

JUSTIFICACIONES A TRAVÉS DE LA REPRESENTACIÓN GRÁFICA EN SEGUNDO Y TERCER CICLO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Justifications through graphical representation in the second and third cycle of primary education

Pérez-Martos, M. C., Moreno, A., Torres, M. D. y Cañadas, M. C.

Universidad de Granada

Resumen

Este trabajo se enmarca en un proyecto centrado en el pensamiento algebraico de estudiantes de educación primaria. Nuestro objetivo es identificar y describir las justificaciones sobre la generalización y realizadas a través de gráficos cartesianos de estudiantes de 3º, 4º, 5º y 6º de educación primaria. Recogimos información a través de cuatro sesiones de grupo-clase y entrevistas posteriores realizadas a seis estudiantes de cada curso. En este estudio analizamos las transcripciones de los 24 estudiantes entrevistados y atendemos a las justificaciones sobre la generalización y realizadas a través de gráficos cartesianos. Los resultados evidencian la capacidad de estos estudiantes para justificar la generalización, y que, en ocasiones, estas justificaciones las hacen los estudiantes que no habían conseguido generalizar en las sesiones.

Palabras clave: educación primaria, generalización, justificación, pensamiento funcional, representación gráfica.

Abstract

This work is part of a project focused on the algebraic thinking of elementary school students. Our objective is to identify and describe the justifications about generalization and made through Cartesian graphs of students in 3rd, 4th, 5th and 6th grades of primary education. We collected information through four group-class sessions and subsequent interviews with six students from each grade. In this study we analyzed the transcripts of the 24 students interviewed and we paid attention to the justifications on the generalization made through cartesian graphs. The results show the ability of these students to justify generalization, and that sometimes these justifications are made by students who had failed to generalize in the sessions.

Keywords: cartesian graphs, elementary education, functional thinking, generalization, justification

INTRODUCCIÓN Y JUSTIFICACIÓN

Autores como Ellis y Özgür (2023) evidencian el interés actual de los investigadores en educación matemática por el pensamiento funcional. Generalizar, representar, justificar y razonar, con estructuras y relaciones matemáticas, son las cuatro prácticas esenciales del pensamiento funcional (Blanton et al., 2018). Aquí nos enfocamos en el trabajo con tres de estas prácticas, generalizar, representar y justificar, en tareas que persiguen el desarrollo del pensamiento funcional.

El pensamiento funcional es un tipo de pensamiento algebraico en el que “el concepto de función, las relaciones entre las cantidades involucradas, y la variación conjunta entre cantidades son contenidos clave que permiten desarrollar el pensamiento algebraico en estudiantes de primeros niveles educativos” (Cañadas y Molina, 2016, p. 210). La importancia de pensamiento se reforzó con la inclusión del sentido algebraico en el currículo de primaria en España (Ministerio de Educación,

Cultura y Deporte, 2022). Por su parte, el *National Council for Curriculum and Assessment* (NCCA, 2014) menciona la necesidad de ayudar a los estudiantes a entender ciertos aspectos del pensamiento algebraico y conseguir comunicarlos. Justificar ayuda al desarrollo de la comunicación. Los estudiantes expresan sus justificaciones mediante diferentes representaciones. Nos centramos en los gráficos cartesianos, una de las representaciones menos exploradas, y en la que la generalización se observa mediante patrones visuales (Moreno, 2024).

El objetivo de este trabajo es identificar y describir las justificaciones sobre la generalización realizadas a través de gráficos cartesianos de estudiantes de 3º, 4º, 5º y 6º de educación primaria.

MARCO TEÓRICO Y ANTECEDENTES

Según Blanton et al. (2018) hay cuatro prácticas esenciales que hay que trabajar en el aula con el estudiantado para el desarrollo de su pensamiento funcional: generalizar, representar, razonar y justificar. En este estudio nos centramos en las prácticas de generalizar, representar y justificar.

La generalización en lo relativo a funciones incluye establecer relaciones generales entre cantidades que covarían, expresándolas mediante diferentes representaciones (verbal, simbólica, tabular, gráfica, etc.), como también razonar con esas representaciones para analizar el comportamiento de la función (Blanton et al., 2011). En línea con Kieran (1989), entendemos la función como la organización y relación de los elementos de una regularidad entre variables que covarían.

Una de las representaciones empleadas habitualmente para expresar funciones es el gráfico cartesiano (Carragher et al., 2008). Arcavi (2003) considera que se trata de una representación de naturaleza visual. Cañadas et al. (2024) observan cómo estudiantes de tercero y cuarto de primaria construyen y leen gráficos cartesianos, y obtienen que estos estudiantes son capaces de leer más allá de los datos en esta representación. En este trabajo extendemos lo anterior a quinto y sexto de primaria, además de atender a las justificaciones que dan cuenta de la lectura más allá de los datos mencionada. Cañadas et al. (2024) concluyen además que “la generalización ofrecida a partir de una representación gráfica pasa por la evidencia de una tendencia de puntos obtenida a partir de pautas y procedimientos específicos de lectura y construcción” (p. 1076). En un trabajo previo (Pérez-Martos et al., 2024) estudiamos los diferentes tipos de justificaciones que se evidenciaban en un grupo de estudiantes de quinto de primaria.

Para Stephens et al. (2017), la práctica de justificar contribuye a una mayor claridad y al refinamiento de la forma de expresión de las ideas matemáticas generales de los estudiantes. Para Balacheff (2000), una justificación es cualquier intervención en la que un estudiante intenta explicar o verificar la veracidad de una afirmación matemática, con la intención de convencer a otra persona y/o a sí mismo. En el contexto del pensamiento algebraico, Blanton et al. (2018) afirman que, cuando los estudiantes justifican, desarrollan argumentos matemáticos para defender o refutar la validez de una generalización propuesta. Estos mismos autores indican que, aunque la mayoría están basadas en razonamientos con casos particulares, ciertos estudiantes de primaria pueden hacer justificaciones más sofisticadas como son las basadas en razonamientos generales o en representaciones. Nos centramos aquí en las justificaciones sobre la generalización realizadas a través de gráficos cartesianos.

En este trabajo tomaremos como justificación, siguiendo a Balacheff (2000), toda aquella explicación de los estudiantes que explique o verifique sus afirmaciones algebraicas con la representación gráfica. Esta explicación puede ir en respuesta directa a una pregunta del investigador, o puede darse de forma espontánea por parte del alumnado. Consideramos que se aprecia generalización en una justificación cuando el estudiantado evidencia una tendencia de puntos o patrón visualizados durante la construcción o lectura del gráfico.

METODOLOGÍA

Este es un estudio cualitativo, exploratorio y descriptivo (Stake, 1999) en torno a la generalización, la representación y las justificaciones que ofrecen los estudiantes foco del estudio en las entrevistas realizadas después de su trabajo en las sesiones de grupo-clase. Desarrollamos este trabajo en el marco de un proyecto de investigación que cuenta con la colaboración de un colegio público situado al sur de España. Además, contamos con el permiso del comité de ética de la Universidad.

Recogida de datos y participantes

Realizamos una recogida de información en los últimos dos ciclos de primaria. Seleccionamos estos dos ciclos debido a que existen investigaciones anteriores sobre la generalización a través de diversas representaciones (Brizuela et al., 2021). Ahora buscamos profundizar en una de las ideas en torno a las que giran las competencias matemáticas en el currículo, las justificaciones, concretamente aquellas que pueden ofrecer estudiantes de estas edades cuando trabajan la generalización y la representación gráfica. Esta recogida constó de cuatro sesiones de grupo-clase y seis entrevistas individuales semi-estructuradas posteriores con seis estudiantes de cada curso. En las sesiones de grupo-clase se trabajaron las representaciones tabular y gráfica con los estudiantes, y en las entrevistas posteriores fue donde profundizamos en el trabajo y comprensión de estas representaciones. El diseño de sesiones y entrevistas, así como de las tareas realizadas en estas, se llevó a cabo por el equipo de investigación del proyecto. La implementación estuvo a cargo de un investigador-docente, con el apoyo de otros dos miembros del equipo de investigación. Los cuatro autores de este trabajo estuvieron involucrados en el análisis de la información.

En este documento mostramos los resultados obtenidos del análisis de las entrevistas realizadas (24 entrevistas). Las entrevistas se realizaron a seis estudiantes de cada curso que seleccionamos con el siguiente criterio: dos estudiantes que generalizaron en la primera sesión, otros dos que no generalizaron en la primera, pero sí en alguna de las sesiones posteriores y otros dos que no generalizaron en ningún momento. Realizamos la selección con base en la revisión de las producciones escritas resultantes del trabajo durante las sesiones de grupo-clase. Para nombrar a los estudiantes entrevistados manteniendo su anonimato, asignamos a cada uno de ellos una etiqueta formada por una letra y un número: T_i para los seis estudiantes de 3º, C_i para los de 4º, Q_i para los de quinto y S_i para los de sexto; con $i=1, \dots, 6$. Los números 1 y el 2 se corresponden con los estudiantes que generalizaron desde el principio, el 3 y el 4 con aquellos que no lo consiguieron al principio, pero sí en algún otro momento posterior y el 5 y el 6 para los que no generalizaron en ninguna de las producciones de las sesiones.

Sesiones de grupo-clase

En las sesiones de grupo-clase, los estudiantes del segundo ciclo trabajaron tareas de generalización que involucraban las funciones $f(n)=2n$, $f(n)=2n+5$, $f(n)=3n$ y $f(n)=2n+1$, y los del tercer ciclo trabajaron tareas de generalización que involucraban las funciones $f(n)=2n+5$, $f(n)=3n$ y $f(n)=2n+2$. En todos los cursos se trabajaron las tareas a través de las representaciones verbal, simbólica, tabular y gráfica. Las preguntas involucradas giraron en torno a la lectura e interpretación de diferentes representaciones. El contacto previo que habían tenido estos estudiantes con los gráficos, la generalización y la justificación de sus respuestas en contextos funcionales fue únicamente el de las sesiones de grupo-clase. Mostramos a continuación la que fue la primera sesión de grupo-clase para los cuatro cursos (ver Figura 1):

Figura 1
Primera sesión de grupo-clase

Parque de atracciones de Málaga. 5 euros por el carnet de socio y 2 euros por viaje.

1. Si te haces socio y das 3 viajes, ¿cuántos euros debes pagar?

2. Si te haces socio y das 8 viajes, ¿cuántos euros debes pagar?

Viajes	Euros	¿Cómo lo has hecho?

3. a. Completa la siguiente tabla escribiendo los euros que gastas si das el número de viajes que aparecen ahí, teniendo en cuenta que te haces socio y tienes el carnet.

3. b. ¿Cómo lo has hecho? Explicalo.

Viajes	Euros
1	
10	
3	
9	
25	

Entrevistas

En este trabajo nos centramos en las veinticuatro entrevistas realizadas por ser el momento en el que más información ofrece el estudiantado. Como instrumentos de recogida de datos empleamos tanto las videograbaciones como las fichas de trabajo. En las entrevistas involucramos las funciones $f(n)=3n+1$ y $f(n)=2n+2$, dos contextos y tres representaciones. Cada entrevista duró unos 20 minutos y tuvo tres partes diferenciadas, cada una centrada en una representación: pictórica, tabular y gráfica. A continuación, describimos el protocolo seguido.

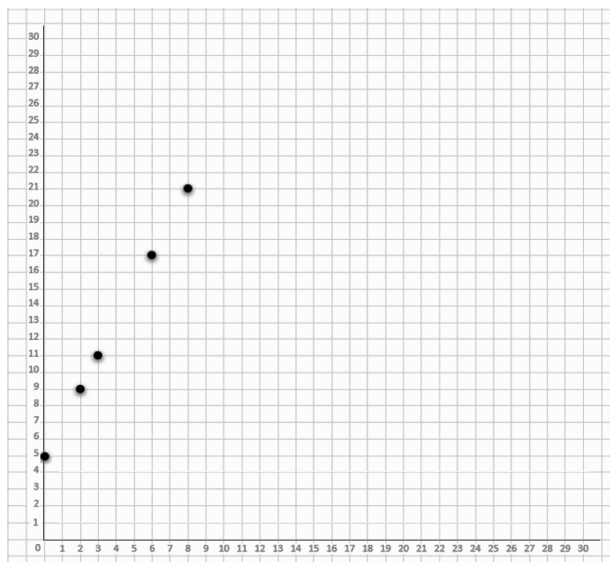
Parte 1. Tenemos dos contextos para plantear a los estudiantes. Los dos están asociados a la misma relación funcional: una máquina misteriosa donde entra un número de bolas, y sale un número diferente, los estudiantes deben averiguar cómo funciona la máquina; y un parque de atracciones, donde saben que deben pagar la entrada, y luego, una vez dentro, tres euros por cada atracción en la que suban. Comenzamos de mayor a menor nivel de dificultad, hasta que captan la regularidad. En primer lugar, presentamos la máquina misteriosa, donde no indicamos cuál es el valor de la constante. En caso de no evidenciar regularidad, pasamos al contexto del parque de atracciones, donde tienen que pagar la entrada, que se corresponde con el valor de la constante. Dentro de cada contexto también consideramos dos funciones diferentes, $3n+1$, $2n+2$, de mayor a menor dificultad.

Ofrecemos la representación pictórica del contexto y hacemos preguntas para que identifiquen regularidades y/o estructuras: “si entran cuatro bolas, ¿cuántas saldrían?” (y otros particulares); “para cualquier número de bolas que entren, ¿cuántas bolas saldrían?”; “¿cómo explicarías el funcionamiento de la máquina?”.

Parte 2. Representación tabular del contexto y relación funcional trabajados en la primera parte. Hicimos la siguiente pregunta: “¿serías capaz de representar en una tabla esta situación?”.

Parte 3. Representación gráfica del contexto y relación funcional que viene trabajando. Preguntamos: “¿serías capaz de representar en un gráfico esta situación?”. En 3º y 4º, si el estudiante no conseguía realizar el gráfico, se le daba uno hecho que representaba los puntos de una función con naturales ($2n+5$ o $n+3$) para ver si detectaba alguna regularidad (ver Figura 2).

Figura 2
Representación gráfica ofrecida en la entrevista de 3º y 4º ($f(n)=2n+5$)



Análisis de datos

La codificación se ha llevado a cabo mediante la técnica del análisis de contenido (Rico y Fernández-Cano, 2013), tras transcribir las entrevistas de los 24 estudiantes. Tomamos como unidad de análisis cada una de las intervenciones orales de cada estudiante, en las que ofrecían una explicación con la que intentaban convencer o convencerse de una idea relacionada con la generalización sobre la representación gráfica.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

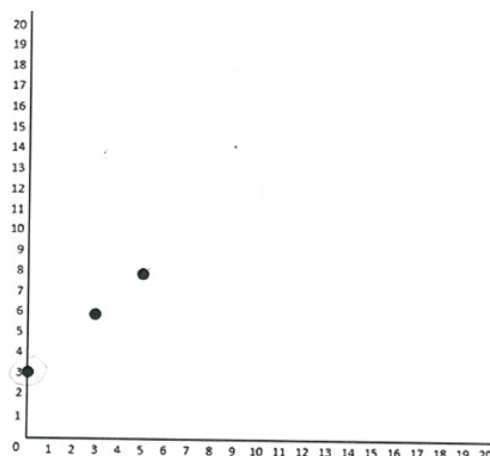
Encontramos un total de 12 justificaciones sobre la generalización, realizadas a través de la representación gráfica. En 3º y 4º encontramos 2 justificaciones en cada curso, y en 5º y 6º 4 en cada curso. De los 24 estudiantes entrevistados, 9 ofrecieron justificaciones de este tipo (T1, C1, C6, Q1, Q3, Q5, S3, S4 y S6). Los estudiantes T1, Q1 y S4 son los que más justificaciones ofrecieron. De los 9 estudiantes, 3 son de los que no habían conseguido generalizar en ningún momento durante las sesiones (C6, Q5 y S6), otros 3 son de los que generalizaron en algún momento, pero no desde el inicio (Q3, S3 y S4), y solo tres de estos estudiantes se encuentran entre los que generalizaron desde el primer momento en las sesiones (T1, C1 y Q1). Cabe destacar también que, en el último curso de primaria, no ofrecieron justificaciones de este tipo ninguno de los estudiantes de los que generalizaron durante las sesiones desde un inicio.

Justificaciones sobre la generalización a través de la representación gráfica en 3º

En tercero de primaria identificamos dos justificaciones de este tipo. Estas justificaciones las ofreció T1. A continuación mostramos estas dos justificaciones, ambas consecutivas en el transcurso de la entrevista y ofrecidas con base en el gráfico dado ya construido asociado a la relación $n+3$ (ver Figura 3). El investigador (I) le dio este gráfico a T1, le dijo que lo observara y seguidamente se dio el siguiente diálogo entre ellos:

- T1: Es sumar tres a las que entran (dice señalando el gráfico).
I: Y si tuviéramos que seguir poniendo puntos, ¿cómo irían?
T1: Así, en diagonal (dice moviendo el lápiz sobre la recta imaginaria que se formaría al unir los puntos del gráfico).

Figura 3
Representación gráfica ofrecida en la entrevista de 3º y 4º ($f(n)=n+3$)

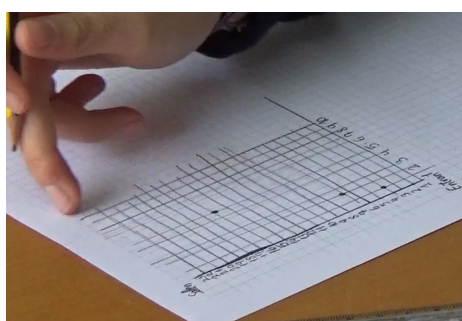


Cada una de las intervenciones de T1 una justificación sobre una generalización y basada en la representación gráfica. Con la primera de ellas, sin estímulo por parte del investigador, intenta convencerse a sí mismo de una regularidad con la que obtener los puntos del gráfico. En la segunda, T1 respondió mostrando haber identificado la tendencia que seguían los puntos gracias a la visualización del gráfico cartesiano (Cañadas et al., 2024; Moreno, 2024).

Justificaciones sobre la generalización a través de la representación gráfica en 4º

En 4º curso identificamos 2 justificaciones de este tipo. Observamos una de C1 y otra de C6. Mostramos a continuación el ejemplo de C6 por ser el más clarificador. C6 construyó correctamente el gráfico, colocando en él ciertos puntos trabajados anteriormente. Entonces I le preguntó cómo continuarían los puntos, a lo que C6 respondió “así, en línea” (dice señalando con el dedo la recta imaginaria que se formaría al unir los puntos del gráfico. Ver Figura 4).

Figura 4.
C6 señalando por dónde seguirían los puntos de gráfico



Justificaciones sobre la generalización a través de la representación gráfica en 5º

Hubo un total de 4 justificaciones sobre la generalización y a través del gráfico en 5º. Dos de estas justificaciones las ofreció Q1, y las dos restantes, una Q3 y otra Q5. Mostramos como ejemplo una de las justificaciones de Q1, por ser la más clara:

I: ¿Cómo estás construyendo eso?

Q1: ¿Cómo? Pues me fijo... primero hago los dos primeros, o los tres, y digo ¿cómo sube? Pues, miro cómo sube y como me he dado cuenta que es tres para el lado y uno para arriba, pues lo hago así. (Y sigue poniendo puntos sin necesidad de atender a los números en los ejes, siguiendo la tendencia)

La tendencia que identifica el estudiante en este caso, es diferente a las identificadas por los estudiantes de cursos previos. Q1 generaliza sin necesidad de atender a los valores en los ejes, el patrón identificado es visual en su totalidad.

Justificaciones sobre la generalización a través de la representación gráfica en 6º

En 6º, S3, S4 y S6, ofreciendo una justificación, dos y una, respectivamente. Mostramos el ejemplo de S3, por ser el más clarificador. Después de que S3 construyera y leyera los casos particulares correctamente, I le hizo una pregunta que le llevó a la siguiente justificación:

- I: (...) ahora, viendo el gráfico, ¿eres capaz de decirme una expresión más general?
- S3: Que con una salen cuatro y a partir de ahí van saliendo tres. Con una bola más que eches, salen tres más (dice mirando el gráfico).

De nuevo hay evidencia de la observación de una tendencia propia de la representación gráfica (“con una más que eches, salen tres más”).

CONCLUSIONES

Este trabajo confirma que, desde tercero de primaria, los estudiantes pueden comunicar sus ideas matemáticas y así intentar convencer a los demás y/o a sí mismos de su veracidad o falsedad de las mismas. De hecho, a raíz de nuestros resultados, conjeturamos que los estudiantes pueden realizar esto desde cursos inferiores. Blanton et al. (2018) indican que entre los estudiantes de primaria pueden surgir justificaciones más sofisticadas que las relacionadas con razonamientos sobre casos particulares, como son las basadas en representaciones. Todas las justificaciones analizadas en este trabajo se basan en gráficos cartesianos, por lo que apoyamos la idea anterior. Con nuestro estudio, además, observamos cómo surgen también justificaciones sobre razonamientos de casos generales. En cuanto a la generalización durante el trabajo con gráficos cartesianos, en línea con autores como Cañadas et al. (2024) o Moreno (2024), concluimos que sucede mediante la identificación de una tendencia o patrón visualizado en dicha representación. Esta tendencia o patrón pueden estar relacionados, o no estarlo, con los ejes y los valores situados en ellos. Encontramos que cuando los estudiantes no atienden a los valores de los ejes, la tendencia observada en el gráfico es recursiva, es decir, necesita del punto anterior para colocar los siguientes.

Destacamos con este trabajo la importancia de las representaciones visuales (Arcavi, 2003), puesto que llevan a los estudiantes a ofrecer una tipología de justificaciones realizadas a través de la observación de tendencias, que no ofrecen durante el trabajo con otras representaciones no visuales como la simbólica, por ejemplo.

Cabe destacar además que un tercio de los estudiantes que ofrecen justificaciones sobre la generalización, se encuentra entre los que no habían conseguido generalizar durante las sesiones. Esta última idea nos permite evidenciar la importancia de realizar entrevistas individuales. Conjeturamos que, por timidez o por otro motivo, los estudiantes pueden no mostrar todo de los que son capaces en las sesiones comunes de grupo-clase.

Si comparamos los cursos, encontramos un mayor número de justificaciones sobre la generalización y a través de los gráficos cartesianos en el tercer ciclo que en el segundo. En este sentido, como líneas futuras, planteamos analizar, no únicamente las justificaciones generalizadas, sino también las particulares e indeterminadas. También podríamos tener en cuenta representaciones diferentes de la gráfica, para así poder realizar una comparación más exhaustiva entre las justificaciones de estudiantes de los cuatro cursos.

Agradecimientos

Este trabajo se ha realizado con el apoyo de los proyectos PID2020-113601GB-I00 financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033, PID2024-157106NB-I00 y la ayuda PRE2021-097391.

Referencias

- Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52, 215-241.
- Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. Una empresa docente.
- Blanton, M. L., Brizuela, B. M., Stephens, A., Knuth, E., Isler, I., Gardiner, A. M., Stroud, R., Fonger, N. L. y Stylianou, D. (2018). Implementing a framework for early algebra. En C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds. ICME-13 Monographs* (pp. 27-49). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_2
- Blanton, M., Levi, L., Crites, T. y Dougherty, B. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in Grades 3-5*. NCTM.
- Brizuela, B. M., Blanton, M. L. y Kim, Y. (2021). A kindergarten student's use and understanding of tables while working with function problems. En A. G. Spinillo, S. L. Lautert y R.E.d.S.R. Borba (Eds.), *Mathematical reasoning of children and adults* (pp. 171-190). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-69657-3_8
- Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruíz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209-218). Comares.
- Cañadas, M. C., Moreno, A. y Torres, M. D. (2024). First encounter with constructing graphs in the functional thinking approach to school algebra in 3rd and 4th grades. *ZDM- Mathematics Education*, 56, 1059-1078. <https://doi.org/10.1007/s11858-024-01627-2>
- Carraher, D. W., Martinez, M. V. y Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM-Mathematics Education*, 40, 3-22. <https://doi.org/10.1007/s11858-007-0067-7>
- Ellis, A. B. y Özgür, Z. (2023). Trends, insights, and developments in research on the teaching and learning of algebra. *ZDM-Mathematics Education*, 56, 199-210. <https://doi.org/10.1007/s11858-023-01545-9>
- Kieran, C. (1989). The early learning of algebra: A structural perspective. En S. Wagner y C. Kieran (Eds.), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra* (Vol. 4, pp. 33-56). NCTM.
- Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2022). Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. *Boletín Oficial del Estado*, 52, 24386-24504.
- Moreno, A. (2024). Generalization processes of 5th grade elementary school students using graphs. En A. Twohill, I. I. Baykal, J. Miller, E. Knuth y A. Ribeiro (Eds.), *Proceedings from ICME 15, Topic Study Group 1.2: Teaching and learning of early algebra*. ICME.
- National Council for Curriculum and Assessment [NCCA] (2014). *Mathematics in early childhood and Primary Education (3-8 years). Definitions, theories, development and progression*. Autor.
- Pérez-Martos, M. C., Moreno, A., Cañadas, M. C. y Torres, M. D. (2024). Justificaciones de alumnos de quinto de primaria en tareas con diferentes contextos. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Research in Mathematics Education XXVII* (pp. 417-424). SEIEM.
- Rico, L. y Fernández-Cano, A. (2013). Didactical analysis and research methodology. En L. Rico, J. L. Lupiáñez y M. Molina (Eds.), *Análisis didáctico en Educación Matemática. Metodología de investigación, innovación curricular y formación de profesores* (pp. 1-22). Comares.
- Stake, R. E. (1999). *Investigación con estudio de casos*. Ediciones Morales S. L.
- Stephens, A., Strachota, S., Knuth, E., Blanton, M., Isler, I. y Gardiner, A. (2017). The interplay between students' understandings of proportional and functional relationships. En E. Galindo y J. Newton (Eds.), *Proceedings of the 39th annual meeting of the North American chapter of the international group for the psychology of mathematics education* (pp. 251-258). Hoosier Association of Mathematics Teacher Educators.