

¿QUÉ SE ESCONDE DENTRO DE LA BOTELLA? UNA PROPUESTA DE RECORRIDO DE ESTUDIO E INVESTIGACIÓN EN ESTADÍSTICA PARA EDUCACIÓN SECUNDARIA

What's hidden inside the bottle? A study and research path in statistics for secondary education

Vásquez, S.^{a,b}, Barquero, B.^a y Bosch, M.^a

^a Universitat de Barcelona ^b Col·legi Natzaret (Barcelona)

Resumen

Este trabajo tiene por objetivos abordar el fenómeno didáctico de la invisibilidad del tratamiento de datos y explorar la introducción del razonamiento inferencial informal en la etapa de educación secundaria. Situada en la Teoría Antropológica de lo Didáctico, nuestra investigación presenta un recorrido de estudio e investigación (REI) para la enseñanza de la inferencia estadística, elaborado a partir de una propuesta original de Guy Brousseau. Analizamos una primera implementación con 60 estudiantes de 1º de ESO que permite poner de manifiesto algunos aspectos del fenómeno, como la falta de espontaneidad en la recogida de datos, poco consenso en las técnicas y limitaciones para emplear terminología específica y formular justificaciones razonadas. Los resultados indican que el diseño del REI ofrece condiciones favorables para superar algunas de estas limitaciones, pero que es necesario un diseño cuidadoso que tenga en cuenta este fenómeno y lo aborde explícitamente.

Palabras clave: estadística inferencial, educación secundaria, recorrido de estudio e investigación.

Abstract

This paper aims to address the didactic phenomenon of the invisibility of data treatment and to explore the introduction of informal inferential reasoning in secondary education. Grounded in the Anthropological Theory of the Didactic, our research presents a Study and Research Path (SRP) for teaching statistical inference, based on Guy Brousseau's original proposal. We analysed an initial implementation with 60 first-year secondary students, which reveals some aspects of the phenomenon, like the lack of spontaneity in data collection, limited consensus on the techniques, and challenges in using precise terminology and providing well-reasoned justifications. The results indicate that the SRP design provides favourable conditions to overcome some of these limitations, but it also highlights the need for a careful design that explicitly considers this phenomenon and addresses it directly.

Keywords: inferential statistics, secondary education, study and research path.

INTRODUCCIÓN

La enseñanza de la estadística en la educación secundaria enfrenta diversas dificultades y obstáculos conceptuales y didácticos. Batanero (2013) describe cómo, desde la psicología, se analizan las dificultades y errores asociados a concepciones intuitivas erróneas, como la “ley de los pequeños números”, que lleva a asumir que una muestra pequeña representa toda la población, un error sistemático relacionado con la heurística de la representatividad (Kahneman y Tversky, 1972). Autores como Begué et al. (2018) han estudiado la comprensión por parte de los estudiantes del concepto de variabilidad en el muestreo, concluyendo que la mayoría de los estudiantes no la comprenden bien e incluso perciben más variabilidad en muestras grandes que en las pequeñas, lo que constituye un obstáculo epistemológico clave en la comprensión de la ley de los grandes números.

De manera similar, el estudio de Shaughnessy et al. (2004) propone tres niveles progresivos en el razonamiento sobre el muestreo: el aditivo, que tiende a basarse en las frecuencias absolutas; el proporcional, que utiliza implícita o explícitamente proporciones de muestra o proporciones de población, probabilidades o porcentajes; el distribucional, que integra las ideas de frecuencia observada, frecuencia esperada y variabilidad al realizar estimaciones.

Al considerar los procesos de transposición didáctica y su impacto en la enseñanza de la estadística, Verbisck et al. (2023) analizan el fenómeno didáctico de la *transparencia o invisibilidad del tratamiento de datos* relacionado con las dificultades asociadas a dar un estatus claro a todo aquello relativo a la búsqueda, selección y organización de datos, entre otros aspectos, al tratarse de un ámbito de conocimiento que las instituciones escolares difícilmente asocian a la matemática o estadística. Este fenómeno está todavía poco estudiado, como muestra la revisión sistemática realizada por De la Fuente y Garrido-Martos (2024).

Nuestra investigación persigue un doble objetivo. El primero, más general y que marca la línea de investigación en la que estamos trabajando, se centra en analizar qué condiciones pueden crearse para estudiar el fenómeno de la invisibilidad del tratamiento de datos al potenciar en el aula un trabajo sistemático de recogida y organización de datos. Y, el segundo consiste en analizar el potencial de la situación didáctica de las bolas ocultas dentro de la botella para introducir la inferencia estadística informal en primeros cursos de la educación secundaria obligatoria, sujeto a un proceso de recogida y análisis de datos experimentales, la formulación de hipótesis y la creación de un medio empírico para su validación a partir del estudio de la variabilidad muestral.

Para abordar ambos objetivos, partimos del diseño y análisis de una propuesta para enseñar estadística en la ESO, basada en el trabajo pionero de Guy Brousseau sobre muestreo e inferencia estadística a partir de la composición de una botella opaca con bolas de distintos colores (Brousseau et al., 2002). Este trabajo analizaba las condiciones para que estudiantes de primaria pudieran “construir por sí mismos una comprensión genuina del carácter aleatorio y de la significación del muestreo estadístico” (Brousseau et al., 2002, p. 364, traducción propia), posibilitando la emergencia de la inferencia estadística informal (Batanero y Brovčnik, 2016; Ben-Zvi et al., 2015). Nuestra investigación se propone continuar con las adaptaciones de esta propuesta en distintos niveles escolares (Granell y Barquero, 2019; Briand, 2005 y Nilsson, 2020) y en formación del profesorado (Hakamata et al., 2023), considerando el caso de la educación secundaria y añadiendo un foco sobre la cuestión de la recogida y tratamiento de los datos para abordar nuestros objetivos de investigación.

LA PROPUESTA ORIGINAL DE BROUSSEAU Y SUS ADAPTACIONES

La propuesta original de Brousseau se desarrolla en el marco de la Teoría de las Situaciones Didácticas. El experimento prototípico parte de considerar una botella totalmente opaca con cinco bolas de dos colores. La única forma de obtener información sobre su contenido es agitar, girar la botella y observar el color de una de las bolas que aparece a través de un pequeño agujero en el tapón, simulando un muestreo aleatorio con reemplazo. A partir de estas observaciones, los alumnos formulan hipótesis sobre la composición oculta de la botella, haciendo emerger conceptos fundamentales de probabilidad y estadística inferencial. Brousseau diseñó esta actividad para alumnos de quinto curso de educación primaria. La implementación completa abarcaba un total de seis fases, distribuidas en veintiséis sesiones de clase, en las que, según Brousseau:

Los estudiantes construyen una experiencia (un conocimiento no institucionalizado) de las fluctuaciones de las series estadísticas, de la ley de los grandes números, de una forma de convergencia hacia una frecuencia teórica, de una aproximación de los intervalos de confianza y de la noción de prueba de hipótesis, del aumento del nivel de confianza, todo esto sin definiciones formales, sino como respuesta a preocupaciones deterministas, y con una epistemología empirista espontánea característica de su desarrollo (Brousseau, 2009, p. 6, traducción propia).

Brousseau buscaba evitar una introducción prematura al cálculo de probabilidades y que los estudiantes se aproximaran experimentalmente a la relación entre estos cálculos, la ley de los grandes números y las pruebas de hipótesis. Así, se evitaba la “retórica del azar” y la interpretación de eventos aislados. La propuesta de Brousseau representa un modelo dinámico para la construcción del conocimiento estadístico, que difiere del enfoque tradicional que suele postergar la experimentación con fenómenos aleatorios hasta el final de la educación secundaria. Más adelante, Briand (2005) adapta la situación para estudiantes del último curso de la educación secundaria obligatoria (15-16 años) y busca identificar los obstáculos que dificultan a los estudiantes desarrollar un enfoque probabilístico, introduciendo y problematizando el “muestreo” desde el principio, en contraposición con la propuesta de Brousseau, donde los estudiantes descubren estos conceptos por sí mismos. También Nilsson (2020) parte de la propuesta de Brousseau e investiga el razonamiento detrás de la generación de hipótesis, adaptando la propuesta a estudiantes de quinto curso de educación primaria. Su objetivo es examinar cómo los estudiantes realizan inferencias sobre distribuciones de probabilidad. La actividad se desarrolla en tres fases: observación de frecuencias con una botella transparente, formulación de hipótesis con una botella opaca e investigación entre muestras para detectar variaciones y controlar el sesgo.

En el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), Granell y Barquero (2019) proponen una adaptación de la situación de la botella en forma de recorrido de estudio e investigación (REI) para educación primaria. Esta versión, diseñada para estudiantes de cuarto curso, simplifica la estructura en tres fases: formulación de hipótesis con botellas comunes (cinco bolas de dos colores), intercambio de botellas compuestas por los propios grupos de alumnos y aplicación en un contexto real con botellas de 10 bolas y cuatro colores, simulando un control de calidad. Esta adaptación, además de reducir el número de sesiones, introduce escenarios más cercanos a la experiencia cotidiana de los estudiantes, promoviendo técnicas aditivas y la reflexión sobre el tamaño muestral desde edades más tempranas. No aborda, sin embargo, el estudio de la relación entre el tamaño muestral y el nivel de confianza a partir de simulaciones con botellas de distinto contenido.

EL ENIGMA DE LA BOTELLA PARA UN PRIMER CURSO DE SECUNDARIA

Metodología y condiciones de la experimentación

El trabajo que presentamos aquí adopta el marco de investigación de la TAD, junto con la metodología de la ingeniería didáctica (Artigue, 2020) que distingue cuatro fases dentro de un proceso cíclico de diseño, experimentación y rediseño de propuestas de enseñanza. La primera fase, con el análisis preliminar, identifica los objetivos de la propuesta, generalmente vinculados al estudio de fenómenos didácticos por explorar. La segunda fase, el análisis *a priori*, detalla los elementos del diseño de la propuesta poniendo especial énfasis en anticipar el juego entre las variables didácticas principales, las cuestiones o problemas planteados y las respuestas esperadas en su supuesta implementación. El análisis *in vivo*, tercera fase, corresponde a la implementación de la propuesta e incluye las decisiones y ajustes que se realizan durante el propio proceso didáctico. Finalmente, el análisis *a posteriori* considera los principales elementos de la implementación tanto en relación con los fenómenos didácticos considerados, como el análisis *a priori*, destacando aspectos del diseño por modificar de cara a posibles nuevas implementaciones.

La experimentación se realizó en el Col·legi Natzaret, de Esplugues de Llobregat (Barcelona), con 60 estudiantes de 1º de la ESO (12-13 años) y cuatro profesoras, incluida la primera autora. La organización de clases es flexible, permitiendo tanto un trabajo conjunto de todos los estudiantes de manera simultánea, como divididos en dos clases. La experimentación siguió el diseño previsto en el análisis *a priori*. Los datos se recogieron a partir de las producciones finales de los estudiantes y de observaciones sistemáticas de aula, por parte de una observadora externa al equipo docente, sobre las interacciones y participación de los estudiantes. Las tres profesoras participantes, ajenas al equipo de

investigación, fueron instruidas en la propuesta a través de documentos guía y reuniones de coordinación. Aun así, la puesta en aula fue conducida, principalmente, por la primera autora.

Análisis preliminar

Recordemos que la propuesta persigue un doble objetivo: estudiar qué condiciones se han creado y qué restricciones aparecen asociadas al fenómeno de la invisibilidad del tratamiento de datos; y estudiar las condiciones para introducir actividades relativas a la estadística inferencial informal en secundaria. Para el diseño de esta propuesta, basada en un REI, partimos del modelo epistemológico de referencia (MER) propuesto por Hakamata et al. (2023, p. 6) que se esquematiza en un mapa de cuestiones y respuestas. Este modelo de referencia opera como una herramienta emancipadora para desvincular al investigador de los modelos dominantes sobre estadística en las instituciones escolares consideradas. El modelo considera cinco fases: exploración del experimento (Q_1), diseño del muestreo (Q_2), recogida de datos (Q_3) y su análisis (Q_4) y formulación y validación de hipótesis (Q_5).

Diseño y análisis *a priori*

Se planifican un total de cinco sesiones. La actividad comienza con los estudiantes organizados en grupos de tres o cuatro integrantes. Cada equipo recibe una botella opaca, sellada y numerada, para que se pueda posteriormente identificar, cuyo contenido no se puede ver directamente ni abrir en ninguna circunstancia. Las botellas contienen 25 bolas de cuatro colores (Tabla 1). Su composición se ha elegido para: evitar técnicas directas en la comparación de las frecuencias observadas para la formulación de hipótesis (“tantas rojas como azules”); facilitar la identificación de dos tipos de botellas para poder acumular los datos recogidos por los grupos de estudiantes con botellas supuestamente idénticas; generar distintos tipos de variabilidades en el muestreo con proporciones grandes y pequeñas de algunos colores. En el análisis *in vivo* y *a posteriori* discutiremos el acierto de estas decisiones *a priori* y su posible modificación de cara a futuras implementaciones.

Tabla 1

Composición de las botellas

Botella	Azul	Rojo	Amarillo	Rosa	Total
A	12	7	5	1	25
B	1	8	2	14	25

En la primera sesión, las docentes entregan una botella sellada a cada grupo, permiten que experimenten con ellas y plantean la cuestión Q_0 : *¿Cuál es el contenido de cada botella?* A continuación, guían una discusión colectiva para identificar qué información se puede conocer (colores presentes y recogida de datos para el cálculo de frecuencias observadas) y qué información permanece desconocida (número exacto de bolas de cada color). Las docentes revelan posteriormente que la única información que puede proporcionar es que dentro de cada botella hay 25 bolas idénticas de tamaño de distintos colores, pero desconoce la composición. Piden a los estudiantes que antes de acabar la primera sesión (en un límite de 20 minutos) generen sus propias hipótesis sobre el contenido oculto de la botella. El objetivo principal de esta fase es que los estudiantes realicen una primera recogida de datos, formulen hipótesis iniciales sobre la distribución de colores en el interior de la botella y reflexionen sobre cómo se organiza un estudio estadístico. Para ello, los estudiantes observan el color de las bolas a través de un pequeño orificio en la botella (simulando un muestreo aleatorio con reemplazo) y registran los primeros datos y sus primeras impresiones. Se prevé que surjan las cuestiones derivadas $Q_{1.1}$: *¿Cuántos colores hay?* y $Q_{1.2}$: *¿Cómo saber con seguridad que no hay más colores?* Se prevé que la sesión finalice con una puesta en común donde los estudiantes comparten sus hipótesis, basadas en el razonamiento aditivo y con una recogida de datos aún no suficiente. Las docentes deberán comparar las técnicas de recogida de datos y dar importancia a ser metódicos en la recogida de datos y registrar el máximo de información disponible, además pueden surgir reflexiones sobre tamaño muestral y cómo tomarlo en cuenta para avanzar en el grado de

seguridad de las hipótesis consideradas. Entre las posibles nuevas cuestiones previstas están las relativas al tamaño de las muestras: Q_2 : *¿Cuántas observaciones son necesarias? ¿Cuál es el número mínimo para validar o invalidar una hipótesis?* Y también sobre el tipo de muestreo y las técnicas de recogida de datos Q_3 : *¿Qué información se debe recopilar del experimento?* $Q_{3.1}$: *¿Se debe considerar solo la frecuencia del color o también el orden de aparición?* $Q_{3.2}$: *¿Qué tipo de información se gana o pierde en cada caso?* Al acabar la primera sesión, se puede proporcionar a los estudiantes un glosario para completar, con vocabulario clave en la situación (formulación de hipótesis, tamaño de la muestra, organizar y analizar datos, validar hipótesis) para introducir la terminología que permitirá designar e institucionalizar las técnicas de recogida y tratamiento de los datos. Se prevé que los estudiantes completen el glosario individualmente como tarea.

En una segunda fase, los estudiantes siguen considerando la cuestión generatriz Q_0 , pero, en este caso, las docentes dan instrucciones más claras sobre la recogida de datos y piden una muestra de, como mínimo, $n = 100$ visualizaciones. En esta fase se prevé que los estudiantes exploren diferentes técnicas de recogida de datos y su eficacia. La sesión termina con una puesta en común de los resultados de las observaciones de cada equipo y las hipótesis que estos proponen sobre la distribución de piezas de cada color en el interior de la botella. Se espera que las 100 visualizaciones orienten a los estudiantes a considerar las frecuencias relativas (como fracciones o como porcentajes), que usen entonces para justificar la hipótesis sobre la distribución de colores respecto a las 25 bolas. Otra de las cuestiones que se espera es si todas las botellas tienen la misma composición.

Para verificar la hipótesis de los dos tipos de botellas, en la siguiente sesión se repite la misma estrategia, pero aumentado el tamaño muestral (150, 200 o 300 visualizaciones). En esta fase se deberían abordar cuestiones relativas a las frecuencias absolutas como Q_4 : *¿Cómo analizar los datos observados?* $Q_{4.1}$: *¿Cómo representar las frecuencias absolutas observadas?* $Q_{4.1.1}$: *¿Cómo comparar los resultados al variar el tamaño de la muestra?* $Q_{4.1.2}$: *¿Cómo interpretar las diferencias entre frecuencias y su variación dependiendo del tamaño de la muestra?* Deberían entonces aparecer los cálculos de las frecuencias relativas y abordar nuevas cuestiones asociadas $Q_{4.2}$: *¿Cómo calcular las frecuencias relativas?* $Q_{4.3}$: *¿Cómo deducir las hipótesis a partir de las frecuencias observadas?* $Q_{4.3.1}$: *¿Cómo gestionar los errores de redondeo?* La sesión terminará con la propuesta de comparar las botellas según estos dos tipos: aquellas con más bolas azules y aquellas con más bolas rosas.

En la fase final, los grupos se separan según esta clasificación para poder recopilar y analizar conjuntamente los datos de los equipos con botellas equivalentes, ampliando así considerablemente la muestra considerada y mejorando la precisión de sus estimaciones. Los estudiantes revisan sus hipótesis a la luz de estos nuevos datos y generan una hipótesis final sobre la composición de la botella basada en aproximadamente 2000 visualizaciones. Se espera que surjan reflexiones sobre la variabilidad de los datos en muestras más pequeñas (las de cada equipo) y muestras más amplias (cuando se han juntado los datos): $Q_{4.4}$: *Si las botellas tienen la misma composición, ¿por qué hay tanta diferencia entre lo que ha observado un grupo u otro?* $Q_{4.1}$: *¿Las diferencias observadas dependen del color de la bola?* Y, sobre el grado de fiabilidad o validez de las hipótesis Q_5 : *¿Cuándo y por qué se debe cambiar la hipótesis? ¿Qué nos hace estar más seguros? ¿En qué casos se puede validar o refutar una posible hipótesis? ¿Cómo varía el nivel de confianza que asignamos a las distintas hipótesis?* Los docentes deberán guiar una discusión para reflexionar sobre el proceso seguido, destacando la importancia de la precisión en la recolección de datos, el tamaño de la muestra, la generación de las hipótesis, la variabilidad de los datos y recalcarán que las hipótesis generadas son *coherentes* o no con los datos analizados, pero no se puede determinar si son *ciertas*, ya que el experimento realizado solo permite dar una estimación de la realidad. Finalmente, se solicitará a cada grupo que elabore un informe que describa las distintas etapas del experimento, justifique sus conclusiones a partir de los datos recolectados y evalúe el nivel de confianza en las hipótesis consideradas.

las hipótesis a partir de las frecuencias observadas? Algunas de las docentes mencionaron la regla de tres, refiriéndose al tema de las escalas en geometría que se había visto la semana anterior. Este comentario dirigió mucho las técnicas de los alumnos y varios equipos (7 de 16) abandonaron el uso de las frecuencias relativas, en fracciones o porcentajes, que había surgido como técnica principal en la fase anterior, facilitada por la muestra de tamaño 100. Aquí sí surgió la cuestión del redondeo decimal, pero no hubo tiempo para comentar cuestiones relativas a la variabilidad muestral de cada color ni a la comparación de las hipótesis respecto su nivel de confianza asignado.

Figura 3

Ejemplo de la pizarra de clase después de la puesta en común de la fase final

Ampolla	Blau	Vermell	Groc	Rosa	
7	43	36	20	1	Si de 813
12	38	39	17	6	355 són blaves
15	39	35	18	8	De 25 boles
16	47	31	19	3	quantas són blaves?
11	54	32	21	3	Regles de 3
1	47	27	21	5	813 - 355 =
8	43	36	18	6	25 - x
3	44	25	27	4	$25 \cdot 355 = 813$
	355	261	161	36	$10,911 \sim 11$
					Fraccions
					$\frac{355}{813} \text{ de } 25 =$
					$= 355 \cdot 25 : 813$

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En cuanto al primer objetivo de investigación sobre el fenómeno de la invisibilidad del tratamiento de datos, la implementación del REI muestra la falta de espontaneidad de los estudiantes en el registro de datos. Como describimos previamente, en los primeros muestreos, los estudiantes no ven la necesidad registrar las observaciones realizadas. Las docentes deben recordar constantemente, en las puestas en común, la necesidad de realizar esta recogida para poder justificar numéricamente las primeras hipótesis formuladas. Lo interpretamos como un síntoma de la ausencia de un tratamiento de datos en la cultura matemática escolar. Otra manifestación de este fenómeno es la falta de consenso y terminología asociada al registro de los datos. Aun así, ante estas limitaciones, el diseño del REI ofreció un buen escenario para construir dar sentido a la recogida de datos, construir colectivamente estas técnicas ausentes y asociar una terminología específica a las herramientas usadas.

Sobre el segundo objetivo, en este trabajo se presenta un primer estudio exploratorio de la propuesta del REI sobre qué se esconde dentro de la botella para primeros cursos de Secundaria. A partir del análisis *a posteriori*, se destacan varios aspectos relativos a las variables didácticas del diseño, algunos vinculados con las limitaciones previamente comentadas. En primer lugar, traer las botellas ya construidas y selladas implica dedicar mucho tiempo a discutir el tipo de contenido. Sería más apropiado, en la primera sesión, mostrar el tipo de bolas que se ocultan para que los estudiantes pudieran comprobar que se trata de piezas del mismo tamaño y peso tal como se proponía en el diseño original (Brousseau et al., 2002). En segundo lugar, la composición extrema de los dos tipos de botellas facilita su distinción prácticamente inmediata cuando los datos se exponen de manera conjunta. Además, el aumento en su complejidad (25 bolas de 4 colores) en comparación con la adaptación en primaria (5 bolas y 2 colores o 10 bolas y 4 colores) facilita la emergencia de técnicas proporcionales y distribucionales (Shaughnessy et al., 2004) que no aparecieron en el caso de primaria (Granell y Barquero, 2019). Sin embargo, se ha observado que tan pronto como algunas de las docentes mencionaron la regla de tres, por tradición o cercanía a otros temas abordados, desapareció la justificación de las hipótesis a partir de la interpretación de las frecuencias relativas. Este hecho jugó en detrimento de la construcción de una justificación de las técnicas basada en el uso e interpretación de fracciones y porcentajes. Es posible que una sesión de muestreo intermedio ($n = 150$ o $n = 200$), que no se pudo realizar en esta ocasión, facilite la institucionalización de técnicas

proporcionales y distributivas, que emergieron de forma incipiente, para dotarlas de un papel prioritario en la inferencia. También consideramos conveniente, en futuras implementaciones, incluir cuestiones sobre el estudio de la dispersión de los datos obtenidos a partir de diferentes composiciones de botellas y la relación del tamaño muestral con el nivel de confianza de las hipótesis, como también se propone en Hakamata et al. (2023).

Agradecimientos

Proyectos PID2021-126717NB-C31 (MCIU/AEI/FEDER, UE) y PDC2022-133812-C22.

Referencias

- Artigue, M. (2020). *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 202-206). Springer.
- Batanero, C. (2013). Sentido estadístico: Componentes y desarrollo. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *I Jornadas Virtuales de Didáctica de la Estadística, la Probabilidad y la Combinatoria* (pp. 55–64). <https://www.ugr.es/~jmcontreras/pages/Investigacion/Actas%20jornadas.pdf>
- Batanero, C. y Brovčnik, M. (2016). *Statistics and probability in high school*. Sense Publishers.
- Ben-Zvi, D., Bakker, A. y Makar, K. (2015). Learning to reason from samples. *Educational Studies in Mathematics*, 88(3), 291-303. <https://doi.org/10.1007/s10649-015-9593-3>
- Begué, N., Batanero, C. y Gea, M. (2018). Comprensión del valor esperado y variabilidad de la proporción muestral por estudiantes de educación secundaria obligatoria. *Enseñanza de las Ciencias*, 36(2), 63-79. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2256>
- Briand, J. (2005). Une expérience statistique et une première approche des lois du hasard au lycée par une confrontation avec une machine simple. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 25(2), 247-282. <https://revue-rdm.com/2005/une-experience-statistique-et-une/>
- Brousseau, G. (2009). Alternatives en didactique de la statistique. *41èmes Journées de Statistique, SFdS*, Bordeaux. <https://inria.hal.science/inria-00386626/>
- Brousseau, G., Brousseau, N. y Warfield, V. (2002). An experiment on the teaching of statistics and probability. *The Journal of Mathematical Behavior*, 20(3), 363-411. [https://doi.org/10.1016/S0732-3123\(02\)00078-0](https://doi.org/10.1016/S0732-3123(02)00078-0)
- De la Fuente, A. y Garrido-Martos, R. (2024). El sentido estocástico en los simposios de la SEIEM (2010-2023). En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 185-192). SEIEM.
- Granell, C. y Barquero, B. (2019). Experiència amb un recorregut d'estudi i investigació sobre la inferència estadística a l'educació primària. Què s'amaga dins l'ampolla? *Noubiaix*, 44, 54-69. <https://raco.cat/index.php/Noubiaix/article/view/371495>
- Hakamata, R., Fukuda, H., Otani, H., Otaki, K., Barquero, B. y Bosch, M. (2024). Potential of Brousseau's guessing game in teacher education: two complementary cases. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2024.2321587>
- Kahneman, D. y Tversky, A. (1972). Subjective probability: A judgment of representativeness. *Cognitive Psychology*, 3(3), 430-454. [https://doi.org/10.1016/0010-0285\(72\)90016-3](https://doi.org/10.1016/0010-0285(72)90016-3)
- Nilsson, P. (2020). Students' informal hypothesis testing in a probability context with concrete random generators. *Statistics Education Research Journal*, 19(3), 53-73. <https://doi.org/10.52041/serj.v19i3.56>
- Shaughnessy, J. M., Ciancetta, M. y Canada, D. (2004). Types of student reasoning on sampling tasks. En M. J. Hoines y A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the PME* (vol. 4, pp. 177-184). PME. <https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED489640.pdf>
- Verbisck, J., Barquero, B., Bittar, M. y Bosch, M. (2024). A study and research path for teacher education in statistics: dealing with the transparency of data treatment. En P. Drijvers, C. Csapodi, H. Palmér, K. Gosztanyi y E. Kónya (Eds.), *Proceedings of the CERME13*. Alfréd Rényi Institute of Mathematics y ERME. <https://hal.science/hal-04413704v1>