2 logaritmo... Logaritmo 2... 0'3
16. Marta: A ver... Vamos a pensar... A ver... Eh... Vale, si tenemos el logaritmo, que antes no lo teníamos... ay, pues mira... Podemos hacer cuánta diferencia entre 2'1 y 2'3... Y ver... Y ponerla aquí... O sea... Me refiero, ¿Cuánta ma...? ¿Cuánta diferencia hay entre cada uno? Pero es que aquí, de repente...

Finalmente, una alumna, siguiendo esta visión lineal de los datos, utiliza la calculadora para ir probando con diferentes números que le parecen adecuados hasta que observa que el logaritmo (decimal) de 100 es 2 [17]. A partir de ese descubrimiento, rápidamente llega a la conclusión, de que el logaritmo de 1000 es 3 [19], abandonando así la idea de linealidad. Estas afirmaciones son corroboradas por su compañera consolidando el constructo de logaritmo como división sucesiva adquirido con anterioridad [20-21].

17. Rosa: Esto es 100...
18. Marta: ¿Qué?
19. Rosa: Y aquí es 1000... El logaritmo de 100 es 2
20. Marta: Vale, y esto es 1.000... Esto es 1.000 y esto es 100... Vale, pues yo... Vale... Entonces, pues más o menos yo le hecho, pues... Viendo un valor... Un valor mayor que esto, y, es muy

interesante... Ah porque... Ah... Porque si tú divides 1.000 entre... ¿Cómo dijimos ayer que eran los logaritmos? Era dividir un número tantas veces hasta que diese 1... Cuántas veces tienes que multiplicar 1 para que te dé... Por 10, para que te dé... Uy, por favor, qué complicado... Eh... Bueno...

21. Marta: Hemos ido restando el valor, eh, anterior a... O sea, el valor, un valor mayor a su valor menor si con... Siguiendo... Y, esa diferencia más o menos se la hemos restado al 2'1 para obtener el 2, y hemos ido viendo que según poníamos 99, pues daba, eh, 1'9.... O sea, daba, eh... 99'1 o algo así... Y hasta que hemos puesto 100, no nos ha dado 2... Y ahora, y lo hemos pensado mejor y claro, logaritmo en base 10... Si tú divides 100 entre... Entre 10 dos veces da 1... Y si tú divides 1.000 entre 10 tres veces da 1... Que es, pues, el razonamiento de como, de los logaritmos...

En otra B-acción, reafirman su razonamiento al afirmar que la intensidad relativa (el argumento) de un terremoto de magnitud 4 sería 10.000 y la de 5, 100.000 [22-24].

22. Marta: Pues 4 serán 10.000, ¿No?

23. Rosa: Y entre 4 y 5 entre

24. Manuel y Rosa: Entre 10.000 y 100.000

Finalmente, en la discusión en torno a la actividad 4 (Figura 3) se puede observar con claridad la evolución en el discurso en el que se aprecian dos R-acciones: una al reconocer el constructo de parte entera [26] y otro al identificar las potencias de base 10 [31-34] como objeto de interés en el constructo que están formando. Los alumnos tienen una intuición (“*es como el número de ceros*”), y a lo largo de varias B-acciones [25-30] relacionando la parte entera con las potencias de base 10 son capaces de alcanzar un primer constructo, aún incompleto, para el logaritmo decimal de un número, dando lugar a una primera C-acción [35]. Sin embargo, insisten, solo para “valores exactos” [28-29].

Figura 3

Respuesta a la actividad 4 de la primera parte de la tarea

4. Describe cualquier patrón que veas entre la intensidad relativa de un terremoto y su magnitud. ¿Qué relación puede haber entre la parte entera⁽¹⁾ de la magnitud de un temblor y su intensidad relativa?

Quando la intensidad relativa es una potencia de base 10 exacta, la parte entera de la magnitud son el número de ceros que tiene la intensidad relativa.

25. Marta: Pues el número de... Es como el número de ceros, ¿No? A ver, Manuel, José... ¿Qué pensáis de esta pregunta? Describe cualquier patrón que veas entre la intensidad relativa y la magnitud
26. Marta: Se refiere como a qué relaciones vemos entre la intensidad relativa... Entre la parte entera, o sea, 2, 3, 4... Y la intensidad relativa. Pues es el número de ceros... O sea, el número de ceros
27. Rosa: Sí, sí... puede ser...
28. Marta: Mira, yo creo... A ver... ¿Qué pensáis de esta... De este razonamiento? Que cuando la intensidad relativa
29. Marta: Da un valor exacto de... De un...
30. Marta: Esta cantidad exacta es el mismo... O sea, 2 aquí es 100
31. Marta: Cuando la intensidad relativa es un... Es un número de base 10, ¿No? Se dice, o un... ¿Una potencia de...?
32. Manuel: Múltiplo
33. Marta: De base un...
34. Manuel: Una potencia de base 10

35. Marta: Una potencia de base 10... 10... Exacta, coma... La parte entera... Entera de la... De la magnitud... Eh... Son... El número de ceros que tiene la intensidad relativa.

Aplicación y consolidación del constructo formado

Este constructo se consolida minutos después en una B-acción [42-45] cuando los alumnos utilizan el constructo definido en el que identifican el número de ceros de la intensidad relativa con la parte entera de la magnitud.

36. Marta: “¿Cuántas veces mayor es la intensidad de un terremoto de magnitud $4'3$ respecto al de uno de magnitud de $2'3$? Busca los datos necesarios en las tablas de la página anterior.” Vale...
37. Manuel: La de $2'3$ es 199
38. Marta: $2'3$ es 199'55
39. Marta: Pues el de $4'3$...
40. Rosa: 19.956'5
41. Marta: 100 veces mayor, ¿no?
42. Manuel: Claro, 2 ceros más
43. Marta: Pues eso, 100, ¿No?
44. Manuel: Pues con la teoría de aquí 2 ceros más
45. Marta: Eh... Porque 199'55 por 100 es 19.500...
46. Manuel: Por la teoría esta que has hecho aquí... Porque tiene 2 ceros más, y aquí es 2 números más grande... De 2 a... $2'3$ a $4'3$

DISCUSIÓN Y CONSIDERACIONES FINALES

En la construcción del concepto de logaritmo como medida de las cifras de un número intervienen los constructos de potencias de base 10 y parte entera. La transición hacia las B-acciones surge de la necesidad (Valongo y Felgueiras, 2022) de hallar el “antilogaritmo”. Además, una vez formado, se consolida al aplicarlo en la resolución de problemas (Valongo y Felgueiras, 2022; Weber, 2016).

Si bien este segundo modelo básico no puede usarse para explicar los logaritmos de manera operacional, como dice Weber (2016), sí podría emplearse para respaldar explicaciones operacionales al describir su efecto sobre los números. Así, esta interpretación conceptual favorece la comprensión de la escala logarítmica y ayuda a resolver cuestiones como la planteada en la actividad 4. Además, identificamos la resistencia inicial de los alumnos a abandonar la idea de linealidad (Martín Barcala et al., en prensa), dificultad que logran superar más adelante con el uso de este modelo.

Asimismo, se observa que, una vez introducido los logaritmos como división sucesiva (Martín Barcala et al., en prensa), los alumnos acuden a esta interpretación conceptual para comprobar y verificar sus hipótesis. Esto sugiere que el modelo basado en la medida de cifras de un número no se percibe como una definición en sí, sino como una propiedad derivada de la anterior. De este modo, deja de ser un modelo básico completamente operacional y, en algunos casos, los alumnos comienzan a tratar el logaritmo como un ente ya creado del que observan sus características, que posteriormente se utilizarán para calcular más logaritmos y estudiar su comportamiento (Weber, 2016).

Por otro lado, esta visión menos operacional hace que los estudiantes dependan inicialmente de la calculadora para obtener logaritmos, lo que puede llevar a concebirlo como un simple botón en el dispositivo (dePierro et al., 2008). Esta es, por tanto, una de las principales limitaciones del estudio.

Finalmente, sería interesante investigar si este modelo básico contribuye a una mejor comprensión del comportamiento y representación de la función logarítmica.

Referencias

- Aziz, T. A., Pramudiani, P. y Purnomo, Y. W. (2017). How do college students solve logarithm questions? *International Journal on Emerging Mathematics Education*, 1(1), 25-40. <https://doi.org/10.12928/ijeme.v1i1.5736>
- Butuner, N. y Ipek, J. (2023). Examination of the Abstraction Process of Parallelogram by Sixth-Grade Students According to RBC+C Model: A Teaching Experiment. *European Journal of Educational Sciences*, 85(2), 101-125. <https://doi.org/10.19044/ejes.v10no2a101>
- Garfunkel, S., Crisler, N., Froelich, G. W. y Consortium for Mathematics and Its Applications. (2002). *Comap's precalculus: modeling our world* (Preliminary ed.). W.H. Freeman and Company.
- Cobb, P. (1995). Mathematical learning and small-group interaction: Four case studies. En P. Cobb y H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 25-129). Lawrence Erlbaum Associates.
- Collins, A., Joseph, D. y Bielaczyc, K. (2004). Design research: Theoretical and methodological issues. *Journal of the Learning Sciences*, 13(1), 15-42. https://doi.org/10.1207/s15327809jls1301_2
- DePierro, E., Garafalo, F. y Toomey, R. (2008). Helping students make sense of logarithms and logarithmic relationships. *Journal of Chemical Education*, 85(9), 1226-1228. <https://doi.org/10.1021/ED085P1226>
- Hershkowitz, R., Schwarz, B. B. y Dreyfus, T. (2001). Abstraction in context: Epistemic actions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32(2), 195-222. <https://doi.org/10.2307/749673>
- Hoon, T. S., Singh, P. y Ayop, S. K. (2010). Working with logarithms. *Malaysian Education Dean's Council Journal*, 6(6), 121-129.
- Martín Barcala, A., González Astudillo, M. T. y Molina, M. (en prensa). Aprendizaje del concepto de logaritmo como división sucesiva. *Avances en Investigación Matemática*.
- Molina, M., Castro, E., Molina, J. L. y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la Investigación de Diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, 29(1), 75-088. <https://doi.org/10.5565/rev/ec/v29n1.435>
- Panagiotou, E. N. (2011). Using history to teach mathematics: The case of logarithms. *Sci & Educ*, 20, 1-35. <https://doi.org/10.1007/s11191-010-9276-5>
- Schwarz, B. B., Dreyfus, T. y Hershkowitz, R. (2009). The nested epistemic actions model for abstraction in context. En J. M. Laborde (Ed.), *Intelligent learning environments: The case of geometry* (pp. 11-41). Routledge.
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 1-36. <https://doi.org/10.1007/bf00302715>
- Valongo, A. y Felgueiras, M. (2022). Constructing the continuity concept. *WSEAS Transactions on Advances in Engineering Education*, 19, 109-120. <https://doi.org/10.37394/232010.2022.19.11>
- Vom Hofe, R. (1998). On the generation of basic ideas and individual images: Normative, descriptive and constructive aspects. En A. Sierpiska y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics education as a research domain: A search for identity* (Vol. 4, pp. 317-331). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-011-5470-3_20
- Vom Hofe, R. y Blum, W. (2016). "Grundvorstellungen" as a category of subject-matter didactics. *Journal Für Mathematik-Didaktik*, 37(1), 225-254. <https://doi.org/10.1007/s13138-016-0107-3>
- Weber, C. (2016). Making logarithms accessible — Operational and structural basic models for logarithms. *Journal Für Mathematik-Didaktik*, 37(1), 69-98. <https://doi.org/10.1007/s13138-016-0104-6>