

COMPARACIÓN DE RECURSOS MANIPULATIVOS FÍSICOS Y VIRTUALES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS: UN ESTUDIO DE CASO CON DOCENTES EN FORMACIÓNⁱ

Comparative analysis of physical and virtual manipulatives in problem-solving: A case study with pre-service teachers

Ochugboju, A. y Díez-Palomar J.

Universitat de Barcelona

Resumen

En este estudio comparamos la eficacia de los recursos manipulativos físicos y virtuales en la resolución de problemas matemáticos, en el ámbito de la formación de futuros/as docentes. Siguiendo un enfoque metodológico mixto basado en encuestas y entrevistas, el estudio examina la funcionalidad de estas herramientas en términos de capacidad para la resolución de problemas, impacto pedagógico y motivación. Los resultados indican que los recursos manipulativos físicos presentan ventajas en el aprendizaje a través de la percepción espacial y táctil, mientras que los virtuales favorecen experiencias didácticas más dinámicas e interactivas. No obstante, se identificaron desafíos relacionados con la accesibilidad a los recursos, la incidencia de errores técnicos y la necesidad de formación específica de los futuros/as docentes. En conclusión, la investigación corrobora que una integración equilibrada de ambos tipos de recursos manipulativos puede optimizar el aprendizaje matemático.

Palabras clave: Didáctica de las matemáticas, práctica educativa, recursos manipulativos, resolución de problemas.

Abstract

This study compares the effectiveness of physical and virtual manipulative resources in the context of solving mathematical problems during the training of future teachers. Employing a mixed-methods approach, including surveys and interviews, the research explores the functionality of these tools in terms of their problem-solving potential, pedagogical impact, and ability to foster motivation. The findings suggest that physical manipulative resources offer distinct advantages in learning through spatial and tactile engagement, whereas virtual resources support more dynamic and interactive learning experiences. Nonetheless, challenges were identified, including issues of resource accessibility, technical malfunctions, and the necessity for specialised training for prospective teachers. In conclusion, the study affirms that a balanced integration of both types of manipulative resources can enhance mathematical learning outcomes.

Keywords: Didactics of mathematics, educational practice, manipulatives, problem-solving.

INTRODUCCIÓN

En las últimas dos décadas, el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas ha experimentado un cambio de paradigma, con una creciente tendencia hacia enfoques más experienciales y activos (Khusna, Siswono, y Wijayanti, 2025). En este contexto, los materiales manipulativos, tanto físicos (Palacios Ortega, 2023; Romero-García et al., 2023) como digitales (Cortés et al., 2023; Pochulu et al., 2021), han desempeñado un papel clave en la transformación de las prácticas pedagógicas. Los materiales manipulativos físicos permiten a los/as estudiantes visualizar y manipular objetos

Ochugboju, A. y Díez-Palomar, J. (2025). Comparación de recursos manipulativos físicos y virtuales en la resolución de problemas: Un estudio de caso con docentes en formación. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. 325-332). SEIEM.

concretos, facilitando la transición hacia el pensamiento abstracto (Acosta et al., 2022). Por su parte, los recursos manipulativos digitales aprovechan la tecnología informática para ofrecer entornos de aprendizaje interactivos y adaptativos (Pochulu et al., 2021). Si bien estos últimos presentan un gran potencial, su eficacia relativa sigue siendo objeto de debate (Sarama y Clements, 2016), especialmente en lo que respecta a su integración en la formación docente. En esta comunicación se presentan los resultados de un estudio en el que un grupo de estudiantes de un Grado de formación de futuros maestros/as de matemáticas de primaria han usado recursos manipulativos físicos y digitales para resolver problema sobre la suma y fracciones. La pregunta de investigación que hemos realizado es: ¿Cómo influyen los recursos manipulativos físicos y los recursos digitales en el desarrollo de la competencia matemática de los futuros/as maestros/as de un Grado de educación primaria? De esta pregunta se derivan los siguientes objetivos de estudio: (1) Analizar la influencia que ejerce el tipo de recurso (físico o digital) sobre la competencia matemática de los futuros/as maestros/as participantes en el estudio, (2) determinar cuáles son los beneficios de cada tipo de recurso en las habilidades relacionadas con la resolución de problemas, (3) y establecer desafíos a partir de los objetivos anteriores, en el uso de ambos tipos de recursos como herramientas de enseñanza y aprendizaje en el contexto de la resolución de problemas.

MARCO TEÓRICO

Esta investigación se fundamenta en las teorías constructivistas del aprendizaje (Olmedo Torre y Farrerons Vidal, 2017). El uso de materiales manipulativos físicos se sustenta en la teoría del desarrollo cognitivo de Piaget, la cual postula una transición progresiva del pensamiento concreto al abstracto (Kamii et al., 2001). Trabajos previos sugieren que el uso de materiales manipulativos ayuda a los niños/as a desarrollar la comprensión de objetos matemáticos como los números, las formas, etc. (Sarama y Clements, 2016). Recursos como los bloques de base diez y las fichas de fracciones proporcionan a los futuros/as docentes una experiencia práctica tangible, facilitando la construcción de su comprensión conceptual (Byrne et al., 2023). Esta perspectiva es coherente con la propuesta de Piaget, quien sostiene que el conocimiento se desarrolla a través de la interacción con materiales manipulables en el entorno (Piaget y Inhelder, 1973; Piaget, 1977). Por otro lado, el constructivismo social de Vygotsky (1978) enfatiza el aprendizaje como un proceso mediado por la interacción social. En este contexto, los/as docentes en formación reciben retroalimentación inmediata al emplear materiales manipulativos virtuales, como las barras de fracciones digitales (Şimşek, 2021). Además, el aprendizaje se ve reforzado mediante estrategias de andamiaje y colaboración entre estudiantes y docentes (Arida et al., 2022). La incorporación de entornos de aprendizaje mejorados tecnológicamente (EAMT) permite a los/as futuros docentes optimizar sus prácticas pedagógicas al integrar recursos físicos y digitales en el aula. Ahora bien, la investigación todavía no ha aportado evidencias suficientes como para decidir si es mejor comenzar el proceso de aprendizaje de lo concreto a lo abstracto (Piaget, 1977; Bruner y Kenney, 1965) usando primero materiales manipulativos físicos, y pasando después a los digitales, o al revés, o bien haciendo una combinación de ambas tipologías. Acosta et al. (2022) sugieren que en los primeros estadios de aprendizaje (en infantil) es mejor empezar con los recursos manipulativos físicos, y luego pasar a recursos gráficos, mucho más abstractos. Sin embargo, los recursos gráficos no tienen por qué implicar el mismo nivel de abstracción en materiales digitales, ya que estos pueden simular características de los físicos. Lo que sí sabemos es que la experiencia combinada con herramientas físicas y digitales proporciona a los/as futuros docentes un conocimiento pedagógico sólido para usar ambos tipos de materiales en clase. Comprender cómo influyen los materiales manipulativos en el razonamiento matemático es clave para mejorar la didáctica. Este estudio adopta un enfoque constructivista, integrando la tradición piagetiana del desarrollo cognitivo y la visión sociocultural de Vygotsky, considerando los recursos manipulativos como herramientas clave para comprender la adición en el contexto de los números racionales (fracciones a/b).

METODOLOGÍA

El estudio utilizamos un enfoque metodológico mixto, combinando encuestas y entrevistas con futuros/as docentes. Participaron un total de 30 estudiantes de un programa de formación inicial (Grado de educación primaria). Se solicitó a los/as participantes resolver problemas matemáticos utilizando materiales manipulativos tanto concretos como virtuales. La recopilación de datos se llevó a cabo durante un período de tres meses, durante el cual los/as participantes realizaron actividades de resolución de problemas y proporcionaron retroalimentación sobre su experiencia.

Recogida de datos

Las técnicas que se usaron para recoger los datos fueron las siguientes.

- *Encuestas:* Se administraron cuestionarios para evaluar la competencia de los/as participantes en el uso de materiales manipulativos físicos y virtuales. Se preguntaron aspectos tales como: ¿qué tipo de recursos manipulativos preferían usar (concretos o digitales)?, ¿cuál era su grado de familiaridad con ambos tipos de materiales (se les proporcionaba un listado de recursos, y se les preguntaba que los ordenasen según el grado de familiaridad con ellos)?, ¿cuáles son los beneficios/retos de usar manipulativos de uno u otro tipo?, ¿cómo decidir qué tipo de recurso manipulativo usar para resolver un determinado problema, si físico o digital?, ¿qué aspectos pesan más en la elección de un recurso manipulativo -tanto físico, como digital-concreto para resolver problemas?).
- *Entrevistas:* Se llevaron a cabo entrevistas semiestructuradas para profundizar en las actitudes de los/as futuros docentes hacia el uso de materiales manipulativos en el aula. En las entrevistas semi-estructuradas se inquirió sobre la experiencia previa de los participantes en el uso de materiales manipulativos para la enseñanza de resolución de problemas (tanto recursos físicos como digitales), su opinión sobre cuál de ambos tipos le/a ayuda más para comprender los problemas de matemáticas, cuáles son, a su entender, los principales retos/desafíos de ambos tipos de recursos, como superan esos retos/desafíos, cómo el uso de materiales manipulativos (físicos y digitales) afecta a su razonamiento o su habilidad de resolver problemas de matemáticas, cómo miden la efectividad de los materiales manipulativos (tanto físicos como digitales), etc. Se exploraron los desafíos que enfrentan en la implementación de estos recursos, tales como la disponibilidad limitada de recursos, las dificultades en la comprensión de cómo usarlo, o el impacto en la gestión del tiempo en clase derivado de usar este tipo de recursos.
- *Observaciones:* Se realizaron grabaciones de video de las sesiones con el fin de analizar la interacción de los/as futuros docentes con los materiales manipulativos en contextos de aula. Se identificaron errores comunes en la resolución de problemas, lo que permitió a los investigadores detectar concepciones erróneas y lagunas en el conocimiento matemático. Asimismo, se monitorearon los patrones de interacción entre los/as docentes en formación.

Análisis de los datos

El análisis de datos combinó enfoques cualitativos y cuantitativos con el propósito de obtener una visión integral del uso de los materiales manipulativos en la formación docente en matemáticas.

- *Análisis cualitativo:* La información obtenida a través de entrevistas y observaciones en video fue sometida a un proceso de codificación temática, con el objetivo de identificar patrones recurrentes en la enseñanza, la resolución de problemas y las estrategias pedagógicas empleadas. Se utilizaron 4 códigos temáticos principales: beneficios, desafíos, estrategias y participación. Cada uno de ellos se subdividió en componentes, de acuerdo con un análisis preliminar de las respuestas obtenidas en las entrevistas. Este análisis permitió la identificación de temas clave relacionados con la participación de los futuros docentes, su

comprensión de los conceptos matemáticos y la eficacia percibida de los materiales manipulativos.

- *Análisis cuantitativo:* Los datos obtenidos mediante encuestas se analizaron utilizando estadística descriptiva, lo que permitió cuantificar las preferencias de los participantes en relación con el uso de materiales manipulativos físicos y digitales, así como su percepción de autoeficacia en el manejo de estos recursos. Este análisis estadístico facilitó la identificación de tendencias y patrones de respuesta, contribuyendo a una comprensión más amplia de la influencia de los recursos manipulativos en la formación docente. Para realizar el análisis se utilizó tanto EXCEL, como SPSS.

RESULTADOS

Beneficios de los recursos materiales manipulativos

Recursos manipulativos físicos

Los recursos manipulativos, tanto físicos como virtuales, contribuyeron significativamente a la mejora de las habilidades de resolución de problemas de los/as futuros docentes. En particular, los manipulativos físicos favorecieron la comprensión táctil y espacial. El 85 % de los/as participantes indicó que el contacto directo con los materiales facilitó la construcción del conocimiento, permitiéndoles desarrollar una comprensión más intuitiva de conceptos matemáticos, especialmente en temas como fracciones y geometría. Asimismo, el 78 % de los/as participantes reportó que el uso de herramientas físicas permitió clarificar el pensamiento abstracto al transformar los conceptos matemáticos en representaciones tangibles. Esta materialización del conocimiento abstracto resultó fundamental para el aprendizaje, especialmente en el desarrollo de la comprensión conceptual. Además, la interacción entre pares se destacó como un beneficio clave. El 70% de los/as participantes señaló que el trabajo colaborativo promovió la comunicación oral, la resolución de problemas en grupo y el intercambio de conocimientos. La dinámica grupal permitió la consolidación del aprendizaje, ya que los/as estudiantes explicaban sus razonamientos y exploraban diversos enfoques para la solución de problemas en colaboración con sus pares.

Recursos manipulativos virtuales

Los recursos manipulativos virtuales también fueron altamente valorados por los/as participantes, ya que el 90% los consideró útiles para proporcionar retroalimentación instantánea. En comparación con los enfoques tradicionales, las herramientas digitales permiten a los/as estudiantes observar de manera inmediata los resultados de su trabajo en la resolución de problemas, con el potencial de autocorrección y aprendizaje adaptativo. Una de las ventajas más destacadas fue la visualización gráfica de conceptos abstractos en tiempo real. El 82% de los/as participantes informó que el uso de recursos manipulativos virtuales mejoró su comprensión conceptual, ya que estas herramientas les permitieron explorar ideas matemáticas de manera interactiva. A través de la manipulación de variables y la observación de cambios en tiempo real, los/as futuros/as maestros/as pudieron profundizar en su aprendizaje y reforzar su comprensión de los principios matemáticos. Asimismo, el 75% de los/as participantes valoró la accesibilidad y la flexibilidad de los recursos manipulativos virtuales, destacando su utilidad para el aprendizaje autodirigido. A diferencia de las herramientas físicas, los manipulativos digitales pueden utilizarse en cualquier momento y lugar, lo que fomenta una mayor autonomía en la exploración de conceptos matemáticos y la realización de ejercicios independientes. Esta característica resultó especialmente beneficiosa para el aprendizaje diferenciado, permitiendo que los/as estudiantes trabajen a su propio ritmo y revisen contenidos según sus necesidades. Como consecuencia, se observó un impacto positivo en el desarrollo de la competencia matemática y en el fortalecimiento de la autoeficacia de los/as futuros/as docentes.

Desafíos

Desafíos en el uso de los recursos manipulativos físicos

El uso de materiales manipulativos físicos afronta diversos obstáculos, principalmente relacionados con la disponibilidad de recursos y las dificultades logísticas. La mayoría de los/as futuros/as maestros/as (65%) señaló la escasez de estos materiales, atribuida a su elevado costo y a los requerimientos de almacenamiento. Varios futuros/as docentes manifestaron que el uso de manipulativos en el aula, así como su mantenimiento, se ve limitado por restricciones financieras y logísticas, lo que dificulta su uso continuo en la enseñanza. Además, el 60% de los futuros maestros/as indicó que la utilización de materiales manipulativos físicos implica una preparación considerable. Esto se debe a la necesidad de organizar las actividades prácticas, garantizar el uso adecuado de los recursos y gestionar su distribución en el aula, que supone una carga adicional para los/as docentes.

Desafíos en el uso de los recursos manipulativos virtuales

Si bien los manipulativos virtuales ofrecen entornos de aprendizaje dinámicos e interactivos, su implementación en el aula presenta ciertas dificultades. El 70% de los/as futuros/as maestros/as reportó problemas técnicos, que abarcan desde fallos en el software hasta averías en los dispositivos, lo que obstaculizó su uso fluido durante la clase. Asimismo, el 65% señaló la falta de retroalimentación táctil como una limitación significativa, ya que algunos/as consideran que el contacto físico con los materiales es esencial para la comprensión de relaciones espaciales y estructuras matemáticas. La ausencia de esta interacción háptica podría afectar la adquisición de determinados conceptos, especialmente en ámbitos como la geometría. Por otro lado, el 60% identificó la distracción como una preocupación relevante. La naturaleza tecnológica de los manipulativos virtuales, aunque atractiva, puede desviar la atención del contenido matemático, reduciendo la eficacia del aprendizaje.

Prácticas de enseñanza

Los futuros/as maestros/as resaltaron la importancia de integrar tanto los recursos manipulativos físicos como los virtuales en la enseñanza, ajustándolos a las necesidades individuales de los/as estudiantes y a la naturaleza de los problemas matemáticos abordados.

Estrategias de integración

Los futuros/as maestros/as destacaron la necesidad de una planificación didáctica intencionada que combine de manera estratégica los manipulativos concretos y virtuales. En este sentido, el 80% recomendó emplear manipulativos físicos para la introducción de conceptos matemáticos fundamentales, mientras que el 75% sugirió el uso de herramientas virtuales para la exploración de conceptos avanzados. Asimismo, el 70% abogó por una combinación de ambos tipos de recursos para proporcionar una experiencia de aprendizaje integral. Además, los futuros/as maestros/as enfatizaron la importancia de ofrecer instrucciones detalladas y facilitar el proceso de aprendizaje para garantizar un uso eficaz de los materiales manipulativos. Esta metodología exige que los/as docentes desarrollen flexibilidad y capacidad de adaptación, lo que les permite ajustar el enfoque de enseñanza en función de las necesidades específicas de los estudiantes y del nivel de dificultad del concepto matemático a impartir.

Participación

Uso de los recursos manipulativos físicos en la enseñanza

El empleo de recursos manipulativos físicos en el aula ha demostrado ser más efectivo que el trabajo exclusivo con números abstractos, ya que facilita la comprensión de conceptos matemáticos complejos y fomenta la motivación estudiantil. Los datos de la encuesta revelaron que el 85 % de los futuros/as maestros/as percibió un aumento significativo en la motivación cuando interactuaban con

materiales físicos, como bloques y fichas de fracciones. La manipulación directa de estos recursos permitió que los futuros/as maestros/as comprendieran de manera más intuitiva conceptos matemáticos que, de otro modo, podrían resultar abstractos y difíciles de asimilar. Asimismo, el 78% manifestó un mayor compromiso y entusiasmo al trabajar con manipulativos físicos. La posibilidad de explorar y resolver problemas mediante la interacción con objetos tangibles convirtió el aprendizaje en una experiencia más dinámica y colaborativa, incentivando la participación activa y el trabajo en equipo.

Uso de manipulativos virtuales en la enseñanza

Los manipulativos virtuales también desempeñaron un papel importante en la implicación de los estudiantes, especialmente en el contexto de las tareas matemáticas. El uso de herramientas virtuales, como simulaciones interactivas y aplicaciones, resultó altamente efectivo, ya que el 90% de los participantes reportaron una notable participación estudiantil al emplear estos recursos. Las herramientas dinámicas y visualmente atractivas ofrecieron a los estudiantes una manera más clara y comprensible de abordar los conceptos matemáticos, facilitando la comprensión de ideas abstractas. Además, el 82% de los futuros/as maestros/as destacó que estar más motivados al utilizar manipulativos virtuales, en particular para la visualización dinámica de las relaciones matemáticas. La posibilidad de manipular variables y observar en tiempo real los efectos de esos cambios en las relaciones matemáticas convirtió el aprendizaje en una experiencia más interactiva y personalizada.

DISCUSIÓN

Discusión de los resultados

De acuerdo con las teorías constructivistas de Piaget y Vygotsky, los niños aprenden de manera efectiva a través de la acción y la interacción. Las actividades de aprendizaje táctil (manipulativas) pueden hacer que las matemáticas sean interactivas, atractivas y divertidas. Los recursos manipulativos físicos, como los bloques y las fichas de fracciones, demostraron ser eficaces para mejorar la comprensión táctil y espacial de los futuros/as maestros/as sobre conceptos matemáticos. En consonancia con la teoría de Piaget, el 85% indicó una mayor participación en las actividades cuando se utilizaban estos recursos físicos, lo cual facilitó la asimilación de conceptos abstractos mediante la manipulación directa. Además, el 78% destacó que su motivación aumentó al interactuar con objetos concretos durante el aprendizaje (Björklund, 2014). Por otro lado, el enfoque constructivista social de Vygotsky subraya la importancia de la interacción social y la colaboración en el aprendizaje, lo cual se observó en este estudio, donde el 70% de los futuros/as maestros/as señaló una mayor interacción entre compañeros/as durante las tareas grupales. No obstante, la investigación también identificó desafíos logísticos, como la oferta limitada de materiales (65 %), los altos costos (60 %) y las dificultades de almacenamiento (55 %), lo que podría limitar el uso efectivo de manipulativos físicos en las aulas (Agyei et al., 2022). Estos resultados sugieren que, para maximizar los beneficios de los manipulativos físicos, se requiere una inversión adecuada en recursos y capacitación. En contraste, los recursos manipulativos virtuales demostraron ser igualmente valiosos, ofreciendo experiencias de aprendizaje dinámicas e interactivas, especialmente para conceptos más complejos, como fracciones y división. La retroalimentación inmediata proporcionada por las herramientas virtuales aumentó la participación activa del 90% de los futuros/as maestros/as, mientras que la visualización dinámica mejoró la comprensión conceptual del 82%. El uso de manipulativos virtuales permite a los/as estudiantes explorar conceptos a su propio ritmo y colaborar con sus compañeros/as de manera interactiva, lo que facilita un aprendizaje más personalizado y accesible (Anderson-Pence y Moyer-Packenham, 2016). Sin embargo, los problemas técnicos (70%), la falta de retroalimentación táctil (65%) y las distracciones (60%) fueron desafíos importantes señalados por los/as participantes. Estos problemas apuntan a la necesidad de contar con tecnología fiable y un diseño pedagógico cuidadoso para evitar que los manipulativos virtuales se conviertan en una distracción y no en una herramienta eficaz para el aprendizaje (Bouck et al., 2017).

Implicaciones para la formación docente

La investigación sugiere que los futuros/as maestros/as deben estar preparados para utilizar tanto recursos manipulativos físicos como virtuales en sus clases de matemáticas, adaptándolos a las necesidades y características del alumnado. Según las recomendaciones del 80% de los/as futuros/as maestros/as participantes en este estudio, una combinación de manipulativos físicos y virtuales es la mejor opción para la enseñanza de conceptos matemáticos, ya que cada tipo de material tiene fortalezas en distintos contextos de aprendizaje. Mientras que los manipulativos físicos son eficaces para introducir conceptos simples, los manipulativos virtuales pueden ser más adecuados para explorar conceptos más complejos y avanzados. Este enfoque híbrido contribuye a una enseñanza más flexible y dinámica, y prepara a los futuros docentes para abordar las diversas necesidades del alumnado en contextos de aprendizaje multiculturales (Burns y Hamm, 2011).

CONCLUSIONES

Este estudio ha contribuido al conocimiento sobre el uso de recursos manipulativos en el aprendizaje de las matemáticas, comparando la eficacia de los manipulativos físicos y virtuales. Los resultados respaldan la idea de que ambos tipos de materiales tienen un impacto positivo en la resolución de problemas, la motivación y la comprensión de conceptos matemáticos. Las implicaciones para la formación docente en prácticas son claras: es esencial dotar a los/as futuros/as docentes de las herramientas y la capacitación necesarias para usar eficazmente estos recursos en el aula. Los estudios futuros deberían explorar el valor añadido del uso combinado de manipulativos físicos y virtuales en aulas multiculturales, con el fin de proporcionar más información sobre cómo estos recursos pueden facilitar el aprendizaje de las matemáticas y mejorar las prácticas pedagógicas.

Referencias

- Acosta, Y., Alsina, Á. y Pincheira, N. (2022). Recursos manipulativos y gráficos en la comprensión de tareas con patrones: un análisis comparativo con niños de 4 a 6 años. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 119-127). SEIEM.
- Agyei, E., Agamah, C. D. y Entsie, G. (2022). Availability of manipulatives in teaching and learning mathematics in Ghana Colleges of Education. *American Journal of Educational Research*, 4(10), 188-193. <https://doi.org/10.12691/education-10-4-5>
- Akkan, Y. y Çakir, Z. (2012) Preservice classroom teachers' opinions on using different manipulatives in mathematics teaching. *The Journal of Instructional Technologies & Teacher Education*, 1(1), 68-83.
- Anderson-Pence, K. y Moyer-Packenham, P. (2016). The influence of different virtual manipulative types on student-led techno-mathematical discourse. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 35(1), 5-31.
- Anderson-Pence, K. L. (2020). Virtual manipulatives: Making effective instructional choices. *Colorado Mathematics Teacher*, 53(1), 1-5.
- Arida, R. A., Andrade, R. R. y Mabilangan, R. A. (2022). Mathematics self-efficacy and the use of virtual math manipulatives among pre-service teachers. *International Journal of Educational Management and Development Studies*, 3(2), 45-66. <https://doi.org/10.53378/352897>
- Björklund, C. (2014). Less is more—mathematical manipulatives in early childhood education. *Early Child Development and Care*, 184(3), 469-485. <https://doi.org/10.1080/03004430.2013.799154>
- Bockshecker, A., Ebner, K. y Smolnik, S. (2022). Technology-enhanced learning environments and adaptive learning systems – Development of functionality taxonomies. *Hawaii International Conference on System Sciences*. Retrieved from <http://hdl.handle.net/10125/79337>
- Bolyard, J. y Moyer-Packenham, P. (2012). Making sense of integer arithmetic: The effect of using virtual manipulatives on students' representational fluency. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 31(2), 93-113.

- Bouck, E. C. y Sprick, J. (2018). The virtual-representational-abstract framework to support students with disabilities in mathematics. *Intervention in School and Clinic*, 54(3), 173-180. <https://doi.org/10.1177/1053451218767911>
- Bouck, E. C., Bassette, L., Shurr, J., Park, J., Kerr, J. y Whorley, A. (2017). Teaching equivalent fractions to secondary students with disabilities via the virtual-representational-abstract instructional sequence. *Journal of Special Education Technology*, 32(4), 220-231. <https://doi.org/10.1177/0162643417727291>
- Bruner, J. S. y Kenney, H. J. (1965). Representation and mathematics learning. *Monographs of the Society for Research in Child Development*, 30(1), 50-59. <https://doi.org/10.2307/1165708>
- Burns, B. A. y Hamm, E. M. (2011). A comparison of concrete and virtual manipulative use in third and fourth-grade mathematics. *School Science and Mathematics*, 111(6), 256-261. <https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2011.00086.x>
- Byrne, E. M., Jensen, H., Thomsen, B. S. y Ramchandani, P. G. (2023). Educational interventions involving physical manipulatives for improving children's learning and development: A scoping review. *Review of Education*, 11(2), e3400. <https://doi.org/10.1002/rev3.3400>
- Cortés, A., Breda, A. y Sánchez, A. (2023). La incorporación de la metodología activa gamificación en las unidades didácticas de futuros profesores de matemáticas de secundaria. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (p. 564). SEIEM.
- Kamii, C., Lewis, B. A. y Kirkland, L. (2001). Manipulatives: When are they useful?. *The Journal of Mathematical Behavior*, 20(1), 21-31. [https://doi.org/10.1016/S0732-3123\(01\)00059-1](https://doi.org/10.1016/S0732-3123(01)00059-1)
- Khusna, A. H., Siswono, T. Y. E. y Wijayanti, P. (2025). ¿Cómo se manifiestan las habilidades de pensamiento crítico de los estudiantes al resolver problemas de forma colaborativa? *Avances De Investigación En Educación Matemática*, 27, 21-41. <https://doi.org/10.35763/aiem27.5669>
- Olmedo-Torre, N. y Farrerons-Vida, O. (2017). *Modelos constructivistas de aprendizaje en programas de formación*. OmniaScience Monographs.
- Piaget, J. (1977). *Seis estudios de psicología*. Labor.
- Piaget, J. e Inhelder, B. (1973). *Memory and intelligence*. Routledge y Kegan Paul.
- Pochulu, M., Font, V. y Breda, A. (2021). Simulación de intervenciones docentes ante conjeturas de los estudiantes en un entorno de resolución de problemas con recursos TIC. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 505-512). SEIEM.
- Romero-García, C., Manzanal Martínez, A. I. y Palacios Ortega, A. (2023). Impacto del proceso de formación del maestro en su afectividad hacia las Matemáticas. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 24, 93-110. <https://doi.org/10.35763/aiem24.4418>
- Sarama, J. y Clements, D. H. (2016). Physical and virtual manipulatives: What is “concrete”? En P. Moyer-Packenham (Ed.), *International perspectives on teaching and learning mathematics with virtual manipulatives. Mathematics education in the digital era* (Vol 7, pp.71-93). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-32718-1_4
- Şimşek, M. (2021). Examining the digital learning material preparation competencies of pre-service mathematics teachers. *Participatory Educational Research*, 8(3), 323-343. <https://doi.org/10.17275/per.21.68.8.3>
- Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Harvard University Press.

ⁱ Este trabajo se ha desarrollado en el marco del proyecto PID2021-127104NB-I00 (MICINN, FEDER, UE).