

CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DE UN PROFESOR DE CÁLCULO VECTORIAL EN LA ENSEÑANZA DE LAS DERIVADAS EN VARIAS VARIABLESⁱ

Specialized knowledge of a vector calculus professor in teaching partial derivatives

Rojas-Celis C.^a, Cáceres-García M. J.^b y Sánchez-Barbero, B.^b

^a Universidad El Bosque, ^b Universidad de Salamanca

Resumen

Este estudio examina el conocimiento especializado de un profesor universitario en la enseñanza de las derivadas en varias variables, desde el modelo Mathematics Teacher's Specialized Knowledge. Mediante un enfoque cualitativo y el análisis de dos sesiones de clase, se identificó la interacción entre el conocimiento matemático y el conocimiento didáctico del contenido en su práctica docente. Los resultados muestran un énfasis en estrategias didácticas, registros de representación y herramientas tecnológicas para favorecer la comprensión conceptual. Además, se plantea la necesidad de estudios futuros sobre las creencias del docente y su influencia en la enseñanza de estos conceptos avanzados.

Palabras clave: enseñanza del cálculo, derivadas parciales, conocimiento del profesor, MTSK.

Abstract

This study examines the specialized knowledge of a university professor in teaching partial derivatives in multiple variables, based on the Mathematics Teacher's Specialized Knowledge model. Through a qualitative approach and the analysis of two class sessions, the interaction between mathematical knowledge and pedagogical content knowledge in the teacher's practice was identified. The results highlight an emphasis on didactic strategies, multiple representations, and technological tools to enhance conceptual understanding. Additionally, the need for future studies on the teacher's beliefs and their influence on the teaching of these advanced concepts is proposed.

Keywords: teaching of calculus, partial derivatives, teacher knowledge, MTSK.

INTRODUCCIÓN

Durante las últimas cuatro décadas, el estudio del conocimiento especializado del profesor de matemáticas ha sido un área de interés central en la Educación Matemática. Diferentes marcos teóricos, basados o influenciados por la propuesta de Shulman (1986), como los desarrollados por Ball et al. (2008), Carrillo-Yáñez et al. (2018), Ernest (1989) y O'Meara (2010), han contribuido a caracterizar los distintos tipos de conocimiento que un profesor de matemáticas pone en práctica al enseñar.

En el ámbito universitario, la enseñanza de las matemáticas ha sido objeto de creciente atención por parte de la investigación en educación matemática, en la medida en que se reconoce su papel fundamental en la formación de profesionales en ciencias e ingenierías, así como la necesidad de comprender qué contenidos son esenciales y cómo deben ser abordados pedagógicamente. En particular, la enseñanza del cálculo de funciones en varias variables desempeña un papel fundamental en la formación de ingenieros, ya que les permite comprender el poder de las matemáticas para modelar fenómenos y resolver problemas complejos. Dada la complejidad inherente a estos conceptos y la diversidad en los ritmos de aprendizaje de los estudiantes, el conocimiento especializado del profesor de un curso de Cálculo Vectorial adquiere una importancia significativa, requiriendo no solo

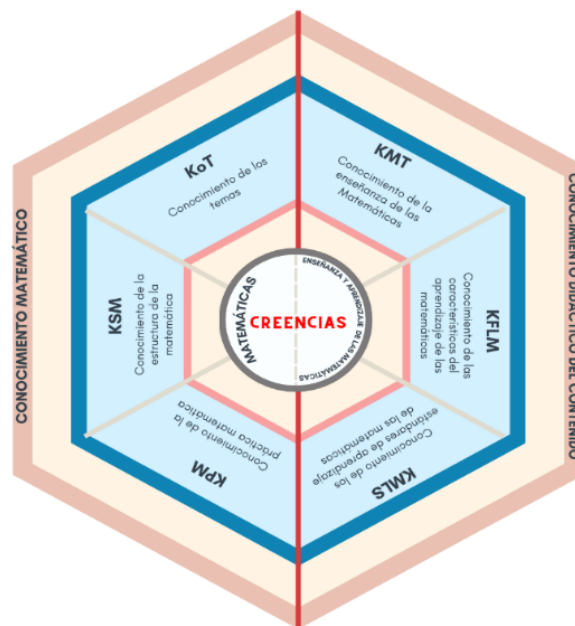
un dominio avanzado de los conceptos matemáticos, sino también de estrategias didácticas efectivas para su enseñanza (Rojas-Celis y Cely-Rojas, 2020).

El presente estudio expone los hallazgos sobre el conocimiento del profesor, analizado a través del modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (*Mathematics Teacher's Specialized Knowledge*, MTSK), a partir de la observación de la práctica docente de un profesor universitario en Colombia. En particular, se buscó caracterizar el conocimiento especializado que puso en evidencia durante la enseñanza de las derivadas en varias variables, analizando la interacción entre los subdominios del Conocimiento Matemático (MK) y del Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK). El análisis se realizó a partir de dos sesiones de clase dirigidas a estudiantes de programas de ingeniería, como parte de un estudio doctoral más amplio sobre la enseñanza del Cálculo Vectorial.

MARCO TEÓRICO

El modelo MTSK se ha consolidado como un marco teórico fundamental para el análisis del conocimiento del profesor de matemáticas en su práctica docente. Su estructura permite identificar los distintos tipos de conocimiento que intervienen en la enseñanza de las matemáticas, proporcionando una perspectiva detallada sobre cómo los docentes pueden comprender, organizar y transmitir los conceptos matemáticos. Considera tres dominios principales como el Conocimiento matemático (*Mathematical Knowledge*, MK), Conocimiento didáctico del contenido (*Pedagogical Content Knowledge*, PCK) y las Creencias (*Beliefs*). Los dos primeros dominios se subdividen en varios subdominios, que se pueden observar en la Figura 1, basado en Contreras-González et al., (2017).

Figura 1
Subdominios del MTSK



Nota: Elaboración basada en Contreras-González et al. (2017).

Conocimiento Matemático (MK)

Hace referencia a la comprensión del contenido matemático por parte del profesor, abarcando tanto la estructura teórica como su aplicación. Se divide en tres subdominios: Conocimiento de los temas (*Knowledge of Topics*, KoT), que incluye la comprensión de definiciones, propiedades, registros de representación, procedimientos y aplicaciones matemáticas; Conocimiento de la estructura

matemática (*Knowledge of the Estructure of Mathematics*, KSM), que se centra en las conexiones transversales, auxiliares, de complejización y simplificación dentro del contenido matemático; y, Conocimiento de la práctica matemática (*Knowledge of Practice in Mathematics*, KPM), que abarca el conocimiento sobre demostración, definición, resolución de problemas y uso del lenguaje matemático.

Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK)

Este dominio se enfoca en los aspectos pedagógicos de la enseñanza de las matemáticas, permitiendo analizar cómo los docentes presentan el contenido matemático a los estudiantes. Se subdivide en: Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (*Knowledge of Mathematics Teaching*, KMT), que involucra las estrategias de enseñanza, el uso de diferentes representaciones, ejemplos y recursos para facilitar el aprendizaje; Conocimiento de las características del aprendizaje matemático (*Knowledge of Features of Learning Mathematics*, KFLM), que analiza la relación entre el estudiante y el contenido matemático, incluyendo dificultades y estrategias para superarlas; y, Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (*Knowledge of Mathematics Learning Standards*, KMLS), que se refiere al conocimiento curricular sobre qué, cómo y cuándo enseñar los conceptos matemáticos.

Antecedentes en el estudio del conocimiento del profesor

Diversas investigaciones han abordado el estudio del conocimiento del profesor de matemáticas desde la perspectiva del modelo MTSK, haciendo especial énfasis en cómo se movilizan sus componentes durante la práctica docente en distintos niveles educativos y contextos matemáticos. Un ejemplo es el trabajo de Vasco et al. (2016), quienes analizaron una sesión de clase universitaria sobre multiplicación de matrices, evidenciando que el profesor desplegaba conocimiento sobre el contenido (KoT) y mostraba conexiones significativas entre procedimientos, representaciones y propiedades matemáticas (KSM). Aguayo-Arriagada et al. (2023), por otra parte, exploraron el conocimiento de un grupo de docentes sobre los números decimales, identificando que, si bien los participantes mostraban familiaridad con aspectos conceptuales del contenido, sus respuestas revelaban tensiones entre el conocimiento matemático y el didáctico, especialmente en torno a las representaciones gráficas y a las posibles dificultades de los estudiantes. Asimismo, Cayo et al. (2023) examinaron el uso de ejemplos en la enseñanza y su relación con el conocimiento especializado; en su estudio, mostraron cómo el profesor seleccionaba y adaptaba ejemplos no solo para ilustrar propiedades matemáticas, sino también como una estrategia para anticipar errores, establecer conexiones con conocimientos previos y promover la participación de los estudiantes.

Estos estudios constituyen antecedentes importantes para el presente trabajo, en la medida en que ilustran distintas formas en que se evidencia el conocimiento especializado del profesor en la enseñanza de contenidos específicos. Aunque se centran en distintos niveles educativos y objetos matemáticos, todos ellos comparten el interés por caracterizar cómo se articula el conocimiento matemático y didáctico en la práctica.

METODOLOGÍA

La investigación se enmarca en un enfoque cualitativo con diseño de estudio de caso, orientado a caracterizar el conocimiento matemático y didáctico del contenido que moviliza un profesor universitario al enseñar derivadas en varias variables dentro de un curso de Cálculo Vectorial. El participante es un matemático con maestría en Docencia de la Educación Superior, cinco años de experiencia docente en educación universitaria y un interés investigativo centrado en la Educación Matemática. La recolección de datos combinó técnicas, iniciando con la observación no participante de dos clases presenciales, registradas en video.

En la Tabla 1 se presenta el sistema de categorías elaborado a partir de los trabajos de Carrillo-Yáñez et al. (2018), Escudero (2015) y Espinoza (2020), el cual fue adoptado sin modificaciones sustanciales

en sus categorías principales, pero con ajustes en los indicadores que permiten operacionalizar cada categoría. Estas adaptaciones se realizaron atendiendo al contenido específico abordado en las clases observadas, como la enseñanza de las derivadas parciales y direccionales. Por ejemplo, se detallaron indicadores relacionados con el uso de herramientas digitales para la representación gráfica, y las formas de conexiones auxiliares y de complejización. A partir de estos indicadores adaptados, se codificó el discurso del profesor en función de los subdominios del MK y del PCK.

Tabla 1
Categorías del MK y PCK

Subdominio	Categorías
MK	
KoT	Definiciones, Propiedades y Fundamentos, Registros de representación, Procedimientos, Fenomenología y aplicaciones
KSM	Conexiones transversales, auxiliares, de complejización, de simplificación.
KPM	La práctica de demostrar, la práctica de definir, la práctica de resolver problemas, el papel del lenguaje matemático.
PCK	
KMT	Estrategias y técnicas, Recursos y materiales concretos y digitales (Geogebra, Python, R), Teorías de enseñanza
KFLM	Fortalezas y dificultades, Formas de interacción con el contenido matemático, Teorías de aprendizaje, Aspectos emocionales del aprendizaje.
KMLS	Secuenciación de temas, Expectativas del aprendizaje, Nivel de desarrollo esperado

Las grabaciones fueron analizadas a partir del sistema de categorías, utilizando la herramienta Atlas Ti. Para ello, se generaron códigos asociados a los indicadores previamente definidos para cada categoría, agrupando posteriormente estos códigos bajo los subdominios del MK y del PCK. Esta codificación permitió marcar y analizar fragmentos tanto en los videos como en sus transcripciones. Por ejemplo, en la intervención del profesor:

P: ¿Listo?, entonces, ¿cuál es su notación inicial? f_y aquí en la parte inferior, pues va a estar denotada por la variable respecto a la que voy a derivar, listo, entonces eso vendría siendo la derivada parcial respecto a y .

se analizó por las investigadoras como parte de la categoría El papel del lenguaje matemático del subdominio KPM, y las Estrategias del subdominio KMT. En la Tabla 2, se presentan las categorías acordadas, que también dieron paso a encontrar las relaciones entre el MK y el PCK. El análisis de las grabaciones fue realizado de manera independiente por las investigadoras, y las discrepancias fueron resueltas mediante consenso, obteniendo un coeficiente Cu- α de Krippendorff de 0,82, lo que garantiza un alto nivel de fiabilidad en la codificación.

Como parte complementaria del análisis, se llevó a cabo una entrevista semiestructurada con el docente, que tuvo una duración aproximada de dos horas. Durante esta conversación se formularon preguntas relacionadas con el conocimiento didáctico y matemático, así como con algunas intervenciones específicas realizadas en clase. Se indagó, por ejemplo, sobre el énfasis puesto en la construcción geométrica de los conceptos o en advertencias anticipadas sobre errores comunes. La transcripción de la entrevista fue analizada por las autoras en un único momento, permitiendo triangular los datos recogidos y ampliar la comprensión del conocimiento especializado del profesor, especialmente en relación con categorías como Teorías de enseñanza, Teorías de aprendizaje y Expectativas de aprendizaje.

Tabla 2

Fragmentos del discurso del profesor que relaciona el MK con el PCK

Subdominio	Discurso del profesor	Categorías
KSM	“En el punto (1,1), entonces la derivada en la dirección de u de (1, -1). ¿Cuánto nos da muchachos entonces? ¿Ustedes por favor me colaboran con esa cuenta? (...) Listo, debemos buscar el $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$ y el seno del mismo. Entonces acá les voy a mostrar un material de su trigonometría para que lo tengan muy en cuenta.”	Estrategias y técnicas Fortalezas y dificultades del aprendizaje Recursos materiales
KoT	“Aquí tengo una superficie ¿listo?, puede ser un posible paraboloide que abre hacia abajo. En este caso miren que la superficie es la que yo dibujé en color verde. Ahora, nosotros estamos analizando esa superficie en un punto en específico y, en ese punto resulta que hay un plano que en este caso vendría siendo esta parte roja. Ya lo vamos a entender usando Geogebra.”	Estrategias y técnicas Expectativas de aprendizaje Recursos materiales
KPM	“¿Listo?, entonces, ¿cuál es su notación inicial? f_y aquí en la parte inferior, pues va a estar denotada por la variable respecto a la que voy a derivar, listo, entonces eso vendría siendo la derivada parcial respecto a y.”	Estrategias (definición)

RESULTADOS

Esta sección expone los resultados del análisis de dos sesiones de clase sobre derivadas parciales y direccionales. Se caracterizaron las manifestaciones del MK y del PCK en la práctica docente, así como las relaciones entre sus subdominios. A continuación, se presentan los hallazgos de cada sesión y el análisis de dichas conexiones.

En la primera sesión, el docente introdujo las derivadas parciales, explicando su definición formal y enfocándose en los procedimientos algebraicos. Destacó la importancia de identificar la variable constante en cada caso y, al cierre, empleó GeoGebra para mostrar cómo la derivada parcial representa la pendiente de la recta tangente generada al intersectar la superficie con un plano paralelo a los ejes coordenados, facilitando así la conexión entre la expresión simbólica y su interpretación geométrica.

En la segunda sesión abordó las derivadas direccionales, partiendo de su definición y mostrando su cálculo con vectores unitarios y no unitarios. Explicó cómo determinar la dirección entre dos puntos y presentó el gradiente como vector asociado a la derivada direccional mediante el producto punto. Para afianzar esta relación, propuso un ejercicio donde los estudiantes debían identificar la dirección del gradiente sobre una superficie, sin utilizar aún el Teorema del Gradiente.

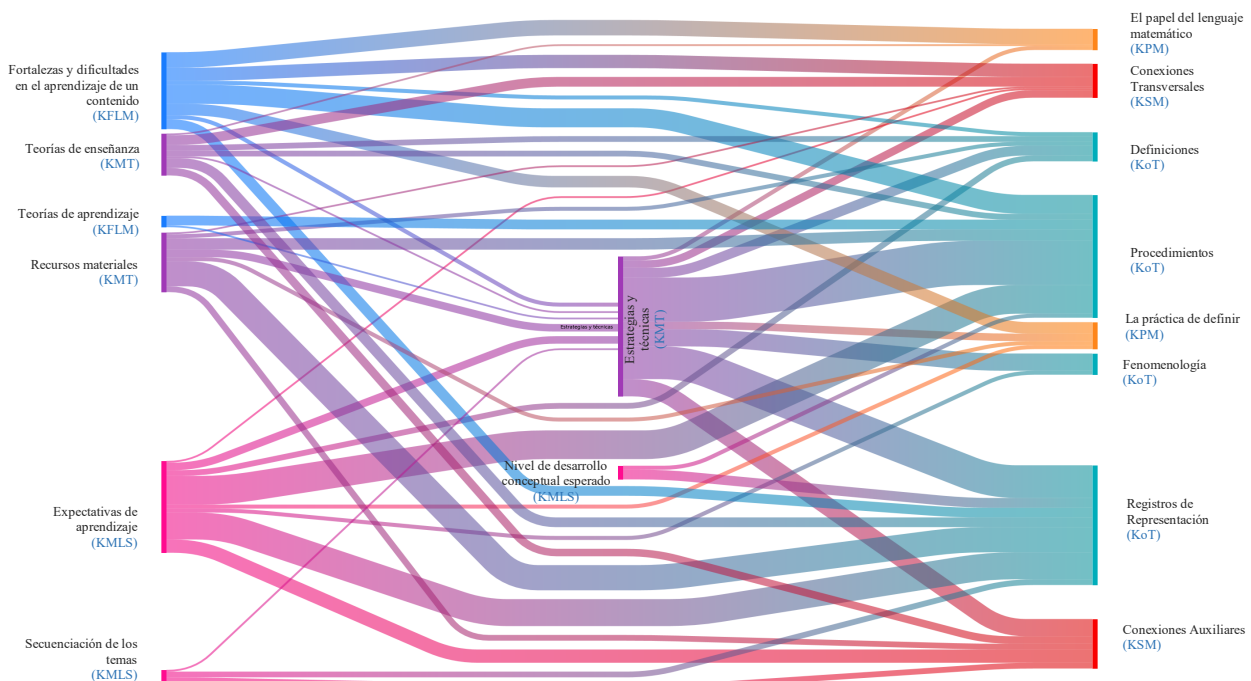
Las clasificaciones en las categorías y subdominios del discurso del profesor se analizaron primero, a partir de las relaciones entre las categorías y, a partir de ello, se realizó el análisis entre los subdominios del MK y PCK, los cuales se presentan en ese orden.

En primer lugar, se presenta, en la Figura 2, un resumen de las relaciones entre las categorías del MK (salidas de la derecha) y el PCK (salidas de la izquierda). El grosor de las líneas indica la frecuencia con la que coincidieron los discursos del profesor en dicha clasificación. Se pudo evidenciar que la categoría de Estrategias y técnicas, actúa como nodo intermedio, conectando la mayoría de las categorías de los diferentes dominios del conocimiento matemático.

Además, el docente tendió a enfatizar en la categoría de Procedimientos del MK, con las Fortalezas dificultades en el aprendizaje del tema, con las Expectativas de aprendizaje y las Estrategias y técnicas del PCK. En cuanto a los Registros de representación, empleó diversas formas de representación (gráfica, simbólica y verbal) como parte de las Estrategias y técnicas, el Recurso de materiales y las Expectativas del aprendizaje. Sin embargo, el Papel del lenguaje matemático y las Conexiones transversales, aparecen con menor frecuencia en su discurso.

Figura 2

Relación entre las categorías de los subdominios del MK y PCK en cuanto a las frecuencias de registro



Nota: Elaboración propia, con la herramienta Atlas Ti.

Asimismo, la categoría de Expectativas de aprendizaje, tuvo una frecuencia de registro y conexiones importantes, lo que permitió ver la intención del profesor en que sus estudiantes tengan claridad de lo que se espera que aprendan. En la entrevista con el profesor, se logra corroborar esta intención.

No obstante, las categorías relacionadas con la de Teorías de enseñanza y las de aprendizaje, tuvieron una menor frecuencia en el discurso del docente. Esto indica que, si bien el profesor implementó estrategias didácticas, no se evidencian modelos pedagógicos o teorías del aprendizaje explícitos, lo que sugiere un enfoque predominantemente empírico basado en la experiencia y en la aplicación directa de estrategias más que en la fundamentación teórica de su práctica.

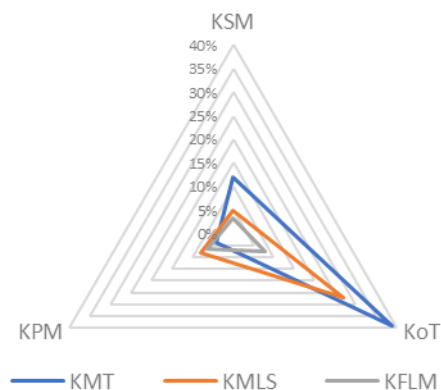
Algunos de los hallazgos del análisis fueron respaldados por la entrevista semiestructurada realizada al docente. Por ejemplo, el énfasis observado en el uso de representaciones gráficas y herramientas tecnológicas para construir los conceptos respondió a una intención explícita, según señaló, de fortalecer la comprensión geométrica de los estudiantes. Asimismo, si bien el profesor no hace evidente en su práctica el uso de teorías pedagógicas, sus decisiones didácticas se fundamentan en la experiencia y en la identificación de dificultades recurrentes entre los alumnos. En particular, destacó la importancia de anticipar errores comunes y advertirlos durante la clase, lo cual se reflejó en su actuación al enseñar derivadas direccionales mediante estrategias anticipatorias.

En cuanto a la categoría de las Interacciones con los estudiantes, no se evidenció en las grabaciones un enfoque explícito hacia los intereses o aspectos emocionales del aprendizaje, como identificar si los estudiantes perciben el tema como fácil o difícil. Al respecto, el profesor afirma que evita influir

en las emociones de los estudiantes indicando si un tema es o no complejo, permitiendo que ellos desarrollen su percepción a partir de las explicaciones y ejercicios planteados en clase.

Figura 3

Relación de porcentaje de registro en entre el MK y el PCK



En lo referente a la relación entre los subdominios del MK y PCK, a partir del análisis de sus categorías, en primer lugar, como se evidencia en la Figura 3, el subdominio del KoT presenta las frecuencias de registro más altas de los subdominios del MK. Esto permite inferir que el conocimiento sobre el tema de derivadas en varias variables es lo que más se evidencia en el discurso del profesor, enfatizando con el KMT, a través de los indicadores como Estrategias y técnicas, así como los recursos y materiales que usa en sus clases, como el libro de texto y el uso de Geogebra.

En la relación entre el KPM y los subdominios del PCK, se evidencia conexión con el KMLS, lo cual se refleja en el uso de la categoría Expectativas de aprendizaje, destacando su importancia en la planificación docente. Asimismo, la secuenciación de los temas, presente en el discurso del profesor como otra categoría del KMLS, muestra una presencia constante y es relevante para la organización del contenido. En cuanto a la relación del KSM se destaca una mayor coincidencia con el KMT, destacado en la categoría de Estrategias y técnicas y, de Recursos y materiales.

Tanto KPM como KSM tienen valores relativamente bajos en comparación con KoT. Esto indica que, en el discurso del profesor, hay menos referencias a conectar los conceptos matemáticos con su aplicación en distintos contextos, así sobre cómo los estudiantes comprenden, interpretan y desarrollan el pensamiento matemático.

CONCLUSIONES

El análisis evidencia que el profesor enfatizó la enseñanza del contenido matemático, principalmente a través de procedimientos y registros de representación, mientras que los aspectos relacionados con la comprensión del estudiante y los procesos matemáticos tuvieron menor presencia en su discurso. Este desbalance sugiere que, aunque el docente domina la enseñanza del contenido, hay oportunidades para fortalecer la integración de conocimientos sobre el aprendizaje de los estudiantes, la relación entre los procesos matemáticos y su enseñanza y la aplicación de estos conceptos con temas propios de la ingeniería.

El uso de GeoGebra facilitó la conexión entre el cálculo simbólico y la interpretación geométrica, lo que indicó la intención de apoyar la comprensión conceptual mediante herramientas tecnológicas. Además, el profesor reconoció las dificultades de los estudiantes y adaptó estrategias para abordarlas, aunque su práctica pareció estar guiada más por la experiencia y la observación que por una fundamentación teórica explícita en modelos de aprendizaje.

Un hallazgo relevante del estudio fue la interacción entre MK y PCK, lo que permitió comprender cómo los docentes articulan su conocimiento matemático con estrategias didácticas en la enseñanza

de las derivadas en varias variables. Esta relación, aún poco explorada, abre la posibilidad de investigaciones futuras sobre cómo los profesores integran ambos dominios y cómo sus creencias y formación influyen en la construcción de su conocimiento didáctico del contenido.

Dado el carácter cualitativo y el diseño de estudio de caso, los resultados no buscaron generalizar conclusiones, sino ofrecer una reflexión sobre la manifestación del conocimiento especializado del profesor en su práctica. La interacción entre MK y PCK observada en este estudio resalta la necesidad de seguir explorando cómo estos elementos inciden en la enseñanza y en las oportunidades de aprendizaje que se brindan a los estudiantes.

Referencias

- Aguayo-Arriagada, D., Méndez-Araos, M. y Catalán-Rivera, C. (2023). Estudio exploratorio sobre el conocimiento de los números decimales por parte de profesores de matemática. En A. González y J. I. Pérez (Eds.), *Actas del XXV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 343-352). SEIEM.
- Ball, D. L., Thames, M. A. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.
- Carrillo-Yáñez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras-González, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., ... Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 20(3), 236-253. <https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981>
- Cayo, M., Espinoza, G. y López-Leiva, C. (2023). Caracterización del conocimiento especializado del profesor desde el uso de ejemplos en la enseñanza. En A. González y J. I. Pérez (Eds.), *Actas del XXV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 23-32). SEIEM.
- Contreras-González, L. C., Montes, M. A., Climent, N. y Carrillo-Yáñez, J. (2017). Introducción al modelo MTSK: origen e investigaciones realizadas. *For-Mate*, 3, 9-17.
- Escudero, D. (2015). *Una caracterización del conocimiento didáctico del contenido como parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas de secundaria*. [Tesis Doctoral, Universidad de Huelva]. <https://observatorio-cientifico.ua.es/documentos/60379bf2a28f0c5681f27f51>
- Ernest, P. (1989). The knowledge, beliefs and attitudes of the mathematics teacher: A model. *Journal of Education for Teaching*, 15, 13-33.
- Espinoza, G. (2020). *Caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas de educación media sobre el concepto de función*. [Tesis Doctoral, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso]. <https://catalogo.pucv.cl/cgi-bin/koha/opac-detail.pl?biblionumber=431813>
- O'Meara, N. (2011). *Improving mathematics teaching at second level through the design of a model of teacher knowledge and an intervention aimed at developing teachers' knowledge* [Tesis de doctoral]. University of Limerick. <https://hdl.handle.net/10344/3254>
- Rojas-Celis, C. y Cely-Rojas, V. (2020). Propuesta de enseñanza en cálculo vectorial: un acercamiento a la clase invertida. *Revista Científica*, 37(1), 58-66.
- Shulman, L. S. (1986). Paradigmas y programas de investigación en el estudio de la enseñanza: una perspectiva contemporánea. En M. C. Wittrock (Ed.), *La investigación de la enseñanza. Enfoques, teorías y métodos* (pp. 3-37). Paidós Ibérica S.A.
- Vasco Mora, D., Climent, N., Escudero-Ávila, D., Montes, M. A. y Ribeiro, M. (2016). Conocimiento especializado de un profesor de Álgebra Lineal y espacios de trabajo matemático. *BOLEMA: Boletim de Educação Matemática*, 30(54), 222-239. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n54a11>

ⁱ Este trabajo se ha realizado en el marco del proyecto InteProReal (PIC2-2023-12) financiado por Universidad de Salamanca y está respaldado por el GIRME (Grupo de Investigación Reconocido Matemática Educativa).