

LOS SISTEMAS INTELIGENTES EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA: UN CONTEXTO DE INVESTIGACIÓN PARA EL DESARROLLO DEL CURRÍCULO DE MATEMÁTICAS

Intelligent systems in mathematics education: A context for research into the development of mathematics curriculum

De Castro, C.

Universidad Autónoma de Madrid

Resumen

Los sistemas educativos adaptativos e inteligentes basados en la web plantean retos específicos para la transferencia de resultados de investigación en Educación Matemática debido a la especificidad de su contexto. Tras explicar las necesidades y restricciones propias del ámbito de transferencia, se describe cómo se han aplicado la metodología de la investigación basada en el diseño y la teoría de las trayectorias de aprendizaje en matemáticas. También se expone cómo se han aplicado principios, basados en la investigación, de un alcance bastante general en Educación Matemática, como el andamiaje, el uso de representaciones, la retroalimentación, los ejemplos resueltos y las comparaciones de estrategias, con ejemplos de la aplicación Smartick Matemáticas.

Palabras clave: desarrollo del currículo de matemáticas, Educación Matemática, investigación basada en diseño, sistema adaptativo inteligente basado en la web, trayectorias de aprendizaje.

Abstract

Web-based adaptive and intelligent educational systems pose specific challenges for the transfer of research findings in Mathematics Education due to the specificity of their context. After outlining the specific requirements and constraints of this transfer domain, the application of design-based research methodology and the theory of learning trajectories in mathematics is described. The use of broadly applicable, research-based principles in Mathematics Education—such as scaffolding, the use of representations, feedback, worked examples, and strategy comparisons—is also discussed. All of this is illustrated through the Smartick Math application.

Keywords: mathematics education, mathematics curriculum development, web-based adaptive intelligent educational system, design-based research, learning trajectories in mathematics.

UN CONTEXTO DE TRANSFERENCIA DE INVESTIGACIÓN PARA LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Este trabajo aborda la problemática de la transferencia de resultados de investigación en Educación Matemática. El enfoque que seguiré será plantear el tema desde la perspectiva de la transferencia a un *sistema educativo adaptativo e inteligente basado en la web* (STI). Como espero mostrar, el contexto de transferencia condiciona notablemente las posibilidades y las características de esta.

En los planteamientos clásicos del aprendizaje por analogía, se considera el razonamiento analógico como la transferencia de parte de un conocimiento de un dominio fuente a un dominio meta mediante procesos de recuperación de la información relevante y de aplicación o extrapolación de dicha información al nuevo contexto (González, 1997, p. 21). El uso de analogías y metáforas conlleva De Castro, C. (2025). Los sistemas inteligentes en Educación Matemática: un contexto de investigación para el desarrollo del currículo de matemáticas. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. 91-106). SEIEM.

riesgos de que se produzcan transferencias negativas, conducentes a la obtención de inferencias erróneas (González, 1997, p. 35). Esto ya lo advertía Bachelard (1938/1999) al escribir sobre el “conjunto impuro de las intuiciones básicas”, los “obstáculos amontonados por la experiencia cotidiana”, o al indicar que “El equilibrio de los cuerpos flotantes es objeto de una intuición familiar que es una maraña de errores” (p. 21). Lave (1991) dedica un capítulo de su libro a criticar la cultura de los experimentos de transferencia de aprendizaje, surgida a partir de las críticas de Thorndike y la doctrina de la disciplina formal, según la cual la mente funciona como una caja de herramientas multipropósito. Como resultado de esa concepción sobre el aprendizaje, se consideraba que la geometría, otras ramas de las matemáticas, el latín, o el ajedrez, constituían formas de disciplina formal que mejoraban el intelecto de los escolares (Lave, 1991, p. 40). Lave (1991, p. 56) sostiene que, en los estudios clásicos de transferencia de aprendizaje, resumidos en González (1997), se disocia la cognición de su contexto. A partir de ahí, comienza su programa de investigación sobre la práctica aritmética en el mundo cotidiano tratando de comprender las relaciones entre personas, actividades y entornos.

He comenzado con este párrafo sobre el aprendizaje por analogía, en la revisión de Gonzalez (1997), y con las críticas de Lave (1991), para tratar de argumentar mi postura de que la transferencia de resultados de investigación a un sistema de aprendizaje en línea, desde un entorno de laboratorio, en el caso de investigaciones psicológicas, o desde un contexto de aula, en investigaciones educativas, está muy lejos de ser un proceso sencillo o evidente.

Por ello, voy a comenzar proporcionando información básica sobre el contexto de transferencia. *Smartick Matemáticas* es un método online para el aprendizaje de las matemáticas. Dicho con mayor precisión, es un sistema educativo adaptativo e inteligente basado en la web (Brusilovsky y Peylo, 2003; Kahraman et al., 2010; Zapata-Ross, 2018), expresión sinónima de sistema tutor inteligente (Burns y Capps, 2013; Zapata-Ross, 2018), de mayor uso en la actualidad. Smartick funciona en sesiones diarias de 15 minutos de duración. Algunas de las analogías que podrían utilizarse, para comprender los usos principales que dan a Smartick sus usuarios, serían la de una clase de refuerzo para alumnos con dificultades en matemáticas o para estimular el talento matemático, dependiendo del nivel de competencia matemático de los usuarios. También se podría decir que Smartick modeliza un profesor particular de matemáticas o incluso un “club de matemáticas” donde se intenta estimular la actividad matemática. Desde esta perspectiva, se pueden entender algunas de las restricciones en el diseño y el desarrollo de Smartick:

- Es un *método de aprendizaje individual*. Existen situaciones de simulación de comunicación, pero se evita la comunicación entre usuarios para garantizar un entorno seguro. Esto hace que no pueda haber situaciones de aprendizaje cooperativo o colaborativo.
- *Unos contenidos bloquean otros*. No es posible acceder a los problemas de estructura multiplicativa si no se han superado el tema del concepto de multiplicación y la iniciación a las tablas de multiplicar. Esto lo hace muy diferente del entorno escolar, donde el alumnado pasa de un tema a otro, sin asegurar que se hayan producido los aprendizajes necesarios.
- Al ser un método que aspira a complementar y potenciar el aprendizaje matemático escolar, *no puede adoptar planteamientos muy disruptivos*, como emplear algoritmos alternativos.
- Es un método muy marcado por la necesidad de dar una *atención personalizada* en aspectos matemáticos, y cognitivos, pero también socioafectivos. Esta necesidad guía la mayoría de las líneas de desarrollo del producto, como la atención a niños con discalculia, o con altas capacidades, el trabajo sobre las creencias sobre las matemáticas, etc. Mientras que los tres puntos anteriores podrían verse como limitaciones, el aspecto de la personalización del aprendizaje constituye la mayor potencialidad de los sistemas educativos *adaptativos*.

BUSCANDO FUNDAMENTACIÓN PARA EL DISEÑO Y EL DESARROLLO DEL CURRÍCULO DE MATEMÁTICAS EN ENTORNOS EN LÍNEA

Smartick sigue un modelo de desarrollo de investigación basada en el diseño (Molina et al., 2011; Prediger y Zwetschler, 2013). Desde su primera versión completa, en 2011, se han ido introduciendo cambios en el sistema de forma continua. El proceso es el siguiente: (1) En primer lugar, al introducir un contenido nuevo, partimos del conocimiento de una trayectoria de aprendizaje (Clements y Sarama, 2016; Confrey, 2019; Confrey et al., 2014; Maloney et al., 2014) que integra conocimientos provenientes de la investigación sobre el aprendizaje y la enseñanza de un tópico matemático; (2) Analizamos cómo integrar el contenido nuevo dentro de la estructura de contenido general del sistema; (3) Aplicamos principios de diseño de distintas disciplinas, sobre andamiaje, práctica distribuida, usabilidad, etc., para implementar el camino de enseñanza en el sistema. Esta fase incluye la virtualización de recursos manipulativos y la adaptación de tipologías de actividades, inicialmente pensadas para la interacción entre humanos, a un STI; (4) Revisamos la implementación de las trayectorias en el sistema con los datos recogidos, incluyendo la retroalimentación proporcionada por alumnos y tutores; (6) Completamos la “primera vuelta” de este ciclo, punto en que toda la información recibida sobre el funcionamiento de la nueva trayectoria de aprendizaje en el sistema, y el análisis de la misma, da lugar a un rediseño de la trayectoria. Cuando no se introduce contenido nuevo en el sistema, el ciclo se reduce a fases de análisis y rediseño, en las que es importante el desarrollo y contrastación de hipótesis sobre teorías locales que expliquen las actuaciones de los alumnos, para optimizar el funcionamiento de la trayectoria en el sistema. Esto incluye indagar sobre el conocimiento adquirido por los alumnos al ir evolucionando a través de las trayectorias de aprendizaje, a través de pruebas, entrevistas, y tareas específicamente diseñadas para valorar las cualidades de su aprendizaje matemático. Este ciclo de investigación basada en el diseño aparece representado en la Figura 1.

Figura 2

Investigación basada en diseño (adaptado de Prediger y Zwetschler, 2013)



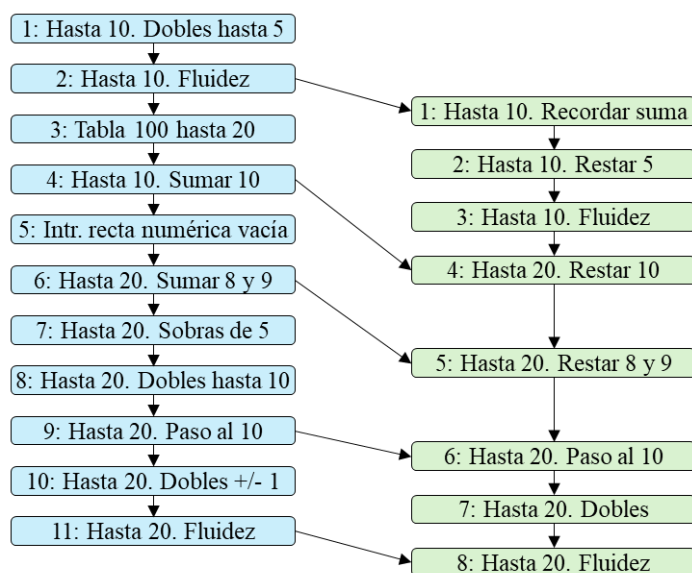
El otro elemento fundamental para articular un currículo online de matemáticas lo constituyen las trayectorias de aprendizaje. Una trayectoria de aprendizaje en matemáticas incluye tres aspectos: “el objetivo de aprendizaje, las progresiones de desarrollo del pensamiento y aprendizaje, y las secuencias de tareas instruccionales” (Clements y Sarama, 2004, p. 84; Clements y Sarama, 2009, p. 2). Los objetivos matemáticos de aprendizaje son las *ideas matemáticas importantes*, que son los

conceptos y destrezas matemáticas centrales y coherentes, consistentes con el pensamiento de los niños, y generativas de futuros aprendizajes. Las progresiones de desarrollo o *caminos de aprendizaje* son los niveles de pensamiento, cada uno más sofisticado que el anterior, que conducen o guían a alcanzar los objetivos matemáticos. Estas progresiones de desarrollo describen el camino típico que siguen los niños en la comprensión de un contenido matemático. Los diseños instruccionales son los *caminos de enseñanza*, que se componen de un conjunto de tareas en cada uno de los niveles de pensamiento de los caminos de aprendizaje, diseñadas con el fin de que los niños aprendan las ideas y destrezas necesarias para lograr ese nivel de pensamiento y que promueven el paso al siguiente nivel (Clements y Sarama, 2009, 2016).

Todo el currículo matemático de Smartick está diseñado partiendo, para cada *idea matemática importante*, de una revisión de la investigación para realizar un esbozo del *camino de aprendizaje*. A partir de ahí, se elabora el *camino de enseñanza*, que está compuesto por unidades y lecciones. En la Figura 2 observamos dos *caminos de enseñanza* para el cálculo mental de suma, en azul, y resta, en verde, con números de una cifra (con resultados “hasta 20”). Las flechas indican el orden de presentación de las unidades y las conexiones de “bloqueo” entre trayectorias, que implican que, hasta que no se supera una unidad, no se pasa a la unidad que esta bloquea. En cada trayectoria (suma y resta) las unidades vienen numeradas en la Figura 2. Las unidades van tratando el cálculo mental primero con resultados hasta 10, luego hasta 20, y finalmente hasta 100, que ya no aparecen en la Figura 2. Dentro de cada tamaño de número, la enseñanza de diferentes estrategias va evolucionando: (a) Uso de dobles, $3+3$, $4+4$, con recursos como el rekenrek o las configuraciones del dado; (b) Sumar 10, $6+10$, $3+10$, con la tabla 100; (c) Sumar 8 y 9, como sumar 10 y restar 2 o 1 en cada caso; (d) Sumar las sobras de 5, como $8+7=(5+3)+(5+2)=10+(3+2)$; y (e) Suma de dobles hasta 10, del tipo $8+8$, como $10+(3+3)$, sumando las sobras de 5 (*using fives*, Thompson, 1999, Figura 3). Las unidades correspondientes a estrategias se alternan con unidades para aprender a utilizar recursos como la tabla 100 y la recta numérica vacía (Figura 5), el rekenrek (Figura 3), y con unidades para alcanzar la fluidez en el cálculo (unidades 2 y 11 en la trayectoria de suma).

Figura 2

Trayectorias de aprendizaje para el cálculo mental aditivo de números de una cifra



IDEAS EMERGENTES DE LA INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA QUE IMPACTAN EN EL APRENDIZAJE

Booth et al. (2017) realizan una revisión sobre factores que han demostrado que pueden mejorar el aprendizaje matemático de los alumnos. En una línea similar en cuanto a la organización de las

investigaciones está también el trabajo de Barton (2018). He utilizado esta organización (Tabla 1), por tratarse de ideas especialmente relevantes debido a su aplicabilidad en los STI.

Tabla 1

Principios cognitivos que influyen en el aprendizaje de las matemáticas (adaptada de Booth et al., 2017)

Principio	Descripción
Andamiaje	Tener una ayuda que va desapareciendo gradualmente facilita la resolución de problemas con fluidez
Representaciones abstractas y concretas	Las conexiones entre representaciones abstractas y concretas producen un mayor aprendizaje y transferencia
Retroalimentación	Recibir retroalimentación sobre las respuestas mejora el rendimiento
Ejemplos resueltos	Estudiar (o explicar) ejemplos resueltos, junto con la resolución de problemas, mejora el conocimiento frente a solo resolver problemas
Práctica distribuida	Espaciar la práctica conduce a una mejor memorización que practicar todas las tareas del mismo tipo a la vez
Práctica intercalada	La resolución de diferentes tipos de problemas mezclados (con otros tipos de problemas) es mejor para la habilidad de resolución de problemas que practicar el mismo tipo de problemas en bloque (juntos, sin mezclar con otros).
Reflexión sobre el error	Pensar sobre los errores mejora la representación del problema y aumenta la comprensión conceptual
Comparación analógica	Comparar y contrastar varios casos particulares (procedimientos, estrategias) conduce a una mejor comprensión que estudiar un único caso particular

Andamiaje

El término “andamiaje” fue introducido por Wood et al. (1976, p. 90) para referirse al proceso que permite a un aprendiz resolver una tarea que no sería capaz de completar sin ayuda. Mediante el andamiaje, el experto “controla” los aspectos de la tarea que están fuera del alcance del niño, permitiéndole concentrarse en aquellos dentro de su rango de competencia. El andamiaje requiere que el aprendiz reconozca algo como solución a una cierta clase de problemas, para llegar a resolver la tarea sin ayuda. Además, se espera que el ritmo de aprendizaje sea mayor con andamiaje que sin él. Suele asumirse que el andamiaje: (1) depende del nivel de comprensión del alumno, al que hay que ajustar la ayuda, (2) debe retirarse gradualmente y (3) debe permitir que se transfiera la responsabilidad del maestro al aprendiz (Bakker et al., 2015; Booth et al., 2017). Para Bakker et al. (2015) es importante que no se considere cualquier tipo de ayuda o interacción adulto-niño como andamiaje, si no se dan estas tres condiciones de diagnóstico, retirada de la ayuda y responsabilización, o transición a la independencia.

El andamiaje ha mostrado ser efectivo en un amplio rango de edades y de dominios, aunque aún abundan más los estudios cualitativos observacionales que los cuantitativos que muestren la efectividad del enfoque (Bakker et al., 2015). Booth et al. (2017) indican que la definición de andamiaje todavía no se ha ampliado para aplicarse a los andamios empleados en un sistema tutor inteligente, en que el sistema diagnostica los conocimientos previos de los alumnos o el modo en que va desapareciendo la ayuda, en un contexto diferente a la interacción entre humanos (pp. 300-301).

En cuanto al tipo de andamiaje facilitado a los aprendices, en el trabajo original de Wood et al. (1976), se proponen: (1) “reclutar” al alumno, captando su interés e implicación en los requisitos de la tarea; (2) reducir los grados de libertad, simplificando la tarea; (3) mantener la dirección del alumno, incitando y corrigiendo mediante el lenguaje, hacia el objetivo; (4) marcar las características críticas de la tarea; (5) controlar la frustración, respondiendo al estado emocional del alumno; y (5) demostrar, o resolviendo el adulto mediante modelado (p. 98).

Anghileri (2006) organiza los andamios en tres niveles. En el nivel 1, propone “las disposiciones ambientales”, a través de la organización del aula o de la sesión, infografías, materiales manipulativos, tareas estructuradas, tareas autocorrectivas, la secuenciación y el ritmo, el juego libre, la colaboración entre compañeros, o la retroalimentación emocional. El nivel 2 es el de “explicación, revisión y reestructuración”, cuyos andamios típicos serían la explicación del profesor, la revisión (pidiendo a los alumnos que expliquen y justifiquen, o mediante el modelado en paralelo, e interpretando las acciones y las explicaciones de los alumnos) y la reestructuración (proporcionando contextos significativos, simplificando el problema, reformulando las explicaciones de los alumnos o negociando significados). Por último, el nivel 3 de andamiaje está orientado al “desarrollo del pensamiento conceptual”, e incluye el trabajo de establecer conexiones, el desarrollo de herramientas de representación y la generación de discurso conceptual.

En la Figura 3, podemos observar un tipo de andamio que se utiliza mucho en *Smartick*, de un alcance muy general: el problema guiado, una ayuda que se ofrece al principio, cuando se enseña un contenido nuevo. En este caso, la estrategia de sumar “las sobras de 5” (*using fives*, Thompson, 1999). En los problemas guiados, en la línea del trabajo de Wood et al. (1976), se simplifica la tarea, se mantiene la dirección del alumno hacia el objetivo, y se enfatizan las características críticas de la tarea. En este caso, se enfatiza la descomposición aditiva del 9 y el 6 en el rekenrek virtual utilizando el 5 como una parte, realzado por el color. Después se marca la reorganización de la suma, dando sumados los dos cincos y mostrando dentro de un recuadro las cantidades que a cada número (9 y 6) les “sobra de 5” (4 y 1) y pidiendo que se sumen. Una vez realizados distintos ejemplos del problema guiado, el andamio se va desvaneciendo, y los alumnos pueden practicar la estrategia de forma menos dirigida.

Figura 3

Ejemplos de andamios en Smartick



En el contexto de un sistema tutor inteligente para aprender matemáticas, se pueden hacer dos precisiones sobre los tipos de andamios. En primer lugar, el listado de Anghileri (2006) propone prácticas didácticas que proporcionan una ayuda a los alumnos. Se trata de “ayudas”, que no serían propiamente andamios, por no cumplir las condiciones de ajuste a la comprensión del alumno, retirada gradual y transferencia de la responsabilidad. Si una ayuda se proporciona a todos los alumnos, sin ningún grado de personalización en su presentación, y no está planificada de antemano su retirada progresiva, tendrá la consideración de una ayuda, pero no de un andamio. En segundo lugar, los procesos de andamiaje deben adaptarse al entorno en que se utiliza el sistema tutor inteligente, al menos en tres cuestiones básicas: (a) En la propia definición de andamiaje, pensada originalmente para una interacción entre humanos (Booth et al., 2017), (b) Hay andamios que no tienen aplicabilidad en el contexto de un STI, como el juego libre, la organización del aula, o gran parte del trabajo oral, de discusión en el aula; y (c). Por el contrario, hay andamios que sí pueden tener sentido en un entorno online, pero no en el aula¹.

Ejemplos de “ayudas” generales en un STI podrían ser la estructura y organización de la propuesta, el uso de tareas estructuradas o la retroalimentación emocional. Estos elementos están presentes en los caminos de aprendizaje de todos los estudiantes, y no tiene sentido su retirada progresiva. Sin embargo, las locuciones de las actividades, que aparecen según el nivel de lectura del alumno y van desapareciendo gradualmente, los manipulativos virtuales, o incluso los tutoriales interactivos, son ayudas personalizadas que van desapareciendo gradualmente, y sí tendrían la consideración de “andamios”.

Representaciones abstractas y concretas: Analogías, metáforas, manipulativos virtuales, comparación y múltiples representaciones

Tanto el uso de representaciones concretas como abstractas tiene beneficios para el aprendizaje de las matemáticas. Las representaciones concretas con objetos físicos (materiales manipulativos) asientan los conocimientos nuevos sobre el conocimiento anterior, y promueven la comprensión conceptual, pero pueden no favorecer la transferencia; mientras, las representaciones abstractas contribuyen a transferir el conocimiento a otras situaciones, pero no siempre favorecen la comprensión. Ambos tipos de representaciones se complementan. En general, comenzar con representaciones concretas que van paulatinamente desapareciendo en favor de representaciones más formales que facilitan la transferencia parece ser el mejor enfoque (Booth et al., 2017). El metaanálisis de Sokolowski (2018) concluye que es beneficioso para el aprendizaje de las matemáticas dar a los alumnos oportunidades de construir varios tipos de representaciones y de explorar las transiciones de unas a otras.

En la Figura 4, observamos, para dos operaciones aritméticas diferentes, la conexión entre las operaciones escritas y las representaciones manipulativa y gráfica. A la izquierda, el material manipulativo virtual, los bloques de base 10 de Dienes, se usan para modelizar el algoritmo de la resta. A la derecha, el modelo de área representa la multiplicación de fracciones.

Figura 4

Manipulativos y representaciones gráficas



La eficacia de los manipulativos físicos y virtuales

Dos cuestiones clave que se deben considerar en el desarrollo de un STI para matemáticas son el papel de los materiales manipulativos virtuales y el uso de múltiples representaciones. Los metaanálisis sobre la eficacia de los materiales manipulativos en la enseñanza de las matemáticas han encontrado efectos positivos de su uso. Sowell (1989), analizando 60 estudios, concluye que las intervenciones con manipulativos, de al menos un curso de duración en Educación Primaria, comparadas con enseñanza “simbólica”, producen efectos significativos de tamaño medio y alto. Queda abierta la cuestión sobre en qué situaciones el uso de manipulativos es apropiado o cuál es el manipulativo más adecuado para una situación particular (p. 504). Hodgen et al. (2018) revisan 5 metaanálisis sobre el uso de manipulativos en matemáticas, encontrando una evidencia alta en favor de su uso y señalando, como condiciones necesarias para que este sea efectivo: (1) que los profesores se aseguren de que los alumnos conectan adecuadamente el trabajo con manipulativos con las ideas

matemáticas que estos representan; (2) que el uso sea suficientemente extenso, pero no demasiado prolongado en el tiempo; y (3) que los profesores ayuden a los alumnos, partiendo de los manipulativos, a desarrollar representaciones más abstractas. El metaanálisis de Carbonneau et al. (2013) concluye que el uso de manipulativos, al compararse con la enseñanza con símbolos escritos, produce un efecto en el aprendizaje de tamaño pequeño a medio, pero el tamaño del efecto depende de variables de enseñanza como el nivel de orientación que se ofrece a los alumnos en el uso de manipulativos. Finalmente, en una investigación más aplicable al contexto de los STI, Moyer-Packenham y Westenskow (2013), en su metaanálisis sobre materiales manipulativos virtuales, con 66 estudios, indican que el uso de estos materiales produce efectos moderados en el rendimiento de los alumnos al comparar con otros enfoques de enseñanza (p. 47).

Fundamento de las analogías y del uso de manipulativos

Más allá del impacto de los manipulativos físicos y virtuales en el aprendizaje matemático cuantificado en la investigación a través de estudios y metaanálisis, deben adoptarse criterios para su uso. La manipulación en matemáticas, el uso de analogías y metáforas está basado en las teorías de aprendizaje por analogía. El razonamiento analógico consiste en la transferencia de parte de un conocimiento de un dominio conocido (fuente) a un dominio nuevo (meta u objetivo). Algunas cuestiones clave en este aprendizaje son: (1) el éxito de la transferencia depende del grado de semejanza entre ambos dominios; (2) resulta fundamental tener una buena base de conocimiento del dominio fuente que permita detectar las semejanzas entre los dominios; y (3) existe el riesgo de transferencia negativa, es decir, de realizar una transferencia que conduzca a un error, atribuible a una tendencia natural a asociar rasgos superficiales con estrategias de resolución (González, 1997). Bohan y Shawaker (1994), al aplicar el aprendizaje por analogía a las matemáticas, hablan del trabajo para adquirir un buen conocimiento del dominio fuente como “etapa concreta”, del trabajo de identificación de semejanzas entre dominios, entre los manipulativos y los símbolos, como “etapa puente” y del momento en que se retiran los manipulativos y ya, solo con símbolos escritos, los alumnos recuperan su conocimiento manipulativo y lo transfieren, como “etapa simbólica”.

Baroody (2017), en línea con la idea de resaltar la importancia de tener un conocimiento del dominio fuente adecuado, traslada el foco de los materiales manipulativos a las experiencias concretas, poniendo el énfasis en la familiaridad. Estas pueden implicar manipulativos, pero también analogías verbales o imágenes virtuales. El uso de manipulativos no garantiza que se produzca una experiencia educativa, que será valiosa en la medida en que consiga extender el conocimiento matemático informal para mejorar la comprensión de conocimientos formales. Integrar el uso de manipulativos en trayectorias de aprendizaje puede sacar el máximo provecho educativo de estos.

Barton (2018) resalta, como criterios fundamentales para usar analogías, la familiaridad (con balanzas de dos platillos, termómetros, dados, etc.), coincidiendo con Baroody (2017); la visibilidad, referida al uso real o virtual en el aula del manipulativo o del modelo; evidenciar la convergencia, es decir, hacer evidente la conexión entre ambos dominios, como los elementos de una balanza y de una ecuación; y reforzar la analogía, refiriéndonos a ella de forma continuada. Pero también enfatizaⁱⁱ la necesidad de que haya un verdadero encaje en la analogía, entre las características centrales del contenido matemático y su análogo “realista”, y el rango o alcance de aplicación de la analogía, que se refiere a la cantidad de conocimientos matemáticos que podemos aprender a través de esa analogía (Barton, 2018, pp. 124-125).

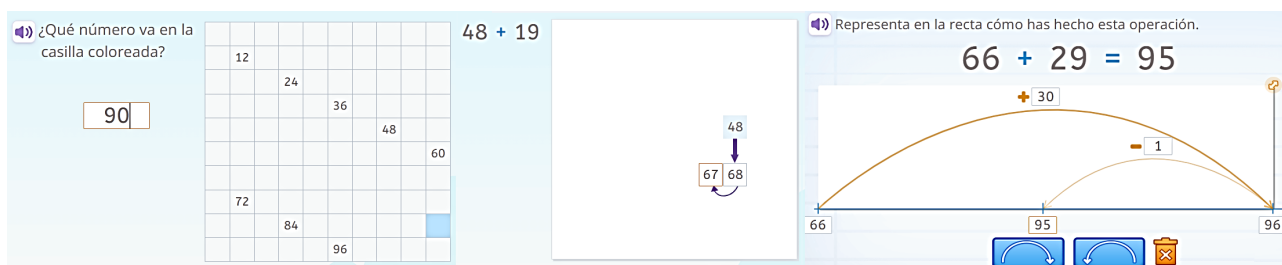
El uso de múltiples representaciones

Otro tema clave es el papel del uso de múltiples representaciones en matemáticas. Los trabajos de Ainsworth (1999, 2006 y 2014) ayudan a comprender dos aspectos contrapuestos del tema. Por un lado, usar múltiples representaciones de un mismo concepto favorece un conocimiento más profundo, pero, por otro lado, también es un aprendizaje que requiere un esfuerzo muy superior. Esto se debe a las tres funciones que tiene el uso de múltiples representaciones en matemáticas: de

complementariedad, de restricción y de construcción. La complementariedad consiste en que varias representaciones pueden transmitir distintas informaciones o la misma información de una forma diferente. Esto hace que la combinación de representaciones pueda facilitar que los alumnos se beneficien de las propiedades únicas de cada una. Por ejemplo, los diagramas favorecen los procesos perceptivos, mientras que las tablas facilitan la lectura de datos concretos. La restricción se produce cuando se relaciona una representación nueva con otra más familiar. Las representaciones nuevas pueden producir dificultades de comprensión. Establecer vínculos con una representación más familiar puede ampliar la comprensión de la representación nueva y, a su vez, la nueva representación puede restringir, en el sentido positivo de “afinar”, la comprensión de la representación inicial del concepto. Este juego de ampliación-restricción en las comprensiones facilitadas por las representaciones será posible solo si se comprende la relación existente entre ambas. Por último, usar múltiples representaciones tiene la función de construir una comprensión más profunda. Integrar información de múltiples representaciones puede favorecer la identificación de las características invariantes del dominio y las propiedades particulares de cada representación, y comprender cómo se relaciona una representación con otra. Como señala Ainsworth (2014, pp. 469-470), “Esta comprensión no es automática ni directa y, en muchos casos, la construcción de una comprensión más profunda con múltiples representaciones requiere que los alumnos dediquen mucho tiempo y esfuerzo para desarrollar este conocimiento.” En la Figura 5, se aplican tres representaciones diferentes dentro de la trayectoria de cálculo mental hasta 100. La primera es una actividad con la tabla 100, en la que se trata de ir interiorizando la posición de cada número en la tabla para poder prescindir poco a poco de la misma. La segunda imagen corresponde a la estrategia N10C aplicada en una tabla 100 ya vacía, actividad adaptada de Beishuizen (1993, p. 298). La tercera actividad pide a los alumnos que representen la misma estrategia en una recta numérica interactiva, en la que se pueden poner arcos, ajustar su dirección y su tamaño, y escribir los números tanto en la recta, para indicar resultados intermedios, como en los arcos para señalar las cantidades que se van añadiendo o restando en esta estrategia de salto.

Figura 5

Tres actividades con uso de múltiples representaciones



Retroalimentación

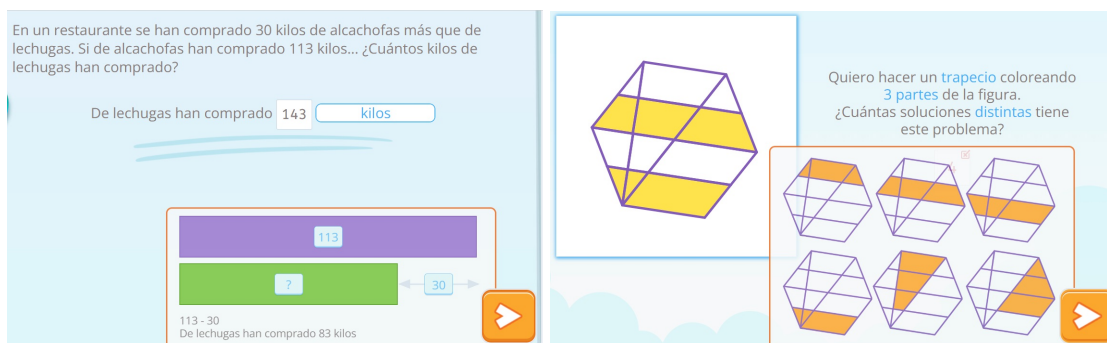
La retroalimentación (*feedback*) es cualquier información que se da a un alumno, ante su respuesta a una tarea o una pregunta, con el fin de mejorar la capacidad del alumno en la resolución de problemas o la comprensión de un tema. El feedback tiene un gran potencial educativo y ha demostrado su eficacia en matemáticas. Es más efectivo cuando se orienta al proceso que a través de una calificación, más cuando es inmediato que diferido y beneficia más a los alumnos de habilidad baja que a sus compañeros con mejor nivel en matemáticas (Booth et al., 2017). En cuanto al formato del *feedback*, la revisión sistemática de Söderström y Palm (2024) indican que, aunque en matemáticas gran parte de este se da a través de palabras, notaciones y números (en 124 estudios), en los entornos online cada vez se usan más los gráficos y figuras (26 investigaciones) para el *feedback* (Figura 6). Santos y Pinto (2009) han llegado a la conclusión de que un feedback breve ayuda al alumno a centrarse en los aspectos esenciales de la tarea. Por otra parte, a veces incluso un único feedback puede tener un gran impacto, como en la investigación sobre representación mental en tareas de estimación en recta

numérica (Opfer y Siegler, 2007). En el aula, no es sencillo proporcionar a cada alumno un feedback inmediato, detallado y orientado al proceso. En este punto, los STI parecen tener cierta ventaja sobre el aula (Barana et al., 2021).

En la Figura 6, en caso de error, el feedback es inmediato y va orientado al proceso. A la izquierda, un alumno ha resuelto un problema de comparación con incógnita en la referencia. Este problema es difícil, pues la expresión “30 kilos de alcachofas más” parece apuntar a una suma, si se hace una lectura superficial del enunciado. Como vemos en la respuesta de la Figura 6, izquierda, ($113+30=143$), el alumno ha cometido el error de sumar las dos cantidades. La retroalimentación inmediata se da mediante una modelización del enunciado del problema con barras de Singapur. En el modelo de barras se puede apreciar que la operación que resuelve el problema es una resta. En la imagen de la derecha de la Figura 6, observamos un problema de enumeración de figuras. El hexágono de la izquierda se puede colorear haciendo clic en cualquiera de sus regiones. Después de los tanteos que sean necesarios, el alumno debe enumerar los trapecios compuestos por tres regiones e indicar cuántas soluciones diferentes tiene el problema. Ante un error en la respuesta, el *feedback* muestra las seis soluciones posibles. En ambos casos, el feedback va orientado al proceso porque proporciona, en un caso, una modelización del problema que se enseña en problemas anteriores y que ayuda a hacer una lectura profunda del enunciado y, en el segundo caso, una organización de las soluciones que facilita ejemplos y un orden para orientar la enumeración.

Figura 6

Ejemplos de feedback en Smartick



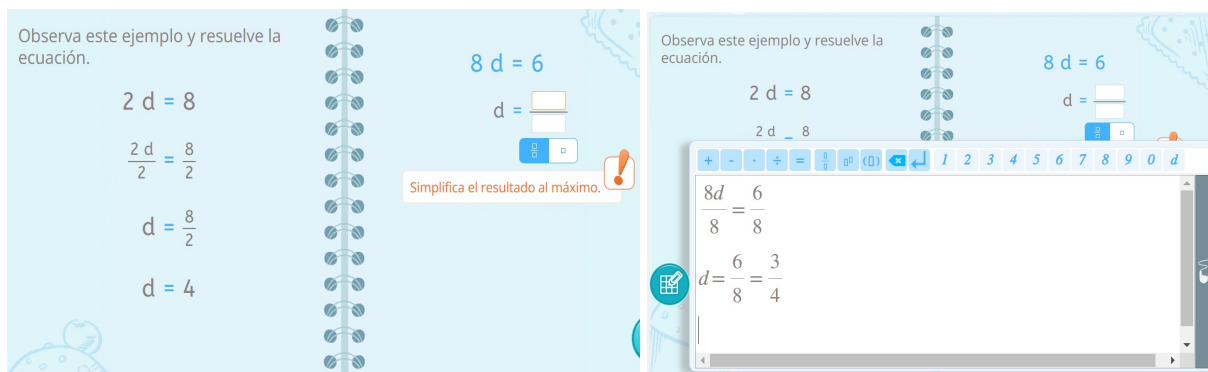
Ejemplos resueltos

El estudio de los alumnos de ejemplos resueltos de resolución de problemas es más efectivo que pedir a los alumnos que resuelvan los problemas por sí mismos. Esto se debe a que los alumnos pueden concentrarse en comprender cada uno de los pasos del proceso de resolución en el ejemplo. Pedir a los alumnos que expliquen un ejemplo resuelto también tiene beneficios, debido a que permite explicitar conocimientos y conectar la información nueva con los conocimientos previos. Muchas de las investigaciones sobre la efectividad del uso de ejemplos resueltos se han realizado en situaciones de instrucción con apoyo de ordenadores, aunque también se ha probado la eficacia de esta estrategia docente en matemáticas en aulas más tradicionales (Booth et al., 2017). Zhu y Simon (1987) encontraron, además, que el efecto que producen los ejemplos resueltos en matemáticas no se reduce a la memorización, sino que influye en la decisión sobre en qué situaciones es más adecuado el uso de una estrategia y cómo usarla. Van Loon-Hillen y Brand-Gruwel (2010) indican que el uso de ejemplos resueltos puede ser beneficioso para alcanzar el mismo rendimiento matemático con menor tiempo de trabajo. En la Figura 7, una tarea con la dupla “ejemplo resuelto-ejercicio propuesto” muestra cómo se aplican en Smartick los ejemplos resueltos. En la línea de aproximarnos a lo que Barton (2018/2019) llama “ejemplos recargados”, se intenta que cada paso de la resolución de la ecuación encierre en sí una explicación de dicho paso. Así, se evitan pasos mecanizados del tipo “lo que está multiplicando, se pasa dividiendo” y se sustituye por “dividir cantidades iguales por el mismo

número” en la línea de justificar el paso de forma coherente con la explicación de un tutorial anterior sobre ecuaciones. A la derecha, vemos que el proceso de resolución puede desarrollarse con escritura a mano o con el editor de fórmulas de *Wiris* integrado en la aplicación.

Figura 7

Ejemplos resueltos en resolución de ecuaciones



La reflexión sobre el error también ha probado tener un efecto positivo en el aprendizaje de las matemáticas. Este efecto suele justificarse por el deseo de los alumnos de superar la tensión o el malestar que produce la disonancia cognitiva al albergar dos pensamientos inconsistentes entre sí. Así, crear un conflicto cognitivo puede, potencialmente, facilitar cambios en el pensamiento matemático del alumno, a fin de que este sea más consistente. En matemáticas, se han realizado investigaciones en las que se han presentado a los alumnos ejemplos de tareas matemáticas resueltas con errores, propios o de otros compañeros. Resulta especialmente beneficioso analizar qué características del problema hacen que un determinado paso en el proceso de resolución sea erróneo (Booth et al., 2017).

Comparación de estrategias para resolver un problema

La comparación, propia del razonamiento analógico, permite a los alumnos conectar y contrastar dos o más representaciones y conducir a la generalización de un conocimiento. En matemáticas, comparar múltiples ejemplos, facilita la formación de esquemas. En particular, para el desarrollo de la comprensión conceptual, resulta más beneficioso comparar múltiples soluciones a un mismo problema que comparar varios tipos de problemas similares con una misma estrategia de resolución. La comparación ha resultado una estrategia eficiente en áreas de las matemáticas como el álgebra, la estimación en cálculo, la geometría, el razonamiento proporcional, o la división de números naturales y decimales (Booth et al., 2017; Rittle-Johnson y Star, 2009; Star y Rittle-Johnson, 2009).

Figura 8

Comparación de estrategias en cálculo mental



En la Figura 8, se pueden ver dos actividades de *Smartick* en las que se pretende que los alumnos comparen entre dos estrategias de cálculo mental. En la izquierda, se proponen las estrategias del

paso al 10, conteo, uso de hechos numéricos básicos, sumar las “sobras de 10” (*using fives*), estrategia que consiste en hacer: $9 + 6 = (5 + 4) + (5 + 1) = (5 + 5) + (4 + 1)$, y finalmente sumar 9, como sumar 10 y quitar 1. Esta actividad se da siempre por correcta. Se espera que ayude a los niños a valorar que existen distintas estrategias que se pueden aplicar y la respuesta de los niños se guarda para comparar las respuestas que dan con las de otras tareas. En la actividad de la derecha, si se pulsa el botón de “ejecutar”, se escucha una locución con el niño explicando cada estrategia. La estrategia de la izquierda, sumar 9 aumentando una decena y restando una unidad, es más rápida que la estrategia de la derecha, basada en el conteo por unidades con el apoyo de la tabla 100.

La distribución de la práctica: intercalada vs. por bloques

Uno de los principios cognitivos más ampliamente estudiados se refiere a la distribución de la práctica. Establece que extender o distanciar temporalmente las actividades de un tipo, dentro de la misma sesión, o en sesiones diferentes -sin aumentar la cantidad de práctica global- (práctica espaciada) mejora la retención del aprendizaje a largo plazo con respecto a realizar toda la práctica en un único bloque o momento en el tiempo (práctica masiva). Es decir, es mejor, si estamos aprendiendo a resolver problemas de ecuaciones de primer grado, hacer dos problemas diarios durante 5 días, que hacer 10 problemas el mismo día. Además, intervalos de tiempo mayores entre las tareas producen mayor beneficio. Este efecto de la práctica espaciada se ha contrastado en el dominio de la recuperación de hechos numéricos básicos en sumas y en las tablas de multiplicar, pero también en tareas matemáticas más complejas (Booth et al., 2017).

La práctica intercalada (*interleaved practice*) consiste en presentar a los alumnos las tareas, o los problemas, mezclados, de modo que los problemas relacionados con un concepto, o resolubles mediante una estrategia, se vayan alternando con otros de distinto tipo. La práctica intercalada se opone a la práctica por bloques, en la que los problemas relacionados con un contenido matemático se resuelven juntos. Las investigaciones (Rohrer et al., 2015; Rohrer et al., 2020) muestran que la práctica intercalada es más efectiva que la práctica por bloques y que, no obstante, la práctica por bloques es la más habitual en los libros de texto de matemáticas. La práctica intercalada hace que los alumnos reflexionen sobre qué estrategia es más apropiada para resolver cada problema, mientras que la práctica por bloques facilita que los alumnos piensen que todos los problemas que se hacen juntos se resuelven aplicando lo que se estudia en ese momento.

En Smartick los resultados de investigación sobre la distribución de la práctica (por bloques frente a intercalada) se han ido incorporando como principios para el diseño y modificación de las trayectorias de aprendizaje. En las tareas matemáticas que Smartick propone a sus alumnos, se establece una distinción entre ejercicios, 12 minutos de los 15 de la sesión diaria, y problemas, 3 minutos. La resolución de problemas ya tenía una distribución de práctica intercalada, pues los problemas aritméticos verbales se planteaban mezclando categorías con un nivel similar de dificultad. El objetivo era incorporar la práctica intercalada a la parte de la sesión de ejercicios. Los contenidos de Smartick se organizan en trayectorias de aprendizaje compuestas por unidades y lecciones diarias dedicadas a un contenido concreto. Por ejemplo, el contenido puede ser la simetría, la subitización, las series con un patrón de repetición, etc. Así pues, la parte de ejercicios de Smartick tenía una organización por bloques. Esta era la parte por optimizar con la inclusión de práctica intercalada.

Para valorar como hacer la aplicación, en los ejercicios de Smartick, de la práctica intercalada, se planteó un estudio experimental en que los alumnos fueron distribuidos aleatoriamente en un grupo de control (6405 alumnos), en que se seguía haciendo la sesión diaria por bloques, y en un grupo experimental (6209 alumnos), en que se introducía una variación para introducir la práctica mezclada en los ejercicios, como se explica a continuación.

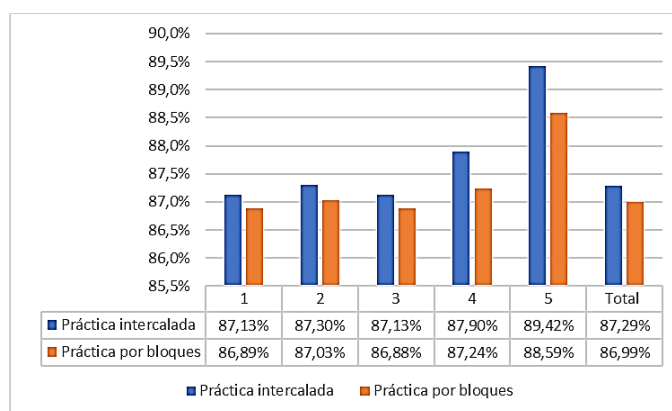
Dentro de la sesión diaria de 15 minutos, cada día se hace una lección. Dado que cada alumno trabaja a su ritmo, en un día se puede llegar a superar una lección, o no. Los análisis estadísticos de las sesiones indicaban que, en media, los alumnos que superaban una lección tenían 3 minutos de sobra

en la sesión. En el grupo de control, estos 3 minutos se dedicaban a comenzar una lección nueva, siguiendo con la práctica por bloques; mientras tanto, en el grupo experimental, a los alumnos se les presentaba, en estos 3 minutos, una selección de ejercicios mezclados correspondientes a lecciones superadas en los 90 días anteriores.

Para comparar el rendimiento de los grupos experimental y de control, utilizamos como instrumento las sesiones de repaso, realizadas cada 15 o 20 días, en las que se plantea a cada alumno una combinación de problemas mezclados que éste ha resuelto incorrectamente desde su anterior sesión de repaso. Recogemos el porcentaje de acierto en estas sesiones y el tiempo medio de respuesta. Durante los más de 2 meses de este estudio experimental, se recogieron datos de 28.247 sesiones de revisión y comparamos los porcentajes de acierto y los tiempos de respuesta. En la Figura 9, se muestran las puntuaciones que recogen los porcentajes de acierto, junto con el tiempo de respuesta. Como vemos, en las 5 sesiones de repaso, los porcentajes de acierto fueron superiores en el grupo de práctica intercalada a las del grupo de control. Y este resultado es consistente en todas las sesiones de repaso, durante el periodo de más de 2 meses de recogida de datos en este estudio.

Figura 9

Porcentaje de acierto por tipo de práctica, por bloques o intercalada, en las 5 sesiones de repaso



Un estudio así tiene como objetivo principal proporcionar una información para la toma de decisiones en la introducción de cambios en la forma de administrar el contenido matemático en un STI. El estudio tenía limitaciones evidentes: (1) Usar los ejercicios de sesiones de repaso como instrumento; (2) Mezclar en una puntuación (FS) los porcentajes de acierto y el tiempo de respuesta, aunque por separado se produjo el mismo efecto en ambas puntuaciones en favor de la práctica mezclada; (3) Comparar un grupo en que los alumnos “avanzan más”, pues en los 3 minutos que “sobran” comienzan la lección siguiente, con un grupo que repasa con práctica intercalada las lecciones anteriores.

En la gráfica de la Figura 9, se observa que la puntuación va subiendo en cada sesión de repaso. Esto se debe a que, de las 28.247 sesiones de repaso recogidas durante el periodo del estudio, 11.542 sesiones correspondieron a la primera sesión de cada alumno, 8.655 sesiones a la segunda sesión de repaso, 5.238 a la tercera, 2.284 a la cuarta, y 528 a la quinta. A medida que avanzan las sesiones de repaso, cada vez hay menos alumnos que llegan a dicha sesión, y estos son, precisamente, los alumnos que mayor asistencia tienen en Smartick y los que avanzan más deprisa. De ahí que en la cuarta sesión y en la quinta los resultados superiores a los de las primeras sesiones.

REFLEXIONES FINALES

En este trabajo he querido enfatizar la aportación de la investigación en Educación Matemática a los SI en tres aspectos complementarios: (1) Por una parte, el modelo de la *Investigación Basada en el*

Diseño proporciona un paradigma metodológico ideal para el desarrollo de entornos tecnológicos de aprendizaje, que pueden evaluarse y rediseñarse con ayuda de la información que facilitan los propios alumnos al realizar las actividades del sistema; (2) Por otra parte, las trayectorias de aprendizaje en matemáticas constituyen una teoría capaz de articular la aportación de la investigación precedente en el área con la organización de un currículo de matemáticas; (3) Finalmente, cada tema específico del currículo a veces requiere una profundización en aspectos muy particulares, como hemos visto con ejemplos dentro del camino de enseñanza del cálculo mental, con la estrategia de *using fives* (Thompson, 1999) o con el recurso de la tabla 100 vacía (Beishuizen, 1993).

Finalmente, el pequeño estudio inédito sobre práctica intercalada ilustra bien varias cuestiones relacionadas con la transferencia de investigación. En primer lugar, transferir no es casi nunca aplicar directamente, en el sentido de hacer en un contexto algo que ha dado buen resultado en otro. La realidad es siempre más compleja y las restricciones que impone el contexto, al igual que sus necesidades, son diferentes. Por otra parte, en los contextos en los que buscamos transferir la investigación, surgen cuestiones que no se han planteado o, al menos, que no están en las agendas de investigación habituales en Educación Matemática. Por ejemplo, en un STI es habitual preguntarse por la *posología didáctica*, o la cantidad de práctica necesaria para dominar un tema, o para decidir que alguien domina un contenido y está en condiciones de pasar al siguiente. De modo que, como sugería al inicio, transferir se parece más a pensar los problemas en un contexto, con la humildad de saber que rara vez puedes aplicar directamente soluciones provenientes de otro contexto, pero con la certeza de que ese problema puede pensarse con las herramientas, conceptuales y metodológicas, que proporciona la investigación en Educación Matemática.

Referencias

- Ainsworth, S. (1999). The functions of multiple representations. *Computers & Education*, 33(2-3), 131-152. [https://doi.org/10.1016/S0360-1315\(99\)00029-9](https://doi.org/10.1016/S0360-1315(99)00029-9)
- Ainsworth, S. (2006). DeFT: A conceptual framework for considering learning with multiple representations. *Learning and instruction*, 16(3), 183-198. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2006.03.001>
- Ainsworth, S. (2014). The multiple representation principle in multimedia learning. En R.E. Mayer (Ed.), *The Cambridge handbook of multimedia learning* (pp. 464-484). Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/CBO9781139547369.024>
- Anghileri, J. (2006). Scaffolding practices that enhance mathematics learning. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 9(1), 33-52. <https://doi.org/10.1007/s10857-006-9005-9>
- Bachelard, G. (1938/1999). *La formación del espíritu científico: Contribución a un psicoanálisis del conocimiento objetivo* (22ª ed.). Siglo XXI.
- Bakker, A., Smit, J. y Wegerif, R. (2015). Scaffolding and dialogic teaching in mathematics education: introduction and review. *ZDM – Mathematics Education*, 47, 1047-1065. <https://doi.org/10.1007/s11858-015-0738-8>
- Barana, A, Marchisio, M. y Sacchet, M. (2021). Interactive feedback for learning mathematics in a digital learning environment. *Education Sciences*, 11(6), 279. <https://doi.org/10.3390/educsci11060279>
- Baroody, A. J. (2017). The use of concrete experiences in early childhood mathematics instruction. *Advances in Child Development and Behavior*, 53, 43-94. <https://doi.org/10.1016/bs.acdb.2017.03.001>
- Barton, C. (2018). *How I wish I'd taught maths: Lessons learned from research, conversations with experts, and 12 years of mistakes*. John Catt. Traducido al español: Barton, C. (2019). *Cómo me gustaría haber enseñado matemáticas: Lecciones aprendidas de la investigación, conversaciones con expertos y 12 años de errores*. Editorial Aptus.
- Beishuizen, M. (1993). Mental strategies and materials or models for addition and subtraction up to 100 in Dutch second grades. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24(4), 294-323. <https://doi.org/10.2307/749464>

- Bohan, H. J. y Shawaker, P. B. (1994). Using manipulatives effectively: A drive down rounding road. *The Arithmetic Teacher*, 41, 5, 246-248. <https://doi.org/10.5951/AT.41.5.0246>
- Booth, J. L., McGinn, K. M., Barbieri, C., Begolli, K. N., Chang, B., Miller-Cotto, D., Young, L. K. y Davenport, J. L. (2017). Evidence for cognitive science principles that impact learning in mathematics. En D. C. Geary, D. B. Berch, R. J. Ochsendorf y K. M. Koepke (Eds.), *Mathematical cognition and learning: Acquisition of complex arithmetic skills and higher-order mathematics concepts* (pp. 297-325). Academic Press. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-805086-6.00013-8>
- Brusilovsky, P. y Peylo, C. (2003). Adaptive and intelligent web-based educational systems. *International Journal of Artificial Intelligence in Education*, 13, 159-172. <https://telearn.archives-ouvertes.fr/hal-00197315/document>
- Burns, H. L. y Capps, C. G. (2013). Foundations of intelligent tutoring systems: An introduction. En M. C. Polson y J. J. Richardson (Eds.), *Foundations of intelligent tutoring systems* (pp. 1-19). Psychology Press. <https://doi.org/10.4324/9780203761557>
- Carbonneau, K. J., Marley, S. y Selig, J. P. (2013). A meta-analysis of the efficacy of teaching mathematics with concrete manipulatives. *Journal of Educational Psychology*, 105(2), 380-400. <https://doi.org/10.1037/a0031084>
- Clements, D. H. y Sarama J. (2004). Learning trajectories in mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 81-89.
- Clements, D. H. y Sarama J. (2009). Learning and teaching early math: The learning trajectories approach. Nueva York: Routledge. Traducción al español en: Clements, D.H. y Sarama, J. (2016). *El aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas a edad temprana: El enfoque de las trayectorias de aprendizaje*. Learning Tools LLC.
- Confrey J. (2019). *Future of education and skills 2030: Curriculum analysis: A synthesis of research on learning trajectories/progressions in mathematics*. OECD. <http://www.oecd.org/education/2030/A-Synthesis-of-Research-on-Learning-Trajectories-Progressions-in-Mathematics.pdf>
- Confrey, J., Maloney, A. P. y Nguyen, K. H. (2014). Introduction: Learning trajectories in mathematics. En A. P. Maloney, J. Confrey y K. H. Nguyen (Eds.), *Learning over time: Learning trajectories in mathematics education* (pp. xi-xxii). Information Age Publishing.
- González, M. J. (1997). *Aprendizaje por analogía: Análisis del proceso de Inferencia Analógica para la adquisición de nuevos conocimientos*. Editorial Trotta.
- Hodgen, J., Foster, C., Marks, R. y Brown, M. (2018). *Evidence for review of mathematics teaching: Improving mathematics in key stages two and three: Evidence review*. Education Endowment Foundation.
- Kahraman, H. T., Sagioglu, S. y Colak, I. (2010). Development of adaptive and intelligent web-based educational systems. En T. Unwin, D. Kleine y K. Toyama (Eds.), *ICTD'10: Proceedings of the 4th ACM/IEEE International Conference on Information and Communication Technologies and Development* (pp. 1-5). Association for Computing Machinery. <https://doi.org/10.1109/ICAICT.2010.5612054>
- Lave, J. (1991). *La cognición en la práctica*. Paidós.
- Maloney, A. P., Confrey, J. y Nguyen, K. H. (Eds.) (2014). *Learning over time: Learning trajectories in mathematics education*. Information Age Publishing.
- Molina, M., Castro, E., Molina, J. L. y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, 29(1), 75-88. <https://doi.org/10.5565/rev/ec/v29n1.435>
- Moyer-Packenham, P. S. y Westenskow, A. (2013). Effects of virtual manipulatives on student achievement and mathematics learning. *International Journal of Virtual and Personal Learning Environments* (IJVPLE), 4(3), 35-50. <http://doi.org/10.4018/jvple.2013070103>
- Opfer, J. E. y Siegler, R. S. (2007). Representational change and children's numerical estimation. *Cognitive Psychology*, 55(3), 169-195. <https://doi.org/10.1016/j.cogpsych.2006.09.002>

- Prediger, S. y Zwetzschler, L. (2013). Topic-specific design research with a focus on learning processes: The case of understanding algebraic equivalence in grade 8. En T. Plomp y N. Nieveen (Eds.), *Educational design research: Illustrative cases* (pp. 407-424). SLO, Netherlands Institute for Curriculum Development. <http://www.mathematik.tu-dortmund.de/~prediger/veroeff/13-EDR-Prediger-Zwetzschler-Topic-Specific-Design-Research.pdf>
- Rittle-Johnson, B. y Star, J. R. (2009). Compared with what? The effects of different comparisons on conceptual knowledge and procedural flexibility for equation solving. *Journal of Educational Psychology*, 101(3), 529-544. <https://doi.org/10.1037/a0014224>
- Rohrer, D., Dedrick, R. F. y Stershic, S. (2015). Interleaved practice improves mathematics learning. *Journal of Educational Psychology*, 107(3), 900-908. <https://doi.org/10.1037/edu0000001>
- Rohrer, D., Dedrick, R. F. y Hartwig, M. K. (2020). The scarcity of interleaved practice in mathematics textbooks. *Educational Psychology Review*, 32, 873-83. <https://doi.org/10.1007/s10648-020-09516-2>
- Santos, L. y Pinto, L. (2009). Lights and shadows of feedback in mathematics learning. En Tzekaki, M., Kaldrimidou, M. y Sakonidis, C. (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 5, pp. 49-56). PME.
- Skolowski, A. (2018). The Effects of Using Representations in Elementary Mathematics: Meta-Analysis of Research. *IAFOR Journal of Education*, 6(3), 129-152.
- Söderström, S. y Palm, T. (2024). Feedback in mathematics education research: A systematic literature review. *Research in Mathematics Education*, 1-22. <https://doi.org/10.1080/14794802.2024.2401488>
- Sowell, E.J. (1989). Effects of manipulative materials in mathematics instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(5), 498-505. <https://www.jstor.org/stable/749423>
- Star, J. R. y Rittle-Johnson, B. (2009). Making algebra work: Instructional strategies that deepen student understanding, within and between algebraic representations. *ERS Spectrum*, 27(2), 11-18. <https://dash.harvard.edu/handle/1/4889486>
- Thompson, I. (1999). Mental calculation strategies for addition and subtraction. Part 1. *Mathematics in school*, 28(5), 2-4. <http://www.jstor.org/stable/30215422>
- van Loon-Hillen, N., van Gog, T. y Brand-Gruwel, S. (2010). Effects of worked examples in a primary school mathematics curriculum. *Interactive Learning Environments*, 20(1), 89-99. <https://doi.org/10.1080/10494821003755510>
- Wood, D., Bruner, J. S. y Ross, G. (1976). The role of tutoring in problem-solving. *Journal of Child Psychology and Psychiatry and Allied Disciplines*, 17, 89-100. <https://doi.org/10.1111/j.1469-7610.1976.tb00381.x>
- Zapata-Ross, M. (2018). La universidad inteligente. *Revista de Educación a Distancia (RED)*, 18(57). <https://revistas.um.es/red/article/view/327431>
- Zhu, X. y Simon, H.A. (1987). Learning mathematics from examples and by doing. *Cognition and Instruction*, 4(3), 137-166. https://doi.org/10.1207/s1532690xci0403_1

ⁱ Por ejemplo, en un geoplano virtual, se puede colorear el interior de la figura. Esto no es posible en un geoplano físico con gomas elásticas, y puede ser un andamio que ayude a diferenciar entre el área y el perímetro de una figura plana.

ⁱⁱ Barton toma esta idea de: William, D. (1997). Relevance as MacGuffin in mathematics education. *British Educational Research Association Conference*, York.