

ARGUMENTACIÓN EN LA FORMACIÓN MATEMÁTICA DEL PROFESORADO DE PRIMARIA

Argumentation in the mathematical training of primary school teachers

Milanesio, B., Burgos, M. y Tizón-Escamilla, N.

Universidad de Granada

Resumen

Comprender cómo los estudiantes resuelven tareas que ponen en juego procesos matemáticos esenciales como la conjetura, argumentación y demostración resulta crucial en el ámbito de la educación superior. En este trabajo empleamos de manera articulada el modelo de Toulmin y la configuración de prácticas, objetos y procesos del Enfoque Ontosemiótico para analizar, siguiendo un enfoque cualitativo, las estrategias argumentativas que desarrollan estudiantes para maestro cuando deciden y justifican la validez de una desigualdad que involucra las identidades notables. Los resultados muestran dificultades tanto para conjeturar de manera adecuada como para demostrar las conjeturas emergentes, resaltando la necesidad de reforzar el papel de los ejemplos y contraejemplos en la formulación y argumentación de conjeturas, como forma de avanzar en una comprensión profunda de la naturaleza de la demostración.

Palabras clave: argumentación, demostración, modelo de Toulmin, configuración ontosemiótica.

Abstract

Understanding how students solve tasks that involve essential mathematical processes such as conjecture, argumentation and proof is crucial in higher education. In this work, we use an articulated approach that integrates Toulmin's model with the configuration of practices, objects, and processes from the Ontosemiotic Approach to analyze, following a qualitative method, the argumentative strategies developed by preservice primary school teachers when deciding and justifying the validity of an inequality involving notable identities. The results show various difficulties both in conjecturing adequately and in proving the emerging conjectures, highlighting the need to reinforce the role of examples and counterexamples in the formulation and argumentation of conjectures as a way of advancing in a deep understanding of the nature of proof.

Keywords: argumentation, proof, Toulmin's model, ontosemiotic configuration.

INTRODUCCIÓN

La demostración es fundamental en el quehacer matemático, tanto por lo que aporta para la comprensión y el dominio de las matemáticas, como a su presencia transversal y longitudinal en la disciplina (Mariotti et al., 2018). Aun así, demostrar es una actividad compleja, incluso para estudiantes universitarios (Aricha-Metzer y Zaslavsky, 2019). Los estudiantes no comprenden suficientemente la naturaleza de la demostración, no reconocen qué constituye una demostración o por qué es necesaria (Sommerhoff y Ufer, 2019). Esto motiva la aceptación de cualquier argumento convincente como una demostración válida, y limita la competencia para proveer argumentos lógicamente sólidos que respalden la validez de conjeturas (Stylianides et al., 2017). Estas dificultades justifican la necesidad de considerar en la enseñanza y el aprendizaje de la demostración una actividad matemática más amplia que incluya la generación o el refinamiento de conjeturas. En este sentido, autores como Mariotti y Pedemonte (2019), defienden que los procesos de demostración son más accesibles cuando los problemas requieren la construcción de una conjetura. Sin embargo

son escasos los estudios que exploran cómo los estudiantes resuelven problemas que involucran ambos procesos, conjeturar y demostrar, en un entorno universitario (Lew y Zazkis, 2019).

Los autores preocupados por investigar las dificultades de los estudiantes con la demostración han recurrido frecuentemente al modelo de Toulmin (2003) (Arce y Conejo, 2019; Molina y Samper, 2019; Soler-Álvarez y Manrique, 2014). Recientemente, autores como Markiewicz et al. (2021) o Morales-Ramírez et al. (2021) han empleado las herramientas del Enfoque Ontosemiótico (EOS) (Godino, 2024) para caracterizar las prácticas demostrativas. El objetivo de este trabajo es analizar las estrategias empleadas y las dificultades mostradas por estudiantes españoles del grado de educación primaria, cuando deciden y justifican la validez de una desigualdad que implica una identidad notable. Para ello, empleamos de manera articulada ambas herramientas. Por un lado, el modelo de Toulmin permite reconocer la estructura de los argumentos propuestos, y por otro lado, la configuración ontosemiótica posibilita una mirada microscópica, buscando el origen de las dificultades en la propia naturaleza, uso y significado de la estructura matemática implicada.

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

Elementos del enfoque ontosemiótico

Se considera *práctica matemática* a toda actuación o expresión realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos. En estas prácticas intervienen *objetos primarios* entendidos como entidades que pueden ser separadas según su naturaleza y función en situaciones-problema, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos. Además, estos objetos pueden ser considerados desde cinco dimensiones duales, lo que lleva a la siguiente tipología de *objetos secundarios*: ostensivos (públicos) - no ostensivos (ideales); extensivos (particulares) - intensivos (generales); significantes (expresión) - significados (contenido); unitarios (considerados como un todo previamente conocido) - sistémicos (sistemas formados por distintos componentes); personales (sujetos individuales) - institucionales (compartidos en una institución). Pero, además de por su “estructura” (los objetos), la actividad matemática queda caracterizada por su “funcionamiento” (cómo interactúan los objetos). Los objetos matemáticos primarios emergen mediante los respectivos *procesos primarios* de problematización, comunicación, definición, enunciación, algoritmización y argumentación. A su vez, las dualidades permiten hablar de *procesos secundarios* de materialización-idealización, particularización-generalización, significación-representación, descomposición-unitarización y personalización-institucionalización. Los objetos y procesos que intervienen y emergen de los sistemas de prácticas se relacionan entre sí formando configuraciones ontosemióticas que garantizan un análisis microscópico de la actividad matemática (Godino, 2024).

Argumentación, justificación y demostración

Consideramos la *argumentación* como el proceso que lleva a formular afirmaciones matemáticas y proporcionar evidencia para apoyarlas. Engloba acciones como inducir, proponer analogías, abducir propiedades de hechos empíricos, entre otras (Molina y Samper, 2019). La *justificación* es la “segunda mitad” de la argumentación, “una invitación a explicitar el pensamiento para respaldar una postura (ya sea un resultado, una idea o una elección)” (Staples y Conner, 2022, p.5). Entendemos la *demostración* como un tipo de argumentación (Papadaki et al., 2019) que implica acciones en la búsqueda de una conclusión a favor o en contra de una afirmación matemática. El argumento que surge en una demostración tiene las siguientes características (Stylianides et al., 2017):

- Utiliza un conjunto de aserciones aceptadas como verdaderas y que están disponibles para la comunidad de aula sin más justificación (axiomas, propiedades, teoremas).
- Se usan modos de argumentación válidos y conocidos por la comunidad o que están dentro de su alcance conceptual. Por ejemplo, reglas de inferencia lógico-deductivas, construcción de contraejemplos, entre otros.

- Se comunica con formas de expresión apropiadas, conocidas o dentro del alcance conceptual de la comunidad de aula.

El modelo de Toulmin

El *argumento*, como producto de un proceso de argumentación, se compone de tres elementos básicos (Toulmin, 2003): conclusión (se manifiesta una afirmación u opinión cuyo valor se está tratando de establecer), datos (permiten apoyar la afirmación realizada, la conclusión) y garantía (posibilita que el paso de los datos a la conclusión sea legítimo, mediante una justificación a partir de inferencias basadas en reglas generales, principios, etc.). También se pueden considerar tres elementos auxiliares para describir un argumento (Toulmin, 2003): respaldo (otras certezas que soportan la garantía), calificativo modal (grado de fuerza conferido por la garantía que acompaña a la conclusión) y refutaciones (condiciones de excepción en las que la garantía se podría anular).

Los investigadores han caracterizado las *argumentaciones abductivas* de diferentes maneras. Papadaki et al. (2019) reconocen que la abducción tiene dos funciones diferentes, *explicativa* y *exploratoria*, y que, dependiendo de esta, la estructura argumentativa varía. Siguiendo el modelo de Toulmin, cuando la abducción se emplea para explorar, a partir de la observación de casos particulares (datos) se formula una conjetura (conclusión). La garantía está compuesta por reglas o regularidades que se identifican en los datos (Soler-Álvarez y Manrique, 2014). El flujo de la argumentación es directo, desde los datos hasta la conclusión (Papadaki et al., 2019). Si la abducción se utiliza para explicar, a partir de una conclusión deseada se propone una posible explicación que la justifique a partir de posibles datos, garantía y respaldo (Arce y Conejo, 2019). En este caso, el flujo de la argumentación retrocede hacia los datos que explican la conclusión (Papadaki et al., 2019).

En la *argumentación inductiva* se parte de una regla general y se comprueba sobre ciertos casos particulares para tratar de constatar si dicha regla es verdadera. Los datos corresponden a la regla general, la garantía está respaldada por la verificación de dicha regla mediante casos concretos, de la que se deriva su aceptación como verdadera (conclusión) (Soler-Álvarez y Manrique, 2014).

En la *argumentación deductiva*, se aplica una proposición general conocida (garantía) a unos datos dados para obtener la conclusión. La garantía está respaldada por una teoría matemática que hace que la misma sea válida (Arce y Conejo, 2019). El *uso de contraejemplos* se considera un tipo de argumentación deductiva. El dato del argumento se corresponde con el caso x_0 que no se ajusta a la regla general, la garantía con la regla general $\forall x: P(x)$, el respaldo con la equivalencia lógica $\forall x: P(x) \leftrightarrow \neg \exists x_0: (P(x_0) \text{ es falso})$, y la conclusión corresponde al no cumplimiento de la regla: $\forall x: P(x) \text{ es falso}$ (Soler-Álvarez y Manrique, 2014).

METODOLOGÍA

En este trabajo, realizado bajo un paradigma descriptivo, con enfoque cualitativo, se pretende describir e interpretar las estrategias y dificultades de los estudiantes en la elaboración de conjeturas y sus demostraciones. Para analizar sus respuestas, se emplea el análisis de contenido (Cohen et al., 2018) consistente en: 1) categorización de las estrategias empleadas según el modelo de Toulmin; 2) identificación de los objetos, en particular proposiciones y conceptos que intervienen y condicionan los argumentos, y los procesos que ocurren cuando se parte de unos datos para derivar una conclusión, apoyándose en una garantía. Este análisis permite asignar el grado de corrección de las respuestas.

En la experiencia participó un grupo de 63 estudiantes para maestro (EPM, en adelante) de primer curso de una universidad española, que cursaban la asignatura de Bases Matemáticas en la Educación Primaria. Uno de los objetivos de aprendizaje en esta asignatura es el de analizar, razonar y comunicar eficazmente argumentaciones matemáticas. En el momento de la implementación, los estudiantes no habían tenido aún la oportunidad de trabajar la argumentación de propiedades matemáticas. El profesor responsable de la asignatura proporcionó el problema incluido en la Figura 1 a los EPM para

que lo resolvieran de forma individual. Las respuestas de los EPM se analizan empleando el análisis de contenido (Cohen et al., 2018) apoyado en el modelo de Toulmin y las categorías del EOS.

Figura 1

Instrumento de recogida de datos

Si a y b son dos números enteros: ¿Será cierto siempre que $(a + b)^2 > a^2 + b^2$? ¿En qué casos será cierto? Justifica tu respuesta.

Fuente: tomado de Markiewicz (2023)

Se establecen los siguientes grados de corrección para analizar las respuestas desarrolladas por los estudiantes:

- **Correcta.** Una respuesta se considera correcta si se reconoce que la desigualdad no es siempre válida, se formula una conjetura adecuada sobre los valores para los que sí lo es y se garantiza la validez general de dicha conjetura.
- **Parcialmente correcta.** Se considera una respuesta parcialmente correcta si se reconoce que la desigualdad no es siempre válida, se establece un rango de validez – correcto o parcial – para el que la desigualdad sí lo es, pero la argumentación proporcionada no permite valorar su validez general (ver ejemplo en la Figura 4).
- **Incorrecta.** En otro caso (ver ejemplos en las Figuras 2 y 3).

RESULTADOS

En la Tabla 1 relacionamos los tipos de estrategias empleadas con el grado de corrección de la respuesta. Destaca que, de los 63 EPM, cuatro no respondieron y ocho no proporcionaron argumentación a su respuesta. Por ejemplo, EPM34 indicó “no, solo será cierto en el caso que b y a sean positivos” sin mayor justificación. El 88,24% de los EPM que elaboraron alguna argumentación propuso respuestas incorrectas, fundamentalmente de tipo deductivo (Figura 2) o inductivo (Figura 3) para justificar que la desigualdad $(a + b)^2 > a^2 + b^2$ es verdadera para todo valor de a y b . En menor medida, desarrollaron argumentaciones abductivas explicativas para justificar la validez de la desigualdad para cualesquiera a y b (“es cierto, ya que, el cuadrado de la suma de dos números, al ser un número mayor, se multiplica más cantidad de veces que haciéndolo por separado”, EPM41), así como deductivas por contraejemplo, identificando valores para los que la desigualdad no se cumple, sin precisar en qué casos sí. Por ejemplo, EPM62 indicó “si algún número (a o b) es negativo, el resultado puede ser mayor en $a^2 + b^2$: $(-2 + 3)^2 < (-2)^2 + 3^2$ ”.

Tabla 1

Tipo de estrategia argumentativa según el grado de corrección de la respuesta (n=51)

Tipo de estrategia argumentativa	Grado de corrección		Total
	Incorrecta	Parcialmente correcta	
Deductiva	18	0	18
Inductiva	13	0	13
Abductiva explicativa	8	1	9
Abductiva exploratoria	1	5	6
Deductiva por contraejemplo	5	0	5
Total	45	6	51

Con menor frecuencia (11,76%), los EPM elaboraron respuestas parcialmente correctas. Fundamentalmente, emplearon argumentaciones abductivas exploratorias para justificar un rango de validez parcial (“ $(a + b)^2 > a^2 + b^2$ será cierto cuando operemos con números naturales”, EPM13)

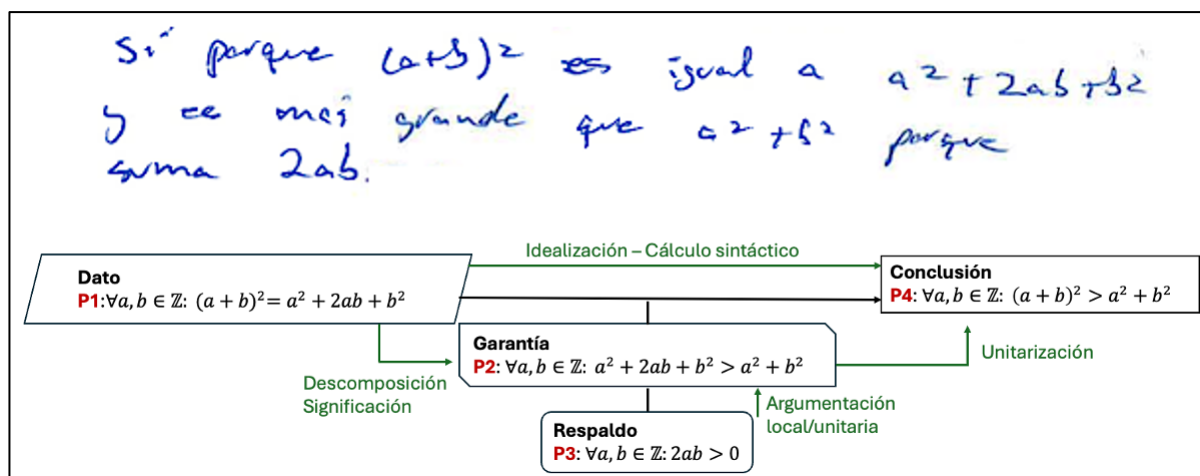
o correcto sin justificar su validez general (“se cumple cuando los dos números son positivos y cuando los dos son negativos”, EPM8). En la Figura 4 se muestra un ejemplo con la solución de EPM8.

A continuación, presentamos respuestas prototípicas de los estudiantes, identificamos el tipo de argumentación y mostramos el esquema de Toulmin complementado con los objetos y procesos del EOS. Llamamos a este modelo enriquecido esquema ontosemiótico de Toulmin.

Los estudiantes que plantearon argumentaciones deductivas para demostrar las conjeturas incorrectas, mayormente lo hicieron como EPM25 en la Figura 2. EPM25 parte de la igualdad entre las expresiones $(a + b)^2$ y $a^2 + 2ab + b^2$ (dato - proposición P1). Apoyándose en la garantía - incorrecta - (proposición P2 respaldada por P3), deriva como conclusión la validez de la desigualdad dada en el enunciado (proposición P4). En su argumentación, se articulan procesos de idealización y cálculo analítico (descrito verbalmente) con procesos de descomposición y significación de los datos para reconocer las propiedades matemáticas que servirán de soporte en la conclusión derivada de estas. Además, el respaldo (proposición P3) actúa como argumento local/unitario de la garantía.

Figura 2

Argumentación deductiva de EPM25 para una conjetura incorrecta. Esquema ontosemiótico de Toulmin



El resto de los estudiantes que recurrieron a argumentaciones deductivas utilizaron la igualdad $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ como garantía para asegurar la falsedad de la propiedad dada. Por ejemplo, EPM56 indicó “no es cierto que $(a + b)^2 > a^2 + b^2$ porque si el paréntesis está elevado a la 2 quiere decir que los números de dentro también, por lo que serían iguales”.

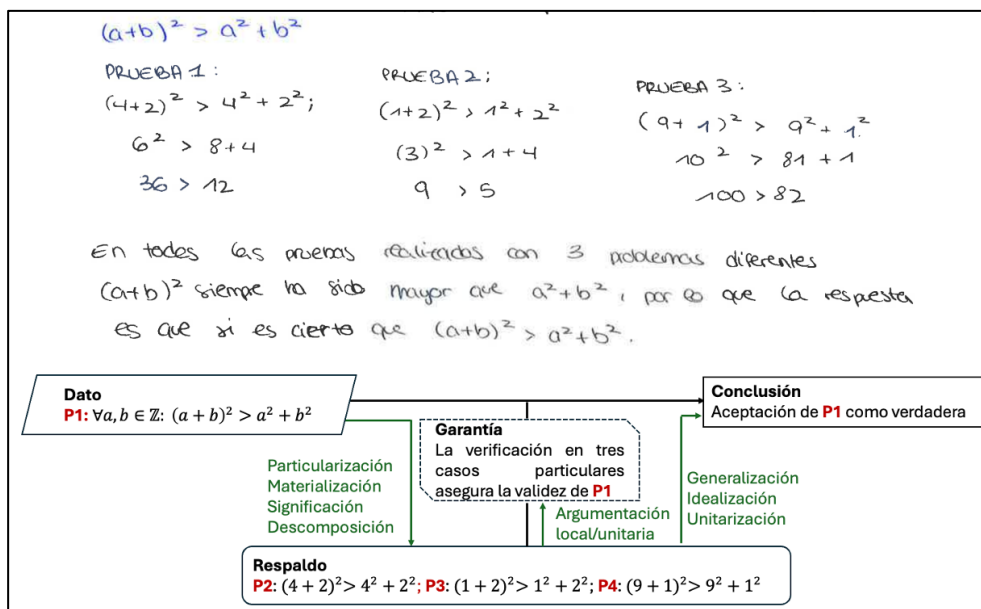
En todas las argumentaciones inductivas que plantearon los estudiantes elaboraron conjeturas inapropiadas sobre el rango de validez de la desigualdad. Al emplear únicamente números positivos para comprobar su veracidad, no lograron reconocer la falsedad en otros casos (cuando a o b son 0 o cuando ambos tienen distinto signo). Como muestra la Figura 3, EPM42 parte de la proposición P1 que pretende concluir. Descompone y atribuye significado a los conceptos involucrados (relación de orden en $\mathbb{Z}$, operaciones) antes de particularizar P1 en tres casos, P2, P3 y P4, que involucran números positivos. Finalmente, EPM42 dota de carácter unitario y general a P2, P3 y P4 (generalización, unitarización) para aceptar P1 como verdadera.

La insistencia que observamos a la hora de argumentar afirmaciones incorrectas muestra la necesidad de reforzar el papel de los ejemplos y los contraejemplos en el proceso de demostración (Lew y Zazkis, 2019). Por un lado, el hecho de no explorar una variedad de ejemplos puede llevar a la formulación de afirmaciones incorrectas, tal como evidenciamos en las argumentaciones inductivas en las que los estudiantes solo contemplaron números naturales (Figura 3). Por otro lado, la ausencia del trabajo previo con ejemplos para corroborar la validez de una conjetura puede llevar

a plantear argumentaciones que justifiquen afirmaciones incorrectas, como sucedió en las argumentaciones deductivas (Figura 2).

Figura 3

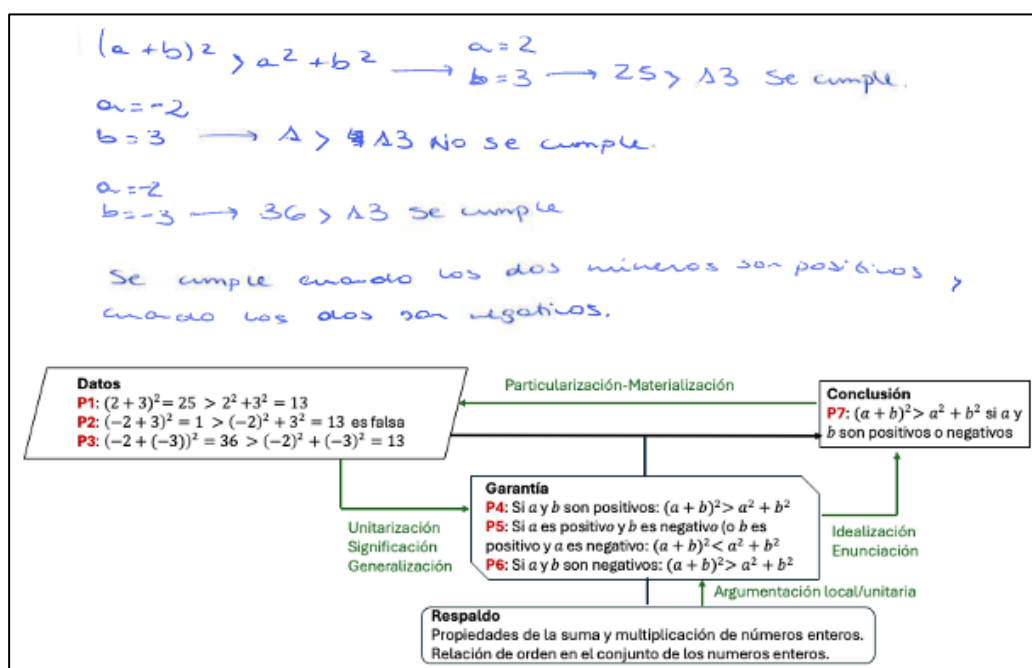
Argumentación inductiva de EPM42 para una conjetura incorrecta. Esquema ontosemiótico de Toulmin



Los estudiantes también emplearon, aunque en menor medida, argumentaciones abductivas con una función explicativa para argumentar fundamentalmente conjeturas incorrectas sobre el rango de valores para los que la desigualdad es válida, y con una función exploratoria para argumentar, principalmente, conjeturas adecuadas tal como ocurre con la respuesta de EPM8 en la Figura 4.

Figura 4

Argumentación abductiva exploratoria de EPM8 para una conjetura correcta. Esquema ontosemiótico de Toulmin



EPM8 halló una regularidad adecuada, emergente del análisis de ejemplos que involucraban distintos tipos de números (positivos, negativos). La unitarización y significación de los datos (P1, P2, P3)

llevó a EPM8 a reconocer de manera general (generalización) que, cuando ambos números enteros son positivos y cuando ambos son negativos, la desigualdad se cumple (garantías P4, P6). En cambio, cuando solo uno de ellos es negativo, la desigualdad se invierte (garantía P5). Así, EPM8 derivó (mediante procesos de idealización y enunciación) la conclusión deseada P7.

Es de destacar que ninguno de los participantes que expresó el rango de validez de la desigualdad de forma correcta o parcialmente correcta, logró elaborar una demostración para validarlo de manera general, al igual que EPM8 (Figura 4). En todos los casos, la conclusión del argumento sigue necesitando una acción adicional para su aceptación o rechazo (Stylianides, 2008).

Por último, con menor frecuencia, los estudiantes emplearon contraejemplos para conjeturar sobre la falsedad de la desigualdad para ciertos valores de a y b , sin explicitar los casos en los que ésta es válida. Por ejemplo, EPM50 toma como dato el caso “ $a = 0, b = 1: (0 + 1)^2 = 0^2 + 1^2$ ”, y concluye “no se cumple cuando a, b o ambos términos son 0”. La garantía en estos casos está respaldada por la regla lógica $\forall a, b \in \mathbb{Z}: (a + b)^2 > a^2 + b^2 \leftrightarrow \nexists a', b': (a' + b')^2 \leq a'^2 + b'^2$.

CONCLUSIONES

En este trabajo analizamos las argumentaciones que desarrollan futuros docentes de primaria cuando deben decidir y justificar cuándo es cierta una propiedad aritmética. La investigación de este tipo de tareas es escasa en el entorno universitario (Lew y Zazkis, 2019) y casi inexistente en el contexto de la formación de docentes de primaria. El uso de los esquemas ontosemióticos de Toulmin, que complementan el modelo de Toulmin con los objetos y procesos del EOS, nos permitió alcanzar una visión microscópica de la actividad matemática desarrollada. Por un lado, los estudiantes que emplearon argumentaciones deductivas que llevaron a conclusiones falsas utilizaron propiedades incorrectas como garantías, lo que muestra un conocimiento deficiente de propiedades aritméticas fundamentales. Por otro lado, tanto el uso de argumentaciones inductivas o abductivas, como la enunciación de conjeturas sin argumentación, sugiere que los estudiantes no encuentran necesario demostrar la validez de las conjeturas, lo que muestra una falta de comprensión sobre qué constituye una demostración y por qué es necesaria (Sommerhoff y Ufer, 2019). Esta carencia se puede observar, por ejemplo, en las argumentaciones inductivas, en la generalización e idealización que se produce desde el respaldo hacia la conclusión, o en las abductivas exploratorias, en la generalización que se produce entre datos y garantía, y la enunciación e idealización en el sentido garantía – conclusión. Además, en muchas ocasiones, la evidencia proporcionada por los ejemplos propuestos actuó como un obstáculo para la producción de una conjetura adecuada (Mariotti y Pedemonte, 2019).

Con este trabajo pretendemos complementar estudios previos que han evidenciado disparidades entre los significados personales e institucionales pretendidos sobre la demostración, empleando el modelo de Toulmin (Arce y Conejo, 2019; Soler-Álvarez y Manrique, 2014) o la configuración ontosemiótica del EOS (Markiewicz et al., 2021; Morales-Ramírez et al., 2021). Las dificultades que identificamos refuerzan la necesidad de reflexionar sobre posibles intervenciones que ayuden a superarlas, ofreciendo oportunidades de aprendizaje de calidad en la práctica de la demostración (Arce y Conejo, 2019). En primer lugar, es necesario reforzar el conocimiento matemático de los futuros docentes, para que los respaldos y las garantías puedan ejercer esta función. En segundo lugar, sería conveniente reforzar el papel de los ejemplos y contraejemplos en la formulación y argumentación de conjeturas, como forma de avanzar en una comprensión profunda de la naturaleza de la demostración.

Agradecimientos

Investigación realizada como parte del proyecto de investigación PID2022-139748NB-I00 financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033/ y FEDER, con apoyo del Grupo de Investigación FQM-126 (Junta de Andalucía, España).

Referencias

- Arce, M. y Conejo, L. (2019). Razonamientos y esquemas de prueba evidenciados por estudiantes para maestro: relaciones con el conocimiento matemático. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 163-172). SEIEM.
- Aricha-Metzer, I. y Zaslavsky, O. (2019). The nature of students' productive and non-productive example-use for proving. *Journal of Mathematical Behavior*, 53, 304-322. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.09.002>
- Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2018). *Research methods in education*. Routledge. <https://doi.org/10.4324/9781315456539>
- Godino, J. D. (2024). *Enfoque ontosemiótico en Educación Matemática. Fundamentos, herramientas y aplicaciones*. McGraw-Hill, Aula Magna.
- Lew, K. y Zazkis, D. (2019). Undergraduate mathematics students' at-home exploration of a prove-or-disprove task. *Journal of Mathematical Behavior*, 54. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2018.09.003>
- Mariotti, M., Durand-Guerrier, V. y Stylianides, G. J. (2018). Argumentation and proof. En T. Dreyfus, M. Artigue, D. Potari, S. Prediger y K. Ruthven (Eds.), *Developing Research in Mathematics Education* (pp. 75-89). Routledge.
- Mariotti, M. y Pedemonte, B. (2019). Intuition and proof in the solution of conjecturing problems. *ZDM*, 51(5), 759-777. <https://doi.org/10.1007/s11858-019-01059-3>
- Markiewicz, M. E. (2023). *Matemática Discreta*. Documento no publicado.
- Markiewicz, M. E., Etchegaray, S. y Milanesio, B. (2021). Análisis ontosemiótico de procesos de validación en estudiantes del último año de la escuela secundaria. *Revista UNION*, 17(62).
- Molina, O. y Samper, C. (2019). Tipos de problemas que provocan la generación de argumentos inductivos, abductivos y deductivos. *Bolema*, 33, 109-134. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v33n63a06>
- Morales-Ramírez, G., Rubio-Goycochea, N. y Larios-Osorio, V. (2021). Tipificación de argumentos producidos por las prácticas matemáticas de alumnos del nivel medio en ambientes de geometría dinámica. *Bolema*, 35, 664-689. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v35n70a06>
- Papadaki, C., Reid, D. y Knipping, C. (2019). Abduction in argumentation: Two representations that reveal its different functions. En T. Jankvist, M. van den Heuvel-Panhuizen y M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of the eleventh congress of the european society for research in mathematics education* (pp. 310-317). Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME.
- Soler-Álvarez, M. N. y Manrique, V. (2014). El proceso de descubrimiento en la clase de matemáticas: los razonamientos abductivo, inductivo y deductivo. *Enseñanza de las Ciencias*, 32(2), 191-219. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1026>
- Sommerhof, D. y Ufer, S. (2019). Acceptance criteria for validating mathematical proofs used by school students, university students, and mathematicians in the context of teaching. *ZDM-Mathematics Education*, 51, 717-730. <https://doi.org/10.1007/s11858-019-01039-7>
- Staples, M. y Conner, A. (2022). Introduction: Conceptualizing argumentation, justification, and proof in mathematics education. En K. Bieda, A. Conner, K. Kosko y M. Staples (Eds.), *Conceptions and consequences of mathematical argumentation, justification, and proof* (pp. 1-10). Springer.
- Stylianides, G. J. (2008). An analytic framework of reasoning-and-proving. *For the Learning of Mathematics*, 28(1), 9-16.
- Stylianides, G. J., Stylianides, A. J. y Weber, K. (2017). Research on the teaching and learning of proof: Taking stock and moving forward. En J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 237-266). National Council of Teachers of Mathematics.
- Toulmin, S. (2003). *The uses of arguments*. Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511840005>