

ERRORES EN LA IDENTIFICACIÓN DE REPRESENTACIONES GEOMÉTRICAS Y ALGEBRAICAS DE LAS PROPIEDADES ARITMÉTICAS

Errors in the identification of geometric and algebraic representations of arithmetic properties

Flores-Lamolda, L. y Ramírez-Uclés, R.

Universidad de Granada

Resumen

Este trabajo se enmarca en una investigación sobre la identificación que hacen los estudiantes de Educación Primaria de representaciones geométricas y algebraicas de propiedades aritméticas en relación con su representación verbal. Nos centramos en los errores observados en las justificaciones al identificar dichas propiedades. Se han analizado las respuestas de 185 estudiantes de 3º a 6º de primaria, estableciendo una categorización de los errores. Se observa una disminución de la proporción de errores respecto al número de respuestas conforme avanzan de curso, una mayor cantidad de errores en la identificación de representaciones algebraicas y una prevalencia de errores en justificaciones incompletas.

Palabras clave: representaciones geométricas y algebraicas, propiedades aritméticas, errores.

Abstract

This work is part of a research on the identification by primary school students of geometric and algebraic representations of arithmetic properties in relation to their verbal representation. In this study we focused on the errors observed in the justifications given by students when identifying these properties. The answers of 185 students from 3rd to 6th grade of primary education were analyzed, establishing a categorization of the errors. A decrease in the proportion of errors in relation to the number of answers was observed as the students advanced from grade to grade, a greater number of errors in the identification of algebraic representations and a prevalence of errors in incomplete justifications.

Keywords: geometric and algebraic representations, arithmetic properties, errors.

INTRODUCCIÓN Y JUSTIFICACIÓN

Las conexiones y la representación son dos ejes fundamentales en la educación matemática. Según el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2003), constituyen dos de los estándares para la enseñanza de las matemáticas. Asimismo, forman parte de los ejes sobre los que se sustentan las competencias específicas en el currículum actual, es decir en el Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria.

Este estudio se enmarca en la aritmética generalizada, que conforma una dimensión del álgebra escolar que se refiere al “estudio de estructuras y sistemas abstraídos de operaciones y relaciones, incluidas aquellas procedentes de la aritmética” (Kaput, 2008, p.11). Esto supone una de las vías de acceso al álgebra (Kaput, 2008), y en ella está incluido el trabajo con propiedades aritméticas. Se pretende relacionar en este caso la representación verbal de las propiedades aritméticas con las representaciones algebraicas y geométricas asociadas al sentido algebraico y espacial respectivamente, incluidos en el currículum de Educación Primaria (Real Decreto 157/2022).

Por otro lado, el estudio de los errores en educación matemática resulta de gran importancia puesto que ayuda a conocer la naturaleza de nociones matemáticas fundamentales y de la construcción del conocimiento matemático (Rodríguez-Domingo et al., 2015).

Como forma de evidenciar la identificación que hacen de las representaciones, se han estudiado las justificaciones del alumnado. Desde la perspectiva del álgebra temprana, la justificación tiene interés como práctica en la que se construyen argumentos acerca de la veracidad o no de afirmaciones sobre relaciones generales (Blanton et al., 2022, p. 4). Los errores que se han encontrado han sido en la emisión de estas justificaciones.

MARCO TEÓRICO Y ANTECEDENTES

Este trabajo se centra en las conexiones internas en matemáticas, es decir, aquellas que se dan dentro de la propia disciplina (Busisnkas, 2008). En este caso, se reflejan en el uso de distintas representaciones de un mismo concepto. Para analizar la relación entre el sentido espacial y algebraico, se estudian las conexiones entre representaciones geométricas, algebraicas y verbales de propiedades aritméticas. Coxford (1995) señala que experimentar estas conexiones favorece una comprensión más profunda de las matemáticas.

Castro y Castro (1997, p. 96) definen las representaciones como “anotaciones simbólicas o gráficas, específicas para cada noción, mediante las que se expresan los conceptos y procedimientos matemáticos, así como sus características y propiedades más relevantes”. En este trabajo las representaciones empleadas son las externas, puesto que son distintas formas de representar las propiedades aritméticas de forma escrita. Más concretamente, se consideran las siguientes representaciones:

- Verbales: aquellas que hacen referencia al lenguaje cotidiano (Molina, 2014).
- Geométricas: representaciones gráficas, que muestran la información de forma visual y están compuestas por elementos geométricos cuya organización espacial es relevante (Torres et al., 2024).
- Simbólicas: representaciones que emplean “elementos numerales, letras y signos característicos de la aritmética y el álgebra” (Molina, 2014, p. 561).

Se han analizado las justificaciones para ver la identificación de las representaciones. En el contexto del álgebra temprana, este análisis es relevante, ya que implica la construcción de argumentos sobre la veracidad de afirmaciones relacionadas con relaciones generales (Blanton et al., 2022, p. 4). Pinto y colaboradoras (2023) destacan la importancia de priorizar esta construcción de argumentos, más allá de enfocarse únicamente en los cálculos numéricos, y de generar espacios en el aula en los que el alumnado interactúe con cantidades expresadas de forma abstracta.

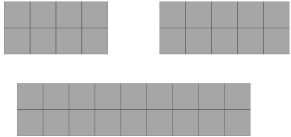
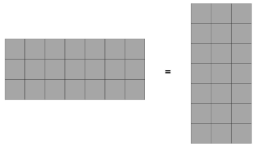
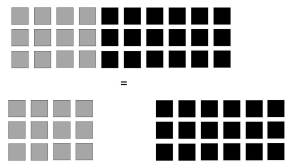
Al ser una investigación acerca de propiedades de las operaciones aritméticas, se encuadra dentro de la aritmética generalizada. Esta dimensión del álgebra escolar incluye la generalización de propiedades aritméticas además del razonamiento acerca de relaciones generales y sus formas (Kaput, 2008). Para separar el álgebra de la aritmética, se han considerado estas propiedades de forma general, más allá de su expresión en casos particulares (Kaput, 2008, p. 13).

Las propiedades aritméticas empleadas en este trabajo son: la conmutativa de la multiplicación, la paridad de la suma de dos números pares y la distributiva. Se presentan en la Tabla 1 algunas de las representaciones empleadas de estas propiedades:

Tabla 1

Representaciones algebraicas, verbales y geométricas de las propiedades

Propiedad	Repr. algebraica	Repr. verbal	Repr. geométrica
-----------	------------------	--------------	------------------

Paridad de la suma de dos números pares	$2 \times a + 2 \times b = 2 \times (a + b)$	La suma de dos números pares es un número par	
Conmutativa de la multiplicación	$a \times b = b \times a$	Cuando se multiplican dos números, el orden no altera el resultado	
Distributiva	$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$	Para multiplicar un número por una suma, se multiplica por cada sumando y luego se suman los resultados.	

Estas propiedades y representaciones han sido empleadas en otros estudios. Benson y colaboradores (2010), usaron el modelo de matrices rectangulares como representación geométrica de la distributiva, además de representaciones numéricas para ver si el empleo de múltiples representaciones contribuye a una comprensión más profunda de la propiedad. Por otro lado, la representación geométrica de la suma de dos números pares proviene de un estudio de Stephens y colaboradores (2015) en el que se emplea dicha representación como forma de ilustrar visualmente el razonamiento.

Este trabajo se centra en los errores presentes en las respuestas del alumnado en un cuestionario en el que se pretende ver la relación entre distintas representaciones de las propiedades aritméticas. El estudio de errores forma parte del análisis cognitivo en la planificación de enseñanza y ofrece oportunidades para adquirir y consolidar el conocimiento (Rico, 1998).

Existen numerosas categorías de errores en educación matemática. En este caso, nos interesan los errores referentes a la geometría y el álgebra. Nos basamos en las siguientes categorías:

- Errores en la interpretación de gráficos: involucra la interacción entre un sistema de símbolos visuales, y procesos perceptuales y cognitivos (Diezman y Lowrie, 2009)
- Errores técnicos: incluyen errores de cálculo, la manipulación de signos algebraicos, la ejecución de algoritmos básicos y los errores al tomar datos de una tabla. (Movshovizt et al., 1987)
- Errores debidos a la redacción y comprensión de las instrucciones de trabajo: surgen por una comprensión inadecuada de las consignas de trabajo, sean orales o escritas (Astolfi, 1999).

En lo que se refiere a los errores en el uso de las variables, hay distintas investigaciones que exploran la complejidad del empleo de letras para representar cantidades (por ejemplo, Bolaños-González y Lupiañez-Gómez, 2021). Las letras pueden tener distintos significados en matemáticas y el significado que se asigne afectará al empleo que se haga de las mismas (Ayala-Altamirano y Molina, 2018). Al usar letras en primaria, se han observado, por ejemplo, asignaciones numéricas según su posición en el abecedario o de forma arbitraria, ya que las letras "pueden ser cualquier número" (Ayala-Altamirano y Molina, 2018).

METODOLOGÍA

La investigación es de tipo descriptivo a partir de las respuestas de los sujetos a un cuestionario. El objetivo es identificar y categorizar los errores que manifestó el alumnado de 3º a 6º de primaria al

relacionar la representación verbal de las propiedades aritméticas con las representaciones algebraicas y geométricas y justificar esta relación. Para analizar la identificación de las representaciones, se analizan las respuestas presentadas en el cuestionario.

Sujetos

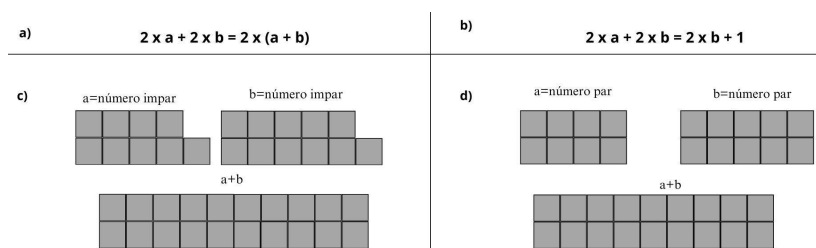
Los sujetos que han participado en la investigación son estudiantes de 3º a 6º de primaria de un colegio concertado de Granada. En total participaron 185 sujetos, distribuidos en 44 de tercero, 46 de cuarto y quinto, y 49 de sexto, puesto que había dos clases por curso. Estos sujetos no recibieron instrucción específica sobre las representaciones geométricas y algebraicas de las propiedades trabajadas.

Instrumento

El instrumento empleado fue un cuestionario de elaboración propia. Este cuestionario se realizó a partir de representaciones de las propiedades aritméticas empleadas en algunos de los trabajos que han servido como antecedentes de esta investigación. El cuestionario cuenta con 5 preguntas, de las cuales se analizan la segunda, tercera y cuarta. Las dos primeras preguntas se han excluido en este caso porque presentan una estructura distinta. En cada pregunta se muestra una representación verbal de la propiedad y dos representaciones geométricas y algebraicas de las propiedades empleadas. Las propiedades son la conmutativa de la multiplicación (pregunta 3), la propiedad distributiva del producto respecto de la suma (pregunta 4) y la paridad de la suma de dos números pares (pregunta 2). El alumnado ha de identificar las representaciones algebraicas y geométricas de las propiedades representadas de forma verbal y justificar esta elección. En la figura 1 se muestra un ejemplo de la pregunta 2 del cuestionario donde se pedía relacionar las representaciones que aparecen con la propiedad “la suma de dos números pares es un número par”. En el cuestionario original, hay un espacio para que los estudiantes escriban la justificación acerca de si las representaciones se corresponden o no con el enunciado.

Figura 1

Ejemplo de pregunta del cuestionario



Análisis de los datos

Se analizaron los errores de los sujetos al relacionar la representación verbal de una propiedad con sus formas geométrica y algebraica, así como justificaciones basadas en premisas falsas o incompletas. La unidad de análisis son las justificaciones en cada apartado de las tres preguntas. Se han considerado respuestas erróneas aquellas en las que el alumnado no relaciona correctamente la representación verbal con la algebraica o geométrica de la propiedad, y también aquellas que se basan en justificaciones incorrectas al establecer la relación. A partir de las respuestas erróneas observadas, se han establecido unas categorías de errores que se presentan en el apartado de resultados.

Los errores identificados en las respuestas del alumnado se han clasificado mediante un sistema de categorías establecido a posteriori. Para su definición, se empleó la triangulación con tres expertos/as, con el objetivo de garantizar que las categorías fueran mutuamente excluyentes. En primer lugar, se establecieron unas categorías a partir del análisis de los cuestionarios de un curso. Posteriormente, otro experto aplicó estas categorías al análisis de un curso, con el fin de consensuarlas entre ambos. Una vez alcanzado el consenso, un tercer experto realizó un nuevo análisis para contrastar y validar

la clasificación. El análisis se ha hecho empleando una hoja de cálculo en la que se han recogido los tipos de justificaciones y errores que ha dado cada alumno y alumna para cada uno de los apartados de las tres preguntas. A continuación, se han recogido todos los datos referentes a los errores.

RESULTADOS

A partir de los errores detectados en las justificaciones basadas en premisas falsas o incompletas, se han determinado las siguientes categorías, que se relacionan con los elementos del marco teórico:

1. Errores en los elementos de la representación: Se evidencian en errores de interpretación de los significados en las representaciones. Esto se manifiesta como confusión entre operaciones (suma con multiplicación), producto cartesiano (filas por columnas), consideración parcial de la representación (es decir, se tomen en cuenta sólo algunos elementos), no reconocimiento de las expresiones algebraicas o dificultades en las habilidades de visualización (no identificar que una figura no varía tras un cambio de posición). Relacionado con errores en la interpretación de gráficos (Diezman y Lowrie, 2009).
2. Veracidad del resultado: El estudiante reconoce como correcta la expresión, pero no comprueba que sea la misma que la que se representa verbalmente en la pregunta correspondiente. Relacionado con errores debido a la redacción y comprensión de las instrucciones de trabajo (Astolfi, 1999). Esto sucede, por ejemplo, si se argumenta que el apartado c de la figura 1 es correcta, ya que lo que se representa es verdad, pero no corresponde con la propiedad del enunciado.
3. Argumento incompleto: Son argumentos incomprensibles, no pertinentes o con información que no se explicita derivados de justificar (Blanton et al., 2022; Pinto et al., 2023). Un ejemplo de error es la respuesta del alumno 422 (es decir, el alumno codificado con el número 22 de cuarto curso), que afirma que $2a+2b=2(a+b)$ representa que la suma de dos pares es par, pero justifica con “el 8 es múltiplo de 2” sin mostrar sustitución de valores ni la equivalencia algebraica.
4. Error de cálculo: Se realiza una sustitución inadecuada en la representación algebraica o cuenta mal los elementos de la representación geométrica. Está relacionado con errores técnicos (Movshovizt et al., 1987).
5. Errores con las variables: muestra una mala comprensión de las variables como forma de representar cantidades desconocidas como si fueran conocidas. También se incluyen en esta categoría errores en la manipulación de expresiones algebraicas. Esto se relaciona con la complejidad del concepto de variable (Ayala-Altamirano y Molina, 2018; Bolaños-González y Lupiañez-Gómez, 2021)

En la siguiente tabla se muestran la cantidad de errores encontrados en las respuestas de las tres preguntas, organizados por los apartados de las preguntas y la cantidad de respuestas que había en esos apartados. Se ha calculado el porcentaje de errores en base a la cantidad de respuestas presentadas, organizado por cursos.

Tabla 2

Proporción de errores con respecto al número de respuestas por curso

Curso	Apartados en blanco	Respuestas	Errores	Porcentaje de errores/respuestas
3º	650	230	184	80%
4º	128	424	249	58.72%
5º	128	424	220	51.89%

6º	190	398	139	34.92%
----	-----	-----	-----	--------

Se observa una disminución entre la cantidad de apartados en blanco de tercero al resto de cursos, aunque en cuarto y quinto haya menos apartados en blanco que en sexto. Por otro lado, en lo referente al porcentaje de errores, hay una clara tendencia descendente por cursos, de mayor porcentaje de errores en tercero a uno menor en sexto. Como los apartados a y b de cada pregunta corresponden con los apartados que tienen representaciones algebraicas y los apartados c y d con los que tienen representaciones geométricas, se ha recogido en la siguiente tabla la cantidad de errores que se han encontrado dependiendo de si la representación era algebraica o geométrica.

Tabla 3*Proporción de errores en álgebra y geometría*

Cursos	Álgebra			Geometría		
	Respuestas	Errores	Porcentaje	Respuestas	Errores	Porcentaje
3º	107	101	94,39	123	91	73,98
4º	218	176	80,73	206	134	65,05
5º	218	191	87,61	206	109	52,91
6º	198	147	74,24	200	111	55,5

Se observa que en todos los cursos el porcentaje de error en las representaciones algebraicas es mayor que en las representaciones geométricas. Además, hay una tendencia descendente, es decir, en los cursos más bajos el porcentaje de error es mayor en ambas disciplinas. Por último, se ha hecho un recuento de la cantidad de errores de cada categoría que se han encontrado en las respuestas organizadas por cursos. A partir de esto, en la tabla 4, se ha calculado el porcentaje de veces que se ha encontrado ese error con relación a la cantidad de respuestas presentadas en ese curso. Por ejemplo, en tercero hubo un porcentaje de error del 6,09% en el error 1, en relación a las 230 respuestas de ese curso.

Tabla 4*Proporción de errores por tipo*

Curso	Errores					Total errores	Respuestas
	1	2	3	4	5		
3º	6,09	6,96	60,43	1,74	4,78	184	230
4º	9,2	18,63	25,47	0,71	4,72	249	424
5º	7,55	16,98	17,45	1,18	8,73	220	424
6º	8,79	16,83	1,76	1,01	6,53	139	398

Se observa que el error más frecuente es el tipo 3, presente en todos los cursos, aunque con una tendencia descendente a medida que se avanza de curso. Le sigue el error tipo 2, cuya incidencia disminuye de tercero a quinto, pero sin cambios remarcables de quinto a sexto. El error tipo 1 es más común en cuarto sin mostrar una tendencia clara. Los errores tipo 1 y 5, más vinculados a las representaciones algebraicas y geométricas, son menos frecuentes, pero tienen interés para el trabajo puesto que son los más relacionados con las representaciones.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Según lo observado en el apartado de resultados, se destacan tres evidencias. En primer lugar, hay un aumento de la cantidad de respuestas emitidas conforme se avanza de curso, y una disminución del porcentaje de errores presentados. Además, se han observado más errores en la identificación de propiedades representadas algebraicamente. Se puede interpretar que la complejidad para justificar la relación de las propiedades ha sido mayor en los cursos inferiores y que están más familiarizados con relacionar la representación verbal con la geométrica que con la algebraica. Por otro lado, la disminución de errores y respuesta en blanco por cursos puede estar relacionado con un aumento de conocimiento acerca de las propiedades aritméticas y sus representaciones.

En cuanto a los tipos de errores hallados, los que se han encontrado con más frecuencia en las respuestas de los alumnos son de la categoría 3, que es “argumento incompleto”. Esto puede explicarse puesto que es una categoría bastante amplia que recoge todas las justificaciones que hacen referencia a información que no se explicita, argumentos que quedan incompletos o estudiantes que escriben mensajes como “no lo sé”. Pinto y colaboradoras (2023) destacan la importancia de la práctica de la justificación como un medio para favorecer una comprensión más profunda de los problemas y estructuras matemáticas

Además, la presencia de este tipo de error puede deberse a la escasa práctica de la justificación en educación elemental (Blanton et al., 2022) y a la dificultad en la comprensión de la variable, como señalan Bolaño-González y Lupiañez-Gómez (2021). De este modo, se sugiere el interés de realizar tareas en el aula que se basen en la práctica de la justificación.

El segundo error más frecuente, de tipo 2 (veracidad del resultado), surge cuando los estudiantes eligen opciones correctas, pero que no corresponden a la propiedad enunciada de forma verbal. Esto podría estar influido por el diseño del cuestionario y se relaciona con los “errores por redacción y comprensión de instrucciones” descritos por (Astolfi, 1999). Este autor determina que se presentan estos errores cuando el alumnado no comprende correctamente las consignas de trabajo.

Por otro lado, los errores menos frecuentes son los de tipo 4 y 5. El error de cálculo (tipo 4) es poco común porque depende del uso de estrategias específicas, como la sustitución de valores o el conteo. El error con las variables (tipo 5) solo aparece en apartados con representaciones algebraicas, presentes en aproximadamente la mitad de los casos.

Es destacable que los errores de tipo 1, referidos a los elementos que conforman la representación han sido poco frecuentes, mientras que se han evidenciado mayores dificultades en el proceso de justificar. Este resultado, junto con las mayores dificultades encontradas en los cursos inferiores y en las representaciones algebraicas puede aportar información al profesorado con implicaciones directas al aula: la utilización de múltiples representaciones al introducir las propiedades (verbales, geométricas y algebraicas), estableciendo conexiones entre ellas y la implementación de tareas de justificación aumentando gradualmente la complejidad a lo largo de los cursos.

Agradecimientos

Este trabajo se ha realizado en el seno del grupo FQM-193, y en el marco de los proyectos PID2020-117395RB-I00 y PID2020-113601GB-I00.

Referencias

- Astolfi, J. P. (1999). *El error, un medio para enseñar*. Diada.
- Ayala-Altamirano, C. y Molina, M. (2018). Representación de cantidades indeterminadas por estudiantes de tercero de primaria: El caso de la variable dependiente. En L. J. Rodríguez-Muñoz, A. Aguilar González, P. Alonso, F. J. García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 141-150). SEIEM.

- Benson, C. C., Wall, J. J. y Malm, C. (2013). The distributive property in Grade 3? Are third graders ready to connect procedures to concepts of area conservation, distribution, and geometric interpretation? *Teaching children mathematics*, 19(8), 498-505. <https://doi.org/10.5951/teacchilmath.19.8.0498>
- Blanton, M., Gardiner, A. M., Ristorph, I., Stephens, A., Knuth, E. y Stroud, R. (2022). Progressions in young learners' understandings of parity arguments. *Mathematical Thinking and Learning*, 26(1), 90-121. <https://doi.org/10.1080/10986065.2022.2053775>
- Bolaños-González, H. y Lupiañez-Gómez, J. L. (2021). Errores en la comprensión del significado de las letras en tareas algebraicas en estudiantado universitario. *Uniciencia*, 35(1), 1-18. <http://dx.doi.org/10.15359/ru.35-1.1>
- Businskas, A. M. (2008). Conversations about connections: How secondary mathematics teachers conceptualize and contend with mathematical connections [Tesis Doctoral, Simon Fraser University].
- Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico. (Coord.), *La Educación Matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 95-124). Horsori.
- Coxford, A. F. (1995). The case for connections. En P. A. House y A. F. Coxford (Eds.), *Connecting mathematics across the curriculum* (pp. 3-12). National Council of Teachers of Mathematics.
- Diezmann, C. y Lowrie, T. (2009). Primary students' spatial visualization and spatial orientation: An evidence base for instruction. En M. Tzekaki, M. Kaldrimidou y H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics* (Vol. 2, pp. 417-424). PME.
- Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? En J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). Routledge.
- Molina, M. (2014). Traducción del simbolismo algebraico al lenguaje verbal: indagando en la comprensión de estudiantes de diferentes niveles educativos. *Gaceta de la RSME*, 17(3), 559-579.
- Movshovitz-Hadar, N., Zaslavski, O. y Inbar, S. (1987). An empirical classification model for errors in high school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 18(1), 3-14. <https://doi.org/10.2307/749532>
- NCTM. (2003). *Principios y estándares para la Educación Matemática*. SAEM Thales.
- Pinto, E., Ayala-Altamirano, C., Molina, M. y Cañadas, M. C. (2023). Desarrollo del pensamiento algebraico a través de la justificación en educación primaria. *Enseñanza de las ciencias*, 41(1), 149-173.
- Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria (BOE, num 52, de 2 de marzo de 2022). <https://www.boe.es/boe/dias/2022/03/02/pdfs/BOE-A-2022-3296.pdf>
- Rico, L. (1998). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En J. Kilpatrick., P. Gómez y L. Rico (Eds.), *Educación Matemática* (pp. 69-108). Grupo Editorial Iberoamérica.
- Rodríguez-Domingo, S., Molina, M., Cañadas, M. C. y Castro, E. (2015). Errores en la traducción de enunciado algebraicos entre los sistemas de representación simbólica y verbal. *PNA*, 9(4), 273-293.
- Stephens, A., Blanton, M., Knuth, E., Isler, I. y Gardiner, A. M. (2015). Just say yes to early algebra! *Teaching Children Mathematics*, 22(2), 92-101. <https://doi.org/10.5951/teacchilmath.22.2.0092>
- Torres, M. D., Ayala-Altamirano, C. y Ramírez-Uclés, R. (2024). Growing patterns invention by primary education students. *Research in Mathematics Education*. 1(26), 1-21, <https://doi.org/10.1080/14794802.2024>.