

1a
edición

EDUCACIÓN MATEMÁTICA EN MÉXICO Y ESPAÑA

INVESTIGACIONES Y LÍNEAS DE TRABAJO COMPARTIDAS.

Eric Flores-Medrano
Marta Molina
Ivonne Sandoval
Irene Polo-Blanco



SOMDEM
SOCIEDAD MEXICANA DE INVESTIGACIÓN Y
DIVULGACIÓN DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA A.C.



Sociedad Española
de Investigación en
Educación Matemática

EDUCACIÓN MATEMÁTICA EN MÉXICO Y ESPAÑA

Investigaciones y líneas de trabajo compartidas



SOMIDEM

Sociedad Mexicana de investigación y Divulgación de la
Educación Matemática A. C.



Sociedad Española
de Investigación en
Educación Matemática

Editores:

Eric Flores-Medrano
Universidad Complutense de Madrid

Marta Molina
Universidad de Salamanca

Ivonne Sandoval
Universidad Pedagógica Nacional, Ajusco CDMX

Irene Polo-Blanco
Universidad de Cantabria

Autores:

Alicia Bruno
Ana Isabel Sacristán
Avenilde Romo-Vázquez
Bernardo Gómez
Berta Barquero
Carlos Valenzuela
Carmen León-Mantero
Cristina Ayala-Altamirano
Dinazar Isabel Escudero-Avila
Edelmira Badillo
Fernando Barrera-Mora
Flor M. Rodríguez-Vásquez
Francisco Sepulveda
Gloria Sánchez-Matamoros
Heidy Chavira
Jaime I. García-García
Javier del Olmo-Muñoz
Javier García-García
José María Marbán
Juan Viramontes-Miranda
Juan D. Godino
Juan Francisco Ruiz-Hidalgo
Laura Muñoz-Rodríguez
Leticia Sosa
Lidia Aurora Hernández-Rebollar
Lilia P. Aké
Luis Carlos Contreras

Luis R. Pino-Fan
Luz Manuel Santos-Trigo
María García-González
María M. Gea
María José Madrid
María T. Sanz
María Trigueros
Mariana Bosch
Maribel Moreno Ochoa
Maricela Bonilla
Marta Molina
Matías Arce
Matías Camacho-Machín
Minerva Martínez-Ortega
Mónica Arnal-Palacián
Nuria Climent
Nuria Joglar-Prieto
Nuria Planas Raig
Olimpia Figueras
Orlando Vázquez
Pablo G. Sequeiros
Pascual D. Diago
Rafael Ramírez
Teresa F. Blanco
Verónica Hoyos
Vicenç Font
Yuly Vanegas



Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la
Educación Matemática A. C.



Sociedad Española
de Investigación en
Educación Matemática

Cada capítulo de este libro ha pasado por un riguroso proceso de evaluación para su publicación, implementando el sistema de dictaminación de doble ciego. Este método consiste en que tanto los autores como los revisores permanecen en anonimato durante todo el proceso, garantizando así una evaluación objetiva basada únicamente en la calidad y el mérito del contenido presentado. La evaluación fue realizada por académicos especialistas en cada uno de los temas abordados, quienes con su amplia experiencia y conocimientos contribuyeron a enriquecer y validar el contenido. Esta rigurosa práctica cumple con los estándares de transparencia editorial y ética, asegurando la integridad de los procesos y el valor académico de los trabajos publicados.



Esta obra es una publicación de acceso libre y está sujeta a los lineamientos de la Licencia Internacional Creative Commons Attribution 4.0. Esta licencia autoriza el uso, intercambio, adaptación, distribución y transmisión del material en cualquier medio o formato, siempre y cuando se otorgue el debido crédito al autor original, citando tanto su origen como la fuente del material gráfico.

Comité editorial

Sociedad Mexicana de investigación y Divulgación de la Educación Matemática A. C. (SOMIDEM)

María García González 
Universidad Autónoma de Guerrero

Ernesto A. Sánchez Sánchez 
Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV

Mario Sánchez Aguilar 
Instituto Politécnico Nacional

Luis Manuel Aguayo Rendón 
Universidad Pedagógica Nacional, Unidad Zacatecas

Yolanda Chávez Ruíz 
Escuela Normal de Rincón de Romos, Aguascalientes

Carlos Valenzuela García 
Universidad de Guadalajara

Apolo Castañeda Alonso 
Instituto Politécnico Nacional

Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)

Nuria Climent Rodríguez 
Universidad de Huelva,

Nuria Planas 
Universidad Autónoma de Barcelona

Irene Polo-Blanco 
Universidad de Cantabria

Comité Científico Revisor de la obra

Bernardo Gómez 
Universidad de Valencia

Carlos Valenzuela 
Universidad de Guadalajara

Cristina Ayala-Altamirano 
Universidad de Málaga

Dinazar Isabel Escudero-Avila 
Universidad Complutense de Madrid

Edelmira Badillo 
Universitat Autònoma de Barcelona

Eric Flores-Medrano 
Universidad Complutense de Madrid

Fernando Barrera-Mora 
Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo

Francisco Sepulveda 
Centro de Investigación y de Estudios
Avanzados, CDMX

Heidy Chavira 
Universidad Autónoma de Ciudad Juárez

Irene Polo-Blanco 
Universidad de Cantabria

Ivonne Sandoval 
Universidad Pedagógica Nacional
Ciudad de México

Jaime I. García-García 
Universidad Metropolitana de Ciencias de la
Educación, Chile

Javier del Olmo-Muñoz 
Universidad de Castilla-La Mancha

José María Marbán 
Universidad de Valladolid

Juan Viramontes-Miranda 
Universidad Autónoma de Ciudad Juárez

Juan D. Godino 
Universidad de Granada

Laura Muñiz-Rodríguez 
Universidad de Oviedo

Leticia Sosa 
Universidad Autónoma de Zacatecas

Lilia P. Aké 
Universidad Autónoma de Querétaro

María García-González 
Universidad Autónoma de Guerrero

María José Madrid 
Universidad Pontificia de Salamanca

María Trigueros 
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Marta Molina 
Universidad de Salamanca

Matías Camacho-Machín 
Universidad de La Laguna, España

Mónica Arnal-Palacián 
Universidad de Zaragoza, España

Olimpia Figueras 
Centro de Investigación y de Estudios
Avanzados, CDMX

Orlando Vázquez 
Escuela Normal Superior de México

Teresa F. Blanco 
Universidad de Santiago de Compostela

Verónica Hoyos 
Universidad Pedagógica Nacional
Ciudad de México

Vicenç Font 
Universitat de Barcelona

Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación
Matemática A. C. (SOMIDEM) y Sociedad Española de Educación Matemática

Título: Educación Matemática en México y España: Investigaciones y líneas de
trabajo compartidas

Primera Edición, 2025 / Editorial SOMIDEM - SEIEM

Clasificación DEWEY. Materia: 001.4 – Investigación.

Tipo de Contenido: Ciencia y tecnología.

Clasificación thema: JNUM - Recursos y materiales didácticos para docentes.

Tipo de soporte: libro digital descargable

ISBN: 978-607-59819-8-7

DOI de la obra completa: <https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S2/2025/03>

Editorial SOMIDEM

Calle Adolfo Prieto

Colonia Del Valle

C.P. 03100, Alcaldía Benito Juárez

Ciudad de México

Correo electrónico: editorialsomidem@gmail.com

Sitio de internet: <http://editorialsomidem.org.mx/>

Registrado ante INDAUTOR como entidad editora: MID131003

Corrección de estilo y diseño editorial: Ingrid Eleonor Castañeda González

ingrideleonor@gmail.com

Diseño de arte en portada y contraportada: América Siles Bárcenas

america.siles@owwwl.com

Cita de la obra completa en APA 7:

Flores-Medrano, E., Molina, M., Sandoval, I., & Polo-Blanco, I. (Eds.). (2025).

*Educación Matemática en México y España: Investigaciones y líneas de trabajo
compartidas*. Editorial SOMIDEM - SEIEM.

<https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S2/2025/03>

Índice

Prólogo	11
---------------	----

Parte I. Trayectorias compartidas en Investigación: de los orígenes a las nuevas perspectivas	15
--	-----------

El papel de la colaboración entre México y España en la consolidación del Modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas <i>Dinazar Isabel Escudero-Avila, Nuria Climent, Leticia Sosa y Luis Carlos Contreras</i>	19
---	----

Los Recorridos de Estudio e Investigación y las restricciones institucionales en la formación del profesorado <i>Berta Barquero, Marianna Bosch y Avenilde Romo-Vázquez</i>	49
--	----

Desarrollo de dos agendas de investigación en el marco del enfoque ontosemiótico <i>Lilia P. Aké, Juan D. Godino y Luis R. Pino-Fan</i>	77
--	----

Tres estudios sobre el conocimiento y la enseñanza de los números racionales <i>Bernardo Gómez, Olimpia Figueras, Carlos Valenzuela y María T. Sanz ...</i>	97
--	----

El esquema gráfico de la derivada. Una colaboración entre investigadoras de España y México <i>María Trigueros, Edelmira Badillo, Gloria Sánchez-Matamoras y Lidia Aurora Hernández-Rebollar</i>	125
---	-----

Contribuciones y perspectivas en la resolución y formulación de problemas matemáticos: El uso sistemático de tecnologías digitales en escenarios de enseñanza <i>Matías Camacho-Machín, Luz Manuel Santos-Trigo y Fernando Barrera-Mora</i>	149
--	-----

Investigación sobre conexiones matemáticas en España y México <i>Vicenç Font, Javier García-García, Flor M. Rodríguez-Vásquez y Yuly Vanegas</i>	173
---	-----

Parte II. Investigaciones en grupos temáticos: en la búsqueda de puntos de encuentro 193

Presente y futuro de las sociedades de investigación en educación estocástica en España y México
Laura Muñoz-Rodríguez, Francisco Sepulveda, María M. Gea y Jaime I. García-García 199

La enseñanza del análisis matemático: panorama compartido
Mónica Arnal-Palacián, Heidi Chavira, Matías Arce y Juan Viramontes-Miranda 227

Tendencias y desafíos acerca del desarrollo del pensamiento numérico y algebraico: un diálogo entre SEIEM y SOMIDEM
Cristina Ayala-Altamirano, Carlos Valenzuela, Alicia Bruno, Olimpia Figueras y Rafael Ramírez 257

Tendencias en la investigación sobre enseñanza y aprendizaje de la geometría: perspectivas desde dos grupos de trabajo
Orlando Vázquez, Maricela Bonilla, Teresa F. Blanco y Pablo G. Sequeiros 287

Pasado y futuro en la historia de las matemáticas y la educación matemática: tendiendo puentes en investigación entre España y México
María José Madrid, Carmen León-Mantero, Juan Viramontes-Miranda y Maribel Moreno Ochoa 317

Investigación en educación matemática y tecnología: aportes desde los grupos entornos tecnológicos en SEIEM y tecnologías digitales en SOMIDEM
Javier del Olmo-Muñoz, Verónica Hoyos, Pascual D. Diago, Minerva Martínez-Ortega y Ana Isabel Sacristán 339

Investigaciones sobre el profesorado de matemáticas en México y España
Lilia P. Aké, Juan Francisco Ruiz-Hidalgo y Nuria Joglar-Prieto 373

La investigación sobre afectos en educación matemática como reto compartido
José María Marbán y María S. García-González 397

Prólogo

“Que yo sepa, nadie ha formulado hasta ahora una teoría del prólogo.”
(anotación en el prólogo a *Prólogos con un prólogo de prólogos*,
J. L. Borges, 26 de noviembre de 1974)

Jorge Luis Borges, Pablo Neruda y, mucho antes, el poeta Eurípides escribieron que el prólogo no es un adorno, ni un acto de elogio, un mero comentario o una especie de didáctica del texto principal. Un prólogo es un discurso que precede a otro discurso y busca enlazar con él. Es, por tanto, un texto con una función clara, y autonomía en cuanto al contenido y a la estructura. Aunque no hay “prólogos al uso”, abundan aquellos con una estructura que emula a pequeña escala la del texto principal y con un contenido que actúa a modo de resumen o introducción de las contribuciones que le siguen. En este sentido, este no es un prólogo al uso. Tampoco está escrito por una sola persona, ni es innecesariamente largo. Pretendemos formar una unidad de discurso con el presente libro, utilizando estas líneas para justificar su importancia y para poner de relieve las oportunidades que se han creado a lo largo del proceso de elaboración y las oportunidades que vendrán.

Nos vienen varias palabras a la cabeza en la ocasión de este libro. Colaboración es una de ellas. La colaboración en educación matemática como disciplina es fundamental porque permite, en particular, enriquecer y entender los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. El intercambio de ideas, estrategias y experiencias entre profesorado, alumnado y equipos investigadores son una fuente de información para explicar y entender diversas problemáticas desde distintos enfoques. Cuando en esta iniciativa participan instituciones científicas y organizaciones de alcance internacional, se pueden lograr estándares internacionales para mejorar la calidad de los sistemas educativos y establecer una visión a la vez global y local fundamentada de la educación matemática.

Uno de los propósitos de la Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática (SOMIDEM) es fortalecer y difundir la investigación en educación matemática, generando puentes entre profesorado, alumnado e investigadores con interés en esta disciplina; además, SOMIDEM promueve espacios de comunicación académica, congresos y proyectos editoriales que visibilizan trabajos vinculados con la innovación, la formación docente y la reflexión teórica. Por su parte, la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM) fue creada para promover y potenciar la investigación y la reflexión crítica sobre múltiples aspectos de la educación matemática en España, con miras a compartir reflexiones y actuaciones con otras comunidades de investigación en educación matemática. Algunas de las actividades de SEIEM son los simposios anuales, las escuelas de verano bianuales, los grupos de trabajo en continuo desarrollo, las publicaciones de boletines y la edición de la revista *Avances de Investigación en Educación Matemática* (AIEM).

Ambas sociedades, SOMIDEM y SEIEM, convergen en la necesidad de crear espacios de intercambio intelectual y estructuras de colaboración y conocimiento. Y así llegamos a otra de las palabras que nos viene a la cabeza: conocimiento. Aunque México y España llevan años colaborando en el ámbito de la educación matemática y de su investigación, recientemente se ha establecido un convenio entre SOMIDEM y SEIEM para reforzar intercambios colectivos y favorecer actividades conjuntas orientadas a la generación de conocimiento. Como resultado, y en calidad de presidentes de estas sociedades, nos honra presentar esta obra colectiva titulada *Educación Matemática en México y España: Investigaciones y líneas de trabajo compartidas*. Este libro es una manifestación de la actual alianza. Su publicación no solo refleja un logro bibliográfico, sino que representa un ejercicio de diálogo, colaboración y afinidad académica, contribuyendo al fortalecimiento de redes de trabajo y conocimiento en educación matemática.

La obra se organiza en dos partes, cada una con una introducción escrita por las personas que han coordinado su edición, a quienes agradecemos sinceramente su dedicación, el cuidado en la selección de los textos y la calidad de estos, así como el esfuerzo para lograr la articulación de las contribuciones que conforman este libro. En la primera parte, los capítulos documentan colaboraciones entre miembros de SOMIDEM y SEIEM; se exponen investigaciones conjuntas, proyectos transnacionales, coautorías que han madurado con el tiempo y otras.

En la segunda parte, los textos no necesariamente parten de proyectos en México y España, pero muestran puntos de encuentro entre grupos de discusión con intereses análogos a raíz de los encuentros académicos que se organizan al interior de cada sociedad, tales como el Congreso SOMIDEM y el Simposio de la SEIEM. En esta parte del libro se exponen temas de

interés compartido, enfoques teóricos y metodológicos, así como problemáticas de interés en ambos países.

La elección de estas dos partes para este libro tiene dos propósitos. Por un lado, así se visibiliza la colaboración existente entre las comunidades de investigación en educación matemática en México y en España. Por otro lado, así se abre el diálogo entre comunidades investigadoras de ambos países que no hayan colaborado hasta ahora; a partir de esta obra, se podrán compartir inquietudes científicas que permitan trazar rutas de trabajo conjunto, buscando alcanzar la consolidación de nuevos grupos y redes futuras en educación matemática. Mediante estas dos partes, el libro representa una vía para proyectar la investigación en un contexto iberoamericano, conectar grupos locales con redes internacionales y fomentar la publicación colaborativa en educación matemática. Por ello, este libro de alguna manera viene a dar cuenta de las relaciones entre México y España en el ámbito de la investigación en educación matemática y de cómo estas relaciones pueden ser revisadas, transformadas, robustecidas y en síntesis mejoradas.

Generosidad es otra palabra que nos viene a la cabeza, en la ocasión de este libro. No podemos dejar de reconocer el trabajo generoso, sostenido y riguroso de todas las personas que han participado en este libro: coordinadores y editores que tejieron puentes y emparejaron para que en cada capítulo se reflejen estudios realizados en México y España, autores que confiaron en esta iniciativa y le dedicaron tiempo, comités de revisión y gestores de logística. Cada aporte ha sido esencial para que este libro se haya materializado y para que los distintos capítulos conformen una unidad de discurso coherente, lejos de ser textos sueltos y dispares. Deseamos que este proyecto sea el inicio de una tradición de colaboración sistemática, o al menos frecuente. Que sirva como modelo de cómo dos sociedades de investigación en educación matemática pueden articularse en torno a intereses compartidos y contribuir a la creación de una comunidad más amplia.

Sinceramente creemos que este libro es una aportación al estado de la educación matemática, tanto en México como en España. También creemos que es de utilidad para quienes se dedican a la investigación, a la docencia y a la formación del profesorado, para alumnado de posgrado y para autoridades educativas que toman decisiones que marcan el rumbo de la educación. En las páginas que siguen, se cuentan estudios valiosos, que son una inspiración para nuevas líneas de trabajo compartidas, reflexiones críticas y encuentros intelectuales. En estos tiempos difíciles de crisis y fragmentación a muy distintos niveles, donde la educación matemática no se mantiene al margen, no nos podemos permitir perder las oportunidades que surgen al aunar esfuerzos. Tal vez parezca exageración u optimismo desmesurado, pero creemos que parte de lo que vendrá en el futuro de SOMIDEM, de SEIEM y de las prácticas de la educación matemática podrá haberse gestado

en el contexto de elaboración, difusión y lectura de Educación Matemática en México y España.

Para concluir, desde la SOMIDEM y la SEIEM extendemos una cordial invitación a leer cada uno de los capítulos de este libro; incluso sugerimos contactar con los autores para proponer colaboraciones, espacios críticos de diálogo e intercambios académicos sobre discursos nuevos y sobre discursos actualizados. En cualquier caso, este prólogo no puede ser un atajo. Animamos a que se tenga la experiencia personal que solo proporciona la lectura del libro. La experiencia personal propia no es reemplazable con lo que hemos escrito acerca de nuestras ideas al pensar, leer, atesorar y celebrar este libro. Somos, al fin y al cabo, dos remitentes que prologamos un libro para los destinatarios que lo van a leer. Estamos de celebración, y esta es otra de las palabras que nos viene a la cabeza.

Carlos Valenzuela, presidente de SOMIDEM
Núria Planas, presidenta de SEIEM

Parte I

Trayectorias compartidas en Investigación: de los orígenes a las nuevas perspectivas

La colaboración entre investigadores de Educación Matemática de México y España comenzó hace ya más de 30 años, incluso antes de que se fundaran las dos sociedades que editan este libro: la *Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (SEIEM) y la *Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática* (SOMIDEM). En esta primera parte del libro, damos cuenta de la riqueza y diversidad de dicha colaboración a través de siete capítulos que describen las trayectorias de investigaciones desarrolladas por diferentes equipos compuestos por personas de ambos países. Cada capítulo aborda el origen de la colaboración y los intereses temáticos de investigación comunes que la motivaron; expone los principales trabajos realizados y sus resultados; reconoce las investigaciones que han surgido como consecuencia de estas experiencias compartidas y, finalmente, plantea perspectivas de continuidad y nuevas problemáticas que se vislumbran.

Para mostrar hilos conductores en esta diversidad, los capítulos se han agrupado en tres grandes ejes temáticos:

Eje 1. *Formación y el conocimiento del profesorado de matemáticas*

Eje 2. *Procesos de enseñanza y aprendizaje de objetos matemáticos*

Eje 3. *Resolución de problemas en ambientes digitales y conexiones matemáticas*

El primer eje está dedicado a la *formación y el conocimiento del profesorado de matemáticas* y recoge tres capítulos que, desde distintos marcos teóricos, exploran cómo se ha investigado y modelado la formación del profesorado y los dispositivos para su desarrollo. Escudero-Ávila, Climent, Sosa, y Contreras, en su capítulo *El papel de la colaboración entre México y España en la consolidación del modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas*

muestran la consolidación del modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK), desde la perspectiva de las colaboraciones –desde hace más de una década– entre investigadores de ambos países y de una red de investigación internacional ya consolidada. Por su parte, Barquero, Bosch y Romo-Vázquez, en su capítulo *Los recorridos de estudio e investigación y las restricciones institucionales en la formación del profesorado*, relatan cómo, desde 2013, la colaboración permitió concretar y desarrollar, en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico, un dispositivo que pone el acento en las restricciones institucionales en contextos reales desde el paradigma del cuestionamiento del mundo, experimentado de forma intensa en cursos del Programa de Matemática Educativa del Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada (CICATA-IPN). Por su parte, Aké, Godino y Pino-Fan, en su capítulo *Desarrollo de dos agendas de investigación en el marco del Enfoque Ontosemiótico*, narran una colaboración académica e investigativa que dio origen a dos líneas de investigación dentro del sistema teórico del Enfoque Ontosemiótico, y ejemplifican cómo la movilidad académica ha fortalecido la investigación en los equipos de ambos países.

El segundo eje se orienta a los procesos de enseñanza y aprendizaje de objetos matemáticos específicos, y evidencia cómo el trabajo colaborativo ha permitido avanzar en la comprensión de estos fenómenos. Gómez, Figueras, Valenzuela y Sanz presentan el capítulo *Tres estudios sobre el conocimiento y la enseñanza de los números racionales*, estructurado en torno a tres etapas de la dilatada colaboración, que inició en la década de los noventa, entre la Universidad de Valencia y diferentes instituciones mexicanas, concretamente el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav) y, en los últimos años, con la Universidad de Guadalajara de México. Este capítulo muestra cómo la diversidad de contextos enriquece la interpretación de las estrategias y dificultades de estudiantes de 6 a 17 años de edad al construir conocimientos relacionados con la aritmética de los números racionales y desarrollar habilidades para usar esos números racionales en la resolución de tareas variadas. Así evidencia la complejidad del proceso de tránsito del aprendizaje de los números naturales al de los números racionales. Por su parte, el capítulo de Trigueros, Badillo, Sánchez-Matamoros y Hernández-Rebollar titulado *El esquema gráfico de la derivada. Una colaboración entre investigadoras de España y México*, reconstruye una trayectoria de investigación en torno al esquema de la derivada usando las herramientas de la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto y Esquema). En este capítulo se muestra cómo la colaboración ha propiciado una evolución en los focos de estudio, desde una descomposición genética inicial hasta un análisis más profundo de los mecanismos de la tematización del esquema gráfico de la derivada.

El tercer eje, *resolución de problemas en ambientes digitales y conexiones matemáticas*, ilustra cómo las colaboraciones han abierto nuevas posibilidades para estudiar la actividad matemática. El capítulo *Contribuciones y perspectivas en la resolución y formulación de problemas matemáticos: el uso sistemático de tecnologías digitales en escenarios de enseñanza* de Camacho-Martín, Santos-Trigo y Barrera-Mora, da cuenta de una colaboración sostenida desde la década de los ochenta entre la Universidad de La Laguna y el Cinvestav. Destaca cómo el intercambio continuo ha dado lugar a aportes relevantes sobre la formulación y resolución de problemas en los procesos de construcción de conocimiento matemático en contextos enriquecidos por tecnologías digitales, tales como los Sistemas de Geometría Dinámica y las herramientas de la Inteligencia Artificial. Finalmente, Font, García-García, Rodríguez y Vanegas, en su capítulo *Investigación sobre conexiones matemáticas en España y México*, exponen cómo la interacción ha permitido articular dos marcos teóricos —la teoría Ampliada de las Conexiones y el Enfoque Ontosemiótico (EOS)— a priori desarrollados de forma independiente, lo que ha enriquecido el estudio de las conexiones matemáticas orientado a la comprensión de distintos objetos matemáticos.

En su conjunto, los capítulos que a continuación se presentan, no solo muestran una progresión de temática, sino que evidencian cómo la colaboración entre México y España ha sido un motor para la construcción, consolidación y proyección de líneas de investigación que han aportado de forma significativa a la Educación Matemática y ha abierto nuevas perspectivas de trabajo conjunto entre equipos de ambos países.

El papel de la colaboración entre México y España en la consolidación del Modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas

The role of collaboration between Mexico and Spain in the consolidation of the Mathematics Teachers' Specialised Knowledge Model

Dinazar Isabel Escudero-Ávila ¹ 

Nuria Climent ² 

Leticia Sosa ³ 

Luis Carlos Contreras ⁴ 

Resumen

Desde una perspectiva interpretativa, nuestro grupo de investigación, enmarcado dentro de la Red Iberoamericana MTSK y que integra a investigadores de México y España, trata de comprender el conocimiento específico que posibilita al profesorado enseñar matemáticas. Para ello, hemos desarrollado un modelo para el análisis de dicho conocimiento, centrado en la matemática, su enseñanza y aprendizaje. En este capítulo presentamos sus bases, desarrollo y aplicaciones desde la perspectiva de las colaboraciones de investigadores de ambos países. Así, trabajos doctorales desarrollados por investigadores mexicanos dirigidos desde la Universidad de Huelva y colaboraciones posteriores, contribuyen de forma notable a la investigación sobre y con el modelo de conocimiento especializado del profesorado de matemáticas. Esta colaboración se mantiene hasta la actualidad y se proyecta en investigaciones futuras.

¹ dinazare@ucm.es

Universidad Complutense de Madrid (SOMIDEM-SEIEM)

² climent@ddcc.uhu.es

Universidad de Huelva (SEIEM)

³ lsosa@uaz.edu.mx

Universidad Autónoma de Zacatecas (SOMIDEM)

⁴ lcarlos@uhu.es

Universidad de Huelva (SEIEM)

Palabras clave

Formación del profesorado, conocimiento del profesor, matemáticas, conocimiento especializado.

Abstract

From an interpretative perspective, our research group, which is part of the Ibero-American Network MTSK and integrates researchers from Mexico and Spain, tries to understand the specific knowledge that enables teachers to teach mathematics. To this end, we have developed a model for analysing this knowledge, which deals with the knowledge that focuses on mathematics and its teaching and learning. In this chapter, we present its bases, development and applications from the perspective of the collaborations of researchers from both countries. Thus, doctoral works developed by Mexican researchers directed from the University of Huelva and subsequent collaborations contribute significantly to research on and with the “mathematics teachers’ specialised knowledge” model. This collaboration continues until now and is projected in future research.

Keywords

Teacher education, teachers’ knowledge, mathematics, specialised knowledge.

Introducción

Investigadores de España y México, liderados desde la Universidad de Huelva inicialmente por José Carrillo, hemos venido colaborando durante más de una década en el estudio de la formación del profesorado de matemáticas. Esta colaboración se inició con la realización de la tesis doctoral “Transposición y destransposición del saber matemático y didáctico, representaciones y prácticas en la formación inicial de docentes” de Eugenio Lizarde Flores (2013), profesor de la Normal Rural Gral. Matías Ramos Santos de Zacatecas, México. Esta primera colaboración de Lizarde con el grupo de Didáctica de la Matemática con la Universidad de Huelva puso de manifiesto el interés compartido de reflexionar sobre elementos que se ponen en juego durante la formación inicial de los docentes como lo es el conocimiento que requiere el profesor de matemáticas y cómo desarrollarlo. Este trabajo conjunto despertó el interés de otros investigadores e investigadoras mexicanas por establecer lazos que posibilitaran la conformación de un grupo de trabajo que compartiera proyectos de investigación financiados y que actualmente se articula dentro de la Red Iberoamericana MTSK (<https://redmtsk.net>), aprobada por la Asociación Universitaria Iberoamericana de Posgrado en 2019, y que une a investigadores de 11 países, con importante representación de España y México. Gran parte de los esfuerzos de esta colaboración se han dirigido a mejorar la comprensión sobre el conocimiento del profesorado de matemáticas, el papel que juega en su enseñanza y cómo promoverlo.

En este capítulo, tratamos de reflejar nuestra trayectoria al respecto, centrándonos especialmente en los trabajos desarrollados de forma conjunta por investigadores de la Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática (SOMIDEM) y la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM).

Tras presentar brevemente nuestra perspectiva sobre el estudio del conocimiento del profesor, en el primer epígrafe, abordamos la evolución de las colaboraciones entre investigadores de la SOMIDEM y la SEIEM en la creación de un modelo para el estudio del conocimiento del profesorado de matemáticas, el modelo Mathematics Teachers' Specialised knowledge (MTSK). A continuación, se expone cómo se ha empleado este modelo para el estudio de la formación del profesorado de matemáticas, en el tercer epígrafe, y del conocimiento del formador de profesorado de matemáticas, en el cuarto. El capítulo concluye con un apartado de reflexiones finales.

El conocimiento del profesor como objeto de estudio

Desde hace varias décadas se han venido realizando estudios sobre el conocimiento del profesor. En nuestro grupo del Seminario de Investigación en Didáctica de la Matemática (SIDM) en la Universidad de Huelva (España) surgió el modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK por sus siglas en inglés). Ahí participan investigadores de diferentes países, entre ellos de México. Nuestro interés germinal, como investigadores, de estudiar los procesos y elementos implicados en el desarrollo profesional del profesor de matemáticas, ha derivado en la necesidad de comprender el papel del conocimiento en la práctica docente del profesor y en su formación profesional, tanto inicial como continua. Para ello, resulta necesario adoptar una postura sobre qué se entiende por conocimiento. Nos interesa una perspectiva interpretativa en el estudio de dicho conocimiento, que busca comprender sus mecanismos, más que evaluarlos. Por ello, adoptamos la definición de Schoenfeld (2010) de conocimiento del profesor.

Yo defino el conocimiento de un individuo como la información que tiene disponible para usar para resolver problemas, alcanzar metas, o desarrollar cualquier tarea. ¡Nótese que, de acuerdo con esta definición, el conocimiento no ha de ser necesariamente correcto! (Schoenfeld, 2010, p.25).

Otro aspecto que identificamos relevante al estudiar el conocimiento del profesor son las creencias. En ese sentido y en concordancia con lo planteado por Ponte (1994) y Pajares (1992) y basándonos fundamentalmente en Carrillo (1998) y Contreras (1999), entendemos las creencias como:

Verdades personales, sostenidas individual y/o colectivamente, derivadas de la experiencia o el propio pensamiento, con cierta componente afectiva y evaluativa, sobre la que se pueden tener diferentes grados de convencimiento, así como

pudiendo ser justificadas en base a argumentos que no sigan criterios que puedan responder a cánones de evidencia, es decir, no son falsables (Montes et al., 2014; p. 6).

Siendo conscientes de las dificultades para diferenciar entre conocimiento y creencias, atribuimos al conocimiento un estatus de objetivación del que no gozan las creencias (Thompson, 1992). Las creencias del profesorado sobre las matemáticas y su enseñanza y aprendizaje interactúan con su conocimiento; por ejemplo, considerar la matemática como una construcción social o como un cuerpo estático de conocimiento que no se crea, sino que se descubre (Carrillo, 1998, considerando, entre otros, los aportes de Ernest, 1989). De este modo, la comprensión de cómo se produce el aprendizaje de determinados contenidos matemáticos, se relaciona con una perspectiva más constructivista que tradicional de su enseñanza y aprendizaje (Carrillo, 1998).

En los primeros estudios desarrollados, evidenciamos la importancia de que el profesor conozca cómo aprenden sus estudiantes el contenido que imparte (Sosa et al., 2015) y de analizar el conocimiento del profesor sobre la enseñanza de las matemáticas (e.g., el uso de ejemplos y ayudas Sosa et al., 2016). Los resultados de ese estudio, relativos a la enseñanza del álgebra lineal, muestran el conocimiento sobre la potencialidad y el uso didáctico de los ejemplos y de la diversificación y focalización de ayudas en la enseñanza. Este conocimiento puede ser condicionado por la identidad profesional del profesor, su formación, su experiencia y el contexto donde desarrolla su labor docente.

Otro aspecto relevante es el conocimiento del profesor sobre la enseñanza de las matemáticas mediada por recursos tecnológicos. Sandoval-Cáceres et al. (2014) describen el conocimiento que evidencia un profesor de primaria al utilizar un recurso interactivo de *Enciclomedia* en clase de matemáticas. El estudio se centra en identificar el conocimiento que necesita el profesor para sustentar prácticas en las cuales las tecnologías digitales tengan un papel transformador. Los autores señalan que las prácticas de enseñanza mediadas con tecnologías digitales demandan un profundo conocimiento en las dimensiones tecnológica, didáctico-matemática y de contenido matemático por parte del profesor.

En la formación inicial y continua del profesor de matemáticas, comprender su conocimiento y sus creencias son parte fundamental pues influyen significativamente en las acciones, las decisiones y la práctica del (futuro) profesor de matemáticas.

El impacto de las investigaciones con el modelo MTSK en el estudio del conocimiento del profesor

A partir de los trabajos doctorales de Nuria Climent Rodríguez (2002), Cinta Muñoz Catalán (2010), Carlos Miguel Ribeiro (2010) y de Leticia

Sosa (2011), se evidencia el potencial de contar con un modelo de conocimiento del profesor que permita realizar un análisis sistemático de las componentes y estructura de dicho conocimiento. En este último trabajo se realiza un estudio de las componentes del conocimiento matemático para la caracterización del conocimiento para la enseñanza (*Mathematical Knowledge for teaching*) de matrices en bachillerato, usando el modelo de conocimiento del equipo de Ball y colaboradores (2008). Esto permite reflejar las necesidades específicas del profesor de matemáticas y pone el foco en la necesidad de comprender en profundidad la naturaleza y los elementos que conforman este conocimiento.

Hasta este momento, el grupo de investigación en Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva era percibido como un equipo interesado en el estudio de los procesos de desarrollo profesional del profesor y las creencias sobre las matemáticas y su enseñanza y aprendizaje, así como su influencia en la práctica profesional del profesor. A partir de la visita de José Carrillo en 2010 al Centro de investigación y de estudios avanzados (Cinvestav) en Ciudad de México, en la que realizó una conferencia plenaria dirigida a docentes de matemáticas de secundaria y tras el regreso a México en 2011 de Sosa al concluir sus estudios de doctorado, se consolidó que el interés del grupo de Huelva está también en el estudio del conocimiento del profesor desde una perspectiva más analítica y con un espíritu crítico, de manera pueda ser la base sobre la cual construir espacios de desarrollo profesional.

Esta historia de trabajo en grupo y el desarrollo de una línea dirigida hacia la formación del docente en matemáticas quedaron plasmados en el libro “Matemática Educativa: la formación de profesores” publicado y coordinado en México, a través de un capítulo en el que se muestra la investigación sobre el profesor de matemáticas en la Universidad de Huelva (Carrillo et al., 2013).

Desde esta perspectiva, y con el interés de continuar con las reflexiones sobre la naturaleza del conocimiento profesional y el trabajo con el modelo *Mathematical Knowledge for teaching* (MKT) (Ball et al., 2008), en 2011 surgió el interés de Dinazar Escudero y Eric Flores de realizar la tesis doctoral en el seno del grupo de Huelva, fortaleciendo así los lazos entre México y España.

A partir de la reflexión conjunta del grupo liderado por José Carrillo y compuesto por miembros de distintas Universidades de España, Portugal y Latinoamérica, se iniciaron reflexiones teóricas y empíricas sobre el concepto de “conocimiento especializado del profesor” que se propone en el modelo MKT y lo que lo convierte en un conocimiento exclusivo del docente, discutiendo estos análisis en espacios como la XV Escuela de Invierno de Matemática Educativa (Escudero et al., 2012). Lo anterior nos lleva a identificar distintas problemáticas al respecto del uso del MKT:

- Se hace uso de elementos externos a lo especializado para definir este tipo de conocimiento.
- Más que una “manera especial” de mirar el contenido matemático o conocimiento de un tipo de matemática especial a la que no puedan o necesiten tener acceso los estudiantes u otros profesionales, se observa un uso específico de esos conocimientos por parte del docente.
- Se identifican dificultades en la delimitación del conocimiento especializado, derivadas de su definición aludiendo a actividades propias del profesor de matemáticas y no del conocimiento que permite realizarlas.

A partir de entonces, se reconoció que el conocimiento del contenido matemático debe ser el elemento distintivo y específico del conocimiento profesional del profesor de matemáticas. Sin embargo, lo especializado puede entenderse como el resultado de la interacción de distintas aproximaciones a un objeto matemático como objeto de enseñanza, es decir, distintas formas de conocer un contenido matemático.

En Ciencias Sociales, los modelos teóricos se utilizan para representar, construir o modelar de manera sistematizada una serie de fenómenos, y están destinados a explicar la realidad o actuar sobre ella, buscando realizar una abstracción de esta. En este sentido, el grupo de trabajo comenzó a analizar, además del MKT, distintos modelos de conocimiento, con intereses y perspectivas diferentes respecto a los elementos que constituyen el conocimiento profesional del profesor y el uso que puede hacer de ellos, como el *Knowledge Quartet* (Rowland, 2009), el *Modelo de Competencias y conocimientos del profesor de matemáticas del EOS (CCDM)* (Pino-Fan & Godino, 2015) y el *Mathematical Proficiency for Teaching* (Kilpatrick et al., 2001), entre otros.

En 2013, los primeros resultados y reflexiones realizadas por el grupo fueron presentados para su discusión y posible validación en el congreso de la Sociedad Europea de Investigación de Educación Matemática —CERME 8—, dentro del grupo de trabajo sobre Conocimiento y Desarrollo Profesional del Profesor. En este espacio se expusieron cinco comunicaciones con propuestas de análisis y crítica al modelo MKT, la presentación de la propuesta de un nuevo modelo de conocimiento y ejemplos de uso de este modelo para el análisis de profesores (Carreño, Ribeiro et al., 2013; Carreño, Rojas et al., 2013; Carrillo, Climent et al., 2013; Flores, Escudero & Carrillo, 2013, Montes et al., 2013).

Así, Flores, Escudero y Carrillo (2013) introdujeron una revisión teórica del modelo MKT centrada en la caracterización del *Conocimiento Especializado del Contenido* y sus diferencias y similitudes con el *Conocimiento Común del Contenido*, y la comparación con los conocimientos que podrían considerarse dentro de los subdominios del *Conocimiento del Contenido y los Estudiantes y el Conocimiento del Contenido y la Enseñanza*. En este trabajo se pone el

énfasis en cómo se definen los subdominios y el tipo de clasificación de conocimientos que se logra realizar con este modelo. Ball et al. (2008) definen el Conocimiento Común como el conocimiento que posee cualquier persona matemáticamente instruida, sin que sea exclusivo, por tanto, de los profesores de matemáticas y poniendo el foco en el “saber hacer” (como hacer una resta o saber dividir, por ejemplo). Por otra parte, en el *Conocimiento Especializado* se incluye el saber “por qué se hace así”, lo que permite que el profesor pueda explicar la procedencia matemática de los errores de los alumnos. Este último, definido por Ball et al. (2008) como el conocimiento matemático que va más allá del que se espera de cualquier adulto bien educado, permite reconocer dos elementos en los cuales se apoyan los autores para definirlo: 1) la profesión, o el usuario de este conocimiento, al definirlo en términos de un conocimiento que es único del profesor y que, aunque algunas otras profesiones podrían tenerlo, en el caso del profesor de matemáticas es indispensable, y 2) como una ampliación del Conocimiento Común. Es decir, el Conocimiento Especializado va más allá del Común, pero sin hacer uso de conocimientos sobre los alumnos o conocimiento sobre la enseñanza (Escudero et al., 2012; Flores, Escudero & Carrillo, 2013). En este último trabajo se concluye que las definiciones se basan en elementos extrínsecos al conocimiento del profesor, como referencias a otras profesiones o la referencia a ir más allá del Conocimiento Común. Además, se mostraba que las tareas profesionales que enfrenta el profesor de matemáticas requerían conocimiento de significados, propiedades y definiciones de los contenidos involucrados. Flores et al. (2013) afirman no reconocer en ello una forma particularmente especial de conocer el contenido, ni percibir ningún conocimiento matemático especializado que sea inaccesible para estudiantes o para otros profesionales, sino más bien un uso específico de este conocimiento. Lejos de derivar de ello que el conocimiento especializado de los profesores de matemáticas no tiene sentido o que este subdominio no es útil para el análisis del conocimiento profesional del profesor, los datos sugieren que este conocimiento no debería ser exclusivo del dominio matemático. Este tipo de conocimiento debería incluir también conocimiento sobre la enseñanza, sobre las formas de construir conocimiento matemático, sobre el desarrollo de la complejidad dentro de los temas y sobre las características del aprendizaje del contenido, entre otros aspectos. El conocimiento especializado abarca más aspectos que los significados, propiedades y definiciones, y no requerir de comparaciones con otras profesiones en las que se utilizan las matemáticas. Estas conclusiones nos llevan a plantear el desarrollo de un modelo que busca reflejar el conocimiento especializado sea el resultado de la interacción de distintas formas de conocer el contenido matemático.

Así, se propuso la necesidad de plantear una forma distinta de modelar el conocimiento del profesor y se presentó la primera propuesta de un nue-

vo modelo que pretende reflejar la especialización del conocimiento del profesor de matemáticas como un conjunto de conocimientos y no como un subdominio de lo matemático. Este modelo centró su atención en el conocimiento específico del profesor de matemáticas, sin importar si este es compartido o no con otros profesionales que usan la matemática. Dicho modelo fue llamado *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* (MTSK) (Carrillo et al., 2013).

El MTSK no se concibió como una mejora ni una evolución del MKT, sino una forma distinta de modelar el conocimiento profesional del profesor de matemáticas a partir de la idea de que lo que hace especializado a este conocimiento es la integración de distintas formas de conocer el contenido matemático y su estudio como objeto de enseñanza y aprendizaje. Este modelo surge como propuesta de herramienta metodológica para explorar el conocimiento especializado del profesor en situaciones diversas de su labor y formación, por ello no constituye un marco teórico ni pretende ser una hipótesis de conocimiento ideal del profesor de matemáticas. Se plantea como una propuesta de modelo analítico con dominios y subdominios de conocimiento que puedan ser identificados de forma disjunta, solo para su análisis, con fines de caracterizar no solo lo que conoce el profesor, sino cómo lo conoce.

En este sentido, se distinguen considerar tres dominios de conocimiento: el *Conocimiento Matemático*, el *Conocimiento Didáctico del Contenido* y las *Creencias sobre la Matemática y sobre su enseñanza y aprendizaje* (Carrillo et al., 2013). Dentro del Conocimiento Matemático se presentan tres subdominios: el *Conocimiento de los temas*, el *Conocimiento de la estructura de las matemáticas* y el *Conocimiento de la práctica matemática*. Por su parte, el dominio del *Conocimiento Didáctico del Contenido* engloba los subdominios de: *Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas*, *Conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas* y *Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas*. Además, se enfatiza que las creencias atraviesan todos los subdominios de conocimiento, dado que pueden establecer un sesgo en cuanto al conocimiento que el profesor evidencia al realizar tareas profesionales (Figura 1).

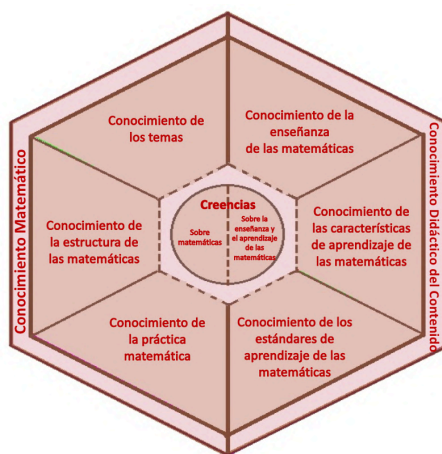
A partir de estas publicaciones y las reflexiones compartidas con expertos, se inició un proceso de “poner a prueba” el modelo. En Carrillo et al. (2014) se expusieron las bases teóricas y metodológicas sobre las que se construye el MTSK. En esta publicación se hace referencia a este como “un marco teórico”, porque es posible utilizar este modelo desde distintos marcos y con diferentes perspectivas teóricas, como se ha ido desarrollando posteriormente (e.g. Sandoval-Cáceres et al., 2014; Vasco et al., 2016).

En este momento las reflexiones sobre el modelo se orientaron al refinamiento de las definiciones de los subdominios y la identificación de

categorías que permitieran realizar un análisis aún más preciso del conocimiento especializado del profesor de matemáticas en distintos escenarios y recopilando distintos tipos de evidencias de MTSK (e.g. Flores et al., 2013, 2014).

Figura 1

Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK). Elaboración propia



Nota. Elaboración propia.

Como hemos señalado antes, la labor de conformación de este modelo fue producto de un esfuerzo conjunto de investigadoras e investigadores con formaciones, tradiciones y contextos diversos, donde México ha tenido un papel especialmente relevante y desde los cuales ha sido posible analizar si los subdominios y categorías del modelo están lo suficientemente bien contruidos como para caracterizar los conocimientos especializados de cualquier profesor de matemáticas en cualquier contexto.

Aunque el modelo y los resultados obtenidos con los análisis basados en sus subdominios ya se habían presentado en congresos nacionales e internacionales, tanto en América como en Europa, y se habían mostrado resultados parciales de análisis con el modelo, no fue sino hasta 2018 que se publica en la revista *Research in Mathematics Education* el artículo *The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model*. En este artículo se presentan las definiciones y caracterización de todos los dominios y subdominios del modelo, además de reflexionar sobre algunas de las relaciones entre distintos tipos de conocimiento (Carrillo et al., 2018) y en el cual se cuenta con la participación de investigadores e investigadoras de España, México, Ecuador, Chile y Portugal. En 2022 se publica un libro sobre la trayectoria en el uso del modelo MTSK desde sus inicios hasta el momento (Carrillo et al., 2022), en el cual participan 7 autores mexicanos con contribuciones en 10

capítulos, lo cual refleja la colaboración entre nuestros países y la relevancia e impacto del trabajo con MTSK.

A continuación, se describen cada uno de los subdominios del modelo con la finalidad de mostrar el estado actual de las categorías, que se han ido construyendo a lo largo de casi 14 años de trabajo, y de resaltar las contribuciones derivadas de la relación entre México y España.

Sobre el Dominio de Conocimiento Matemático

El MTSK se organiza en torno al conocimiento que posee el profesor de matemáticas acerca de un determinado tema que se integra en el contexto escolar y que es susceptible de ser visto como un objeto de enseñanza y aprendizaje. Así, tiene sentido hablar de que se requiere reconocer características de este tema como objeto matemático.

Conocimiento de los temas

En este subdominio (KoT, por sus siglas en inglés - *Knowledge of Topics*) se integran los conocimientos del profesor acerca de un determinado tema escolar como objeto matemático, combinando una comprensión profunda, formal y rigurosa con el conocimiento matemático que se espera desarrollar en los estudiantes. Además, reconoce la complejidad del tratamiento de estos objetos en el aula (Carrillo et al., 2018; Vasco et al., 2016; Vasco & Moriel, 2022).

Utilizaremos el tema de fracciones para ejemplificar las categorías de conocimiento asociadas a este subdominio. Sobre la *fenomenología y aplicaciones* de la fracción, el profesor puede saber que este concepto tiene asociados distintos significados como, por ejemplo, el de parte-todo, cociente o medida (Moriel & Reyes, 2022). Sobre las *definiciones, propiedades y fundamentos*, un profesor sabe que una fracción es propia cuando el numerador es menor que el denominador, además de saber que esta fracción está delimitada entre 0 y 1 (Moriel & Reyes, 2022). Sobre los *registros de representación* asociados, el profesor podría conocer distintas formas de representar la fracción como el registro verbal (mitad o un medio), el numérico ($\frac{1}{2}$, 0,5) y el gráfico (representación en la recta numérica), entre otros (Rojas, 2014). Finalmente, sobre los *procedimientos*, además de considerar los conocimientos sobre cómo se lleva a cabo algún proceso o procedimiento, se consideran también lo que se sabe sobre cuándo puede hacerse, por qué se hace así y las características de este resultado (Vasco & Moriel, 2022). Por ejemplo, para el caso de las fracciones se requiere conocimiento acerca de cómo convertir una fracción en otra equivalente (*¿cómo se hace?*); saber que cualquier fracción puede convertirse en una equivalente a través de este método (*¿cuándo puede hacerse?*); saber que una fracción es equivalente a otra cuando la relación que existe entre numerador y denominador se mantiene constante y por lo tanto,

representa al mismo número racional (*¿por qué se hace así?*), es decir, que dos fracciones son equivalentes si una es múltiplo de la otra (*características del resultado*).

Conocimiento de la estructura de las matemáticas

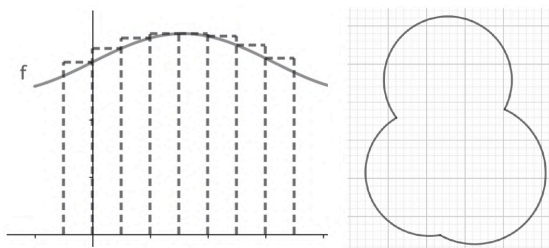
El conocimiento matemático del profesor debe incluir reconocer las relaciones que existen entre temas matemáticos, de modo que los contenidos pertenecen a una red de ideas interconectadas, que le permite comprender ciertos conceptos avanzados desde una perspectiva elemental y desarrollar conceptos elementales mediante el tratamiento a través de herramientas avanzadas.

En este subdominio (KSM, por sus siglas en inglés- *Knowledge of the Structure of Mathematics*) se consideran conexiones inter-conceptuales de cuatro tipos (Flores-Medrano, 2022; Montes et al., 2013): conexiones de complejización, de simplificación, transversales y auxiliares.

Flores-Medrano (2022) considera que es importante establecer una dirección desde la cual se explora un determinado contenido matemático, y propone el ejemplo del conocimiento que tiene el profesor de matemáticas acerca de las relaciones entre las sumas de Riemann y el reticulado como técnica para aproximarse al área de una figura (Figura 2). En este ejemplo, si el contenido que estamos analizando es el de las sumas de Riemann, la conexión con el cálculo de áreas mediante retículas se clasifica como una *conexión de simplificación*; sin embargo, si el contenido que se analiza es el cálculo de áreas, la relación con las sumas de Riemann se interpreta como una *conexión de complejización*.

Figura 2

Sumas de Riemann y reticulado para cálculo de áreas



Nota. Flores-Medrano (2022), p. 51

Por otra parte, al referirse a las conexiones transversales, Flores-Medrano (2022) señala que existen conexiones entre objetos matemáticos en las cuales no parece haber un hilo que una necesariamente dos nodos, sino que puede pensarse en planos en los que estos nodos coexisten según sus rasgos y similitudes. Por ejemplo, el profesor podría conocer que el uso y

significado que se le da al signo igual en Aritmética ($6 - 2 = 4$) y en Cálculo ($f(x) = x - 2$), es distinto, aunque se conecta a través de la comprensión de que la igualdad puede tener distintos significados (resultado, equivalencia, semejanza, congruencia, etcétera). Este mismo autor se refiere a las *conexiones auxiliares* como conexiones de utilidad. Como ejemplo propone pensar en la relación que existe entre un sistema de ecuaciones de 3×3 y la ecuación de una circunferencia que pasa por tres puntos (no colineales), donde el sistema de ecuaciones funciona como una herramienta para determinar una expresión para la circunferencia.

Conocimiento de la práctica matemática

En este subdominio (KPM, por sus siglas en inglés -*Knowledge of Practices in Mathematics*) se consideran los conocimientos del profesor sobre las formas de conocer y crear o producir en Matemáticas, es decir, el conocimiento sintáctico. A diferencia del conocimiento de las relaciones o conexiones entre conceptos, propio del KSM, en este subdominio se considera el conocimiento de cómo se establecen dichas relaciones considerando aspectos de la comunicación matemática, el razonamiento y la verificación o validación, la formulación y aplicación de definiciones, el establecimiento de conexiones (entre conceptos, propiedades, etc.), el uso de correspondencias y equivalencias, el empleo de representaciones, la argumentación, la generalización y la exploración (Delgado, et al, 2022; Montes, et al., 2013). En este subdominio se identifican diversas categorías de conocimiento, de acuerdo a prácticas matemáticas que han surgido durante el estudio profundo de contenidos matemáticos y que no pretenden ser exhaustivas.

Delgado et al. (2022) identifican en la literatura de investigación sobre este subdominio cuatro prácticas matemáticas, dentro de las cuales se definen algunos indicadores. Así, se integra en el KPM el conocimiento del profesor sobre la *práctica de demostrar* en matemáticas, relativo a conocimientos sobre el *desarrollo de demostraciones, métodos y tipos de demostraciones y las funciones de la demostración*. Por otra parte, se habla también del conocimiento de la práctica de definir, entendiendo esta como una forma de crear y establecer nuevos conocimientos a través de reconocer el significado y carácter de un concepto (Delgado et al., 2022). Se considera aquí el conocimiento sobre las *características de una definición* (por ejemplo, atributos que debe verificar una definición matemática como la jerarquía o precisión, no circularidad, minimalidad, no ambigüedad, coherencia, invariancia y equivalencia).

Se considera también en este subdominio los conocimientos asociados a la *práctica de resolver problemas*, englobando aquí conocimientos del uso de distintos registros de representación, de heurísticos, estrategias de simplificar, reinterpretar, descomponer, sistematizar e introducir un elemento auxiliar para explorar la solución de un problema (Escudero-Ávila et al., 2015).

Por último, se considera también en este subdominio el *papel del lenguaje matemático* en términos del conocimiento que se tiene sobre el rol de los símbolos dentro del trabajo matemático y el *del uso del lenguaje matemático* y su impacto en el trabajo matemático y didáctico (Delgado et al., 2022).

Sobre el Dominio de Conocimiento Didáctico del Contenido

En Escudero-Ávila y Carrillo (2020) se publica una reflexión sobre las bases teóricas y metodológicas en las que se construye este dominio como parte del MTSK. En este trabajo se pone de manifiesto la intención de focalizar la atención en los conocimientos sobre cómo las matemáticas son aprendidas y enseñadas, así como sobre las expectativas de aprendizaje en los diferentes niveles educativos. Además, se establece la diferencia entre la caracterización de este dominio del MTSK y caracterizaciones como las de Shulman (1986) o Ball et al. (2008).

Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas

En concordancia con las bases del modelo MTSK, este subdominio se centra en el análisis de un determinado contenido matemático como objeto de enseñanza para categorizar los conocimientos didácticos que puede poseer un profesor sobre dicho contenido, focalizando la atención en la enseñanza de las matemáticas de manera integrada y no en las matemáticas y su enseñanza como conjuntos que se intersecan (Escudero-Ávila & Carrillo, 2020; Sosa y Reyes-Camacho, 2022). Dentro de este subdominio se distinguen tres categorías de conocimientos.

Dentro de la categoría de *Teorías de enseñanza de las matemáticas*, se incluyen los conocimientos de teorías o construcciones mentales del profesor sobre la enseñanza de un determinado tema. Se distinguen aquí dos tipos teorías: las que están fundamentadas en resultados de investigaciones en el campo de la Didáctica de la Matemática, o *teorías institucionales*, y *teorías personales* de enseñanza, que pueden provenir de la reflexión del profesor sobre su práctica. En el primer tipo podría situarse, por ejemplo, el conocimiento que puede tener un profesor sobre los niveles de Van Hiele como herramienta para la organización de progresiones o trayectorias hipotéticas de aprendizaje para la enseñanza de conceptos geométricos. En el segundo, por ejemplo, las teorías personales que puede tener un profesor sobre el uso de tecnología como el software *Derive* dentro del tema de álgebra matricial en el aula de bachillerato de acuerdo con su experiencia (Sosa et al., 2016).

Siguiendo con el ejemplo anterior, para poder establecer una teoría personal acerca del uso de tecnologías en el aula de matemáticas es necesario que el profesor tenga un conocimiento profundo del software *Derive* como recurso de enseñanza, para reconocer su potencial y limitaciones para el tratamiento del álgebra matricial. En este sentido se define la categoría de

conocimiento de *recursos didácticos (físicos o digitales)*, que puede incluir conocimiento sobre libros de texto, series de televisión, materiales manipulativos, etcétera, siempre y cuando se reflexione sobre la relación del recurso con un determinado contenido (Escudero-Ávila & Carrillo, 2020).

Por último, se considera en este subdominio el conocimiento de *estrategias, técnicas, tareas y ejemplos* asociados al tratamiento de un tema (Sosa et al., 2016). En Escudero-Ávila & Carrillo (2020) se muestra el caso de un profesor que propone a sus estudiantes una *tarea* en la que se trabaja un problema de llenado de recipientes para explorar las características de las funciones. En dicha tarea el profesor hace uso de distintos *ejemplos* de recipientes con una secuencia específica para trabajar distintos tipos de función. La *estrategia* que utiliza el profesor es la modelación matemática del llenado de recipientes. Además, el profesor reconoce en el tránsito entre distintos registros de representación y la modelación matemática una *técnica* para dar sentido al concepto de función.

Las interconexiones entre el KMT y los subdominios del conocimiento matemático ayudan a comprender aspectos de la práctica profesional del profesorado, puesto que proporcionan una base para la toma de decisiones al respecto del tratamiento de un tema (Vasco et al., 2021).

Conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas

La inclusión de este subdominio (KFLM, por sus siglas en inglés - *Knowledge of Features of Learning Mathematics*) responde a la necesidad de incluir el conocimiento del profesor sobre un determinado tema matemático como objeto de aprendizaje y del proceso de comprensión de los estudiantes sobre los distintos contenidos, los errores, dificultades, y obstáculos asociados a cada concepto, así como el lenguaje habitualmente asociado (Escudero-Ávila, 2022).

Al igual que en el KMT, en el KFLM se consideran *teorías personales o institucionales* sobre el aprendizaje de un determinado contenido matemático. Además, se incluye en el KFLM el conocimiento sobre las *fortalezas y debilidades en el aprendizaje de las matemáticas*. Por ejemplo, retomando el caso de un profesor que aborda el álgebra matricial, Sosa y colaboradores (2015) muestran evidencias del conocimiento de un profesor sobre las necesidades, dificultades y confusiones matemáticas típicas de los estudiantes al trabajar este contenido, que pueden deberse a una mala relación con temas del bloque temático o a no proceder ordenadamente ni respetar convenciones matemáticas necesarias para su estudio.

También se ha identificado como parte del KFLM el conocimiento sobre *formas de interacción de los estudiantes con el contenido matemático* que se estudia. Por ejemplo, en Escudero-Ávila y Carrillo (2020) se muestran evidencias del conocimiento de un profesor de que, al transitar de un registro

de representación a otro, los estudiantes construyen relaciones y podrán identificar diferentes características de la función, así como asignarle distintos significados. Por último, en el KFLM se considera la categoría del conocimiento del profesor sobre *aspectos emocionales del aprendizaje de las matemáticas*.

Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las matemáticas

A diferencia de modelos y aproximaciones teóricas en las que se habla de la necesidad de tener un conocimiento del currículo (en el sentido de las normas o decretos gubernamentales oficiales), para el caso del MTSK, en el KMLS (*Knowledge of Mathematics Learning Standards*) se recogen los conocimientos del profesor que se reflejan en estándares curriculares —internacionales, nacionales o locales—, así como las recomendaciones curriculares que pueden bien provenir de investigaciones en educación matemática, de asociaciones de profesores de matemáticas o de currículos oficiales o incluso de normas propias de las instituciones educativas que deben ser conocidas por el profesorado (Codes & Contreras, 2022). De este modo, este conocimiento proporciona la referencia de qué contenido enseñar en cada nivel, así como orientaciones sobre su enseñanza y evaluación.

En este subdominio se define la categoría de conocimiento de los *resultados de aprendizaje esperados* en un determinado nivel para un contenido en particular. Para ilustrar esta categoría, en Escudero-Ávila y Carrillo (2020) se muestran evidencias de que Omar, profesor de matemáticas de secundaria, sabe que en su país se aborda el concepto de función como parte del currículum de bachillerato (12 a 17 años) y que se retoma en grados superiores, lo que significa que los estudiantes de octavo y noveno grado tienen una base sobre el concepto de función lineal.

Para la categoría correspondiente a los conocimientos del profesor sobre el *nivel de desarrollo conceptual y procedimental esperado* para un tema particular en un momento escolar específico, Codes y Contreras (2022) ponen como ejemplo que un profesor sepa que no puede esperarse que un estudiante de primaria alcance un nivel de deducción formal o de rigor.

Por último, se identifica dentro del KMLS la categoría de *secuenciación de temas* matemáticos, entendida como el conocimiento del profesor tanto sobre lo que un estudiante de un determinado nivel necesita para abordar nuevas tareas como sobre las potencialidades que el trabajo actual tendría para desarrollar un determinado tópico posterior (Codes & Contreras, 2022).

Sobre el Dominio de Conocimiento Didáctico del Contenido

Si bien las creencias del profesorado sobre las matemáticas y su enseñanza y aprendizaje se consideran un subdominio del modelo MTSK, han recibido menor atención que los subdominios de conocimiento. Esto puede estar

justificado porque antes del desarrollo del modelo MTSK, el grupo de investigación de la Universidad profundizó en el estudio sobre estas creencias y su papel en la enseñanza, creando instrumentos para su análisis (Carrillo, 1998; Contreras, 1999; Climent, 2002). De aquí, la principal necesidad en el desarrollo del MTSK consistiera en delimitar y detallar los subdominios de conocimiento del contenido y didáctico del contenido.

Figura 3
Resumen de los dominios, subdominios y categorías de conocimiento del modelo MTSK

Subdominios		Categorías asociadas al subdominio		
Conocimiento matemático	Conocimiento de los tópicos KoT	Fenomenología y aplicaciones		
		Definiciones, propiedades y sus fundamentos		
		Registros de representación		
		Procedimientos	¿cómo se hace?	
			¿cuándo puede hacerse?	
			¿por qué se hace así?	
	Características del resultado			
	Conocimiento de la estructura de las matemáticas KSM	Conexiones de complejización		
		Conexiones de simplificación		
		Conexiones transversales		
		Conexiones auxiliares		
	Conocimiento de la práctica matemática KPM	La práctica de demostrar	Desarrollo de demostraciones	
			Métodos y tipos de demostración	
			Funciones de la demostración	
		La práctica de definir		Características de la definición
		La práctica de resolver problemas		Estrategias para resolver problemas
		El papel del lenguaje matemático	Papel de los símbolos	
Uso del lenguaje				
Conocimiento Didáctico del Contenido	Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas KMT	Teorías sobre enseñanza	Personales	
			Institucionales	
		Recursos didácticos (físicos y digitales)		
		Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos		
	Conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas KFLM	Teorías sobre aprendizaje	Personales	
			Institucionales	
		Fortalezas y debilidades en el aprendizaje de las matemáticas		
		Formas de interacción de los estudiantes con el contenido matemático		
	Aspectos emocionales del aprendizaje de las matemáticas			
	Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas KMLS	Resultados de aprendizaje esperados		
Nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado				
Secuenciación de temas				

Nota. Adaptación de Escudero-Ávila (2023) basada en Carrillo et al. (2022)

Una vez avanzado el desarrollo del modelo, algunas investigaciones han abordado las relaciones entre el conocimiento y las creencias del profesorado de matemáticas (e.g. Flores & Carrillo, 2014). Además, ha surgido el cuestionamiento de si, además de las creencias, deberían incorporarse más elementos del dominio afectivo. El estudio de esta cuestión ha sido abordado en colaboraciones entre investigadores de SEIEM y SOMIDEM en relación con la problemática de si podemos hablar de un auténtico dominio afectivo matemático como ponen de manifiesto Marbán et al. (2022). La consideración de emociones y actitudes ligadas a la matemática parece apuntar a esta posibilidad. Con la posible inclusión de las emociones y actitudes, además de las creencias, dentro del modelo MTSK, se da cuenta de la importancia de la conexión entre cognición y afectos, y de esta conexión en el desarrollo profesional del profesorado de matemáticas. Así, García y Pascual (2017), ponen de relieve el papel de las emociones, como la congoja y satisfacción, en la acción del profesor y su relación con su conocimiento. En este estudio de caso constituido por un profesor novel de secundaria (reflejado también en García et al., 2019), encuentran evidencia de que el conocimiento del profesor desencadena las emociones de congoja y satisfacción. Los autores reconocen la relevancia de la autopercepción de la competencia docente porque en su propia observación de aula, el profesor puede emitir juicios sobre su conocimiento que adquieren importancia cuando se busca relacionarlos con las emociones.

La formación del profesorado vista desde el conocimiento especializado del profesorado

Desde sus inicios, el interés del equipo de investigación del SIDM, que será el germen de la creación de la Red Iberoamericana MTSK, se sitúa en poder orientar mejor la formación inicial y continua del profesorado. De hecho, el interés en el conocimiento del profesor para la enseñanza de las matemáticas se deriva de la observación de la importancia de dicho conocimiento en los procesos de desarrollo profesional del profesorado (Climent & Carrillo, 2003).

El modelo MTSK se aplica inicialmente para el análisis de actividades dirigidas a la formación inicial y continua de profesores de matemáticas (Carrillo et al. 2014). Así, se muestra cómo la mirada desde el MTSK permite detallar qué aspectos del conocimiento especializado del, en este caso futuro, profesorado de matemáticas, pretende abordarse.

Posteriormente, la aplicación del modelo MTSK a la formación de profesorado se orienta tanto a la estructuración de asignaturas en la formación inicial de profesorado como al diseño de tareas formativas (Montes et al., 2019). De este modo, las investigaciones sobre el conocimiento del profesorado para la enseñanza de distintos temas matemáticos pueden servir de

fundamento para determinar qué elementos de conocimiento especializado abordar en la formación inicial de profesorado. Se busca una estructura curricular de dicha formación que asegure que el futuro profesorado disponga de un conocimiento especializado base.

Con más énfasis, desde el 2018, en el seno de los proyectos “Conocimiento especializado del profesorado de matemáticas y formación del profesorado” (RTI2018-096547-B-I00) y “Conocimiento especializado en la formación del profesorado de matemáticas: Tareas y conocimiento del formador” (MTSK-T&MTEK) (PID2021-122180OB-100), financiados por el Gobierno de España, en los que participan investigadores de España y de México, junto con otros investigadores integrantes de la Red MTSK, la investigación con el modelo se ha orientado a analizar cómo construyen conocimiento especializado los profesores de Matemáticas en formación inicial y continua, iniciando el diseño de tareas para la formación de profesores basadas en el modelo MTSK.

Del estudio usando el modelo MTSK sobre las características de tareas formativas que permitan construir conocimiento especializado, se destaca la necesidad de que estén situadas en la práctica del profesor, convirtiendo dicha práctica en el centro de la formación (Joglar-Prieto et al., 2022). De este modo, además de permitir desarrollar conocimiento especializado, posibilita que el profesorado vivencie situaciones de la misma naturaleza que se espera pueda proponer a su alumnado (Ribeiro et al., 2021). Además, en muchas de ellas se le pide al (futuro) profesorado que desarrolle tareas profesionales, como interpretar y dar retroalimentación al pensamiento de los estudiantes, diseñar actividades matemáticas (Flores-Medrano et al., 2022), o evaluar un conjunto de ejemplos para la introducción de un concepto. De esta forma, reproducen o se asemejan al trabajo de enseñar, lo que favorece en mayor medida la generación de conocimiento profesional útil y disponible (Cusi y Martignone, 2022) y propicia que los profesores otorguen legitimidad a las tareas propuestas. Estas características son coherentes con la visión de la formación del profesorado como un proceso continuo desde la formación inicial a la del profesorado en ejercicio, donde el aprendizaje del profesor se basa en la reflexión sobre la práctica a partir de su problematización (Carrillo et al., 2020). De este modo, en muchos de los casos la formación continua se usa como recurso para nutrir la formación inicial de tareas genuinas, tratando de salvar la brecha que tradicionalmente existe entre formas propositivas de educación y la práctica (Rowland et al., 2014). Esta idea de continuidad pone el foco en posibilitar que los profesores construyan un amplio conjunto de conocimientos y destrezas, y desarrollen una actitud consistente con un aprendizaje a lo largo de la vida.

El aprendizaje del profesorado o futuro profesorado para la enseñanza de las matemáticas depende, en gran medida, de las tareas que se les

encomienden, en cuyo diseño hay que considerar su función, su forma y su foco (Grevholm et al., 2009). Las tareas formativas diseñadas desde el modelo MTSK por nuestro equipo de investigación han tenido como foco el conocimiento especializado en relación con una diversidad de tópicos matemáticos. Por ejemplo, Arce et al. (2023) se han centrado en el desarrollo de razonamiento deductivo en contextos geométricos. La función de la tarea, en este caso, es la movilización y construcción de conocimiento particularmente complejo de abordar en la formación del profesorado, como es el caso del conocimiento sobre demostrar. De este modo, se trata de desarrollar fundamentalmente conocimiento sobre la práctica matemática (KPM). Mediante un experimento de enseñanza (Cobb et al., 2015), los autores exploran cómo evoluciona el tipo de razonamiento utilizado por el futuro profesorado de primaria al resolver una tarea geométrica. Así, aunque gran parte del futuro profesorado utiliza fundamentalmente argumentos inductivos, algunos futuros profesores se advierte que este procedimiento no es suficiente para demostrar sus conjeturas. Estos autores destacan la importancia de preguntas como “¿Crees que la conjetura está suficientemente demostrada?”, permiten a los futuros profesores reflexionar sobre los procesos de razonamiento y demostración de cada etapa, desplegando y verbalizando elementos de su KPM. Este experimento de enseñanza por sí mismo no es suficiente, en la mayoría de los casos, para generar la necesidad intelectual de una prueba deductiva, por lo que se apunta a la necesidad de un diseño cuidadoso de conjuntos de tareas formativas que promuevan oportunidades para mover a los futuros profesores hacia esquemas de prueba analítica y fortalecer los avances en su KPM.

El estudio sobre tareas formativas ha permitido concluir que su diseño, considerando el modelo MTSK, favorece que se haga explícita la función de la tarea. La identificación de un foco y función específica permite optar por la forma de tarea más efectiva, cuidando la alineación de estos tres elementos. Por otro lado, el modelo MTSK se ha mostrado útil para abordar la complejidad del análisis del conocimiento que se moviliza con las tareas. Esto se atribuye a su potencial como herramienta analítica por el detalle en dominios, subdominios y categorías (Figura 2), a lo que se añade disponer de indicadores concretos de las categorías en relación con numerosos contenidos matemáticos extraídos de investigaciones previas sobre la práctica de aula.

Algunas tareas han permitido observar cómo puede promoverse la profundización del futuro profesorado en conceptos matemáticos, desempaquetando (en el sentido de Ma, 2010) conceptos elementales (Climent et al., 2024). Si bien en algunos de los estudios desarrollados se muestra cómo futuros profesores movilizan conocimiento de la práctica matemática (KPM), se observan dificultades particulares para promover el conocimiento de la práctica matemática pretendido con algunas tareas (como en Arce et

al., 2023, antes referida). Esta dificultad puede incrementarse en el caso de prácticas matemáticas sobre las que los (futuros) profesores no han tenido experiencia matemática previa (como es el caso de las prácticas de definir, argumentar y demostrar). Es importante abordar estas prácticas en la formación, ampliando la imagen de los (futuros) profesores sobre prácticas matemáticas escolares y rompiendo así con su idea de matemática escolar (en su mayoría como un conjunto de reglas y procedimientos estándar) (Boaler, 2002). La dificultad para observar la movilización de KPM y KSM (conocimiento de la práctica y la estructura de la matemática) ha sido también identificada en la implementación de tareas formativas en formación continua (Flores-Medrano et al., 2022).

En la mayoría de las tareas se ha promovido la construcción conjunta de conocimiento matemático y didáctico-matemático, al trascender los (futuros) profesores el papel de aprendices de matemáticas. Es el caso de las tareas que han abordado el estudio de la competencia en formulación de problemas (Montes et al., 2024). Estas tareas, además de la movilización del conocimiento del contenido matemático (KoT) y conocimiento sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (KMT y KFLM), han permitido poner en juego las concepciones de los futuros profesores sobre la naturaleza de la matemática escolar. Además, se ha observado cómo con tareas formativas en las que se sitúa a futuros profesores como profesores, a partir de observación de vídeos de clases reales, la construcción de conocimiento del contenido (KoT) se produce a través del uso de KFLM (Climent et al., 2024). También en formación continua se ha observado que la movilización de conocimiento matemático a través de tareas formativas va de la mano de la movilización de PCK (Montes et al., 2021).

También en el contexto de la formación continua en México, se han desarrollado estudios en los que la construcción del conocimiento del profesor es el eje vertebral en el diseño y selección de tareas formativas. Así, Lizarde (2020), en el diseño de una maestría profesionalizante para maestros en servicio, muestra que la construcción de conocimiento cobra sentido en la medida en que la gestión del formador logre devolver la responsabilidad a los estudiantes. En ese estudio se reporta la construcción de conocimiento del profesor en torno al dominio conceptual del tema, la elaboración de paquetes de conocimiento, la fundamentación teórica, el diseño, la aplicación y el análisis de lecciones.

El interés por el conocimiento especializado del formador de profesorado de matemáticas

En los últimos años, la comunidad de investigación en educación matemática ha comenzado a poner el foco en una temática que, de alguna manera, tiene sus raíces en la investigación sobre el conocimiento del profesor de

matemáticas. Una vez alcanzada cierta comprensión acerca del conocimiento del profesorado surge el interés por el conocimiento de quien forma al profesorado (en adelante MTE).

Desde la Red MTSK esta temática ha ocupado un lugar relevante en la agenda de investigación y es precisamente en España y México donde se han desarrollado investigaciones que abordan el conocimiento y la práctica de los formadores del profesorado de matemáticas. De este modo, la aplicación del modelo MTSK al estudio del conocimiento del formador de profesorado, explota una de las potencialidades identificadas por Kilpatrick y Spangler (2016) en el modelo MTSK.

A nivel internacional, la colaboración entre nuestros países se ha plasmado en el trabajo de Escudero-Ávila et al. (2021), en el que se plantea la pregunta sobre qué necesitan conocer los formadores del profesorado de matemáticas necesitan conocer, sobre la base del contenido de la formación. En este trabajo, se asume que parte del conocimiento del formador es el conocimiento del profesor y, por ello, se proporciona una comparación detallada de las diferencias entre el conocimiento que necesitan los formadores y los profesores de matemáticas para ilustrar su naturaleza más compleja, entendiendo que una mejor comprensión acerca del contenido de la formación proporciona una mejor comprensión del conocimiento necesario para su desarrollo. Aunque MTSK está implícito en el planteamiento, se adopta una posición ecléctica para favorecer al debate desde otros modelos de conocimiento del profesor. También se aborda aquí la problemática de los diferentes perfiles de MTE (como matemáticos profesionales, investigadores en educación matemática y profesores con experiencia en educación obligatoria que participan en la formación de profesores de matemáticas), los cuales presentan diferencias importantes en la generación del conocimiento de los futuros profesores.

Como complemento a este trabajo, de corte más teórico, en Sosa et al. (2024) mostramos un estudio empírico, con dos formadores de profesores de matemáticas de México y España, centrado en los fundamentos teóricos, metodologías, experiencias pragmáticas y elementos de su aprendizaje, sobre cómo han implementado su práctica de formadores de profesores de matemáticas en sus respectivos centros de formación. Ambos formadores forman parte del equipo de trabajo que generó el modelo MTSK y, consecuentemente, ambos hacen uso del modelo, aunque sus enfoques mantienen estrechas relaciones con sus identidades profesionales. Con sus resultados se señala el camino hacia otros estudios que den cuenta de cómo el contexto tiene una influencia esencial en la práctica del formador de profesores y de cómo su desarrollo profesional se sustenta en la reflexión sobre su propia práctica, como parte de comunidades de aprendizaje, de práctica y de investigación.

A partir de estos primeros trabajos, la colaboración de investigadores de México y España debería profundizar en las características del conocimiento del formador, focalizando en aquellas de mayor incidencia en el desarrollo de competencias profesionales y en su desarrollo profesional.

Reflexiones finales

En las investigaciones del grupo SIDM y la Red MTSK, en las que participan los autores de este capítulo y otros investigadores de España y México, hemos abordado la comprensión de qué conocimiento requiere el profesorado de matemáticas para desarrollar su labor docente y cómo propiciarlo. El desarrollo del modelo de conocimiento especializado del profesorado de matemáticas, MTSK, en cuyo diseño han tenido un peso relevante investigadores de ambos países, nos ha dotado de una herramienta para dicho estudio.

En la investigación sobre cómo propiciar el desarrollo de conocimiento especializado en la formación, inicial y continua, de profesorado de matemáticas, hemos avanzado en la comprensión de algunas características necesarias de las tareas formativas y de las relaciones entre estas características y sus resultados de aprendizaje. Algunas cuestiones se nos presentan como líneas de investigación futura, como, por ejemplo, cómo propiciar el desarrollo de conocimiento relativo a prácticas matemáticas, el conocimiento de la estructura de las matemáticas o un conocimiento especializado interrelacionado (Pacheco-Muñoz et al., 2023). Asimismo, continuamos indagando sobre el papel del formador en la implementación de tareas formativas, y la posible incidencia de distintos perfiles y conocimientos del formador.

Además, hemos comenzado a abordar el desarrollo de conocimiento especializado junto con competencias profesionales. Es el caso de Campos-Cano y Flores-Medrano (2023), quienes presentan una propuesta de tarea formativa para desarrollar la competencia mirada profesional en profesores de nivel medio superior en México (15 a 18 años), en el tema de funciones racionales. De este modo, se pretende que los profesores desarrollen tanto su *noticing* (van Es & Sherin, 2021) como su conocimiento especializado desde la perspectiva del modelo MTSK (en concreto, conocimiento de los temas, conocimiento de la práctica matemática y conocimiento sobre las características del aprendizaje de las matemáticas), estableciendo nexos entre ambos (siguiendo a López & Zakaryan, 2021).

La colaboración presente y futura de investigadores de la SEIEM y la SOMIDEM sobre la formación del profesorado de matemáticas desde la perspectiva del desarrollo de conocimiento especializado, está respaldada por la existencia de grupos de investigación bien cohesionados, con una trayectoria de investigación compartida ya consolidada y con numerosas y variadas interacciones entre investigadores de ambas sociedades.

Agradecimientos

Este trabajo se ha realizado al amparo del proyecto PID2021-122180OB-I00 financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033 y “FSE Invierte en tu futuro”. Se enmarca en la Red MTSK, auspiciada por la AUIP, y el Grupo de Investigación DESYM de la Universidad de Huelva.

Referencias

- Arce, M., Conejo, L., & Flores-Medrano, E. (2023). Knowledge mobilised in a teaching experiment about conjecturing and proving by elementary preservice teachers. En P. Drijvers, C. Csapodi, H. Palmér, K. Gosztonyi, & E. Herendiné-Kónya (Eds.), *Proceedings of the Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 3695–3702). ERME.
- Ball, D.L., Thames, M., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407. <https://doi.org/10.1177/0022487108324554>
- Boaler, J. (2002). Exploring the nature of mathematical activity: Using theory, research and working hypotheses to broaden conceptions of mathematics knowing. *Educational Studies in Mathematics*, 51(1–2), 3–21.
- Campos-Cano, M., & Flores-Medrano, E. (2023). Diseño de tareas formativas para desarrollar la competencia mirada profesional. En R. Delgado Rebolledo, & D. Zakaryan (Eds.), *Actas del VI Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 47–54). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.
- Carreño, E, Ribeiro, M., & Climent, N. (2013). Specialized and horizon content knowledge –Discussing prospective teachers knowledge on polygons. En B. Ubuz, C. Haser, & M. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the CERME 8* (pp. 2966–2975). ERME.
- Carreño, E., Rojas, N., Montes, M., & Flores, P. (2013). Mathematics Teacher’s specialized knowledge. Reflections based on specific descriptors of knowledge. En B. Ubuz, C. Haser, & M. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the CERME 8* (pp. 2976–2984). ERME.
- Carrillo, J. (1998). *Modos de resolver problemas y concepciones sobre la matemática y su enseñanza: metodología de la investigación y relaciones*. Universidad de Huelva Publicaciones.
- Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C., & Montes, M. (2020). Using Professional Development Contexts to Structure Prospective Teacher Education. En S. Llinares, & O. Chapman (Eds.), *International Handbook of Mathematics Teacher Education: Volume 2* (pp. 393–419). BRILL/SENSE. <https://doi.org/10.1163/9789087905460>

- Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C., & Muñoz-Catalán, M.C. (2013). Determining specialised knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, C. Haser, & M. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the CERME 8* (pp. 2985–2994). ERME.
- Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M., & Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 20(3), 236–253. <https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981>
- Carrillo, J., Contreras, L. C., Climent, N., Escudero-Ávila, D. I., Flores-Medrano, E., & Montes, M. A. (2014). *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas*. Universidad de Huelva Publicaciones.
- Carrillo, J., Escudero, D., & Flores, E. (2014). El uso del MTSK en la formación inicial de profesores de Matemáticas de primaria. *Revista de Análisis Matemático-Didáctico para Profesores*, 1(1), 16–26.
- Carrillo, J., Flores, E., Climent, N., Contreras, L.C., Aguilar, A., Escudero, D.I., & Montes, M.A. (2013). Investigación sobre el profesor de matemáticas en la Universidad de Huelva (España). En C. Dolores, M.S. García, J.A. Hernández, & L. Sosa (Eds.), *Matemática Educativa: la formación de profesores*. Díaz de Santos.
- Carrillo, J., Montes, M. A., & Climent, N. (2022). (Eds.), *Investigación sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): 10 años de camino*. Dykinson.
- Climent, N., & Carrillo, J. (2003). El dominio compartido de la investigación y el desarrollo profesional. Una experiencia en matemáticas con maestras. *Enseñanza de las ciencias*, 21(3), 387–404.
- Climent, N., Contreras, L. C., Montes, M., & Ribeiro, M. (2024). The MTSK model as a tool for designing tasks for teacher education. *ZDM Mathematics Education*, 56(6), 1123–1135. <https://doi.org/10.1007/s11858-024-01605-8>
- Cobb, P., Jackson, K., & Dunlap, C. (2015). Design research: An analysis and critique. En L. D. English, & D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 481–503). Routledge.
- Codes, M., & Contreras, L. C. (2022) El conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas. En Carrillo, J., Montes, M., & Climent, N. (Eds.), *Investigación sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas. 10 años de camino* (pp. 95–108). Dykinson.
- Climent, N. (2002). *El desarrollo profesional del maestro de primaria respecto de la enseñanza de la matemática: un estudio de caso*. [Tesis doctoral]. Universidad de Huelva.
- Contreras, L. C. (1999). *Concepciones de los profesores sobre la resolución de problemas*. Universidad de Huelva Publicaciones.

- Cusi, A., & Martignone, F. (2022). Integration of two theoretical lenses to analyse the potentialities of a practice-based task in fostering pre-service mathematics teacher specialized knowledge. En J. Hodgen, E. Geraniou, G. Bolondi, & F. Ferretti (Eds.), *Proceedings of the CERME12* (pp. 3543–3550). Free University of Bozen-Bolzano.
<https://hal.science/CERME12/hal-03748739v1>
- Delgado, R., Zakaryan, D., & Alfaro, C. (2022) El conocimiento de la práctica matemática. En J. Carrillo, M. Montes, & N. Climent (Eds.), *Investigación sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas. 10 años de camino* (pp. 57–69). Dykinson.
- Ernest, P. (1989). The impact of beliefs on the teaching of mathematics. En C. Keitel, P. Damerow, A. Bishop, & P. Gerdes (Eds.), *Mathematics, education, and society. Science and Technology Education, Document Series, (35)* (pp. 99–101). UNESCO.
- Escudero-Ávila, D. (2022). Conocimiento de las características del aprendizaje matemático. En J. Carrillo, M. A. Montes, & N. Climent (Eds.), *Investigación sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK)* (pp. 83–94). Dykinson.
- Escudero-Ávila, D. (2023), Relaciones entre el uso del pensamiento matemático flexible y el desarrollo de conocimientos especializados en la formación inicial del profesorado de primaria. En J. L. Piñeiro, N. Pizarro, & E. Carrasco (Eds.), *Actas de las XXVII Jornadas Nacionales de Educación Matemática* (pp. 36–43). Fondo Editorial UMCE.
- Escudero-Ávila, D., & Carrillo, J. (2020). El Conocimiento Didáctico del Contenido: Bases teóricas y metodológicas para su caracterización como parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas. *Educación Matemática*, 32(2), 1–38.
- Escudero-Ávila, D., Carrillo, J., Flores-Medrano, E., Climent, N., Contreras, L.C., & Montes, M. (2015). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas detectado en la resolución del problema de las cuerdas. *PNA*, 10, 53–77.
- Escudero, D.I., Flores- Medrano, E., & Carrillo Yáñez, J. (2012). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas. En L. Sosa, E. Aparicio, & F. M. Rodríguez (Eds.), *Memoria de la XV Escuela de Invierno de Matemática Educativa* (pp. 35–42). Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa.
- Escudero-Ávila D., Montes M., & Contreras, L.C. (2021). What Do Mathematics Teacher Educators Need to Know? Reflections Emerging from the Content of Mathematics Teacher Education. En M. Goos, & K. Beswick (Eds.), *The Learning and Development of Mathematics Teacher Educators* (pp. 23–40). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-62408-8_2

- Flores-Medrano, E. (2022). Conocimiento de la estructura de las matemáticas. En J. Carrillo, M. A. Montes, & N. Climent (Eds.), *Investigación sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK)* (pp. 83–94). Dykinson.
- Flores, E., & Carrillo, J. (2014). Connecting a mathematics teacher's conceptions and specialised knowledge through her practice. En S. Oesterle, P. Liljedahl, C. Nicol, & D. Allan (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36* (Vol. 3, pp. 81–88). PME.
- Flores, E., Escudero, D.I., & Aguilar, A. (2013). Oportunidades que brindan algunos escenarios para mostrar evidencias del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa, & N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 275–282). SEIEM.
- Flores, E., Escudero, D.I., & Aguilar, A. (2014). Online mathematics teacher education: main topics, theoretical approaches, techniques and changes in researchers' work. En S. Oesterle, P. Liljedahl, C. Nicol, & D. Allan (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36* (Vol. 3, pp. 89–96). PME.
- Flores, E., Escudero, D.I., & Carrillo, J. (2013). A theoretical review of Specialised Content Knowledge. En B. Ubuz, C. Haser, & M.A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of 8th CERME* (pp. 3055–3064). ERME.
- Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D. I., & Méndez-Coca, M. M. (2022). El uso de representaciones y de problemas para la adquisición del conocimiento matemático didáctico de fracciones en la formación de maestros. *APeDuC Revista-Investigação e Práticas em Educação em Ciências, Matemática e Tecnologia*, 3(2), 98–13.
<https://apeduc revista.utad.pt/index.php/apeduc/article/view/358/141>
- Flores-Medrano, E., Gómez-Arroyo, D., Aguilar-González, A., & Muñoz-Rodríguez, L. (2022). What Knowledge do teachers need to predict the mathematical behavior of students? *Mathematics*, 10(16), 1–22.
<https://doi.org/10.3390/math10162933>
- García, M., & Pascual, M.I. (2017). De la congoja a la satisfacción: el conocimiento del profesor de Matemáticas. *IE Revista de Investigación Rediech*, 8(15), 133–148.
- García, M.S., Pascual, M.I., & Carrillo, J., & Martínez, G. (2019). El modelo del conocimiento especializado para la enseñanza y las emociones del profesor de matemáticas. En L.A. Hernández, I. Borja, J. Slisko, & J.A. Juárez (Eds.), *Aportes a la educación matemática basados en la investigación* (pp. 99–120). BUAP Publicaciones.
- Grevholm, B., Millman, R., & Clarke, B. (2009). Function, Form, and Focus: The role of Tasks in Elementary Mathematics Teacher Education. En B. Clarke, B. Grevholm, & R. Millman (Eds.), *Tasks in Primary Mathematics Education: Purpose, Use and Exemplars* (pp. 1–5). Springer.
<https://doi.org/10.1007/978-0-387-09669-8>

- Joglar-Prieto, N., Liñán-García, M. M., & Contreras, L. C. (2022). MTSK en la formación inicial del profesorado de primaria. En J. Carrillo, M. A. Montes, & N. Climent (Eds.), *Investigación sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): 10 años de camino* (pp. 207–222). Dykinson.
- Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. National Academy of Sciences National Research Council.
- Kilpatrick, J., & Spangler, D. A. (2016). Educating future mathematics education professors. En L. English, & D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (3rd ed., pp. 297–309). Routledge.
- Lizarde, E. (2020). MTSK y formación docente continua. Explorando horizontes de posibilidades. En J. Carrillo, M. Codes, & L.C. Contreras (Eds.), *IV Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas*. Universidad de Huelva Publicaciones.
- Lizarde, E. (2013) *Transposición y destransposición del saber matemático y didáctico representaciones y prácticas en la formación inicial de docentes* [Tesis de doctorado, Universidad de Huelva].
<https://dialnet.unirioja.es/servlet/tesis?codigo=40497>
- López, L. M., & Zakaryan, D. (2021). Relacionando el conocimiento especializado del profesor de matemáticas con la competencia noticing. En J. G. Moriel Junior (Ed.), *Actas de V Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 349–356). Congresseme.
<https://cdn.congresse.me/ho20198vnz5ar0pp4l3wt33iit5t>
- Ma, L. (2010). *Knowing and teaching elementary mathematics. Teachers' Understanding of Fundamental Mathematics in China and the United States* (3rd ed.). Routledge. <https://doi.org/10.4324/9781003009443>
- Marbán, J., Fernández-Gago, J., García, M., Maroto, A., & Pascual, I. (2022). Dominio afectivo para la enseñanza. ¿qué lo hace especial? En J. Carrillo, M. Á. Montes, & N. Climent (Eds.), *Conocimiento especializado del profesor de matemáticas, desde la perspectiva del MTSK* (pp.193–206). Dykinson.
- Montes, M., Aguilar, A., Carrillo, J., & Muñoz-Catalán, M. (2013). MTSK: from Common and Horizon Knowledge to Knowledge of Topics and Structures. En B. Ubuz, C. Haser, & M. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the CERME 8* (pp. 3185–3194). ERME.
- Montes, M., Flores-Medrano, E., Carmona, E., & Huitrado, J. (2014). Reflexiones sobre la naturaleza del conocimiento, las creencias y las concepciones. En J. Carrillo, N. Climent, L. Contreras, M. Montes, D. Escudero-Ávila, & E. Flores-Medrano (Eds.), *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de Matemáticas*. Universidad de Huelva Publicaciones.

- Montes, M., Carrillo, J., Contreras, L. C., Liñán-García, M. M., & Barrera-Castarnado, V. J. (2019). Estructurando la formación inicial de profesores de matemáticas: una propuesta desde el modelo MTSK. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández, & M. T. González (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: formación, práctica de aula, conocimiento y competencia profesional* (pp. 157–176). Ediciones Universidad Salamanca.
- Montes, M., Chico, J., Martín-Díaz, J. P., & Badillo, E. (2024). Mathematics teachers' specialized knowledge mobilized through problem transformation, *Journal of Mathematical Behavior*, 7, 101–132.
<https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2024.101132>
- Montes, M., Pascual, M. I., & Climent, N. (2021). Una aproximación a la formación especializada en matemáticas de maestros egresados. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 24(1), 83–104.
<https://doi.org/10.12802/relime.21.2414>
- Moriel, J., & Reyes, A. (2022). conocimiento especializado de las fracciones. En J. Carrillo, M. A. Montes, & N. Climent (Eds.), *Investigación sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK)* (pp. 135–150). Dykinson.
- Muñoz-Catalán, M. C. (2010). *El desarrollo profesional en un entorno colaborativo centrado en la enseñanza de las matemáticas: el caso de una maestra novel* [Tesis doctoral, Universidad de Huelva]. <http://hdl.handle.net/10272/2949>
- Pacheco-Muñoz, E., Juárez-Ruiz, E., & Flores-Medrano, E. (2023). Relaciones direccionales intra-dominio del conocimiento especializado del profesor de matemáticas sobre localización en el plano. *AIEM -Avances de investigación en educación matemática*, 24, 57–74. <https://doi.org/10.35763/aiem24.4360>
- Pajares, M. F. (1992). Teachers' beliefs and educational research: Cleaning up a messy construct. *Review of educational research*, 62(3), 307–332.
- Pino-Fan, L., & Godino, J. D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *Paradigma*, 36(1), 87–109.
- Ponte, J. P. (1994). Mathematics teachers' professional knowledge. En J. P. Ponte, & J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the XVIII PME* (Vol. I, pp. 195–210). PME.
- Ribeiro, C. M. (2010). *O desenvolvimento profissional de duas professoras do 1º. Ciclo, envolvidas num grupo de trabalho colaborativo, partindo da modelação das suas aulas de matemática*. [Tesis de doctorado]. Universidad de Huelva.
- Ribeiro, M., Almeida, A., & Mellone, M. (2021). Conceitualizando Tarefas Formativas para Desenvolver as Especificidades do Conhecimento Interpretativo e Especializado do Professor. *Perspectivas da Educação Matemática*, 14(35), 1–32.
<https://periodicos.ufms.br/index.php/pedmat/article/view/13263>
- Rojas, N. (2014). Caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas: Un estudio de casos [Tesis de doctorado]. Universidad de Granada.
- Rowland, T. (2009). *Developing primary mathematics teaching: Reflecting on practice with the knowledge quartet*. Sage.

- Rowland, T., Turner, F., & Thwaites, A. (2014). Research into teacher knowledge: a stimulus for development in mathematics teacher education practice. *ZDM–Mathematics Education*, 46, 317–328.
- Sandoval-Cáceres, I. T., Climent-Rodríguez, N., Jiménez-de-la-Rosa-Barrios, E. N., & Lupiáñez-Gómez, J. L. (2014). Conocimiento matemático y tecnológico para la enseñanza de las matemáticas. En E. Ortega, F. Rodríguez, M. J. Mejía, R. M. López, D. Gutiérrez, & F. V. Montes (Coord.), *Estrategias de enseñanza-aprendizaje y su importancia en el entorno educativo* (pp. 70–82). Red Durango de Investigadores Educativos A.C.
- Schoenfeld, A.H. (2010). *How we think*. Routledge.
- Shulman, L.S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *American Educational Research Association*, 15(2), 4–14.
- Sosa, L. (2011). Conocimiento matemático para la enseñanza en bachillerato. Un estudio de dos casos. [Tesis de doctorado, Universidad de Huelva]. <https://rabida.uhu.es/dspace/handle/10272/4509>
- Sosa, L., Contreras, L. C., & Sánchez-Acevedo, N. (2024). Prácticas y sustentos teóricos expresados por dos formadores de profesores en dos contextos académicos distintos. Elementos comunes. En N. Climent, & C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 513–520). SEIEM.
- Sosa, L., Flores-Medrano, E., & Carrillo, J. (2015). Conocimiento del profesor acerca de las características de aprendizaje del álgebra en bachillerato. *Enseñanza de las Ciencias*, 33(2), 173–189. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1522>
- Sosa, L., Flores-Medrano, E., & Carrillo, J. (2016). Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas del profesor cuando ejemplifica y ayuda en clase de álgebra lineal. *Educación Matemática*, 28(2), 151–174.
- Sosa, L., & Reyes-Camacho, A. (2022) Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas. En Carrillo, J., Montes, M., & Climent, N. (Eds.), *Investigación sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas. 10 años de camino* (pp. 71–82). Dykinson.
- Thompson, A.G. (1992). Teacher's Beliefs and Conceptions: a Synthesis of the Research. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook on Mathematics Teaching and Learning*. McMillan.
- Van Es, E. A., & Sherin, M. G. (2021). Expanding on prior conceptualizations of teacher noticing. *ZDM–Mathematics Education*, 53(1), 17–27.
- Vasco, D., Climent, N. Escudero-Ávila, D., Montes, M.A., & Ribeiro, M. (2016) Conocimiento Especializado de un Profesor de Álgebra Lineal y Espacios de Trabajo Matemático. *BOLEMA*, 30(54), 222–239.

- Vasco-Mora, D., Climent-Rodríguez, N., & Escudero-Ávila, D. (2021). Interconnections between Content Knowledge and Pedagogical Content Knowledge of a University Lecturer in Linear Algebra. *Mathematics*, 9, 2542. <https://doi.org/10.3390/math9202542>
- Vasco, D., & Moriel, J. (2022). Conocimiento de los temas. En J. Carrillo, M. A. Montes, & N. Climent (Eds.), *Investigación sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK)* (pp. 35–46). Dykinson.

Los Recorridos de Estudio e Investigación y las restricciones institucionales en la formación del profesorado

Study and Research Paths and institutional constraints in Teacher Education

Berta Barquero ¹ 

Marianna Bosch ² 

Avenilde Romo-Vázquez ³ 

Resumen

En 2013 iniciamos una colaboración entre equipos de investigación españoles y mexicanos sobre la formación del profesorado en la Teoría Antropológica de lo Didáctico. El marco empírico elegido fue el Programa de Matemática Educativa del CICATA Legaria, un centro pionero en la impartición de postgrados en línea en matemática educativa a profesorado de educación secundaria y universitaria en ejercicio. La colaboración permitió concretar y desarrollar los “recorridos de estudio e investigación para la formación del profesorado”, un dispositivo que se enmarca en el nuevo paradigma del cuestionamiento del mundo y que pone el acento en las restricciones institucionales que encuentra el profesorado cuando intenta implementar nuevas modalidades de estudio en infraestructuras pedagógicas tradicionales aún vigentes.

¹ bbarquero@ub.edu

Universitat de Barcelona, España

² marianna.bosch@ub.edu

Universitat de Barcelona, España

³ avenilde.romo@cinvestav.mx

Cinvestav, México

Palabras clave

Formación del profesorado, formación en línea y a distancia, modelización matemática, recorridos de estudio e investigación, restricciones institucionales.

Abstract

In 2013, we started a collaboration between Spanish and Mexican research teams on teacher training within the Anthropological Theory of the Didactic. The empirical framework chosen was the Educational Mathematics Programme at CICATA Legaria, a pioneering centre in providing postgraduate courses in educational mathematics for in-service secondary and university teachers. The collaboration allowed us to specify and develop “study and research paths for teacher education”, an instructional format framed in the new paradigm of questioning the world. One of its main characteristics and novelties is how it helps teachers address the institutional restrictions they can encounter when implementing new study modalities in traditional educational infrastructures still in use.

Keywords

Teacher education, online and distance training, mathematical modelling, study and research paths, institutional constraints.

La formación del profesorado y el cuestionamiento del mundo

En 2013 iniciamos una colaboración entre equipos de investigación españoles y mexicanos sobre la formación del profesorado en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico. El marco empírico elegido fue el Programa de Matemática Educativa del Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, unidad Legaria (en adelante, CICATA-IPN), un centro pionero en la impartición de postgrados en línea en matemática educativa a profesorado de educación secundaria y universitaria en ejercicio. La colaboración permitió trabajar y concretar la propuesta de los *Recorridos de Estudio e Investigación para la Formación del Profesorado* (REI-FP), un dispositivo que persigue enmarcar la formación del profesorado en el nuevo *paradigma del cuestionamiento del mundo* (Chevallard, 2013) y que pone el acento en las restricciones institucionales que encuentra el profesorado cuando intenta implementar nuevas modalidades de estudio en estructuras pedagógicas tradicionales aún vigentes.

En la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD; Chevallard, 2013), el problema de la formación se plantea de forma genérica para abordar, sin distinciones a priori, cualquier tipo de proceso de estudio, sea o no reglado, afecte a estudiantes o profesionales. Los procesos de estudio se describen a partir del llamado *esquema herbartiano*, que debe su nombre al filósofo y pedagogo alemán Johann Friedrich Herbart, a quien se atribuye la idea del profesor universitario como guía del proceso de estudio que llevan a cabo los estudiantes. El esquema herbartiano permite describir cualquier proceso

de estudio, iniciado por un grupo de personas, los estudiantes X , ayudados por otro grupo de personas, los profesores o guías del estudio, Y . X e Y se proponen abordar una cuestión Q para la que quieren elaborar una respuesta $R^\heartsuit$ (Chevallard & Cirade, 2009). El esquema herbartiano se indica de forma simbólica como $S(X, Y, Q) \ M \hookrightarrow R^\heartsuit$, donde $S(X, Y, Q)$ designa el sistema didáctico formado por X e Y alrededor de Q . En el proceso de elaboración de la respuesta final $R^\heartsuit$, interviene un elemento esencial del esquema: el *medio* M del proceso de estudio, el cual integra todos los recursos materiales e inmateriales a los que recurren X e Y para construir $R^\heartsuit$, lo que se simboliza como: $\{S(X, Y, Q) \hookrightarrow M\} \hookrightarrow R^\heartsuit$. Entre estos recursos se encuentran cuestiones derivadas de Q , saberes de todo tipo elaborados por otros y que parecen útiles para abordar las cuestiones derivadas, así como otros objetos, informaciones y datos empíricos.

El esquema herbartiano permite describir cualquier proceso de estudio generado por una cuestión Q , así como aquellos procesos en los que las cuestiones originales han quedado desde hace tiempo sustituidas por las obras O que permitieron, en algún momento, elaborar respuestas a cuestiones que quizá ya han desaparecido para X e Y . Estas respuestas, poco a poco, se han considerado suficientemente importantes como para convertirse ellas mismas en el objeto del estudio. El pedagogo español Esteve (1998, p. 46), dirigiéndose a los profesores, recordaba que “alguien, sumido en la duda, inquieto por una nueva pregunta, elaboró los conocimientos del tema que mañana te toca explicar”. El papel de las preguntas y respuestas queda entonces revertido: en lugar de estudiar cuestiones para elaborar respuestas, se estudian obras-respuestas a modo de anticipación de las cuestiones potenciales a las que estas obras deberían permitir elaborar respuestas. Surge así la consideración y caracterización de dos paradigmas de estudio: el de la “visita de las obras”, centrado en el estudio de respuestas, y el del “cuestionamiento del mundo”, centrado en el planteamiento y estudio de cuestiones (Chevallard, 2013).

Una de las principales líneas de desarrollo de la TAD aborda las condiciones que facilitan la transición del paradigma de la visita de las obras, hoy día en crisis, hacia el paradigma del cuestionamiento del mundo. Esta misma línea también incluye el estudio de las restricciones de distinta naturaleza que limitan la transición, desde las más genéricas ligadas a la forma en que nuestras sociedades conciben la educación y la difusión de los saberes, hasta las más específicas vinculadas a los tipos de contenidos y actividades que se proponen en las aulas. La consideración del problema de la formación del profesorado, tanto la inicial como la continua, tampoco es ajena a los dos paradigmas. En el paradigma de la visita de las obras, el problema de la formación se formularía preguntando por las “obras” (saberes, competencias, etc.) que los profesores deben conocer y, por lo tanto, “visitar” durante el

periodo de formación. En cambio, en el paradigma del cuestionamiento del mundo, el problema se formula a partir de las cuestiones de la profesión docente que se deben abordar en la formación (Chevallard & Cirade, 2009; Cirade, 2006), incluyendo entre ellas el cuestionamiento de los saberes por enseñar (Bosch & Gascón, 2009; Ruiz-Olarría, 2015).

En España, la investigación sobre las condiciones necesarias para el cambio de paradigma nos condujo a diseñar e implementar nuevos dispositivos didácticos basados en la indagación llamados *recorridos de estudio e investigación* (REI). Estos dispositivos se conciben y diseñan en el paradigma del cuestionamiento del mundo, aunque su implementación se realiza bajo las condiciones de un sistema educativo marcado por el dominante paradigma de la visita de las obras. Su diseño y análisis permiten investigar e identificar, no solamente los tipos de procesos de estudio que se puedan enmarcar en una transición hacia un nuevo paradigma, sino las restricciones y limitaciones que impone el paradigma dominante y que dificultan sus posibilidades de implementación. De este modo, se propusieron y analizaron REI para la enseñanza secundaria (García, 2005; Rodríguez-Quintana, 2005; Lucas, 2015) y universitaria (Barquero, 2009; Serrano, 2013), incluyendo la formación del profesorado (Sierra, 2006; Ruiz-Olarría, 2015).

En el momento en el que surgió la posibilidad de colaboración entre el equipo español de la TAD y el equipo mexicano del CICATA-IPN, los dispositivos de formación docente del CICATA-IPN estaban en constante innovación, debido a que la modalidad no tenía referentes tradicionales. El marco institucional resultaba en este contexto un ámbito empírico excelente para experimentar nuevas propuestas de formación coherentes con el paradigma del cuestionamiento del mundo y que llamamos *recorridos de estudio e investigación para la formación del profesorado* (REI-FP) (Ruiz-Olarría, 2015).

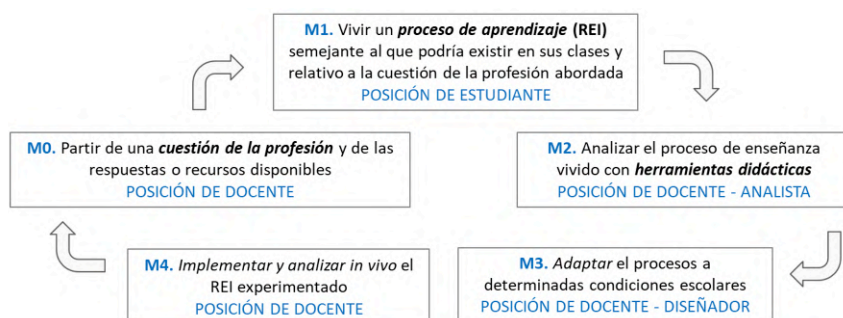
Los REI-FP se presentan como procesos formativos estructurados en cinco fases o módulos que numeramos de forma secuencial, pero que mantienen cierta coexistencia durante el proceso (ver Figura 1).

En cada uno de ellos, se pide al profesorado en formación asumir distintos roles (como estudiantes indagadores, analistas, diseñadores y/o docentes) que permitirán establecer distintas relaciones con los saberes profesionales bajo estudio y construcción. El primer módulo, que llamamos *Módulo 0* por su carácter central, consiste en la consideración de una cuestión relativa a la profesión docente Q_{FP} en el contexto considerado (formación inicial o continua, nivel educativo, etc.) que suele formularse en términos de “¿Cómo enseñar un determinado contenido C ?” Para abordar esta cuestión Q_{FP} , los profesores en formación, X , junto con el equipo de formadores Y , construyen un determinado medio M . El primer elemento de este medio es un proceso de estudio, generalmente en forma de REI, relacionado con el contenido C .

En el *Módulo 1*, *X* e *Y* se convierten en estudiantes y profesores (o guías del estudio) respectivamente de este REI. Después de haber llevado a cabo el REI, *X* e *Y* vuelven a su rol inicial de profesores en formación y educadores para analizar el proceso de estudio vivido, tarea para la cual se necesitarán nuevas herramientas matemáticas y didácticas que el profesorado en formación *X* deberá estudiar con la ayuda de los formadores *Y*. El *Módulo 3* del REI-FP incluye el diseño y análisis de un proceso de estudio adaptado a una realidad y condiciones escolares concretas. Finalmente, en el *Módulo 4*, se implementa la propuesta y se analizan los resultados de la implementación con el objetivo de identificar nuevas condiciones y restricciones para el diseño, gestión y análisis de procesos de estudio relacionados con la cuestión generatriz Q_{FP} del REI-FP y con el contenido *C*.

Figura 1

Estructura de los REI-FP



Nota. Adaptación a partir de Ruiz-Olarría (2015)

La formación del profesorado en línea y a distancia: en busca de la coherencia

La colaboración entre investigadores de México (CICATA-IPN) y del grupo español que trabaja en la TAD (www.atd-tad.org) se inició con la planificación e implementación de un primer curso para un programa de formación continua del CICATA-IPN, de nivel maestría, en la modalidad en línea y a distancia, dirigido a profesores de matemáticas de México y de Latinoamérica. El curso se titulaba “Procesos de Institucionalización de la Matemática Escolar” (PIME) y formaba parte de una Maestría en Matemática Educativa. Este primer curso de 2013 fue seguido por otros cursos, que fueron impartidos anual o semestralmente, hasta el año 2020, bajo distintas apelaciones: “Naturaleza del Pensamiento Matemático” (NPM) o “Análisis del Discurso Matemático Escolar” (ADME). Desde el punto de vista de la investigación, la adaptación de los REI-FP constituyó todo un reto, ya que estos estaban, en ese momento, en plena fase de desarrollo en el trabajo de tesis doctoral

de Ruiz-Olarría (2015). En el caso de CICATA, los cursos eran módulos, cuya duración era de cuatro semanas, considerando 20 horas de trabajo semanales por parte de los profesores (80 h en total en cada curso). Los grupos, de quince a veinte profesores, eran heterogéneos, con diferentes nacionalidades, formaciones, experiencia docente e impartían docencia en distintos niveles educativos: secundaria, bachillerato o universidad. Además, eran cursos en línea y a distancia, una modalidad poco extendida en el periodo anterior a la pandemia del COVID-19.

Los cursos eran principalmente teórico-prácticos, teniendo como objetivo principal poner a disposición de los profesores herramientas y resultados surgidos de la investigación en didáctica de las matemáticas para analizar, innovar y regular, al menos parcialmente, su práctica docente. Para ello, se identificaban cuestiones emergentes en la práctica docente, tanto las reconocidas por los profesores (por ejemplo, dificultad para enseñar la demostración) como las que les eran menos perceptibles, pero de las que la investigación da cuenta (por ejemplo, el rol del lenguaje matemático en la enseñanza de las matemáticas). El modelo de formación consistía en proponer cuatro grandes actividades por curso, una por semana, que implicaban la lectura y análisis de artículos de investigación, análisis de propuestas o implementaciones didácticas, adaptación de tareas o lecciones para explorar concepciones de los estudiantes o para enseñar algún contenido matemático, así como la implementación y análisis de tareas o ejercicios con su grupo de estudiantes. Se alternaba el trabajo individual, con el trabajo colaborativo entre profesores y con el grupo de profesores y formadores gracias al soporte de diferentes herramientas de la plataforma de aprendizaje (foros, wikis, videos, correos electrónicos, etc.).

En estas condiciones institucionales se diseñaron e implementaron nueve cursos, impartidos por un equipo docente mixto compuesto por un equipo mexicano de ocho miembros y un equipo español de seis miembros. Se tomaron de partida tres REI previamente experimentados en la enseñanza secundaria o universitaria (ver Tabla 1), los cuales se adaptaron y experimentaron en el Módulo 1 del REI-FP con los docentes en formación.

Dos objetivos guiaron el diseño de los cursos. El primero consistía en dotar a los profesores de herramientas teóricas y metodológicas para el análisis y la implementación de procesos didácticos enfocados en la enseñanza de la modelización matemática. El segundo servía para que estas herramientas les permitieran analizar, a lo largo del proceso de formación, la actividad matemática desarrollada bajo el rol de estudiantes y docentes, la gestión didáctica de procesos de modelización, además de identificar condiciones y restricciones institucionales que podían facilitar o, por el contrario, limitar un buen desarrollo de estos procesos. Para conseguir esta evolución y cuestionamiento, la metodología de los REI-FP se fue adaptando para que

cuatro de sus módulos —M1, M2, M3 y M4— se desarrollaran en cuatro actividades semanales, que incluían varias fases y mantuvieron ciertas invariantes, como se ilustra en la Tabla 2.

Tabla 1

Cursos, equipos mixtos de formadores y REI de base implementado

Año / Curso	Equipo español	Equipo mexicano	REI implementado
2013 PIME	Berta Barquero Marianna Bosch Josep Gascón Alicia Ruiz Lidia Serrano	Apolo Castañeda Gabriel Molina Avenilde Romo Mario Sánchez	Previsión de ventas para Desigual
2014 PIME	Berta Barquero Marianna Bosch	Gabriel Molina Olda Covián Avenilde Romo	Previsión de ventas para Desigual
2015 NPM	Berta Barquero Marianna Bosch Ignasi Florensa Josep Gascón	Alejandro Rosas	Análisis del REI vivido “Previsión de ventas en Desigual” en el curso PIME usando el mapa C-R.
2015 PIME	Berta Barquero Marianna Bosch	Gabriel Molina Olda Covián Avenilde Romo	Comparando realidad contra previsión: el caso de los usuarios de Facebook
2017 NPM	Berta Barquero Marianna Bosch Lidia Serrano	Avenilde Romo Mario Sánchez	Comparando realidad contra previsión: el caso de los usuarios de Facebook
2018 NPM	Berta Barquero Marianna Bosch Lidia Serrano	Gabriel Molina Camilo Ramírez Avenilde Romo	Comparando realidad contra previsión: el caso de los usuarios de Facebook
2019 NPM	Berta Barquero Marianna Bosch Alicia Ruiz Lidia Serrano	Sergio Chalé Avenilde Romo	Comparando realidad contra previsión: el caso de los usuarios de Facebook
2019 ADME I	Berta Barquero Marianna Bosch Alicia Ruiz	Sergio Chalé Avenilde Romo	La moda no da la talla (Módulos 1 y 2)
2020 ADME II	Berta Barquero Marianna Bosch Alicia Ruiz	Gabriel Molina Avenilde Romo	La moda no da la talla (Módulos 3 y 4)

La *primera actividad* consistía en experimentar (en propia piel) un REI, previamente experimentado con estudiantes de secundaria o de universidad. La cuestión generatriz se planteaba en un contexto extra matemático e involucraba datos numéricos, así como procesos de modelización matemática. En esta actividad, los estudiantes —docentes en formación en este caso—, adoptaban el rol de consultores matemáticos y trabajaban en pequeños grupos, debiendo entregar un informe final con dos partes: una respuesta a la cuestión generatriz dirigida al cliente (imaginario) de la consultoría que la había planteado y una respuesta al equipo de supervisores de la consultoría destacando el proceso de estudio desarrollado (cuestiones abordadas y respuestas parciales aportadas, fuentes consultadas, validaciones de las respuestas, etc.). Para lograrlo, se proponía una primera fase de trabajo en equipo (de tres integrantes) que iniciaba el proceso de estudio y generaba

un informe parcial con una respuesta preliminar. Estos informes se compartían en una segunda fase con otro equipo. Ambos informes parciales se analizaban y con base en ello, en la tercera fase, se generaba el informe final por equipo. Estas fases se desarrollaban en foros, lo que permitía mantener un registro, al menos parcial, del proceso seguido por cada equipo, así como de las comparaciones entre equipos y del grupo (foro general del curso). Cada equipo era acompañado por un formador durante las cuatro actividades, quien orientaba el proceso de estudio. Al final de esta actividad, se solicitaba a cada equipo un análisis matemático del proceso de estudio e investigación emprendido, que completaba la primera entrega grupal.

En la *segunda actividad*, los estudiantes adoptaban el rol de profesores y se les pedía que adaptaran el estudio matemático llevado a cabo en el REI para ser experimentado en sus escuelas, en una de las clases a su cargo. La adaptación debía hacerse primero individualmente y después discutir las distintas propuestas en equipos, con el objetivo de acordar una propuesta conjunta que se pudiera implementar en al menos una de las clases de los componentes del grupo. De esta manera, surgían las diferentes limitaciones que provienen del paradigma dominante de la visita de las obras (currículum, tiempo de enseñanza asociado a los temas, dificultad para implementar procesos de investigación, etc.) de forma explícita, tanto en la adaptación de la propuesta como en la posterior discusión. La *tercera actividad* consistía en reportar y analizar los resultados de las implementaciones, bajo el rol de profesores responsables de estas experimentaciones. Finalmente, la *cuarta* y última actividad se destinaba al análisis del proceso seguido durante las primeras tres semanas y a modificar el diseño de los REI adaptados, a partir del análisis in vivo (individualmente, durante cada una de las experimentaciones) y a *posteriori* (después de la experimentación, compartiendo las distintas experiencias en grupo). Aquí los participantes adoptaban el rol de expertos analistas.

Estas cuatro actividades se mantuvieron en la mayoría de los cursos, con variaciones relacionadas con los REI elegidos (“Previsión de ventas para Desigual”, “Comparando realidad contra previsión: el caso de los usuarios de Facebook” y “La moda no da la talla”) y con las herramientas didácticas diseñadas específicamente para permitir diferentes tipos de análisis: matemático, didáctico y ecológico, así como diversos niveles de análisis de los REI (ver Tabla 2). Para la *Actividad 1*, se propusieron pautas para realizar los informes, parcial y final, relacionadas con elementos del esquema herbartiano y, en particular, los mapas de cuestiones y respuestas donde aparecieran: la cuestión generatriz del REI, las cuestiones derivadas, respuestas parciales, respuestas encontradas en fuentes de información, modelos matemáticos estudiados, elegidos y desechados, y respuesta final (entre otros posibles elementos).

Tabla 2

Relación de los módulos y actividades en los REI-FP, objetivos perseguidos, herramientas introducidas y tiempo aproximado

Módulos del REI-FP declinados en 4 Actividades	Herramientas didácticas	Objetivo	Tiempo
M1: Vivir el REI Actividad 1. Vivencia y análisis de un problema (REI) (Rol: Aprendiz matemático, en equipo) <i>Fase 1.</i> Producción de un informe parcial en equipo <i>Fase 2.</i> Comparación de informes parciales entre dos equipos <i>Fase 3.</i> Producir un informe final (respuesta parcial R) y un análisis matemático del proceso seguido	Mapa de cuestiones y respuestas como herramienta de análisis de la actividad matemática. Este esquema se fue ampliando a lo largo de los cursos, incluyendo modelos matemáticos utilizados y dialécticas NPM 2019 Cuestiones, respuestas parciales, fuentes de información utilizadas (conocimientos propios, artículos, libros, webs, etc.) Modelo(s) final(es) propuesto(s) y forma de validación PIME 2014. Se incluyó la opinión de un experto sobre modelos matemáticos a corto, mediano y largo plazo ADME I 2019. Esquema herbartiano, dialécticas del estudio: cuestiones y respuestas, media-medio	Análisis de la actividad matemática y del proceso seguido para desarrollarla	1 semana ADME I 2019 3 semanas
M2: Adaptar el REI Actividad 2. Guía didáctica (Rol: Profesor) <i>Fase 1.</i> Diseñar una breve guía didáctica individualmente para que un colega sea capaz de implementar con un grupo de estudiantes el REI vivido <i>Fase 2.</i> Analizar, comparar y discutir en un foro las guías didácticas individuales por cada miembro del equipo <i>Fase 3.</i> Generar una guía didáctica común ADME I 2019 Actividad 1. Se solicita un REI adaptado y una guía didáctica para su implementación Actividad 2. Realizar un análisis <i>a priori</i> del REI adaptado	Guía pedagógica/didáctica Fase 1. Carta a un colega – un primer nivel de análisis didáctico Fase 2. Transición del análisis individual del REI vivido al institucional (temas matemáticos abordados, formas de evaluar) Fase 3. Emergencia de restricciones institucionales comunes a los participantes ADME I 2019. Pautas para adaptar el REI, dialéctica media-medio. Se proponen las dialécticas cuestiones-respuestas y media-medio para realizar el análisis	Análisis didáctico y emergencia de las restricciones institucionales	1 semana ADME 2019 3 semanas
M3: Experimentar el REI Actividad 3. Implementación del problema (Rol: Profesor/Analista didáctico). Con base en la guía conjunta, planificación, experimentación con un grupo de estudiantes, clase ordinaria o voluntarios, y análisis a posteriori ADME II 2020. Actividad 3 Implementación en línea del REI adaptado	Guía para redactar el informe de la experimentación: 1) Consideraciones de la experimentación 2) Análisis <i>a priori</i> de la actividad propuesta (Actividad 1) 3) Actividad observada del grupo de estudio, estudiantes y profesor 4) Elementos para una próxima investigación 5) Resultados obtenidos y nuevas cuestiones por explorar ADME II 2020. Guía adaptada a la modalidad en línea	Confrontar el análisis <i>a priori</i> (lo esperado en la guía didáctica) vs 'un primer análisis <i>a posteriori</i> un primer análisis de lo sucedido	1 semana ADME II 2020 2 semanas

Tabla 2 (Continúa)

Relación de los módulos y actividades en los REI-FP, objetivos perseguidos, herramientas introducidas y tiempo aproximado

Módulos del REI-FP declinados en 4 Actividades	Herramientas didácticas	Objetivo	Tiempo
M4: Análisis de la experimentación. (Rol: Analista didáctico)	Se proponen las pautas para el informe de la Actividad 3 ampliadas, dialécticas cuestiones y respuestas y media-medio		
Actividad 4. Análisis conjunto y revisión final de la guía didáctica			
<i>Fase 1.</i> Puesta en común de las experimentaciones	ADME II 2020. Guía para confrontar los análisis <i>a priori</i> y <i>a posteriori</i> , considerando las dialécticas de, cuestiones y respuestas y media-medio (énfasis en el rol de las medias digitales)	Análisis global del proceso seguido	1 semana
<i>Fase 2.</i> Revisión de la guía didáctica			ADME II 2020 2 semanas
ADME II 2020. Actividad 4. Análisis a posteriori en equipo y reflexión individual sobre el proceso de estudio seguido	Pautas para realizar la reflexión individual		

Para la *Actividad 2*, con el objetivo de obtener descripciones detalladas de las propuestas de los REI adaptados, se pedía a los participantes que redactaran una carta a un compañero profesor para explicar el tipo de propuesta que se debía llevar a cabo (REI adaptado), junto con los materiales y orientaciones sobre la forma de conducir la propuesta en clase. Esta carta inicial evolucionaba hasta convertirse en una guía didáctica para la implementación del REI, que ofrecía un análisis *a priori* matemático y didáctico, del REI adaptado a las condiciones escolares concretas. Las pautas para realizar esta guía fueron evolucionando del primer al último curso, incorporando y precisando elementos del esquema herbartiano y las dialécticas del estudio, cuestiones-respuestas y media-medio (Barquero et al., 2018). Para las *Actividades 3* y *4* se presentaban pautas para describir la implementación en el aula, generar un primer análisis *a posteriori*, confrontar los análisis *a priori* y *a posteriori*, y generar un análisis global del proceso seguido. Estas pautas pretendían mostrar la potencialidad de las herramientas del esquema herbartiano, de las dialécticas del estudio (cuestiones-respuestas y media-medio) para dar cuenta del proceso de modelización vivido por los estudiantes, pero también de las condiciones institucionales que posibilitaban la implementación del REI y de las restricciones que impedían el desarrollo de procesos de investigación en el aula.

Los dos últimos cursos, ADME I y ADME II, se desarrollaron en condiciones excepcionales. Estos fueron implementados en semestres consecutivos (septiembre-diciembre 2019 y enero-junio 2020), favoreciendo una organización sensiblemente distinta a los otros cursos. En ADME I se implementaron las actividades 1 y 2, en un tiempo de 4 semanas, y en ADME II, las actividades 3 y 4, lo que permitió precisar las herramientas didácticas puestas a disposición de los profesores y generar procesos de

estudio más amplios. El curso de ADME II, además, fue implementado durante la pandemia del COVID-19 y las implementaciones del REI adaptado se hicieron también a distancia, lo que implicó que los docentes tuvieran que adecuar todo el diseño del REI adaptado y los materiales necesarios, para poder ser implementados en línea con sus estudiantes.

El diseño de esta estructura particular de la formación se hizo buscando coherencia, tanto con la propuesta inicial de los REI-FP, como con los elementos del esquema herbartiano: la cuestión inicial se formulaba a partir del problema de la profesión docente de enseñar procesos de modelización matemática en el aula. La construcción de un medio apropiado para abordar esta cuestión incluía la vivencia de un REI, así como los procesos formativos que los estudiantes proponían implementar. El proceso de estudio debía conducir a los estudiantes a elaborar una respuesta final $R^\heartsuit$ que no consistía solo en una propuesta didáctica para implementar directamente en el aula, sino en el análisis de sus características y, sobre todo, el análisis de su ecología didáctica, es decir, de las condiciones que facilitan su implementación y las restricciones que la limitan y que se ponían de manifiesto en las distintas etapas del proceso formativo.

Restricciones institucionales en la formación del profesorado

La colaboración entre los equipos mexicanos y españoles se inició a raíz de una necesidad de formación, pero se planteó desde el primer momento como un proyecto de investigación conjunta. El problema que abordábamos no era solo la adaptación de los REI-FP al formato en línea y a distancia, sino la propia propuesta de los REI-FP como dispositivo de formación y, en particular, su potencial para situar en el corazón de la formación docente el problema de la *ecología* de las propuestas didácticas que se sitúan en la transición hacia un paradigma de cuestionamiento del mundo. En este sentido, además de basarse en el cuestionamiento y reconstrucción de las matemáticas por enseñar y la elaboración de organizaciones matemáticas para la enseñanza (Ruiz-Olarría, 2015), buscábamos un desarrollo de los REI-FP que posibilitara la identificación, por parte de los docentes en formación, de algunas de las principales restricciones institucionales que pesan sobre la implementación de actividades próximas al paradigma del cuestionamiento del mundo. Esta línea de investigación ha dado lugar a diversas publicaciones y contribuciones a congresos (Barquero et al., 2018, 2019; Romo-Vázquez et al., 2016, 2019, 2020) cuyos principales resultados se resumen en esta sección.

El esquema herbartiano como herramienta de diseño

Un primer elemento por considerar, más interno al marco de la TAD y su metodología de investigación, es la operacionalización del esquema herbar-

tiano, no solo para la descripción y análisis de procesos de estudio, sino como herramienta clave en el proceso de concepción y diseño de los REI-FP. Tal como se detalla en Barquero et al. (2019), en las primeras propuestas de REI-FP, que eran todas presenciales, para la formación inicial y en contexto universitario, se ponía el acento en el tipo de actividades que los estudiantes debían llevar a cabo, más que en las cuestiones que motivaban estas actividades. En particular, se problematizaba el tipo de recursos didácticos que se debían poner a disposición de los estudiantes, pero no había llegado a plantearse el problema del tipo de proceso que facilitaría esta puesta a disposición.

El hecho de partir de una situación más exigente, debido a la modalidad en línea y a distancia de los REI-FP, nos condujo a acomodar el diseño del curso a la estructura procognitiva del esquema herbartiano. El esquema nos permitía distinguir dos procesos de indagación en paralelo (el del REI-FP y el del REI que este incluye) y nos conducía a distinguir los elementos que estructuran el REI-FP. Así, debíamos formular la cuestión inicial en términos de la problemática del profesor y esperar, como resultado final del curso, la elaboración de una respuesta propia por parte del grupo de profesores. En otras palabras, había que considerar cómo se iba a desarrollar la dialéctica cuestión-respuesta dentro del propio proceso de formación. También había que pensar cuál sería el medio que profesores y formadores iban a construir para elaborar y contrastar respuestas parciales a las cuestiones derivadas abordadas y qué elementos externos podían alimentar la dialéctica medio-medio: qué respuestas existentes aportaban los formadores, cuáles eran más accesibles a los profesores; qué papel podían tener las discusiones entre profesores y cómo gestionarlas desde el papel de formadores, etc. Finalmente, el diseño del REI-FP en línea y a distancia también requería una organización previa de los dispositivos que debían facilitar el reparto de responsabilidades entre profesores y formadores. Una de las conclusiones importantes a las que se llegó (Barquero et al., 2019, p. 506) es la posibilidad de incluir el propio esquema como parte de las herramientas de diseño, gestión y análisis que se proporcionan a los participantes en el curso, y así se realizó en las últimas dos ediciones del curso.

Restricciones institucionales sobre la enseñanza de la modelización matemática

Los REI-FP que se implementaron seguían todos un mismo formato y estructura, realizándose pocos cambios en la infraestructura pedagógica y tecnológica que los sostenían. Un invariante de la propuesta fue la cuestión de la profesión docente QFP que generaba el REI-FP y que, en todas las ediciones, se formuló en los términos siguientes:

¿Cómo analizar, adaptar, desarrollar e integrar un proceso de estudio relacionado con la modelización matemática en nuestra práctica docente? ¿Cómo implementar

procesos de estudio basados en la modelización matemática de forma sostenible y a largo plazo? ¿Qué dificultades hay que superar? ¿Qué herramientas didácticas se necesitan? ¿Qué nuevas cuestiones surgen?

La elección de la modelización matemática estuvo motivada por cuatro razones principales. La primera, más circunstancial, era la presión internacional de las pruebas PISA en los currículos nacionales y el mandato cada vez más generalizado de incorporar a la enseñanza secundaria elementos vinculados a la modelización y resolución de problemas que surgen en contextos extra matemáticos. La segunda es la perspectiva de las matemáticas como herramienta de modelización que se considera en la TAD como un principio epistemológico básico para el análisis de las actividades matemáticas. En tercer lugar, la enseñanza de la modelización matemática es un caso paradigmático de ecología didáctica compleja y facilita la aparición e identificación de restricciones institucionales propias del paradigma de la visita de las obras. Finalmente, disponíamos de varios ejemplos de REI experimentados en distintos contextos que parten de cuestiones generatrices basadas en la previsión (de poblaciones, de ventas de camisetas, de usuarios de redes sociales, etc.) y requieren la consideración y contraste de distintos modelos funcionales. Las conclusiones de Romo-Vázquez et al. (2020, p. 785) ilustran bien los resultados que se obtuvieron:

Las cuatro actividades que conforman el curso permiten gradualmente hacer conscientes a los profesores de las restricciones institucionales que dificultan la integración de la actividad de modelización matemática en la enseñanza regular. Experimentar el REI (Actividad 1) los confronta a una búsqueda de la respuesta esperada por los formadores más que a seguir un proceso de estudio y de investigación. En la adaptación del REI para ser implementado en el aula (Actividad 2 y 3), los profesores intentan revertir la incertidumbre que conlleva el desarrollo de una actividad abierta. El análisis de las guías didácticas juntamente con los formadores muestra que el “cierre del REI implementado” no es una cuestión de un profesor ni de un equipo, sino de varios y, por tanto, que hay una visión compartida sobre la enseñanza de la modelización matemática, que traspasa fronteras y que parece asociada a una pedagogía de ‘visita de las obras’. Esta visión compartida se refleja en el “cierre” de la actividad de modelización a una secuencia de preguntas cortas; propuesta de ciertos modelos matemáticos previamente identificados por el profesor; uso muy dirigido de las TIC; predominio del contenido matemático curricular, el poco o nulo espacio para la investigación y el trabajo autónomo de los estudiantes. Finalmente, el REI-FP en la modalidad online permite que un grupo muy heterogéneo de profesores de matemáticas visibilicen restricciones institucionales que determinan su enseñanza.

La problemática ecológica en la formación docente

Abordar el problema de la formación docente en la transición entre el paradigma de la visita de las obras y el del cuestionamiento del mundo

plantea un desafío claro. El cambio de paradigma requiere la elaboración de nuevas propuestas didácticas, entre las cuales se encuentran los REI y otras modalidades de enseñanza centradas en los procesos de indagación. Sin embargo, es fundamental conocer las condiciones que se necesitan para que estas nuevas propuestas puedan implementarse de forma sostenible. De ahí que abordar el tema de las restricciones institucionales sea un aspecto central en y para la formación del profesorado. En este sentido, los resultados obtenidos muestran la pertinencia de los REI-FP implementados en el CICATA-IPN para ayudar a los profesores a abordar las restricciones institucionales que afectan el cambio de paradigma, así como dotarlos de nuevas herramientas analíticas y de diseño para superarlas localmente. Este proceso puede evitar la frustración y el sentimiento de culpa de los docentes, como reacción lógica, cuando se ven limitados a introducir nuevas formas de enseñar sin controlar las variables que podrían garantizar su sostenibilidad (Barquero et al., 2018).

Para ello, lo primero es luchar contra la naturalización de estas restricciones, el darlas por sentadas como algo establecido e inamovible, como parte de la naturaleza de nuestro entorno. La estructura y la orientación de los módulos y las actividades de los REI-FP contribuyeron a hacerlas visibles o, mejor dicho, presentes en las propias propuestas de los profesores en formación. El cambio de roles que promueven los módulos del REI-FP (de estudiantes de matemáticas a analistas matemáticos y didácticos primero, después a diseñadores y finalmente a docentes) resulta una estrategia productiva para poder vislumbrar distintas restricciones institucionales. La guía didáctica que elaboran los equipos de estudiantes para adaptar el REI vivido inicialmente a las condiciones de cada escuela representaba la “materialización” de propuestas didácticas consensuadas y, por lo tanto, despersonalizadas. Las discusiones que conducían a la elaboración de una propuesta conjunta sacaban a relucir los distintos criterios de diseño y las limitaciones debidas al paradigma imperante en las instituciones docentes. La comparación de las guías entre distintos equipos ponía más en evidencia estos aspectos. Finalmente, el mismo hecho de asumir distintos roles durante el curso facilitaba la identificación de distintas posiciones institucionales y, con ello, de distintas visiones sobre una misma actividad, todas igual de legítimas. Es solo a partir de esta visión que puede empezar el trabajo de modificación y análisis, incorporando entonces la distanciación necesaria para asumir el papel de analista didáctico.

Tal como indicamos en Barquero et al. (2018), el éxito del juego de roles no puede explicarse sin un segundo elemento importante del curso: la elaboración de un medio M suficientemente rico entre los formadores y los profesores, estrategia inspirada en la Teoría de las Situaciones Didácticas. Nuestra opción consistió en elaborar, junto con los profesores en formación,

una realidad matemática y didáctica compartida que sirviera de dispositivo de confrontación para las propuestas de enseñanza y las herramientas teóricas introducidas en el curso. En este sentido, la primera actividad es esencial para tener una actividad matemática empírica común a la que podamos referirnos durante el curso. Los objetos matemáticos (modelos, datos, funciones, errores de ajuste, etc.) utilizados en el análisis didáctico y en los diseños de las propuestas de enseñanza fueron todos compartidos por los educadores y los participantes de manera específica y tuvieron un papel clave en el análisis didáctico posterior. Además, la implementación del breve proceso de enseñanza de la Actividad 3 aparecía como el medio empírico por excelencia. En algunas partes del curso, el intercambio entre los equipos de profesores también se utilizó como medio auxiliar para que los participantes elaboraran un análisis epistemológico o una propuesta didáctica revisada.

Finalmente, no podemos dejar de mencionar que los resultados obtenidos no se limitaron a la identificación de las restricciones que afectan las modalidades de enseñanza propias del paradigma del cuestionamiento del mundo. Esta identificación es en sí misma una condición necesaria para la implementación de nuevas propuestas, pero no suficiente. Sin embargo, en algunos casos, el curso también pareció aportar herramientas didácticas transformadoras que algunos participantes supieron —o pudieron— aprovechar en su actividad docente posterior. Veremos ejemplos de ello en la sección siguiente, al abordar los desarrollos del trabajo sobre los REI y los REI-FP por parte del equipo mexicano.

Desarrollo de los REI y REI-FP más allá del CICATA-IPN

La colaboración emprendida sobre los REI y los REI-FP en el CICATA-IPN ha sido el germen de más investigaciones en otros contextos universitarios de formación inicial y continua del profesorado, en las etapas de infantil, primaria, de secundaria y de la universidad, en la educación secundaria urbana, rural-multigrado e indígena, así como de formación de ingenieros y de futuros investigadores en didáctica de las matemáticas. A continuación, nos detendremos en la experiencia con los REI y los REI-FP en el contexto de la Universitat de Barcelona, del CICATA-IPN y del Cinvestav de México.

La investigación sobre los REI-FP del equipo español

En el caso de la Universitat de Barcelona (UB), desde 2013-14 hasta la actualidad, se han ido implementando REI y REI-FP en distintos cursos del Grado de Maestro en Educación Infantil y Primaria. En el trabajo de Barquero (2023) se describe la experiencia más completa desarrollada en un curso obligatorio de formación en didáctica de la matemática de último año (4º curso, Grado de Educación Primaria) donde se muestra cómo los REI-FP

han servido para estructurar una asignatura completa, que lleva implementándose desde el curso 2016-17 hasta la actualidad. A partir de ciertas cuestiones de la profesión y de las correspondientes cuestiones derivadas en los distintos módulos del REI-FP, se muestra cómo las actividades planteadas han permitido transferir algunas herramientas provenientes de la investigación en didáctica de la matemática a la formación del profesorado. Algunas de las cuestiones abordadas durante los distintos módulos tratan sobre cómo analizar y describir los saberes matemáticos en distintas situaciones didácticas, en particular aquellas que involucran la modelización, cómo analizar la actividad matemática generada, cómo diseñar matemática y didácticamente situaciones, entre otras. El principio común a todas estas propuestas es la realización de un REI con los profesores en formación, ya sea partiendo de un REI previamente experimentado con estudiantes, ya sea un REI de nueva creación para el contexto de formación. Este REI surge como un elemento de respuesta a la cuestión generatriz abordada en el REI-FP que se suele formular en términos de cómo enseñar un determinado contenido curricular.

Los REI-FP que componían el curso han ido variando a lo largo de los años, aunque dos de ellos siempre se han mantenido. El primero parte de la cuestión sobre cómo introducir la inferencia estadística en la etapa de primaria y tratar con la variabilidad de los datos experimentales en estadística. Se parte de la vivencia de un REI con el profesorado en formación denominado “¿Qué se esconde dentro de la botella?” (REI adaptado de la propuesta de Brousseau et al., 2002) que trata sobre la formulación de hipótesis sobre cuál es el contenido oculto de una botella, pudiendo únicamente registrar visualizaciones sobre los objetos que se esconden (por ejemplo, bolas de distintos colores), sin poder nunca acceder a su contenido real. Posterior a la vivencia de este REI, se propone al profesorado en formación una doble tarea. En primer lugar, analizar la tipología de saberes que intervienen (basándonos en el currículum y extendiendo las nociones y terminología estadísticas más allá de la existente en los currículos). En segundo lugar, trabajar en el diseño de herramientas de evaluación para poder valorar los recorridos seguidos por los grupos de clase. Este análisis y evaluación se complementan presentando experiencias en el aula de primaria con el mismo REI (Granell & Barquero, 2019). Estas se presentan a partir de extractos de informes del alumnado de primaria o a través de filmaciones de las sesiones de clase.

Este REI-FP, al margen de mantenerse como uno de los más implementados en la UB, ha dado lugar a la colaboración con equipos internacionales que han trabajado de forma paralela en la adaptación de la situación propuesta en las investigaciones de la Teoría de las Situaciones Didácticas (Brousseau et al., 2002) para ser adaptado a las particularidades de la formación inicial del profesorado de educación primaria y secundaria. En

particular, la colaboración entre las dos autoras de la UB de este trabajo y un equipo de investigadores japoneses (Hakamata et al., 2024) llevó a comparar las propuestas derivadas para las etapas de primaria y secundaria. Su comparativa pone de manifiesto que ambos diseños responden o se fundamentan en modelos epistemológicos sobre la estadística y la probabilidad que difícilmente pueden articularse, debido a los modelos epistemológicos dominantes en las dos instituciones educativas interpeladas, primaria y secundaria respectivamente.

El segundo de los REI-FP, denominado “*La caja de la pastelera*”, se focaliza en una cuestión generatriz sobre ¿cómo analizar, diseñar y gestionar la actividad de modelización en el aula de primaria?, similar a la emprendida en el caso de los cursos en el CICATA-IPN. Este REI-FP persigue articular las cuestiones y tareas profesionales de análisis, evaluación y diseño de tareas de modelización, y combinarse con el desarrollo del trabajo final de la asignatura que conlleva el rediseño de una situación didáctica (asociado a alguno de los REI vividos). La elección de esta cuestión viene motivada por el papel central que tienen la resolución de problemas y la modelización en el currículum de educación primaria, la falta de concreción en su formulación como competencias generales, así como la limitada disponibilidad de diseños didácticos. El diseño de este REI-FP se adaptó a las especificidades de la formación inicial, dilatando más, en comparación con los cursos en el CICATA-IPN, los tres primeros módulos de la propuesta genérica (Módulos 0, 1 y 2). Después de estos módulos comunes, se pide a los estudiantes que trabajen en el (re)diseño o adaptación y, si les es posible, la implementación (Módulos 3 y 4) de alguno de los REI vivenciados durante el curso, poniendo en práctica las herramientas de diseño y análisis matemático y didáctico introducidas a lo largo del curso. Como se explica en investigaciones derivadas de dicho curso, Barquero et al. (2022), son de especial importancia los mapas de cuestiones y respuestas como herramienta central para el análisis matemático de las situaciones didácticas, así como la consideración de guías didácticas que vienen a complementar los citados mapas con elementos didácticos para la gestión de aula.

Asimismo, las investigaciones emprendidas no se han desarrollado exclusivamente en manos de investigadores de la TAD, sino que han llevado a colaboraciones de distintos marcos teóricos y propuestas alternativas para la formación del profesorado, en particular, para la enseñanza de la modelización matemática. En la investigación presentada por Barquero y Ferrando (2024) se examinan dos cursos de formación permanente sobre modelización matemática del profesorado de matemáticas de secundaria. El primer curso integra distintos enfoques sobre modelización, mientras que el segundo se basa en una de las últimas implementaciones de REI-FP en el CICATA-IPN, con la colaboración de las tres autoras del presente trabajo. Los dos cursos

parten de unos módulos iniciales que se centran en vivenciar y delimitar qué se entiende y cómo caracterizar la modelización matemática (más allá de las breves directrices curriculares). Ambas experiencias concluyen con el trabajo de diseño de tareas de modelización por parte del profesorado en formación para ser implementadas en las escuelas secundarias. Ambos cursos se analizan desde la óptica de la *ecología de la modelización matemática* (Barquero et al., 2018; Dorier y García, 2013), es decir, de cómo los profesores avanzan, a lo largo de la formación, en la identificación colectiva de las condiciones y las restricciones que facilitan o dificultan la enseñanza y aprendizaje de la modelización. Los resultados de este trabajo muestran, en primer lugar, qué tipo de tareas de modelización diseñan los profesores y el nivel de especificidad disciplinar en el que planifican la implementación de la modelización. En segundo lugar, se analiza cómo los profesores abordan el análisis ecológico, es decir, la identificación de las condiciones y restricciones para la integración de la modelización en las aulas de secundaria tras sus experiencias.

La investigación sobre los REI-FP del equipo mexicano

En el caso del CICATA-IPN y del Cinvestav de México, se desarrollaron varios REI-FP y REI para la educación secundaria, universitaria (profesores de matemáticas, ingenieros) y posgrado (formadores de profesores, investigadores en didáctica de las matemáticas), varios de ellos en el marco de tesis de maestría de profesores que participaron en los cursos, y otros, a partir de las perspectivas que estos abrieron. Por un lado, se extendió el proceso de formación, y por el otro, los REI y su diseño se convirtieron en un elemento central en diversas investigaciones. El diseño de los REI fue evolucionando hasta consolidarse en el uso de la metodología de la ingeniería didáctica (Artigue, 2014) como lo sugieren García et al. (2019), pero incluyendo en la fase de análisis preliminares, un análisis epistemológico de actividades desarrolladas en contextos extra matemáticos (p. ej., ingenierías, topografía y siembra tradicional del café). Estos análisis permitieron proponer, con base en el esquema herbartiano, cuestiones generatrices relativas a la modelización matemática (mayormente relacionada con las formaciones), como se ilustra a continuación.

Primeramente, se presentan siete ejemplos de REI diseñados por profesores que participaron en los cursos REI-FP del CICATA-IPN, seleccionados para mostrar la diversidad de contextos y niveles educativos considerados. Dos REI fueron diseñados para la educación secundaria en Colombia (De la Hoz, 2020; Rodríguez-Mejía, 2021); uno para el bachillerato en México (Medina, 2018); un REI-FP para la formación del profesorado en Uruguay (Rey, 2016), y tres para la formación de ingenieros en México (Galindo, 2019; Guzmán, 2016; Silva, 2018). Estos REI se describen brevemente a

partir de su pregunta generatriz y se presentan siguiendo un orden ascendente en niveles educativos: secundaria, bachillerato y universidad.

El REI diseñado por De la Hoz (2020) se enfocó en la optimización de la siembra del café y se implementó en una escuela secundaria indígena arhuaca, en lengua arhuaca, aunque fue traducido al castellano para reportarse en la tesis, debido a una restricción de la comunidad. El otro REI, “Estimar el área del Llanito”, fue implementado en una secundaria multigrado rural y se diseñó con base en el análisis del levantamiento topográfico con cinta y de la geometría involucrada en esta actividad. El estudio de su pregunta generatriz —¿Cuál es la mayor superficie de área cultivable del lote El Llanito?— implicó una fase experimental. Los estudiantes hicieron el levantamiento con cinta del Llanito, terreno cercano a la escuela, generando un proceso de modelización que involucraba conocimientos topográficos y geométricos (Rodríguez-Mejía, 2021). El REI “La biblioteca de Babel” se basó en el análisis literario del cuento del mismo nombre, escrito por Borges, en el que aparece la idea del infinito. Su proceso de estudio, además de generar una actividad de modelización en el aula centrada en calcular el número total de libros en la biblioteca: $25^{1'312,000}$, permitió identificar y confrontar concepciones erróneas de estudiantes sobre el infinito (Medina et al., 2019). El REI-FP “Montaña rusa” diseñado por Rey (2016), en su tesis de maestría, codirigida por M. Bosch y A. Romo, para la formación del profesorado en Uruguay, involucró la derivada como herramienta de modelización matemática, y fue objeto de dos experimentaciones en el aula por futuras docentes que participaron en dicho REI-FP. Posteriormente, Rey se involucró en una investigación dedicada a la formación de formadores, creando un REI-FF (Rey et al., 2022), que constituyó un aporte muy novedoso. En las tesis de Guzmán (2016) y de Silva (2018) se analizaron cursos de teoría de control: en la primera se diseñó el REI “Control de velocidad proporcional de un motor de CD” (Guzmán et al., 2019) y en la segunda el REI “Desfibrilador de bajo costo”, centrado en la cuestión ¿Cómo construir un desfibrilador funcional y de bajo costo?, que fue implementado en un curso de ecuaciones diferenciales. Un ejemplo, muy singular de REI, fue el diseñado por Galindo (2019) en torno a la modelización de relaciones cuantitativas estructura-actividad (*Quantitative Structure-Activity Relationship, QSAR*), la cual, a pesar de su relevancia en la ingeniería química, no suele ser enseñada en las formaciones universitarias de México. Su singularidad radica en que varios REI-QSAR emergen de un conjunto de cuestiones generatrices, expresado por una cuestión que se componía de cuatro partes: 1) identificar el modelo validado para predecir una propiedad, 2) elegir una propiedad dentro de un abanico de posibilidades (p. ej. solubilidad, la presión del vapor), 3) elegir un grupo de sustancias (de alcoholes, de pesticidas) y 4) considerar su estructura. Se formulan, a manera de ejemplo, dos cuestiones generatrices: ¿cuál es el

modelo validado más adecuado para predecir la solubilidad de los alcoholes a partir de su estructura? O ¿cuál es el modelo validado más adecuado para predecir la presión del vapor de los alcoholes a partir de su estructura? Aunque estos REI no han sido experimentados todavía, se hizo un estudio de su viabilidad (Galindo et al., 2023).

Estas tesis de maestría mostraron la potencialidad de los REI para generar procesos de estudio, en los cuales la actividad de modelización matemática escolar fue moldeada por el contexto extra matemático en juego. Lo que llevó a incluir en los *medias* elementos como las lenguas indígenas, la comunidad indígena, un técnico-topógrafo rural, y en el *medio* definiciones específicas, por ejemplo, la optimización de área cultivable del café: sembrar el mayor número de plantas, sin sobreexplotar la tierra. Los trabajos de Rey et al. (2022) y de Galindo et al. (2023) muestran vías novedosas para incidir en la integración de la modelización en la formación de formadores y de ingenieros, respectivamente.

A partir de lo anterior, otros REI para la formación de ingenieros se diseñaron en CICATA-IPN. En Siero González et al. (2022) se analizó el diseño de un dispositivo de rehabilitación para la trombosis ventricular, que permitió proponer como cuestión generatriz: ¿Cómo construir un prototipo de rehabilitación de la trombosis venosa profunda para un usuario específico? En respuesta, un prototipo, realizado por un equipo de estudiantes de ingeniería en el curso de matemáticas aplicadas, fue utilizado por un profesor universitario afectado por trombosis, con lo que se logró, a partir de este proceso de modelización, satisfacer una necesidad real. Otros REI se diseñaron a partir del análisis de la separación ciega de fuentes y de cursos de álgebra lineal (Vázquez, 2017). Por ejemplo, el REI “Separación de tonos puros”, implementado en un curso de matemáticas de primer semestre en la modalidad en línea en una universidad colombiana (Ramírez-Sánchez et al., 2023), tuvo como cuestión generatriz: ¿Cómo se modela una mezcla de sonidos?, e implicó, para su estudio, proponer un medio didáctico inicial para esta modalidad, que requirió crear *medias* específicos, por ejemplo, aplicativos que simulaban mezclas de tonos puros y configuraciones geométricas entre micrófonos y grabadoras, los cuales jugaron un rol fundamental en la creación del medio y, por tanto, en el proceso de modelización de los estudiantes. En el REI “Análisis y separación de mezclas”, propuesto por Ramírez-Sánchez (2024) en su tesis doctoral, se aumentó la complejidad del estudio, proponiendo una mezcla de tres audios y la pregunta generatriz: ¿Cuál es el proceso matemático para separar sonidos de los audios?, así como tres cuestiones iniciales relativas al sonido y sus características, las herramientas para la separación y manipulación de señales, y la discretización de señales. Lo que llevó a considerar nuevas medias como *Jupyter* bajo el código de programación de Python para diseñar aplicativos que pudieran

integrarse al medio al permitir explorar y manipular señales mediante sus representaciones gráficas y auditivas e integrarlas al medio. Por su parte, Pablo et al. (2023) propusieron el REI “diseño de tuberías”, implementado en un curso de mecánica de fluidos, y surgido del análisis de un contexto de ingeniería civil, destacando el uso del modelo de Hazen-Williams en hidráulica.

Actualmente, en el Cinvestav, se realiza una tesis doctoral cuyo objetivo es diseñar un REI, a partir del análisis de una empresa mexicana integradora de proyectos. Los primeros análisis evidencian el proceso de modelización producido por un equipo de ingenieros para realizar una “tarea única”, para la cual no hay una técnica disponible en la empresa, que involucra el uso de la teoría de control y, por tanto, de ecuaciones diferenciales (Pérez-Sarmiento et al., 2024). Con base en este trabajo y en el de Silva (2018), y con el objetivo de abordar la segunda discontinuidad de Klein en torno a la enseñanza de ecuaciones diferenciales en la formación del profesorado en Honduras (Paz-Corrales et al., 2024), se diseñó el REI-FP “Caracterización de los componentes electrónicos de un desfibrilador” (Paz-Corrales et al., 2025). En la formación de investigadores, se diseñó un REI conformado por tres cursos de maestría, obligatorios, consecutivos y relacionados entre sí, enfocados en la educación matemática multilingüe y, más específicamente, en crear recursos didácticos multilingües para la enseñanza de las matemáticas en escuelas primarias indígenas mexicanas (Romo-Vázquez et al., 2025).

Perspectivas de futuro

La colaboración iniciada en 2013 entre las autoras de este trabajo contribuyó de forma significativa al desarrollo de la línea de investigación de la TAD que se inició con la tesis de Cirade (2006) y ha tenido un desarrollo importante hasta la fecha. La nueva propuesta de los REI-FP iniciada por el equipo español en 2010 y que se concretó en la tesis de Ruiz-Olarría (2015) halló en los cursos del CICATA-IPN un excelente ámbito de experimentación. De esta forma, la propuesta de los REI-FP pudo madurar y adaptarse a distintas modalidades de formación y de estudiantes, adquiriendo a la vez robustez y flexibilidad. Desde entonces, nuestras trayectorias académicas han comportado cambios de universidad y, con ellos, también cambios en las problemáticas de investigación que estamos abordando. Podemos considerar dos grandes líneas conectadas de trabajo futuro en las que se podrían contemplar nuevas colaboraciones que todavía no hemos iniciado.

La primera gran línea es la emprendida en la formación del profesorado a partir de los REI-FP. En la actualidad, estamos trabajando en tres grandes cuestiones. La primera es la de comparar los REI-FP con propuestas de formación basadas en otros enfoques o culturas didácticas. En particular, estamos llevando a cabo en colaboración con un equipo de investigadores

japoneses, un estudio sobre el papel que tienen las guías didácticas en los REI-FP en comparación con los “planes de clase” (*lesson plan*) en la cultura didáctica de Japón. La segunda cuestión es el desarrollo de los REI-FP en torno a otro tipo de cuestiones de la profesión docente más allá de la modelización matemática. El equipo de Barcelona ha trabajado sobre el caso de la estadística y el fenómeno de la invisibilidad del tratamiento de datos en la enseñanza secundaria actual (Verbisck et al., 2024), adaptando la propuesta de los REI-FP tanto para el caso en línea como presencial. Finalmente, consideramos fundamental seguir experimentando la propuesta de los REI-FP en distintos contextos institucionales y, particularmente, en el caso de la formación continua del profesorado de todos los niveles educativos, desde la educación infantil y primaria hasta la universidad.

La segunda línea de investigación en la que trabajamos los dos equipos desde hace años, pero de forma independiente, es el diseño, experimentación y análisis de REI para la enseñanza universitaria de las matemáticas. Desde el trabajo pionero de Barquero (2009), tanto el equipo mexicano como el español han estado diseñando y estudiando distintas propuestas para la enseñanza de las matemáticas en la formación de ingenieros. Teniendo en cuenta las experimentaciones realizadas y la variedad de contextos considerados, sería interesante recopilar las experiencias llevadas a cabo en los dos países para identificar el tipo de infraestructuras matemáticas y didácticas que se han elaborado para su implementación, así como las restricciones que han dificultado su evolución e integración como modalidad de estudio normalizada. En la actualidad, el equipo español trabaja en un proyecto de transferencia de los REI a la enseñanza secundaria y universitaria, el proyecto LABINQUIRY (<https://www.ub.edu/labinquiry/>), cuyo objetivo es la difusión de la infraestructura necesaria para la implementación de los REI por parte del profesorado de ambos niveles educativos.

Las colaboraciones en materia de investigación requieren de buenas sinergias de trabajo y la construcción de estrategias compartidas de investigación que no surgen de forma espontánea. El marco de la TAD fue clave en esta construcción. Partir los dos equipos de los mismos principios y asunciones fundamentales nos permitió consensuar muy rápidamente la problemática de investigación y las metodologías para abordarla. La ampliación que supuso la colaboración en términos del marco empírico que pudimos considerar ha sido enorme y muy fructífera. Esperemos que pueda dar los mismos frutos en un futuro próximo.

Agradecimientos

Esta investigación ha sido realizada con fondos del proyecto EDU-Paradigms (PID2021-126717NB-C31) financiado por MICIU/AEI/10.13039/501100011033/ y por FEDER, UE.

Referencias

- Artigue, M. (2014). Didactic engineering in mathematics education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 159–162). Springer.
- Barquero, B. (2009). *Ecología de la Modelización Matemática en la enseñanza universitaria de las Matemáticas* [Tesis doctoral, Universitat Autònoma de Barcelona (España)]. <http://hdl.handle.net/10803/3110>
- Barquero, B. (2023). La modelización matemática en la formación del profesorado: experiencias con los REI-FP para educación Primaria. *Revista Interuniversitaria de Formación del profesorado*, 98(37.2), 165–186. <https://doi.org/qhfb>
- Barquero, B., Bosch, M., & Romo-Vázquez, A. (2018). Mathematical modelling in teacher education: dealing with institutional constraints. *ZDM–Mathematics Education*, 50(1), 31–43. <https://doi.org/10.1007/s11858-017-0907-z>
- Barquero, B., Bosch, M., & Romo-Vázquez, A. (2019). El uso del esquema herbartiano para analizar un REI online para la formación del profesorado de secundaria. *Educação Matemática Pesquisa*, 21(4), 493–509. <https://doi.org/10.23925/1983-3156.2019v21i4p493-509>
- Barquero, B., Bosch, M., & Florensa, I. (2022). Contribuciones de los recorridos de estudio e investigación en la universidad: el caso de la formación del profesorado. *AIEM - Avances de investigación en educación matemática*, 21, 87–106. <https://doi.org/10.35763/aiem21.4232>
- Barquero, B., & Ferrando, I. (2024). Teacher education for mathematical modelling: exploring the experiences of secondary school teachers in two courses. *ZDM–Mathematics Education*, 56(6), 1109–1122. <https://doi.org/10.1007/s11858-024-01609-4>
- Bosch, M., & Gascón, J. (2009). Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico a la formación del profesorado de matemáticas de Secundaria. En M. J. González-López, M. T. González-Astudillo, & J. Murillo-Ramón (Eds.), *Investigación en educación matemática XIII* (pp. 89–114). SEIEM.
- Brousseau, G., Brousseau, N., & Warfield, V. (2002). An experiment on the teaching of statistics and probability. *The Journal of Mathematical Behavior*, 20(3), 363–411. [https://doi.org/10.1016/S0732-3123\(02\)00078-0](https://doi.org/10.1016/S0732-3123(02)00078-0)
- Chevallard, Y. (2013). Enseñar Matemáticas en la Sociedad de Mañana: Alegato a Favor de un Contraparadigma Emergente. *REDIMAT - Journal of Research in Mathematics Education*, 2(2), 161–182. <https://doi.org/10.4471/redimat.2013.26>
- Chevallard, Y., & Cirade, G. (2009). Pour une formation professionnelle d'université. Éléments d'une problématique de rupture. *Recherche et formation*, 60, 51–62. <https://doi.org/10.4000/rechercheformation.584>
- Cirade, G. (2006). *Devenir professeur de mathématiques: entre problèmes de la profession et formation en IUFM. Les mathématiques comme problème professionnel* [Tesis doctoral, Université d'Aix-Marseille (Francia)]. <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00120709/fr/>

- De la Hoz, E. (2020). *La siembra tradicional del café de la comunidad indígena Arhuaca en la enseñanza de las matemáticas escolares en los grados de 9° educación básica secundaria, 10° y 11° educación media* [Tesis de maestría] CICATA-IPN, México.
- Dorier, J. L., & García, F. J. (2013). Challenges and opportunities for the implementation of inquiry-based learning in day-to-day teaching. *ZDM—Mathematics Education*, 45(6), 837–849. <https://doi.org/10.1007/s11858-013-0512-8>
- Esteve, J. M. (1998). La aventura de ser maestro. *Cuadernos de pedagogía*, 266, 46–50.
- Galindo, N. (2019). *Diseño de una unidad de aprendizaje sobre Relaciones Cuantitativas de Estructura–Actividad (QSAR) en la carrera de ingeniería química* [Tesis de maestría no publicada]. CICATA-IPN, México.
- Galindo, N., Romo-Vázquez, A., & Barroso, J. (2023). Diseño y viabilidad de recursos para enseñar la modelización QSAR en ingeniería química. *Enseñanza de las Ciencias*, 41(2), 93–115. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.5645>
- García, J. (2005). *La modelización como herramienta de articulación de la matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales* [Tesis doctoral]. Universidad de Jaén.
- García, F. J., Barquero, B., Florensa, I., & Bosch, M. (2019). Diseño de tareas en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 15, 75–94. <https://doi.org/10.35763/aiem.v0i15.267>
- Granell, C., & Barquero, B. (2019). Experiència amb un recorregut d'estudi i investigació sobre la inferència estadística a l'educació primària. Què s'amaga dins l'ampolla? *Noubiaix*, 44, 54–69.
- Guzmán, P. (2016). *Propuesta didáctica de modelación matemática que involucra ecuaciones diferenciales para una formación de futuros ingenieros* [Tesis de maestría]. CICATA-IPN, México.
- Guzmán, P., Covián, O., & Romo-Vázquez, A. (2019). Diseño de una actividad didáctica para un curso de control automático basada en modelización matemática. Una propuesta desde la teoría antropológica de lo didáctico. *Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*, 21(4), 412–430. <https://doi.org/g7r9bh>
- Hakamata, R., Fukuda, H., Otani, H., Otaki, K., Barquero, B., & Bosch, M. (2024). Potential of Brousseau's guessing game in teacher education: two complementary cases. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 1–21. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2024.2321587>
- Lucas, C. (2015). *Una posible “razón de ser” del cálculo diferencial elemental en el ámbito de la modelización funcional* [Tesis doctoral]. Universidad de Vigo, España.
- Medina, L. (2018). *Un diseño didáctico que relaciona literatura y matemáticas en el nivel bachillerato* [Tesis de maestría]. CICATA-IPN, México.

- Medina, L., Romo-Vázquez, A., & Aguilar, M.S. (2019). Using the work of Jorge Luis Borges to identify and confront students' misconceptions about infinity. *Journal of Mathematics and the Arts*, 13(1-2), 48–59. <https://doi.org/10.1080/17513472.2018.1504270>
- Pablo, E., Romo-Vázquez, A., & Sánchez-Aguilar, M. (2023). A redesign of a mathematical modelling teaching proposal based on the Hazen-Williams model for engineering education. *Rivista di Matematica della Università di Parma*, 14, 299–315.
- Paz-Corrales, M., Romo-Vázquez, A. Moreno-Armella, L. M., & Pérez-Sarmiento, M. (2024). A path for addressing Klein's second discontinuity: Interplay between precision and approximation mathematics. The case of differential equations as mathematical models. En A. S. González-Martín, G. Gueudet, I. Florensa, & N. Lombard (Eds.), *Proceedings of INDRUM 5* (pp. 533–534). EUSS, INDRUM y ERME.
- Paz-Corrales, L. M., Pérez-Sarmiento, M. M., & Romo-Vázquez, A. (2025). Diseño de una propuesta didáctica de modelización matemática para la formación de futuros docentes. En A. Solares-Rojas, & A. P. Preciado Babb (Eds.), *La investigación en modelización matemática: un diálogo entre educadores de Latinoamérica y España* (pp. 1–26). Editorial SOMIDEM
- Pérez-Sarmiento, M., Romo-Vázquez, A., & Paz-Corrales, M. (2024). The mathematical modelling in industry: the case of controller design. En A. S. González-Martín, G. Gueudet, I. Florensa, & N. Lombard (Eds.), *Proceedings of INDRUM 5* (pp. 533–534). EUSS, INDRUM y ERME.
- Ramírez-Sánchez, C., Romo-Vázquez, A., Romo-Vázquez, R., & Velásquez-Rojas, D. (2023). Study of Modeling Questions in a First-Year University Mathematics Online Course. *Educational Studies in Mathematics*, 114(3), 503–524. <https://doi.org/10.1007/s10649-023-10261-w>
- Ramírez-Sánchez, C. (2024) *Diseño de una actividad didáctica de modelización matemática para la formación de futuros ingenieros. El caso de la separación ciega de fuentes* [Tesis doctoral no publicada]. CICATA-IPN, México.
- Rey, M. (2016). *Propuesta didáctica para la formación del profesorado: el caso de la derivada como herramienta de modelización matemática* [Tesis de maestría no publicada]. CICATA-IPN, México.
- Rey, M., Romo-Vázquez, A., & Ochoviet, C. (2022). Os percursos de estudo e de pesquisa para a formação de formadores, gênese e caracterização: um estudo de caso. En S. Ag Almouloud, R. Borges, L. M. Santos, A. Henriques, & J. M. Viana (Eds.), *Percursos de estudo e pesquisa à luz da teoria antropológica do didático. Fundamentos teórico-metodológicos para a formação* (pp. 323–350). Editora CRV. <https://www.editoracrv.com.br/livrosdigitais/pdf/viewer.html>
- Rodríguez-Quintana, E. (2005). *Metacognición, resolución de problemas y enseñanza de las matemáticas. Una propuesta integradora desde el enfoque antropológico* [Tesis doctoral, Universidad Complutense de Madrid]. <https://hdl.handle.net/20.500.14352/56054>

- Rodríguez-Mejía, M. (2021). *Propuesta didáctica basada en modelización matemática para el aula multigrado, el caso de la topografía* [Tesis de maestría]. CICATA-IPN, México.
- Romo-Vázquez, A., Barquero, B., & Bosch, M. (2016). Study and research paths in online teacher professional development. En E. Nardi, C. Winsløw, & T. Hausberger (Eds.), *Proceedings of the First Conference of the INDRUM* (pp. 400–410). University of Montpellier y INDRUM. <https://hal.science/hal-01337881/document>
- Romo-Vázquez, A., Barquero, B., & Bosch, M. (2019). El desarrollo profesional online de profesores de matemáticas en activo: una unidad de aprendizaje sobre la enseñanza de la modelización matemática. *Uni-Pluriversidad*, 19(2), 161–183. <https://doi.org/10.17533/udea.unipluri.19.2.09>
- Romo-Vázquez, A., Barquero, B., & Bosch, M. (2020). La profesionalización docente en la modalidad online y la implementación de REI: aciertos y desafíos. *Educação Matemática Pesquisa Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*, 22(4), 772–786. <https://doi.org/10.23925/1983-3156.2020v22i4p772-786>
- Romo-Vázquez, A., Poisard, C., & Sandoval, I. (2025). Multilingual Mathematics Education: an analysis of a Mexican research-based Master's degree course developed in the Questioning the World Paradigm. *ZDM Mathematics Education* 57, 1425–1438. <https://doi.org/10.1007/s11858-025-01752-6>
- Ruiz-Olarría, A. (2015). *La formación matemático-didáctica del profesorado de secundaria. De las matemáticas por enseñar a las matemáticas para la enseñanza* [Tesis doctoral. Universidad Autónoma de Madrid, España]. <https://repositorio.uam.es/handle/10486/665889>
- Serrano, L. (2013). *La modelización matemática en los estudios universitarios de economía y empresa: análisis ecológico y propuesta didáctica* [Tesis doctoral. Universitat Ramon Llull (España)]. <http://hdl.handle.net/10803/101204>
- Siero González, L. R., Echavarría Cepeda, L. A., Romo-Vázquez, A., & Navarro Torres, J. (2022). Design of a rehabilitation device for thrombosis: a mathematical modelling activity in the training of engineers. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 21, 107–134. <https://doi.org/10.1016/j.aie.2022.100000>
- Sierra, T. (2006). *Lo matemático en el diseño y análisis de organizaciones didácticas los sistemas de numeración y la medida de magnitudes* [Tesis doctoral, Universidad Complutense de Madrid, España]. <https://hdl.handle.net/20.500.14352/56171>
- Silva, L. T. (2018). *El diseño de un desfibrilador: una actividad de modelización matemática para la formación de ingenieros* [Tesis de Maestría, Instituto Politécnico Nacional, México]. Repositorio institucional. <https://bit.ly/3PLz7PC>
- Vázquez, R. (2017). *Diseño de actividades didácticas basadas en modelización para la formación matemática de futuros ingenieros* [Tesis doctoral no publicada]. CICATA-IPN, México.

Verbisck, J., Bittar, M., Barquero, B., & Bosch, M. (2024). Addressing Water Scarcity Through Statistical Inquiry in Teacher Education. *Statistics Education Research Journal*, 23(2). <https://doi.org/10.52041/serj.v23i2.722>

Desarrollo de dos agendas de investigación en el marco del enfoque Ontosemiótico

Development of two research agendas within the framework of the Ontosemiototic approach

Lilia P. Aké ¹ 

Juan D. Godino ² 

Luis R. Pino-Fan ³ 

Resumen

Describimos una colaboración académica e investigativa sobre el desarrollo de dos líneas de investigación y, de forma paralela, la formación y consolidación como investigadores de dos profesores de matemáticas mexicanos en el seno de los programas de maestría y doctorado en Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. La primera línea, trabajada por Lilia Aké, versó sobre la formación de profesores en razonamiento algebraico; y la segunda, a cargo de Luis Pino-Fan, se centró en la formación de profesores sobre la derivada. Ambos investigadores en formación estuvieron adscritos al grupo de investigación Teoría de la Educación Matemática y Educación Estadística, de la Universidad de Granada y fueron colaboradores científicos de varios proyectos de investigación sobre formación de profesores de matemáticas. El trabajo realizado dio lugar a dos líneas de investigación dentro del sistema teórico del Enfoque Ontosemiótico con publicaciones de alto impacto.

¹ lake86@gmail.com

Universidad Autónoma de Querétaro (SOMIDEM)

² jdgodino@gmail.com

Universidad de Granada (SEIEM)

³ luis.pino@unison.mx

Universidad de Sonora (SOMIDEM)

Palabras clave

Formación de investigadores, enfoque ontosemiótico, razonamiento algebraico, formación de profesores.

Abstract

We describe an academic and research collaboration on developing two lines of research and, in parallel, training and consolidation as researchers of two Mexican mathematics teachers in the master's and doctoral programs in Didactics of Mathematics at the University of Granada. The first line, in which Lilia Aké worked, dealt with the training of teachers in algebraic reasoning; and the second, in charge of Luis Pino-Fan, focused on training teachers in the derivative. Both researchers were assigned to the research group Theory of Mathematics Education and Statistical Education at the University of Granada and were scientific collaborators in several research projects on mathematics teacher education. The work carried out resulted in two lines of research within the theoretical system of the Ontosemiotic Approach with high-impact publications.

Keywords

Research training, ontosemiotic approach, algebraic reasoning, teacher education.

Introducción

En este trabajo describimos una historia de colaboración entre España y México centrada, inicialmente, en la formación como investigadores en educación matemática de dos jóvenes profesores de matemáticas mexicanos. Tras la realización de las tesis doctorales, se continuó la colaboración mediante la publicación de diversos artículos científicos en revistas de alto impacto, dando lugar a la consolidación de dos líneas de investigación relevantes en Didáctica de la Matemática. Estas líneas, desarrolladas en el marco del Enfoque Ontosemiótico en Educación Matemática (EOS) (Godino & Batanero, 1994; Godino, 2024), representan aportaciones significativas tanto en el ámbito teórico como en el práctico.

La colaboración comienza en junio de 2008, cuando Lilia Aké y Luis Pino-Fan terminaron sus estudios de licenciatura en la Universidad Autónoma de Yucatán y solicitaron una beca del Programa MAEC-AECID (Ministerio de Asuntos Exteriores y Cooperación y Agencia Española de Cooperación Internacional para el Desarrollo, Gobierno de España) para la realización de estudios de posgrado en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Dichas becas fueron concedidas y en otoño de 2009 se inscribieron en el máster de Didáctica de la Matemática, como un primer paso en su formación doctoral.

Los cursos de fundamentación teórica y metodológica del programa de doctorado en Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Granada, iniciado en 1988, fueron articulados en el curso 2007-2008 como un programa de máster en dicha especialidad. Por tanto, los estudios y actividad

de investigación realizados por L. Aké y L. Pino-Fan en su primer año de estancia en Granada les permitieron obtener el título de máster en Didáctica de las Matemáticas e hizo posible su inscripción en el programa de doctorado. La dirección de los trabajos de investigación fue asignada por el Departamento de Didáctica de la Matemática al Dr. Juan D. Godino, con la colaboración como codirector del Dr. V. Font (Universidad de Barcelona) para el caso de la tesis de L. Pino-Fan. Las tesis fueron defendidas en mayo de 2013 (L. Pino-Fan) y en noviembre de 2013 (L. Aké).

Las investigaciones fueron desarrolladas en el seno del grupo FQM-126 del Plan Andaluz de Investigación de la Junta de Andalucía, “Teoría de la Educación Matemática y Educación Estadística”, en el marco de los proyectos de investigación sobre formación de profesores, SEJ2007-60110/EDUC, MEC-FEDER, EDU2010-14947, Ministerio de Ciencia e Innovación (MICINN), EDU2012-31869, Ministerio de Economía y Competitividad (MEC) y EDU 2009-08120/EDUC. La participación en estos proyectos y la interacción con otros estudiantes y doctores formados en el programa permitieron a L. Aké y L. Pino-Fan ampliar sus horizontes de colaboración.

En los apartados que siguen se describe el tipo de formación teórica y metodológica que recibieron los estudiantes y los proyectos de doctorado que dieron origen a la colaboración. Posteriormente, se presentan las líneas de investigación que surgieron con el desarrollo de los proyectos de tesis doctorales y que se reflejan en las publicaciones desarrolladas colaborativamente durante la etapa de formación doctoral. Asimismo, se describen los trabajos realizados en años posteriores a los estudios de doctorado y su impacto en las líneas de investigación correspondientes. En un último apartado se analiza el tipo de colaboración realizada en este caso específico.

Programa de formación de investigadores y tesis doctorales

El programa de formación del máster en Didáctica de las Matemáticas en el que participaron L. Aké y L. Pino-Fan y con el que se dio origen a la colaboración, incluía cuatro módulos:

- I. Metodología de investigación (formación general en investigación educativa, aplicada a la educación matemática).
- II. Cursos transversales (orientados a situar la educación matemática en una perspectiva general como campo de investigación; problemas comunes a varios bloques temáticos).
- III. Cursos especializados (estudio didáctico de campos matemáticos especializados, tales como la estadística, probabilidad, pensamiento numérico y algebraico, geometría).
- IV. Trabajo de investigación integrado en una de las líneas de investigación del Departamento (Trabajo final de Máster).

Como competencias transversales en los diferentes cursos figuran:

1. Analizar críticamente la literatura científica en Didáctica de la Matemática.
2. Buscar fuentes bibliográficas, así como analizar y organizar la literatura existente sobre temas específicos relacionados con la Didáctica de la Matemática.
3. Adquirir o mejorar las habilidades de exposición oral y escrita de trabajos teóricos y de investigación.
4. Aplicar los conocimientos adquiridos a la práctica en: a) la investigación propia de la Didáctica de las Matemáticas; b) el ámbito de la enseñanza de las matemáticas.
5. Fomentar el espíritu crítico, reflexivo y emprendedor.

La línea de Teoría y Métodos de Investigación en Educación Matemática, a la cual se adscribieron L. Aké y L. Pino-Fan, estaba centrada en el desarrollo y aplicación del EOS en distintas áreas de contenido matemático de los diferentes niveles educativos. Dentro de dicha línea, J. D. Godino impartía el curso de Teoría de la Educación Matemática, en el cual los estudiantes recibían información sobre el marco teórico del EOS, como un sistema teórico integrador para la investigación en didáctica de la matemática. En cuanto a las competencias específicas del curso Teoría de la Educación Matemática figuraban:

- 1) Analizar y sintetizar los principales paradigmas y líneas de investigación en Didáctica de las Matemáticas
- 2) Analizar y sintetizar los fundamentos teóricos de la cognición e instrucción matemática.
- 3) Aplicar los conocimientos sobre marcos teóricos usados en educación matemática al análisis didáctico de experiencias de enseñanza / aprendizaje.
- 4) Comprender y valorar el papel de los marcos teóricos en el planteamiento de problemas específicos de investigación.

Tanto L. Aké como L. Pino-Fan realizaron estancias de investigación de tres meses en el CINVESTAV (Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México), lo que les permitió que su doctorado tuviera la mención de doctorado internacional.

Proyecto de investigación doctoral L. Aké

El proyecto de investigación doctoral de L. Aké, titulado *Evaluación y desarrollo del razonamiento algebraico elemental en maestros en formación* (Aké, 2013), se centró en el razonamiento algebraico y la formación de profesores de educación primaria. El objetivo general era evaluar el conocimiento didáctico-matemático que los futuros maestros de educación primaria tienen

sobre el razonamiento algebraico propio de los primeros niveles educativos. Se pretendía aportar nuevos conocimientos, recursos teóricos y metodológicos que permitieran la evaluación de tal conocimiento.

Así mismo, se propuso investigar el desarrollo de conocimientos sobre el álgebra y su didáctica en la formación inicial de maestros. Mediante el diseño de propuestas instruccionales, se pretendía ofrecer oportunidades de formación a los futuros maestros, para que reconocieran y promovieran el razonamiento algebraico en los escolares. Se formularon los siguientes objetivos específicos:

1. Caracterizar el conocimiento didáctico-matemático que requiere el profesor de primaria para el desarrollo de procesos de instrucción eficaces que le permitan promover el desarrollo del razonamiento algebraico en sus estudiantes. Esto requiere sintetizar las investigaciones realizadas en el campo de la Didáctica de la Matemática sobre la inclusión del razonamiento algebraico en la escuela primaria. Se tienen en cuenta las facetas epistémica, cognitiva, afectiva, instruccional y ecológica que intervienen en los procesos de enseñanza y aprendizaje del álgebra para caracterizar el razonamiento algebraico elemental.
2. Diseñar instrumentos para evaluar el conocimiento didáctico-matemático de maestros en formación sobre la enseñanza y el aprendizaje de contenidos relativos a la aritmética, medida y geometría.
3. Aplicar los instrumentos elaborados para valorar los conocimientos didáctico-matemáticos de muestras intencionales de futuros profesores de educación primaria sobre el razonamiento algebraico elemental.
4. Diseñar, implementar y evaluar experiencias formativas que promuevan el desarrollo del conocimiento didáctico-matemático en el campo del álgebra.

Considerando esos objetivos, la tesis doctoral de L. Aké abordó una problemática educativa utilizando las herramientas teóricas que proporciona el EOS, las cuales permitieron proponer una conceptualización del álgebra escolar y aplicarla a la formación de profesores de educación primaria. Por un lado, la conceptualización del álgebra escolar está basada en el reconocimiento de distintos niveles de algebrización de la actividad matemática, entendiendo el desarrollo del razonamiento algebraico a través de diversas tipologías de tareas de carácter estructural y funcional.

Por otro lado, el trabajo con los estudiantes de magisterio fue articulado a través de un proceso formativo en un curso sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. A lo largo de este proceso formativo se desarrollaron y evaluaron las competencias de los futuros maestros, tanto en la resolución de tareas de índole algebraica, como en la identificación de objetos algebraicos y la asignación de niveles de algebrización a las actividades matemáticas escolares.

Proyecto de investigación doctoral L. Pino-Fan

El proyecto de investigación doctoral de L. Pino-Fan, titulado “Evaluación de la faceta epistémica del conocimiento didáctico matemático de futuros profesores de bachillerato sobre la derivada” (Pino-Fan, 2013), se centró en el conocimiento de profesores de bachillerato para la enseñanza y el aprendizaje de la derivada. El objetivo general consistió en aportar nuevos conocimientos y recursos teóricos y metodológicos que permitan la evaluación del conocimiento didáctico-matemático de los profesores de secundaria y bachillerato en formación inicial, para la enseñanza de la derivada. Asimismo, se trató de analizar cómo desarrollar el conocimiento didáctico-matemático para la enseñanza idónea del objeto derivada en los futuros profesores de bachillerato, mediante el diseño de propuestas instruccionales, que favorecieran dicho desarrollo. En este sentido, el proyecto de investigación se centró, básicamente, en la consecución de los siguientes objetivos específicos:

1. Identificar y caracterizar, a partir de las investigaciones que se tienen en el campo de la Didáctica de la Matemática respecto a la noción derivada, el conocimiento didáctico-matemático que requiere el profesor de secundaria/bachillerato para desarrollar procesos de instrucción eficaces para la enseñanza de la derivada. Esto se hace mediante el análisis y descripción de las configuraciones asociadas a las distintas facetas (epistémica-ecológica, cognitiva e instruccional) que propone el EOS para caracterizar dicho conocimiento didáctico-matemático.
2. Diseñar instrumentos que permitan evaluar el conocimiento didáctico-matemático de los profesores de secundaria/bachillerato en formación inicial y permanente sobre la derivada.
3. Caracterizar, mediante la aplicación de los instrumentos de evaluación desarrollados, el conocimiento didáctico-matemático de los profesores de secundaria/bachillerato en formación inicial sobre la derivada.
4. Diseñar, implementar y evaluar experiencias de formación que promuevan y mejoren el desarrollo del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada de los profesores de secundaria/bachillerato en formación inicial.

Es importante destacar que esta tesis doctoral, especialmente en sus reflexiones finales, sembró las primeras semillas de lo que posteriormente se consolidaría como la segunda línea de investigación, descrita en este capítulo, sobre el conocimiento didáctico-matemático del profesorado, hoy firmemente integrada en el seno del EOS.

Líneas de investigación desarrolladas en el marco del EOS

La realización de los trabajos doctorales permitió potenciar dos líneas de investigación enmarcadas en la formación del profesorado. Segui-

damente describimos la motivación y resultados obtenidos en cada una de ellas.

Línea 1: razonamiento algebraico elemental en maestros en formación

Esta línea de investigación tiene como objetivo caracterizar y evaluar el conocimiento didáctico-matemático necesario para que los maestros de primaria puedan fomentar el razonamiento algebraico en sus estudiantes. Se abordan cuestiones como los niveles de algebrización de la actividad matemática escolar, el diseño de instrumentos de evaluación y la implementación de experiencias formativas para mejorar la enseñanza del álgebra en los niveles iniciales.

Motivación

Diversas perspectivas teóricas e investigaciones apoyan la introducción de contenidos algebraicos en el currículo de la escuela elemental (Cai & Knuth, 2011; Carraher & Schliemann, 2007; Kieran, 2007). Sin embargo, esta misma diversidad, tal y como lo señalan Kaput y Blanton (2000), es una de las razones por las que tales innovaciones han tenido dificultades para su implantación. Por tanto, se reconoce que no se tiene una posición suficientemente explícita de lo que se podría considerar como álgebra en los primeros grados (Kaput, 2008). Esta situación nos llevó a plantear como primera pregunta de investigación,

¿Cuáles son los rasgos característicos del razonamiento algebraico elemental que permiten discriminar diversos niveles de algebrización, en particular distinguir las prácticas de índole algebraica de las que no lo son?

En consecuencia, el primer problema que abordamos en la tesis doctoral es la clarificación del significado del álgebra, reconociendo de entrada una pluralidad de significados del objeto según los marcos institucionales y contextos de uso. En nuestro caso, fijamos la atención en el uso del álgebra en educación primaria, lo que en la literatura anglosajona se describe como “álgebra temprana” (early algebra), y que nosotros designamos como Razonamiento Algebraico Elemental (RAE). Tras el estudio sistemático de la bibliografía correspondiente consideramos necesario tomar una posición sobre la naturaleza del RAE, usando las herramientas teóricas que proporciona el EOS, lo que nos permitió proponer una manera de conceptualizar el razonamiento algebraico.

Una vez clarificada la naturaleza del RAE, su introducción efectiva en la escuela primaria, como proponen diversos autores (Blanton & Kaput, 2011; Kieran 2007) y propuestas curriculares (NCTM, 2000), requiere como condición crítica la formación de los profesores. Con relación a esta problemática nos planteamos otra cuestión de carácter evaluativo que formulamos en los siguientes términos:

¿Qué conocimientos, incluyendo comprensión y competencia, tienen los maestros en formación inicial sobre el RAE?

Esta cuestión se interpreta en el marco del EOS como un estudio de evaluación de significados personales de estudiantes de magisterio sobre un objeto matemático, en nuestro caso el álgebra elemental.

Una vez detectadas las necesidades formativas de los futuros maestros sobre el RAE, abordamos el problema de elaborar diseños instruccionales que promuevan la evolución de los significados personales de los estudiantes en la dirección previamente identificada, esto es, nos preguntamos,

¿Qué tipo de acciones formativas sería necesario (y posible) implementar en un programa de formación inicial de maestros de primaria para desarrollar en ellos el sentido algebraico?

En relación con este problema planteamos el diseño, implementación y evaluación de una experiencia formativa de un grupo de futuros profesores de educación primaria que contempla, en el marco de un curso sobre “enseñanza y aprendizaje de las matemáticas de educación primaria”, la evolución de los significados personales de los estudiantes sobre el RAE.

Resultados

Uno de los principales aportes que se derivan de la tesis de L. Aké es la conceptualización del RAE basada en niveles de algebrización articulados desde el EOS. Dada la falta de consenso sobre el significado del álgebra en los niveles elementales, nuestra propuesta imbrica las diferentes caracterizaciones realizadas desde las investigaciones con las herramientas del EOS proporcionando un significado de referencia del mismo. Esto supone un avance en el esclarecimiento de la naturaleza del álgebra en la escuela elemental.

Otro de los aportes es la evaluación sobre el RAE realizada con maestros en formación de México, dada la inexistencia de este contenido en el currículo español. Contar con un marco de referencia sobre los conocimientos de futuros docentes que están familiarizados con el álgebra en la escuela primaria, aporta conocimientos sobre los significados personales de los estudiantes respecto al mismo. Los resultados suponen que, aunque se integra en el plan de estudios de la licenciatura en educación primaria una asignatura sobre el álgebra (su enseñanza y aprendizaje), los futuros docentes mexicanos manifiestan dificultades en la resolución de problemas de índole algebraica. Los maestros en formación aún identifican el álgebra con la manipulación simbólica y el uso exclusivo de letras. Por ello, hacer frente a la reforma educativa de la educación básica en México —que integra desde 2009 un enfoque sobre resolución de problemas en el que se incluye el sentido numérico y pensamiento algebraico para los niños— implica un reto para los futuros maestros.

En esta misma línea sobre formación de profesores, consideramos como otra aportación del trabajo, la implementación de un proceso formativo que contempla el desarrollo del RAE y cuya finalidad es brindar a los maestros en formación oportunidades para desarrollar competencias de análisis para la identificación de rasgos algebraicos en la actividad matemática escolar. Proporcionar pautas a los maestros en formación para la identificación de niveles de algebrización en la práctica matemática supone avances para la integración de la propuesta en las aulas de la escuela elemental.

El diseño de tareas específicas incluidas en el cuestionario desarrollado —en cuya estructura se pone de manifiesto nuestra conceptualización del RAE integrada al modelo de conocimiento del profesor propuesto por Godino (2009)— aporta información cruzada respecto a dos tópicos de creciente interés en la comunidad de investigadores. La pretensión de hacer operativo nuestro enfoque sobre el álgebra incorporado a la noción del conocimiento didáctico-matemático constituye un aporte, tanto en el campo de formación de profesores como en el campo de didáctica del álgebra.

Durante esta etapa de formación, los avances del trabajo doctoral fueron presentados en foros como el CERME (Congress of the European Society for Research in Mathematics Education), el PME (Psychology of Mathematics Education) y la SEIEM (Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática), así como en grupos de trabajo del Departamento del CINVESTAV en México. Se publicaron artículos que contribuyeron a la consolidación de la conceptualización operativa del álgebra escolar basada en niveles de algebrización.

En este contexto, el artículo sobre la *naturaleza del álgebra escolar* (Godino et al., 2012) representó el primer paso para una conceptualización del razonamiento algebraico a nivel de educación primaria basada en la intervención de procesos de generalización, simbolización y objetos algebraicos. Este trabajo propone la interpretación del álgebra escolar articulada en niveles de desarrollo y pone de manifiesto la importancia de fortalecer la formación docente con herramientas conceptuales para fomentar el razonamiento algebraico en edades tempranas.

En el manuscrito *Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros* (Godino et al., 2014), la propuesta de niveles de algebrización se consolida y se definen cuatro niveles (nivel 0, nivel 1, nivel 2 y nivel 3) basados en tipos de objetos, transformaciones y lenguaje que permiten distinguir un nivel de otro. De esta manera, se plantea que el uso de lenguaje simbólico-literal y la operación analítica-sintáctica con este lenguaje son requisitos para asignar un nivel propiamente algebraico (nivel 3) a una práctica matemática. La investigación manifiesta la importancia de diseñar tareas adecuadas para promover el pensamiento algebraico en las primeras edades y la necesidad de que los docentes de primaria, tanto

en ejercicio como en formación, comprendan la naturaleza gradual del pensamiento algebraico.

A partir de la definición de los niveles de algebrización, el artículo *Ingeniería didáctica para desarrollar el sentido algebraico de maestros en formación* (Aké et al., 2014) aporta un diseño de intervención formativa sustentada en la ingeniería didáctica interpretada desde el EOS, cuya finalidad fue el fomento del reconocimiento de niveles de algebrización en futuros maestros de primaria. Este estudio evidenció que la asignación de niveles de algebrización es compleja y requiere mayor tiempo de formación, pero también confirmó la pertinencia de trabajar con contenidos algebraicos en la formación de maestros. Uno de los aportes sustanciales de esta línea de investigación se encuentra en el artículo *Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemiótica y antropológica* (Godino, Neto et al., 2015) en el que el modelo de niveles de algebrización se amplía al incorporar niveles orientados al álgebra escolar de secundaria. Además, se evidencia cómo los niveles de algebrización propuestos para la educación primaria y secundaria, articulados desde el EOS, son coherentes con las etapas de algebrización propuestas desde la TAD (Teoría Antropológica de lo Didáctico). En el Anexo 1 incluimos la relación de las principales publicaciones realizadas, indicando el número de citas según Google Académico.

Línea 2: conocimiento didáctico-matemático del profesorado

Esta línea, inicialmente, se centró en la evaluación y desarrollo del conocimiento didáctico-matemático relacionado con la enseñanza de la derivada. A través del análisis de configuraciones epistémicas, cognitivas e instruccionales, se identificaron los desafíos que enfrentan los profesores en formación al trabajar este contenido matemático clave, proponiendo metodologías y recursos específicos para su enseñanza. Sin embargo, en la actualidad, con base en las colaboraciones entre Luis Pino-Fan, Juan D. Godino, Vicenç Font, entre otros investigadores del equipo, integrantes de la SEIEM y SOMIDEM, se ha logrado consolidar una línea de investigación robusta sobre conocimientos y competencias del profesorado de matemáticas.

Motivación

El estudio sobre los conocimientos que debe tener un profesor de matemáticas para que su enseñanza sea idónea ha ido tomando un creciente interés en los últimos años (Ball & Even, 2008; Chapman, 2020; Wood, 2008). Sin embargo, son pocas las investigaciones orientadas al diseño de instrumentos que permitan explorar y caracterizar el conocimiento didáctico-matemático de los profesores sobre tópicos específicos. En la investigación inicial, producto de la tesis doctoral, se informa de los resultados obtenidos mediante la aplicación de un cuestionario que se diseñó teniendo en cuenta

el inicio de un modelo específico denominado “Conocimiento Didáctico-Matemático”. Concretamente, se aborda la evaluación de la faceta epistémica de dicho conocimiento (relacionada con la riqueza y complejidad matemática) sobre la derivada en una muestra de futuros profesores de matemáticas de bachillerato en México.

Para lograr el objetivo central de la investigación el estudio se llevó a cabo en cuatro fases:

- 1) Mediante una revisión sistemática de tipo histórico-epistemológico-didáctico se elabora una conceptualización de los significados de la derivada.
- 2) Diseño del cuestionario CDM-Derivada, teniendo en cuenta los significados de la derivada y criterios aportados por las investigaciones sobre Didáctica del Cálculo, así como sobre formación de profesores de matemáticas.
- 3) La aplicación piloto del cuestionario a una muestra de 53 futuros profesores de bachillerato en México y el diseño del cuestionario definitivo a partir de los resultados obtenidos en la primera fase; también se tienen en cuenta los resultados del estudio de triangulación mediante juicio de expertos al que se sometió el cuestionario.
- 4) Aplicación del cuestionario definitivo a una muestra de 49 futuros profesores de bachillerato en México.

En la cuarta fase se realizaron entrevistas clínicas para profundizar en la caracterización de las configuraciones cognitivas sobre la derivada. Los resultados de la investigación aportaron nueva información sobre la caracterización de los conocimientos que los futuros profesores deberían tener para gestionar idóneamente los aprendizajes sobre la derivada de sus futuros estudiantes. Además, proporcionaron pautas y criterios que permiten el diseño de metodologías didácticas para desarrollar y/o fortalecer el conocimiento especializado sobre la derivada.

Resultados

Como resultados principales, se logró la reconstrucción del significado holístico de la derivada. Para poder explorar el conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada, primero debíamos tener una “visión amplia” sobre lo que es la derivada o sobre cuál o cuáles son sus significados. Así, en el capítulo 3 de la tesis realizamos un estudio histórico-epistemológico que nos permitió caracterizar, a partir de la identificación de las configuraciones epistémicas activadas, los sistemas de prácticas que dieron paso al surgimiento de la derivada, se identificaron los significados parciales que constituyen el significado global u holístico. Esta reconstrucción es de interés puesto que los significados de la derivada pretendidos por una institución, o profesor como representante de la institución, deben ser representativos de

este significado global. Se logró abrir una línea de investigación sobre el estudio histórico-epistemológico de los objetos del cálculo, con la finalidad de reconstruir sus significados holísticos. El trabajo desarrollado en este capítulo 3 de la tesis fue el germen de otras colaboraciones enmarcadas en la línea de "historia y epistemología de las matemáticas" desde la perspectiva del EOS. Así, se han realizado diversos estudios para reconstruir, a partir de análisis histórico-epistemológicos, el significado global de objetos matemáticos como derivada, función, límite, infinito, antiderivada, Chi-cuadrada, t-Student, entre otros (ver, por ejemplo, Pino-Fan et al., 2011; Pino-Fan et al., 2018).

Por otro lado, se propusieron criterios para el análisis de la idoneidad epistémica de los significados de la derivada pretendidos en los libros de texto y en los planes de estudio. En el Capítulo 4 de la tesis, con la finalidad de identificar y caracterizar los significados de la derivada pretendidos en el currículo de matemáticas de bachillerato, se diseñó una metodología para el análisis de los libros de texto y planes de estudio sobre la derivada, con el propósito de estudiar si los significados pretendidos en éstos eran representativos del significado holístico. Esta metodología, actualmente, se sigue utilizando para el análisis de libros de texto y del currículo en general. Se diseñó una metodología para la exploración de la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático (CDM), tomando en cuenta las herramientas teóricas y metodológicas del EOS, y los aportes que se han realizado desde el campo de investigaciones sobre didáctica del Cálculo. Esto permitió diseñar un cuestionario para la exploración de los conocimientos sobre la derivada de los futuros profesores.

Además, se aportaron criterios para analizar y describir la faceta epistémica del CDM de los futuros profesores. Tanto la elaboración del cuestionario como las respuestas de los profesores en formación mostraron el complejo entramado de prácticas, objetos y procesos matemáticos puestos en juego en la resolución de las tareas relacionadas con la derivada. La toma de conciencia de esta complejidad es necesaria en la formación de profesores para que estos puedan desarrollar y evaluar la competencia matemática en sus futuros estudiantes.

La investigación también permitió explorar la pertinencia del vínculo entre las configuraciones cognitivas y el conocimiento didáctico-matemático requerido para la enseñanza, concretamente, el referente a la faceta epistémica (conocimiento común, especializado y ampliado). El uso e identificación de objetos matemáticos primarios (elementos lingüísticos, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos), sus significados y los procesos involucrados en la solución de tareas matemáticas, son la base de los procesos de enseñanza y aprendizaje. Uno de los resultados más relevantes, el cual constituye un aporte teórico-metodológico, fue el esbozo de un modelo del conocimiento didáctico-matemático del profesorado, el cual se presenta en

las páginas finales de la tesis de L. Pino-Fan, hoy en día conocido como modelo CDM, y que ha evolucionado a un modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas (CCDM) del profesorado. El planteamiento de dos niveles del conocimiento especializado es uno de los aspectos relevantes a considerar en el diseño de acciones formativas que fomenten los conocimientos sobre derivadas de los futuros profesores.

En síntesis, consideramos de interés destacar que tras la tesis de Luis Pino-Fan se generó una dinámica de colaboración intensa con Juan D. Godino y Vicenç Font, principalmente. Esta colaboración dio origen a una línea de trabajo centrada en el conocimiento y competencias didáctico-matemáticas del profesorado, que fue madurando en diversos contextos institucionales. En particular, artículos como los de Pino-Fan y Godino (2015), Godino et al. (2018) y Pino-Fan et al. (2023) son evidencia del sólido avance en esta línea en el seno del EOS, producto de la colaboración entre investigadores de SOMIDEM y SEIEM. Estos tres trabajos no solo han tenido repercusión en el ámbito académico (más de 300 citas en Google Académico), sino que han permitido orientar cursos de formación docente en México, Chile, Ecuador, Colombia y España. Esto se debe a la conceptualización pragmatista de la idea de competencia y a la relación establecida entre las competencias clave para la práctica del profesorado y las categorías propuestas por el modelo del conocimiento didáctico-matemático. En el Anexo 2 se incluyen las principales publicaciones realizadas y el número de citas según Google Académico.

Repercusiones del trabajo colaborativo

En este apartado, describimos los trabajos realizados en años posteriores a los estudios de doctorado y su incidencia en las líneas de investigación correspondientes. Después de la formación doctoral, Lilia Aké se incorporó al contexto mexicano. En ese sentido, es importante mencionar que la investigación que se desarrolla en México sobre la formación de profesores está ceñida a los contextos particulares de formación. La formación inicial de los docentes que imparten clases en los niveles de educación preescolar, primaria y secundaria —correspondientes a las edades de 3 a 6 años, 6 a 12 años y 12 a 15 años, respectivamente— no se lleva a cabo en Instituciones de Educación Superior, sino en Escuelas Normales que hasta el momento no están caracterizadas por cultivar la investigación en educación matemática. En cuanto a la Educación Media Superior, que abarca de los 15 a los 18 años, la enseñanza está mayoritariamente a cargo de profesionales con formación en ingeniería y no se exige contar con estudios de posgrado enfocados en la enseñanza de las matemáticas para desempeñarse como docente en ese nivel. De esta manera, las investigaciones desarrolladas en el contexto mexicano atienden a estos matices.

Uno de los trabajos representativos desarrollados en el contexto mexicano es el artículo *Análisis de tareas de un libro de texto desde la perspectiva de los niveles de algebrización* (Aké & Godino, 2018). La relevancia de este manuscrito es que analiza el libro de primer curso de primaria con la finalidad de caracterizar las formas en las que se promueve el razonamiento algebraico temprano. La pertinencia también se sostiene en el hecho de que los libros de texto que se utilizan a nivel de primaria son los mismos para todo el territorio nacional mexicano y son el principal recurso de enseñanza en el aula. Se aporta evidencia de que las tareas planteadas en el libro no están intencionalmente dirigidas a promover un pensamiento algebraico temprano en los niños y que se prioriza el registro numérico orientándose principalmente a un nivel cero de algebrización. Sin embargo, se muestra la potencialidad de las tareas para ser reorientadas hacia niveles progresivos de algebrización.

Por otro lado, debido a la manera en que está organizado el sistema de formación docente y cómo funcionan las instituciones encargadas de preparar a los profesores, el principal interés de las investigaciones en el contexto mexicano se centra en profesores de nivel secundaria y bachillerato. Los estudios sobre los conocimientos y competencias siguen siendo relevantes en el marco educativo mexicano. En esta dirección el artículo *Hacia una caracterización de la competencia algebraica en la formación de profesores* (Aké & Páez, 2024) desarrolla un estudio con futuros profesores de bachillerato en el que se caracterizan las formas en las que resuelven, interpretan y validan actividades algebraicas. Para realizar esa caracterización, se introduce una descripción de niveles de competencias fundamentada en los niveles de algebrización y elementos sustanciales de la competencia matemática. De esta manera, no solo es importante tener habilidades técnicas de resolución sino también interpretar las relaciones, regularidades y propiedades matemáticas y expresar por qué funcionan. Se aporta evidencia sobre la dificultad de alcanzar un primer nivel de competencia algebraica y la necesidad de transformar la forma en la que se estudia el álgebra escolar.

Por su parte, en el caso de Luis Pino-Fan, podemos destacar la repercusión que ha tenido el artículo publicado sobre la ampliación de las categorías del conocimiento didáctico matemático (Pino-Fan & Godino, 2015). A diferencia de otros modelos previos —como el MKT de Ball o el PCK de Shulman—, esta propuesta distingue tres dimensiones fundamentales que conforman el conocimiento integral del profesorado (matemática, didáctica y meta didáctico-matemática), integrando los conocimientos que intervienen en las distintas fases del diseño instruccional: análisis preliminar, diseño, implementación y evaluación.

La riqueza del modelo radica en su capacidad para identificar y relacionar las diversas facetas del conocimiento profesional del docente (epistémica,

cognitiva, ecológica, afectiva, mediacional e instruccional), ofreciendo un marco teórico operativo y articulado. Asimismo, se comparan críticamente las contribuciones del CDM con otros marcos teóricos, evidenciando su potencial para guiar tanto procesos de formación docente como investigaciones empíricas sobre prácticas de enseñanza. Esta perspectiva ampliada del conocimiento del profesor de matemáticas ha permitido abordar estudios sobre el conocimiento del profesorado en torno a objetos matemáticos específicos (como la derivada o el razonamiento algebraico, geométrico y estadístico), abriendo nuevas líneas de investigación y desarrollo profesional docente en Iberoamérica.

En Pino-Fan et al. (2013) realizamos un riguroso análisis didáctico del tratamiento del concepto de derivada en el currículo mexicano de bachillerato; el currículo es pensado como la dupla <planes de estudio oficiales, los libros de texto>. Esta manera de concebir el currículo ha sido muy utilizada en trabajos posteriores debido a que permite una visión integral y completa de los significados pretendidos de los objetos matemáticos curriculares. Uno de los aportes relevantes de este estudio es la ampliación de la metodología que se tenía en el seno del EOS para el análisis de textos utilizando la configuración de objetos matemáticos primarios (elementos lingüísticos, conceptos/definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos). Además, se introducen en el estudio cinco criterios de idoneidad epistémica para valorar la representatividad y coherencia de los significados de los objetos matemáticos (ejemplificados con la derivada): campos de problemas abordados, representaciones activadas, elementos regulativos y argumentativos, conocimientos previos requeridos, y cobertura del significado global. En el estudio se concluye que el currículo de bachillerato mexicano presenta una fuerte tendencia hacia la algebrización del concepto derivada, con escasa integración de contextos significativos y múltiples representaciones, lo que limita la comprensión profunda de tal objeto matemático. El resultado destacable radica en que esta investigación ofrece criterios operativos, tanto para diseñadores curriculares como para formadores de profesores y docentes en ejercicio, promoviendo una enseñanza más idónea y significativa del cálculo diferencial. Hoy en día los criterios presentados se han adoptado como un tipo de metodología para el desarrollo de análisis curriculares.

Otros trabajos derivados de la colaboración

El modelo de niveles de algebrización desarrollado en la tesis doctoral de L. Aké ha tenido proyección en varias investigaciones posteriores. En el marco de un proyecto financiado, ese modelo fue usado para el diseño de un cuestionario para evaluar conocimientos didáctico-matemáticos sobre razonamiento algebraico elemental (Godino, Aké et al., 2015). En dicho trabajo se elaboró un sistema de categorías de conocimientos algebraicos

que tiene en cuenta las estructuras, funciones y modelización, así como categorías de conocimientos didácticos (facetas epistémica, cognitiva, instruccional y ecológica). Asimismo, se describe y analiza una colección de tareas que componen el cuestionario, informando sobre la validez de contenido.

Más recientemente Burgos et al. (2024) han elaborado una versión ampliada del modelo de niveles de algebrización propuesto en el marco del enfoque ontosemiótico, estableciendo subniveles que ofrecen una visión más microscópica de las estructuras involucradas y los procesos de generalización, representación y cálculo analítico implicados. Ejemplifican el modelo con actividades matemáticas que pueden abordarse desde la educación primaria, clasificadas según los diferentes subniveles de algebrización. El uso de este modelo ampliado puede facilitar el desarrollo del conocimiento didáctico-matemático del profesorado en formación sobre razonamiento algebraico y su enseñanza.

El modelo de conocimientos didáctico-matemáticos basado en el EOS (modelo CDM) ha sido ampliado en Pino-Fan et al. (2023) mediante la creación de una macro herramienta para caracterizar y desarrollar competencias clave para la práctica del profesor de matemáticas. En este artículo, se describe el modelo de conocimientos didáctico-matemáticos como una alternativa teórico-metodológica que permite tanto el análisis como el desarrollo de conocimientos y competencias esenciales para el ejercicio profesional docente. Además, se profundiza en una propuesta de categorías y subcategorías de competencias profesionales necesarias para la docencia, lo que permite una integración explícita entre las nociones de conocimiento y competencia docente.

Reflexiones finales

En este capítulo hemos descrito un recorrido dual que evidencia la colaboración entre Juan D. Godino (SEIEM) y L. Aké y Luis R. Pino-Fan (SOMIDEM), en el seno del grupo de trabajo sobre el Enfoque Ontosemiótico. Dicha colaboración ha permitido, por un lado, el desarrollo de dos líneas de investigación robustas y complementarias, ofreciendo herramientas concretas para la mejora de la enseñanza de las matemáticas y la formación de profesores. Por otro lado, y de la mano del desarrollo de estas dos líneas, se muestra el proceso de formación inicial de dos investigadores en educación matemática que se caracteriza por la incorporación de los estudiantes dentro de un equipo de investigación consolidado. En este caso, en el Grupo de investigación FQM-126, Teoría de la educación matemática y educación estadística, coordinado por J. D. Godino y C. Batanero, se estaban desarrollando varios proyectos de investigación financiados por organismos regionales (Junta de Andalucía) y nacionales (Ministerio de Investigación y Desarrollo). En consecuencia, era razonable, incluso necesario, que los

proyectos de investigación de los estudiantes de maestría y doctorado estuvieran enmarcados dentro de proyectos de investigación en curso. Cuando L. Aké fue aceptada como estudiante de posgrado ya se estaban realizando investigaciones previas sobre razonamiento algebraico en el seno del Grupo de investigación, como es la tesis doctoral de Castro (2011), lo cual permitió apoyar la redacción del proyecto en dichos trabajos. El trabajo previo sobre categorías de conocimientos didáctico-matemáticos en el marco del EOS (Godino, 2009) sirvió de apoyo para enfocar la tesis de L. Pino-Fan, en este caso, con la codirección del Dr. V. Font, quien había realizado su tesis doctoral sobre la enseñanza de la derivada en bachillerato en la Universidad de Barcelona.

La participación como colaboradores científicos de L. Aké y L. Pino-Fan en los proyectos de investigación en curso les permitió integrarse dentro de los respectivos equipos, compartir ideas y colaborar en diversas publicaciones conjuntas, lo que contribuyó no sólo a desarrollar y consolidar las líneas de investigación descritas, sino también a iniciarse y consolidarse, hoy en día, como investigadores de reconocimiento internacional en el área de la Educación Matemática.

Referencias

- Aké, L. P. (2013). *Evaluación y desarrollo del razonamiento algebraico elemental en maestros en formación* [Tesis doctoral, Universidad de Granada].
<http://hdl.handle.net/10481/31332>
- Aké, L., & Godino, J. D. (2018). Análisis de tareas de un libro de texto de primaria desde la perspectiva de los niveles de algebrización. *Educación Matemática*, 30(2), 171–201. <https://doi.org/10.24844/EM3002.07>
- Aké, L., Godino, J. D., Fernández, T., & Gonzato, M. (2014). Ingeniería didáctica para desarrollar el sentido algebraico de maestros en formación. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 5, 25–48.
<https://doi.org/10.35763/aiem.v1i5.70>
- Aké, L., & Páez, D. (2024). Hacia una caracterización de la competencia algebraica en la formación de profesores. *PNA. Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, 18(3), 223–253. <https://doi.org/10.30827/pna.v18i3.26260>
- Ball, D. L., & Even, R. (2008). *The professional education and development of teachers of mathematics: The 15th ICMI Study*. Springer.
- Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. En J. Cai, & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization. Advances in mathematics education* (pp. 5–21). Springer.
- Burgos, M., Tizón-Escamilla, N., & Godino, J. D. (2024). Expanded model for elementary algebraic reasoning levels. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 20(7), em2475.
<https://doi.org/10.29333/ejmste/14753>

- Cai, J., & Knuth, E. (2011). *Early Algebraization: A global dialogue from multiple perspectives*. Springer.
- Carraher, D. W., & Schliemann, A. L. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (Vol. 2, pp. 669–705). Information Age Publishing, Inc. y NCTM.
- Castro, W. F. (2011). *Evaluación y desarrollo de competencias de análisis didáctico de tareas sobre razonamiento algebraico elemental en futuros profesores* [Tesis doctoral]. Universidad de Granada.
- Chapman, O. (Ed.). (2020). *International handbook of mathematics teacher education* (2nd ed.). Brill.
- Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN-Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 5(20), 13–31.
- Godino, J. D. (2024). *Enfoque ontosemiótico en educación matemática. Fundamentos, herramientas y aplicaciones*. McGraw Hill-Aula Magna.
<https://hdl.handle.net/10481/93596>
- Godino, J. D., Aké, L. P., Contreras, A., Díaz, C., Estepa, A. Blanco, T. F., Lacasta, E., Lasa, A., Neto, T., Oliveras, M. L., & Wilhelmi, M. R. (2015). Diseño de un cuestionario para evaluar conocimientos didáctico-matemáticos sobre razonamiento algebraico elemental. *Enseñanza de las Ciencias*, 33(1). 127–150.
<https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1468>
- Godino, J. D. Aké, L., Gonzato, M., & Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebraización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias*, 32(1). 199–219. <https://doi.org/qhwt>
- Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325–355.
- Godino, J. D., Castro, W., Aké, L., & Wilhelmi, M. D. (2012). Naturaleza del razonamiento algebraico elemental. *Boletim de Educação Matemática - BOLEMA*, 26(42B), 483–511.
- Godino, J. D., Giacomone, B., Font, V. & Pino-Fan, L. (2018). Conocimientos profesionales en el diseño y gestión de una clase sobre semejanza de triángulos. Análisis con herramientas del modelo CCDM. AIEM. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 13, 63–83. <https://doi.org/qhvw>
- Godino, J. D., Neto, T., Wilhelmi, M. R., Aké, L., Etchegaray, S., & Lasa, A. (2015). Niveles de algebraización de las prácticas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemiótica y antropológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 8, 117–142. <https://doi.org/10.35763/aiem.v1i8.105>
- Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? En J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton, (Eds), *Algebra in the early grades* (pp. 5–17). Routledge.

- Kaput, J., & Blanton, M. L. (2000). *Algebraic reasoning in the context of elementary mathematics: Making it implementable on a massive scale*. University of Massachusetts - Dartmouth.
- Kieran, K. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. Building meaning for symbols and their manipulation. En F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (Vol. 2, 707–762). Information Age Publishing, Inc. y NCTM.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. NTCM.
- Pino-Fan, L. (2013). *Evaluación de la faceta epistémica del conocimiento didáctico matemático de futuros profesores de bachillerato sobre la derivada* [Tesis doctoral, Universidad de Granada]. <http://hdl.handle.net/10481/29940>
- Pino-Fan, L. R., Castro, W. F., & Font, V. (2023). A macro tool to characterize and develop key competencies for the mathematics teacher's practice. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 21(5), 1407–1432. <https://doi.org/10.1007/s10763-022-10301-6>
- Pino-Fan, L., Castro, W. F., Godino, J. D., & Font, V. (2013). Idoneidad epistémica del significado de la derivada en el currículo de bachillerato. *PARADIGMA*, 34(2), 123–150.
- Pino-Fan, L., Font, V., Gordillo, W., Larios, V., & Breda, A. (2018). Analysis of the meanings of the antiderivative used by students of the first engineering courses. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 16(6), 1091–1113. <https://doi.org/10.1007/s10763-017-9826-2>
- Pino-Fan, L., & Godino, J. D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *PARADIGMA*, 36(1), 87–109.
- Pino-Fan, L. R., Godino, J. D., & Font, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. *Educação Matemática Pesquisa*, 13(1), 141–178.
- Pino-Fan, L. Godino, J.D., & Font, V. (2013). Diseño y aplicación de un instrumento para explorar la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores sobre la derivada (Parte 1). *REVEMAT*, 8(2), 1–49.
- Pino-Fan, L. Godino, J.D., & Font, V. (2013). Diseño y aplicación de un instrumento para explorar la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores sobre la derivada (Parte 2). *REVEMAT*, 8(Ed. Especial), 1–47.
- Pino-Fan, L., Godino, J. D., & Font, V. (2015). Una propuesta para el análisis de las prácticas matemáticas de futuros profesores sobre derivadas. *Boletim de Educação Matemática - BOLEMA*, 29(51), 60–89. <https://doi.org/10.1007/s10763-015-0000-0>
- Wood, T. (Ed.). (2008). *International Handbook of Mathematics Teacher Education*. Sense Publishing.

Anexo 1

Principales publicaciones de L. Aké y número de citas.

Referencia	Número de citas
Godino, J. D. Aké, L., Gonzato, M., & Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. <i>Enseñanza de las Ciencias</i> , 33(1), 199–219. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.965	303
Godino, J. D., Castro, W., Aké, L., & Wilhelmi, M. D. (2012). Naturaleza del razonamiento algebraico elemental. <i>Boletim de Educação Matemática - BOLEMA</i> , 26 (42B), 483–511. https://doi.org/10.1590/S0103-636X2012000200005	141
Godino, J. D., Neto, T., Wilhelmi, M. R., Aké, L., Etchegaray, S., & Lasa, A. (2015). Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemiótica y antropológica. <i>Avances de Investigación en Educación Matemática</i> , 8, 117–142. https://doi.org/10.35763/aiem.v1i8.105	135
Godino, J. D., Aké, L. P., Contreras, A., Díaz, C., Estepa, A. Blanco, T. F., Lacasta, E., Lasa, A., Neto, T., Oliveras, M. L., & Wilhelmi, M. R. (2015). Diseño de un cuestionario para evaluar conocimientos didáctico - matemáticos sobre razonamiento algebraico elemental. <i>Enseñanza de las Ciencias</i> , 33(1), 127–150. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1468	53
Aké, L. P. (2013). <i>Evaluación y desarrollo del razonamiento algebraico elemental en maestros en formación</i> . [Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada]. http://hdl.handle.net/10481/31332	68
Aké, L., Godino, J. D., Gonzato, M., & Wilhelmi, M. R. (2013). Proto-algebraic levels of mathematical thinking. In Lindmeier, A. M., & Heinze, A. (Eds.). <i>Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education</i> , Vol. 2, pp. 1–8. Kiel, Germany: PME.	45
Godino, J. D., Neto, T., Wilhelmi, M., Aké, L. P., Etchegaray, S., & Lasa, A. (2015). Algebraic reasoning levels in primary and secondary education. <i>CERME 9: Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education</i> .	41

Anexo 2

Principales publicaciones de L. Pino-Fan y número de citas.

Referencia	Número de citas
Breda, A., Pino-Fan, L., & Font, V. (2017). Meta didactic-mathematical knowledge of teachers: criteria for the reflections and assessment on teaching practice. <i>EURASIA Journal of Mathematics Science and Technology Education</i> , 1893–1918. https://doi.org/10.12973/eurasia.2017.01207a	395
Pino-Fan, L., & Godino, J. D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. <i>PARADIGMA</i> , 36(1), 87–109.	363
Breda, A., Font, V., & Pino-Fan, L.R. (2018). Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica. <i>Boletim de Educação Matemática - BOLEMA</i> , 32 (60), p. 255–278. https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n60a13	340
Scheiner, T., Montes, M. A., Godino, J. D., Carrillo, J., & Pino-Fan, L. R. (2017). What makes mathematics teacher knowledge specialized? Offering alternative views. <i>International Journal of Science and Mathematics Education</i> , 17, 153–172. https://doi.org/10.1007/s10763-017-9859-6	231
Pino-Fan, L., Assis, A., & Castro, W. F. (2015). Towards a methodology for the characterization of teachers' didactic-mathematical knowledge. <i>EURASIA Journal of Mathematics, Science & Technology Education</i> , 11(6), 1429–1456. https://doi.org/10.12973/eurasia.2015.1403a	208
Pino-Fan, L. R., Godino, J. D., & Font, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. <i>Educação Matemática Pesquisa</i> , 13 (1), 141–178.	190
Pino-Fan, L., Godino, J. D., & Font, V. (2018). Assessing key epistemic features of didactic-mathematical knowledge of prospective teachers: the case of the derivative. <i>Journal of Mathematics Teacher Education</i> , 21(1), 63–94. https://doi.org/10.1007/s10857-016-9349-8	183

Tres estudios sobre el conocimiento y la enseñanza de los números racionales

Three studies on the knowledge and teaching of rational numbers' arithmetic

Bernardo Gómez ¹ 

Olimpia Figueras ² 

Carlos Valenzuela ³ 

María T. Sanz ⁴ 

Resumen

En este capítulo se describen tres estudios en los que se identificaron dificultades enfrentadas por estudiantes de 6 a 17 años de edad al usar los números racionales en la resolución de una diversidad de tareas. En el estudio de la primera etapa de la colaboración entre investigadores de las diferentes instituciones, se caracterizaron mediante un esquema interpretativo, distintos niveles de comprensión de aquellas relaciones que subyacen en las tareas vinculadas con conceptos de razón y proporción. En el segundo estudio se tipificaron estrategias de estudiantes para resolver problemas de división de fracciones asociadas a formas textuales que aparecen en los enunciados, así como a su estructura. Del análisis de las respuestas de los educandos del tercer estudio se derivó el método de lecturas analíticas el cual sirve como herramienta para que los estudiantes desarrollen habilidades para usar los números racionales.

¹ bernardo.gomez@uv.es

Universidad de Valencia (SEIEM)

² figuerao@cinvestav.mx

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (SOMIDEM)

³ carlos.valenzuela@academicos.udg.mx

Universidad de Guadalajara (SOMIDEM)

⁴ m.teresa.sanz@uv.es

Universidad de Valencia (SEIEM)

Palabras clave

Fracciones, números racionales, razón y proporción, lecturas analíticas de problemas multiplicativos.

Abstract

In this chapter a description of three studies is made, in those, difficulties faced by students aged 6 to 17 years when using rational numbers to solve a variety of tasks were identified. In the study of the first stage of the collaboration between researchers from different institutions, different levels of understanding of those relationships that underlie tasks related to concepts of ratio and proportion were characterized by means of an interpretive scheme. In the second study, student strategies for solving problems involving the division of fractions associated with textual forms that appear in the problem statements, as well as with their structure, were typified. From the analysis of the responses of the students in the third study, the method of analytical readings was derived, which serves as a tool for students to develop skills to use rational numbers.

Keywords

Fractions, rational numbers, ratio and proportion, analytic readings of multiplicative problems.

Mirando hacia atrás

El 27 de octubre de 1988, el entonces rector de la Universidad de Valencia, Ramón Lapiedra Civera, firmó un convenio entre esa institución y el Programa Nacional de Formación y Actualización de Profesores de Matemáticas con sede en el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav), convenio signado el 24 de enero de 1989 por Eugenio Filloy, director del programa.

A partir de ese momento se iniciaron actividades de investigación y formación de recursos humanos entre investigadores del Departamento de Didáctica de la Matemática (DDM) de la universidad española y el Departamento de Matemática Educativa (DME) de la institución mexicana.

Los dos primeros autores de este capítulo empezaron a colaborar desde 1991 y sus interacciones en México y en España se concretaron en proyectos de investigación, trabajos de fin de máster, tesis de maestría y doctorado, la organización de diferentes eventos académicos celebrados tanto en México como en España, así como en la escritura de diversos tipos de documentos para difundir los resultados de los estudios llevados a cabo en ambas instituciones (Puig, 2004, 2017).

Esta colaboración se puede dividir en tres etapas. La primera vinculada con actividades hechas en el contexto del convenio mencionado en el primer párrafo; la segunda iniciada con la firma, el 24 de noviembre de 2004, de un segundo convenio entre el Cinvestav y la Universidad de Valencia, y la tercera que inicia con la integración al equipo de los dos últimos autores

de este capítulo a partir de 2015, con la estancia en el DDM de Carlos Valenzuela¹ –entonces estudiante del Programa de Doctorado del DME–, y en 2017, la de María Teresa Sanz –profesor ayudante doctor del DDM– en el DME². Esta interacción entre los cuatro autores condujo a una colaboración, bajo el convenio existente entre la Universidad de Guadalajara de México y la Universidad de Valencia a partir de 2020. En este capítulo se describen de forma resumida tres aportaciones del grueso de la colaboración llevada a cabo durante más de tres décadas por los autores de este capítulo, cada una de las cuales corresponde a una de las etapas mencionadas.

Las dos primeras aportaciones, dirigidas conjuntamente por los dos primeros autores, se focalizan en la enseñanza y el aprendizaje de los conceptos de número racional. La primera corresponde a un estudio llevado a cabo en el periodo 1996-1997, que tenía por objetivo general contrastar el desempeño de escolares de primaria (6-12 años de edad) de España y México al resolver las mismas tareas relacionadas con los conceptos razón y proporción (ver Fernández et al., 2009). La segunda aportación tuvo como objetivo indagar acerca de las relaciones entre los elementos variables de los problemas multiplicativos escolares de división de fracciones y las variables de resolución observables en las actuaciones de los estudiantes de Educación Secundaria Obligatoria en España (12-16 años de edad) cuando se enfrentan a este tipo de problemas. El informe de este trabajo se encuentra en la tesis de doctorado de Contreras (2012).

La tercera aportación dirigida principalmente por los dos últimos autores de este capítulo y asesorados por los dos primeros se centró en la resolución de problemas verbales y tenía como objetivo analizar el desempeño de estudiantes de bachillerato (15 a 17 años de edad) al resolver problemas verbales que involucran el uso de las fracciones. Los datos se recopilaron por medio de un cuestionario de lápiz y papel aplicado a educandos de diferentes instituciones de educación media superior en la Ciudad de México. La caracterización de las estrategias empleadas por los estudiantes para resolver los problemas se hizo mediante lecturas analíticas, herramienta metodológica que se describe en la última parte de este documento.

El nexo de unión entre estas tres temáticas se basa en la conexión que existe entre los problemas de multiplicar y dividir con el esquema de proporcionalidad a través de la relación cuaternaria que estructura dicho esquema, lo

¹ Carlos Valenzuela en su estancia en la Universidad de Valencia hizo un Máster en Investigación en Didáctica de las Matemáticas 2015-2016 y contó además con apoyo financiero del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología.

² María Teresa Sanz obtuvo una beca en el marco del programa “Becas Iberoamérica. SANTANDER Investigación, 2017” para una estancia de investigación en el DME y contó también con un respaldo financiero del Ministerio de Ciencia e Innovación a través del programa de investigación EDU2017-84377-R.

que se aprecia claramente en las dos primeras aportaciones. Asimismo, las tres aportaciones descritas se inscriben en la problemática que se enfrenta en la transición del uso de los números naturales al de los números racionales, en particular al de las fracciones, que como se muestra en este documento es un proceso largo con obstáculos que perduran desde que se empiezan a utilizar las fracciones en la escuela primaria hasta los estudios preuniversitarios.

Introducción a la temática

Hay dos cambios principales al avanzar en la aritmética escolar: uno es el paso de la aritmética de los números naturales a la aritmética de los números racionales, y el otro el paso del campo conceptual de la estructura aditiva al campo conceptual de la estructura multiplicativa. Por lo que respecta al primero, el número pasa de ser la expresión de la pluralidad a ser una relación entre la cantidad y la unidad³, relación que involucra al concepto de razón, el cual, algoritmizado por división da lugar al número racional y el razonamiento proporcional. Con respecto al segundo, la enseñanza dota de una perspectiva limitada al campo conceptual multiplicativo, lo que ha producido como resultado que algunos estudiantes sean incapaces de resolver una gran variedad de problemas o cuestiones donde están involucrados los símbolos de fracción.

En la primera mitad de la década de los noventa, período en el cual se inició la colaboración conjunta, los investigadores en aritmética educativa se interesaban por estos dos campos temáticos; en particular por los contenidos matemáticos que se relacionan con la razón y el razonamiento proporcional, por un lado, y con los problemas multiplicativos por el otro.

Competencias en razón y proporción: Estudio de la primera etapa

La investigación sobre las nociones vinculadas al “razonamiento proporcional”, tal como se recoge en la literatura especializada, ha sido diversa tanto en metodologías como en tipos de tareas utilizadas. Algunas de ellas, como las propuestas por Piaget, se han enfocado en caracterizar el pensamiento de los individuos. Otras han puesto énfasis en aspectos como la dificultad relativa de los problemas diseñados para la enseñanza, la influencia del contexto, la complejidad numérica de los datos y el análisis de las estrategias de solución empleadas por los estudiantes.

Como resultado de estas investigaciones, ya se disponía al inicio del trabajo conjunto de un amplio surtido de aportaciones al conocimiento de la

³ “Se entiende por número no tanto una colección de muchas unidades como una relación abstracta de una cantidad cualquiera a otra de la misma especie que se considera como unidad. Según sea esta relación, o comparación con la unidad, se tienen tres especies de número: el entero, el fraccionario y el sordo. El entero está medido por la unidad; el fraccionario por un submúltiplo de la unidad; el sordo es inconmensurable con la unidad...” Newton (1707, p. 2).

comprensión de los estudiantes sobre los conceptos de proporción, razón y proporcionalidad, que dejaba entrever vacíos como, por ejemplo, los que se refieren a lo que ocurría con niños de la edad de los alumnos de la escuela primaria.

Con la intención de cubrir este vacío y avanzar en el conocimiento de lo que ocurre en la franja de edad (6-12 años de edad), se inició en México un estudio de corte cualitativo. Durante el período 1993-96 (ver Gómez, 1996; Jiménez de la Rosa, 1996; Muñoz, 1996) se obtuvo un primer acercamiento a la identificación, categorización y evolución de clases de comportamientos de alumnos de una escuela primaria al resolver tareas que implican cambios cualitativos, aditivos o multiplicativos de tipo proporcional.

Al analizar los datos de esta indagación se articuló un esquema de interpretación de las respuestas de los estudiantes que pasó de un modelo de descripción de conductas aisladas a otro de agrupamiento de tipos de comportamientos identificados. Este esquema, que fue pertinente para poder derivar conclusiones y supuestos sobre las tendencias del comportamiento y las competencias de los niños, constituyó el punto de partida del desarrollo de la investigación que se llevó a cabo en España durante los años 1996-97.

Tomando como base los estudios elaborados en México, se planteó continuar la indagación en España, aprovechando el mismo cuestionario para hacer un estudio de tipo comparativo. Se pretendía contrastar el desempeño de los niños de ambos países frente a las mismas tareas usadas en el estudio mexicano. La intención era encontrar evidencias que permitieran sustentar o desechar la hipótesis sobre las diferencias en determinados aspectos, tanto de la enseñanza como de las formas de expresión oral y escrita que favorecen diferencias en las competencias manifestadas por los estudiantes en relación con la razón, proporción y proporcionalidad.

Ésta es la parte de la investigación de la que se da cuenta, de modo resumido, en este capítulo. El informe completo se encuentra en Fernández et al. (2009).

A continuación, se hace una descripción de las tareas que constituyen los cuestionarios, el esquema de interpretación y clasificación de las actuaciones de los alumnos, así como resultados de la comparación entre los obtenidos en los dos estudios llevados a cabo en España y México.

El cuestionario

Para la observación del desempeño de los alumnos se utilizó una metodología de 'análisis de tareas', la cual está ligada al uso de técnicas de clasificación de los datos observados sobre sus estrategias de resolución. Con esta metodología lo que se pretende es obtener información de tipo cognitivo y meta-cognitivo de las actuaciones individuales observables de los estudiantes al

responder a tareas específicas que son propias de los temas incluidos en los currículos respectivos.

En el análisis de tareas juega un papel central el cuestionario de lápiz y papel para la obtención de resultados empíricos conducentes a la identificación de los métodos, estrategias de resolución, y/o errores que se desprenden de las respuestas de los estudiantes.

Una fase posterior sirve para establecer niveles de dificultad asociados a las tareas propuestas, para describir limitaciones en la comprensión del conocimiento matemático, para identificar perfiles de estudiantes, o para la elaboración de modelos teóricos explicativos de las actuaciones observadas.

Para tal fin se diseñó un cuestionario de lápiz y papel con tres tipos de tareas: el primero tiene que ver con los procesos comparativos en situaciones de variabilidad o variación (co-variación, comparación parte-todo, comparación cualitativa de escalas), el segundo se relaciona con conceptos de proporcionalidad simple (valor perdido), y el tercero corresponde a relaciones de proporcionalidad compleja (comparación de razones). Algunas tareas se diseñaron con modalidades de dificultad creciente para adaptarlas a los distintos ciclos educativos (primer ciclo –1er y 2do grados–, segundo –3er y 4to grados–, y tercero –5to y 6to grados– de educación primaria).

Esos tres tipos de tareas se corresponden con conocimientos y procesos asociados a los conceptos de razón y proporción que pueden considerarse como una jerarquía vinculada a etapas de complejidad gradual con referencia a contenidos matemáticos de los diseños curriculares de la educación primaria.

Para el diseño se adaptaron tareas ya utilizadas en la investigación precedente. Lo que interesó de éstas fue su potencialidad para obtener evidencias de la competencia de los estudiantes para comprender y resolver situaciones de fenómenos asociados a procesos de cambio, regularidades, razón y proporción. También interesaba identificar dificultades que explican su falta de competencia cuando intentan resolver esas situaciones. Las tareas se describen a continuación.

1. Las situaciones Zapatos, Trenes y Casas, Collares y Sucesiones comparten una estructura basada en la variación conjunta correlativa, lo que implica que, para responder adecuadamente, es necesario establecer una comparación cualitativa. En particular, Casas-collares-sucesiones se planteó en tres versiones distintas, una para cada ciclo escolar, en todas se solicita al estudiante identificar una regularidad en una progresión aritmética y extenderla según la posición del término requerido.
2. Las situaciones sobre Cuadrado y Rectángulo (dos modalidades), Muñecos de alambre (tres modalidades), Perro y Fotografía, corresponden a situaciones en las cuales se requiere hacer una comparación

- de escalas. En las tres primeras se requiere reproducir una figura bidimensional a escala de otra dada; en la segunda el factor de proporcionalidad y la unidad de medida están explícitos en el enunciado. En la cuarta, hay que efectuar una comparación cualitativa, eligiendo entre tres figuras la que es una reproducción a escala de otra dada.
3. La situación Pisos plantea un problema relacionado con el cambio de densidad, específicamente en torno a la relación entre área y población. En ella, se solicita comparar dos razones de densidad no unitarias, verificar su desigualdad y determinar cuál es la menor.
 4. Tesoro y Carreteras (dos modalidades) es una tarea en la que se requiere descodificar una unidad de medida para cuantificar una distancia. En este caso se trata de un mapa en el que se proporciona numéricamente una distancia entre dos lugares y dos líneas segmentadas en un número diferente de tramos todos de la misma medida: una de las líneas representa la distancia que se explicita numéricamente y la otra representa la distancia desconocida por la que se pregunta.
 5. Tazas de arroz y Receta, y Refrescos y Monedas son tareas que corresponden a situaciones en las que hay que encontrar el valor desconocido de una proporción. La primera viene dada mediante un pictograma, la segunda mediante una tabla de datos en forma de matriz y la tercera (dos modalidades: 1er y 2do ciclos, y 3er ciclo) es una situación de regla de tres.
 6. Comunidad Valenciana, Supermercado, Mecnógrafas y Agua de limón corresponden a situaciones de comparación de razones. En las dos primeras se requiere expresar un porcentaje, en la tercera verificar la igualdad de dos razones y en la cuarta determinar la mayor de dos razones, una no unitaria y otra unitaria, asociadas a una mezcla. La solución implica un razonamiento proporcional de tipo inverso: a menos agua, más sabor a limón.

El esquema de interpretación

El modelo de interpretación y clasificación resultó del escrutinio de las respuestas de los alumnos de seis cursos de enseñanza primaria –6 a 12 años de edad– al resolver las actividades del cuestionario de lápiz y papel en las que están involucrados los temas matemáticos: variación, razón, proporción y proporcionalidad.

En el estudio español se partió del modelo utilizado en los estudios mexicanos de los años 1993-1996, y se amplió y modificó para poder clasificar las actuaciones que algunos alumnos tuvieron al resolver algunas tareas que no formaban parte de aquellas identificadas en los estudios citados.

Este modelo de interpretación permitió articular los datos sobre las actuaciones de los estudiantes en cinco categorías. Dichas categorías agrupan

patrones comunes de conducta desde un enfoque relacional y dan cuenta de la percepción que tienen los estudiantes de las relaciones en juego entre los elementos de la información gráfica, verbal o pictórica de la tarea propuesta, y de los aspectos en los que centran su atención para resolverla.

A su vez, estas categorías se subdividen en subcategorías, y éstas en clases, según se profundiza en la apreciación de similitudes y diferencias en las interpretaciones plausibles, tanto de las expresiones escritas por los estudiantes, como de los procedimientos llevados a cabo por ellos.

Sin embargo, en el proceso de análisis de las respuestas de los alumnos españoles, se identificaron algunos comportamientos diferentes a los de los niños mexicanos, y también surgieron otras interpretaciones y manifestaciones de conductas comunes en otros problemas para los cuales no se tenían evidencias. Esta situación requirió efectuar modificaciones al modelo de interpretación, cuyo resultado final se recoge en el siguiente esquema, del cual sólo se describen aquí las categorías, invitando al lector interesado a leer el informe incluido en Fernández et al. (2009).

Categoría 1. Percepción relacional de los elementos de la información. Las respuestas de los estudiantes que se agrupan en esta categoría contienen evidencias sobre el reconocimiento por parte de los niños de: 1.1) algún atributo que permite vincular los datos entre sí, tales como forma y/o tamaño; 1.2) el reconocimiento de reglas de asociación entre elementos de conjuntos que varían correlativamente; 1.3) relaciones parte-todo; o bien 1.4) relaciones numéricas entre cuatro cantidades.

Categoría 2. Identificación de las relaciones apropiadas entre los elementos en juego. En esta categoría se reunieron las respuestas en las que se pusieron de manifiesto algunas de las siguientes características: 2.1) identificación de la relación de cambio y uso parcial de la misma, 2.2) identificación de un patrón o unidad diferente, y 2.3) identificación de un cambio.

Categoría 3. Percepción aislada de elementos de la información. En esta categoría, se incluyen las respuestas en las cuales se encuentran evidencias de que los estudiantes centran su atención en algún(os) componente(s) del enunciado de la tarea que se les propone, ya sea parte de la información gráfica, numérica, o verbal; o bien, en combinaciones de estos tipos de elementos que aparecen en los enunciados de las tareas (Fernández et al., 2009, p. 93). En ella se incluyen las siguientes subcategorías: 3.1) predominio del conteo, 3.2) predominio de una parte del enunciado verbal o gráfico, y 3.3) predominio de la operatividad.

Categoría 4. Descodificación particular del enunciado. Sobre los comportamientos ubicados en esta categoría, se observa que los alumnos hacen una interpretación distinta de la esperada de las relaciones que se enuncian en el problema. Tal vez el enunciado está estructurado de forma que resulta poco usual para los niños, o bien, el contexto no les es familiar.

Estas características promueven respuestas pertinentes que guardan relación con los procesos de descodificación, a través de los cuales algunos estudiantes hacen interpretaciones particulares del enunciado del problema que no corresponden a aquellas que intentó comunicar el autor y que se acercan a lo que la mayoría asocia.

En este tipo de respuestas, las estrategias que usan los estudiantes y las soluciones a las que llegan son coherentes con su particular lectura de las expresiones o términos contenidos en el enunciado. En esta categoría sólo se incluyen dos subcategorías. 4.1) interpretación del enunciado diferente a la esperada y 4.2) medición con instrumentos.

Categoría 5. Respuestas singulares. En esta categoría se encuentran aquellas respuestas que corresponden a: 5.1) identificadas, aunque no pertinente; 5.2) no identificada y 5.3) no contestada.

Algunos resultados

Aunque el estudio de los datos recogidos en Valencia proporcionó un modelo “más fino” para interpretar y clasificar las respuestas de los estudiantes, se puede decir, desde una perspectiva global, que no hay diferencias significativas en cuanto al nivel de éxito.

Comparando por cursos, aparecieron diferencias cuantitativas que inducen a pensar que están relacionadas con el momento en que se estudian los conceptos en cada uno de los dos países. Así, por ejemplo, los datos inducen a pensar que existen diferencias en cuanto a la instrucción en ambos países que se manifiestan en el primer ciclo de la enseñanza primaria en términos cuantitativos y cualitativos, tal vez debido a la distinta escolarización previa (la educación infantil) que se proporcionaba en los dos países en esa época. En los otros dos ciclos tienden a desaparecer las diferencias cualitativas y las diferencias cuantitativas oscilan, según cuál sea la tarea, a favor de una u otra parte de los estudios. Esto nos permite pensar en diferencias en el énfasis que se pone en su tratamiento escolar y no en diferencias de enfoque.

Las respuestas no apropiadas observadas revelaron una problemática ligada a la forma en que los estudiantes de primaria interpretan las tareas de razón y proporción, que está fuertemente interiorizada y que no es de fácil eliminación.

Con la intención de evitar estos efectos no deseados, parece razonable recomendar un cambio en la enseñanza que considere esta información para desarrollar una instrucción más eficaz, insistiendo en aquellos aspectos en donde se esperan respuestas erróneas de los estudiantes, anticipándose a ellas y diseñando estrategias para su corrección. Para ello, las tareas empleadas en el cuestionario utilizado en este estudio pueden usarse en las aulas como actividades de instrucción, y el cuestionario y el modelo de clasificación de actuaciones como herramientas de evaluación.

Los problemas escolares de división de fracciones: Estudio de la segunda etapa

Para el diseño de la investigación que se describe en esta parte del capítulo se partía de la constatación de que la enseñanza de la división de fracciones se orientaba a lo procedimental, poniendo el énfasis en la práctica de la regla del producto cruzado o la inversión de la fracción divisor sobre ejemplos numéricos descontextualizados.

Esta es una perspectiva limitada que se extiende al campo conceptual multiplicativo, produciendo como resultado que algunos estudiantes sean incapaces de resolver una gran variedad de problemas o cuestiones donde están involucrados los símbolos de fracción. De ahí que se planteara como objetivo de la investigación identificar esos problemas o cuestiones e intentar aportar conocimiento que ayudara a explicar la dificultad que enfrentan los estudiantes para reconocer la operación que los resuelve.

Marco teórico

En numerosos informes de investigación se incluyen dificultades que se ha observado enfrentan los niños cuando resuelven problemas escolares⁴ de multiplicación y división con fracciones.

Una de ellas es que el tipo de números usados influye en el reconocimiento de la operación que se elige para resolver un problema verbal multiplicativo, hasta el punto en que los niños cambian de manera de pensar en relación con la operación que se necesita para resolver problemas cuyo contenido es el mismo pero que difieren en los términos numéricos (naturales o racionales) sin que esto les parezca incongruente porque los perciben como problemas diferentes (Bell et al., 1981).

Otra es que los estudiantes evitan sistemáticamente la operación directa de dividir fracciones al resolver problemas y optan por estrategias alternativas, incluso más complejas (Hart, 1980, 1981).

Sinicrope et al. (2002) señalan que las extensiones de las tres interpretaciones usuales (consideradas modelos semánticos en esta investigación) de la división de enteros: partición, medida e inversión del producto cartesiano, no son suficientes para explicar la división de fracciones, “la división como la determinación de una razón unitaria y la división como la inversa de la multiplicación son también importantes interpretaciones de la división de fracciones” (p. 153).

Dado que las interpretaciones de la división están asociadas a enunciados textuales que son los que se usan para definir y explicar la operación, como por ejemplo ‘repartir’ o ‘averiguar cuántas veces cabe’, la afirmación de

⁴ En este documento llamamos problemas escolares a los problemas usados en la enseñanza a lo largo de su larga evolución histórica recogida en libros de texto y manuales escolares.

Sinicrope sugiere que en la división hay otros enunciados textuales que también son importantes y que habría que considerar.

Por otra parte, las investigaciones de Kieren (1980, 1988) y Behr et al. (1983) han puesto a los subconstructos de los números racionales (parte-todo, medida, cociente, operador y razón) como fuente fenomenológica, en el sentido de Freudenthal (1983), para sugerir contextos de enseñanza del mundo real de los números racionales.

La aportación de Vergnaud (1983; 1988), al señalar que el prototipo de la estructura multiplicativa es la relación cuaternaria, devela la conexión que existe entre los problemas de multiplicar y dividir con el esquema de proporcionalidad. Con este esquema la noción de multiplicar se muestra como una relación funcional entre espacios de medida. Un espacio de medida puede considerarse como una estructura con dos elementos básicos: un par formado por un conjunto y una medida (M, x) . Esto determina tres categorías de problemas, según los espacios de medida sean uno (cálculo del escalar o de la medida), dos (isomorfismo de medidas, producto de medidas y proporción múltiple) y tres espacios de medida (función o proporción compuesta). A su vez, la posición del valor desconocido determina cuatro tipos de problemas: multiplicación, cuotición, partición y hallar el cuarto término de una proporción.

Planteamiento de la investigación

En la investigación que se describe en esta parte del capítulo, los datos que se analizan son fracciones y los problemas que se plantean son sobre la división de fracciones. Si bien, de acuerdo con la investigación precedente, es de esperar que los estudiantes enfrenten dificultades en el reconocimiento de la operación que resuelve los problemas y el uso de estrategias alternativas, es poco lo que se sabe acerca de los factores que determinan esas dificultades y comportamientos.

Variables de problema. En los años en que se llevó a cabo el estudio que nos ocupa no se disponía de investigaciones en las que se hiciera un análisis de la gran variedad de problemas escolares de división de fracciones y se categorizaran desde la perspectiva conjunta de las variables de problema: las formas o enunciados textuales que sugieren los subconstructos y contextos fenomenológicos de los números racionales, por un lado, y los tipos de problema que se siguen de la estructura multiplicativa, por otro. Estructura y enunciados textuales son las dos variables de problema que se usan en este estudio para categorizar en clases y subclases los problemas escolares de operación directa de división de fracciones.

Variables de resolución. Por otra parte, tampoco se disponía de estudios en los cuales se caracterizaran las actuaciones de los estudiantes al resolver los problemas de división de fracciones desde una perspectiva conjunta de

las variables de resolución: los algoritmos de la división de fracciones y los comportamientos ya observados en la investigación precedente; a saber: la falta de reconocimiento de la operación de un determinado problema de división de fracciones, evitar efectuar la operación directa para resolver el problema y preferencia por estrategias más complejas. Las estrategias, los algoritmos de división de fracciones y el evitar a hacer la operación, son los valores de la variable de resolución a tener en cuenta para describir el desempeño de los estudiantes al resolver problemas de división de fracciones.

Con base en las aportaciones de la investigación precedente como marco teórico y teniendo en cuenta las variables de problema, se planteó como primera parte de la indagación caracterizar los principales modelos (interpretaciones) de la división de fracciones e identificar y recopilar los tipos de enunciados de los problemas escolares de división de fracciones.

Para esta primera parte se utilizó la metodología de análisis “histórico epistemológico” de los libros de texto y manuales escolares. Con esta metodología se pretende identificar y caracterizar los elementos constitutivos del desarrollo y evolución histórica y curricular de un determinado contenido matemático escolar en diferentes momentos de la historia, con la intención de conocer lo que es o ha sido la práctica real de la enseñanza, ya que esos documentos son los registros disponibles del conocimiento matemático en un momento determinado de la historia.

Como segunda parte, se tomó como objetivo comparar los valores de la variable de problema con los de la variable de resolución observados en las respuestas de una muestra conveniente de estudiantes de secundaria a un cuestionario de lápiz y papel con distintos tipos de problemas de división de fracciones. Para esta comparación se utilizó la metodología del análisis de tareas ya descrita anteriormente.

Para guiar la investigación se formularon varias preguntas e hipótesis, entre ellas las siguientes:

- ¿Cuáles son los tipos de problemas multiplicativos que los estudiantes reconocen como problemas que se resuelven usando una división de fracciones?
- ¿Cómo median los modelos (semánticos) de división y el tipo de números implicados en el problema a la hora de reconocer cuál es la operación que se necesita para resolverlo?
- ¿Cuáles son los algoritmos que usan preferentemente los estudiantes cuando dividen fracciones?

Las hipótesis en relación con esas preguntas fueron:

- Los tipos de problemas que los estudiantes reconocen como aquellos que se pueden resolver con una división de fracciones dependen de su estructura, de las formas textuales incluidas en el enunciado y del tipo de datos.

- Los modelos semánticos de la división y el tipo de datos implicados en los problemas median obstruyendo o favoreciendo el reconocimiento de la operación que es necesario hacer para resolver el problema.
- Los estudiantes, cuando no reconocen que el problema es de división directa, recurren a plantear un esquema cuaternario que conduce a un método reglado (de regla de tres) y a métodos razonados que utilizan estrategias alternativas.

En cuanto a las variables de problema se identificaron los modelos semánticos y formas o enunciados textuales asociados que se encuentran en la Tabla 1.

Tabla 1
Formas textuales más usuales de la división

Modelo semántico	Formas textuales de división de números naturales	Formas textuales de división de fracciones
Partición	Partir o repartir en partes iguales	Repartir la fracción dividiendo en un número fraccionario de partes iguales
Medida	Averiguar cuántas veces cabe el divisor en el dividendo	Averiguar cuántas veces cabe una fracción en otra
Inversión de la multiplicación (aritmética)	Hallar un número entero que multiplicado por el divisor da el dividendo	Hallar una fracción que multiplicada por el divisor da el dividendo
Inversión del factor multiplicativo	Hacer el dividendo tantas veces menor como indica el divisor	Hacer el dividendo tantas veces menor como indica el numerador del divisor y tantas veces mayor como indica el denominador del divisor
Proporción	Valor unitario desconocido: El número que es a la unidad como el dividendo es al divisor Valor unitario conocido: El número que es al dividendo como la unidad es al divisor	

Nota. Elaboración propia.

En cuanto a los problemas, se hizo una búsqueda en los libros consultados que dio lugar a un amplio listado que se depuró al organizarlos en torno a las variables de problema: modelo semántico, estructura y tipo de datos.

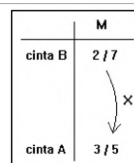
De este listado inicial, de 52 problemas multiplicativos, se extrajo una selección para el cuestionario de lápiz y papel que se aplicó a los estudiantes, atendiendo a que hubiera un representante de cada valor de la variable de problema, estructura y modelo semántico. Se descartaron los problemas correspondientes a la variable de modelo “partición” porque deja de tener sentido cuando el divisor no es natural, y a la variable datos que no fueran de división de fracciones por ser éstos los que interesaban para la investigación. También se descartaron los problemas de regla de tres, los de más de una etapa y los que tienen números mixtos en los datos.

Tabla 2*Problemas del cuestionario, caracterización y esquema de relaciones en juego*

Problema 1. (Las dos cintas) La longitud de la cinta A es $\frac{3}{5}$ m y la de la cinta B es $\frac{2}{7}$ m. ¿Cuántas veces la cinta A es tan larga como la cinta B?

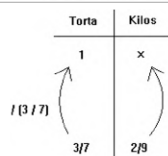
Modelo: Medida. Estructura: Un espacio de medida, cálculo del escalar.

Datos: $\frac{Q}{Q}$



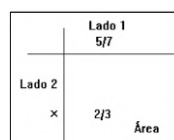
Problema 2. (Peso de la torta) $\frac{3}{7}$ de torta pesan $\frac{2}{9}$ de kilo. ¿Cuánto pesa la torta?

Modelo: Proporción de valor unitario desconocido. Estructura: Dos espacios de medida, $\frac{E'}{E} = I$. Isomorfismo de medidas. Datos: $\frac{Q}{Q}$



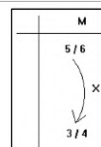
Problema 3. (La mesa de Ana) La superficie de la mesa de Ana es un rectángulo que mide $\frac{2}{3}$ de m². Sabiendo que uno de sus lados mide $\frac{5}{7}$ de metro, averigua cuánto mide el otro lado.

Modelo: Inversión de la multiplicación-factor perdido. Estructura: Producto de medidas. Datos: $\frac{Q}{Q}$



Problema 4. (Ecuación) Hallar el valor de x en la expresión: $\frac{5}{6} x = \frac{3}{4}$

Modelo: Inversión de la multiplicación-factor perdido. Estructura: un espacio de medida, cálculo del escalar. Datos: $\frac{Q}{Q}$. Descontextualizado



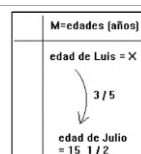
Problema 5. (Tarro de miel) En un tarro de miel caben $\frac{3}{5}$ de kg. ¿Qué cantidad de miel hay en el tarro si está lleno en sus $\frac{3}{8}$ partes?

Modelo: Medida. Estructura: Dos espacios de medida, Multiplicación con valor unitario conocido. Datos: $\frac{Q}{Q}$

Problema de control: No forma parte de la investigación. Se incluyó en el cuestionario definitivo con la intención de evitar que los estudiantes no consideren que todos los problemas son de división

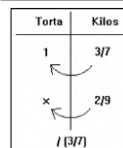
Problema 6. (Edades) Los 15 $\frac{1}{2}$ años que tiene Julio son los $\frac{3}{5}$ de la edad de Luis; ¿cuántos años tiene Luis?

Modelo: Inversión de la multiplicación-factor perdido. Estructura: Un espacio de medida M. Cálculo de la medida. Datos: $\frac{Q}{Q}$



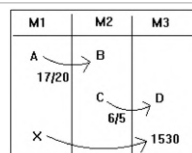
Problema 7. (Porción de torta) 1) $\frac{3}{7}$ de torta pesa $\frac{2}{9}$ de kilo. ¿Cuánto pesa la torta? 2) Si cada torta pesa $\frac{3}{7}$ de kilo, ¿qué porción de torta tendré con $\frac{2}{9}$ de kilo?

Modelo: Proporción de valor unitario conocido. Estructura: Dos, Espacios de Medida. Isomorfismo de M. División con valor unitario conocido. Datos: $\frac{Q}{Q}$



Problema 8. (Trigo) Sabiendo que la cantidad de harina que se obtiene del trigo es los $\frac{17}{20}$ de su peso, y la cantidad de pan obtenido de la harina es $\frac{6}{5}$ del peso de ésta, ¿cuánto trigo se necesita para obtener 1530 kg de pan?

Modelo: proporción con valor unitario conocido (alternativamente, inversión de la multiplicación o factor perdido). Estructura: Tres espacios de medida. Función compuesta. Datos: $\frac{Z}{Q}$



Nota. Elaboración propia. El problema 1 es tomado de Yamaguchi y Jwasaki (1999), y los problemas 2 y 7 son tomados de Rey Pastor y Puig Adam (1932, p. 211)

Problemas del cuestionario

En la Tabla 2 se encuentran los problemas considerados en el cuestionario para recopilar los datos de la investigación; en ella se incluyen las características de los problemas considerados, así como los esquemas que muestran las relaciones en juego.

El cuestionario final se aplicó a 21 estudiantes de cuarto curso de la ESO (Educación Secundaria Obligatoria), de 12-16 años, en un instituto público en Valencia. Para el análisis de las respuestas se consideraron como variables de resolución las tres siguientes: esquema, método y algoritmo. Esto conforma una terna que denominamos enfoque y que caracteriza la actuación de cada estudiante.

Algunos resultados

Los estudiantes de este grupo: 1) identifican mejor la división de fracciones con la inversión de la multiplicación o factor perdido, 2) tienen dificultades para identificar la división de fracciones con una proporción, pero parece que reconocen más fácilmente la de valor unitario conocido que la de valor unitario desconocido, y 3) no identifican la división de fracciones con la división medida, ya que en los problemas de medida tienden a dar respuestas aditivas.

Figura 1

Estrategia de resolución de Cristina al problema 1

1 La longitud de la cinta A es $\frac{3}{5}$ m y la de la cinta B es $\frac{2}{7}$ m. ¿Cuántas veces la cinta A es tan larga como la cinta B?

$\frac{3}{5} \text{ m} \rightarrow 0,6 \text{ m}$ $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{7} = \frac{21}{35} = \frac{10}{35} = \frac{11}{35}$
 $\frac{2}{7} \text{ m} \rightarrow 0,285 \text{ m}$ $m \text{ cm}(5,7) = 5 \cdot 7 = 35$

La cinta A es $\frac{11}{35}$ veces tan larga como la cinta B.

Explica qué operación u operaciones hay que hacer y por qué crees que son esas operaciones:

Hay que hacer una resta porque para haya la diferencia entre las dos se hacen las restas. Se saca el mínimo común múltiplo porque no tienen las dos fracciones el mismo denominador y por eso no se pueden restar.

En la Figura 1 se puede ver la resolución de Cristina⁵ al problema 1, este es un ejemplo de una resolución aditiva; a continuación la transcripción de su escritura:

⁵ Los nombres de los estudiantes que aparecen en el documento son pseudónimos para proteger su identidad.

Transcripción:

$$\frac{2}{3} \text{ m} \rightarrow 0'6 \text{ m}$$

$$\frac{2}{7} \text{ m} \rightarrow 0'285 \text{ m}$$

$$\frac{3}{5} - \frac{2}{7} = \frac{21}{35} - \frac{10}{35} = \frac{11}{35}$$

$$mcm(5,7) = 5 \cdot 7 = 35$$

La cinta A es $\frac{11}{35}$ veces tan larga como la cinta B

Hay que hacer una resta porque para hallar [sic] la diferencia entre las dos se hacen las restas. Se saca el mínimo común múltiplo porque no tienen las dos fracciones el mismo denominador y por eso no se pueden restar

Hipótesis 1. La estructura de los problemas condiciona el reconocimiento de la división de fracciones y el enfoque de su resolución.

- En el caso de un sólo espacio de medida, problemas 1, 4 y 6, los enfoques de resolución más frecuentes son: planteamiento y resolución de una ecuación, y división directa.
- Con respecto al isomorfismo de medidas, problemas 2, 5 y 7, el enfoque de resolución más frecuente es el funcional de la regla de tres.

Hipótesis 2. Los modelos semánticos de la división influyen en el reconocimiento de la división de fracciones como método para resolver el problema.

- La división directa predomina en los problemas que corresponden al modelo de medida.
- La regla de tres predomina en los problemas que corresponden al modelo de proporción, independientemente de si son de valor unitario conocido como es el 2, como si son de valor unitario desconocido como son el 7 y el 8. No obstante, los problemas 7 y 8 tienen una estructura diferente. Así, mientras que el problema 7, es de isomorfismo de medidas, el 8, que resultó de gran dificultad para los estudiantes, consta de más de una etapa, y es de tres espacios de medida.
- El método de ecuación predomina en los problemas 3, 4 y 6, que corresponden al modelo de inversión de la multiplicación o factor perdido.

Hipótesis 3. Los estudiantes, cuando no reconocen que el problema es de división directa, recurren a plantear un esquema cuaternario que conduce a un método de regla de tres o a métodos razonados que utilizan estrategias alternativas.

Un ejemplo de estrategia alternativa es la resolución de Estefanía al inciso 1 del problema de la torta que aparece en la Figura 2, la cual se basa en el valor complementario del peso conocido. Estefanía resuelve el problema por etapas. Dado que el total de la torta es $\frac{3}{7} + \frac{4}{7} = 1$, determina el peso de $\frac{4}{7}$ mediante una regla de tres; en una segunda etapa calcula el peso de la torta entera, sumando los pesos de $\frac{3}{7}$ y $\frac{4}{7}$.

Figura 2*Resolución de Estefanía al inciso 1 del problema 7*

Handwritten solution showing the calculation of the total weight of a cake from a fraction. It starts with $\frac{3}{7}$ de la torta $\rightarrow \frac{2}{9}$ kg. Then it shows a system of equations: $\frac{3}{7} \rightarrow \frac{2}{9}$ and $\frac{4}{7} \rightarrow \times$. The solution is $\frac{4}{7} \cdot \frac{2}{9} = \frac{8}{63} \div \frac{3}{7} = \frac{8}{27} = 0.2962 \text{ kg peso los 4 parts del total}$. Then it calculates the total weight: $\frac{8}{27} + \frac{2}{9} = \frac{14}{27} = 0.518 \text{ kg en total peso}$. Below the calculations, there is a note: "Explica cómo lo haces: Por medio de 1 regla de 3 encontramos lo que pesan los $\frac{4}{7}$ y después sumamos los $\frac{3}{7}$ que faltan para así saber el total que pesa toda la torta."

Otra estrategia alternativa consiste en reducir a la fracción unitaria, como se muestra en el ejemplo de Mercé que aparece en la Figura 3. Como puede verse, Mercé a partir del valor del peso de $\frac{3}{7}$ de torta, halla el peso de $\frac{1}{7}$ de torta (dividiendo por $\frac{3}{1}$) y para obtener el peso de toda la torta halla el peso de $\frac{7}{7}$ multiplicando por $\frac{7}{1}$.

Implicaciones para la enseñanza

Es usual en los libros de texto que la división de fracciones se trate siempre de la misma manera, mediante un algoritmo (productos cruzados o invertir y multiplicar) y en situaciones descontextualizadas. De hecho, los problemas multiplicativos suelen aparecer al margen de las unidades didácticas destinadas a las fracciones y son considerados como “una cosa aparte”, lo que hace que pocos estudiantes asocien los problemas multiplicativos con la operación de división directa de fracciones y prefieran transitar por caminos intermedios o alternativos.

Figura 3*Resolución de Mercé al problema 8*

2.- TORTAS

1) $\frac{3}{7}$ de torta pesan $\frac{2}{9}$ de kilo. ¿Cuánto pesa la torta?

2) Si cada torta pesa $\frac{3}{7}$ de kilo, ¿qué porción de torta tendré con $\frac{2}{9}$ de kilo?

(Rey Pastor y Puig Adam, "Elementos de Aritmética", 1932, pgs. 211 y 212).

1) $\frac{3}{7} \rightarrow \frac{2}{9}$ $\frac{1}{7} \rightarrow \frac{2}{9} : \frac{3}{1} = \frac{2}{27}$
 $\frac{7}{7} \rightarrow \times$ $\frac{7}{7} = \frac{2}{27} \cdot \frac{7}{1} = \frac{14}{27}$
 La torta pesa $\frac{14}{27}$ kg

2) $\frac{3}{7} \rightarrow \frac{7}{7}$ $\frac{7}{7} \cdot \frac{2}{9} = \frac{14}{63} : \frac{3}{7} = \frac{98}{189}$
 $\frac{2}{9} \rightarrow \times$

Tendré $\frac{98}{189}$ de torta.

La confirmación de las hipótesis implica que la enseñanza de los problemas multiplicativos debe tener en cuenta las variables de los problemas y de enseñanza; es decir, del hecho de que los problemas tienen diferente estructura y modelos semánticos y formas textuales asociados, y de que hay diferentes enfoques de resolución, métodos y algoritmos, por tanto, su enseñanza no puede ser igual, sino diferenciada para cada tipo de problema.

Por ejemplo, se debería tener presente que existe una interrelación entre las variables de los problemas, las variables de enseñanza y las variables de resolución. Así, hay que destacar en la enseñanza que problemas con diferente estructura tienen modelos de división asociados distintos y, por tanto, enfoques de resolución también diferentes. Por consiguiente, no puede organizarse la enseñanza asociando el mismo modelo de división ni el mismo enfoque de resolución a problemas con estructuras diferentes.

Mirando hacia adelante: Estudios de la tercera etapa

Con el propósito de considerar algunos de los desafíos identificados en el desarrollo de la aritmética escolar —especialmente en lo referente a la transición del uso de los números naturales al de los números racionales—, en 2015 se dio inicio, como se mencionó al comienzo de este capítulo, a la tercera etapa de colaboración entre los investigadores autores de este texto.

En esta etapa, los autores han colaborado llevando a cabo estudios relacionados con dos líneas principales de investigación y desarrollo. Por un lado, se han hecho indagaciones enfocadas en los números racionales, específicamente sobre las fracciones y la resolución de problemas verbales. Por otro lado, dichas indagaciones han facilitado la integración de tecnologías digitales y el desarrollo de propuestas metodológicas para la resolución de problemas verbales, con el objetivo de mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones en diferentes niveles educativos y promover el desarrollo de habilidades en el proceso de resolución de problemas.

Las siguientes secciones contienen resultados derivados de la primera indagación de la tercera etapa, cuyo objetivo fue caracterizar el desempeño de estudiantes mexicanos de bachillerato (15 a 17 años de edad) al resolver problemas verbales relacionados con fracciones. Asimismo, se expone el método de lecturas analíticas y su relación con la resolución de problemas verbales, destacando su uso para analizar los procesos de resolución de un problema, en particular los usados por los estudiantes.

Indagación sobre resolución de problemas con fracciones

El estudio de las fracciones comienza formalmente en la educación básica. En México, España y otros países se inicia la enseñanza de este concepto cuando los niños tienen alrededor de 8 años de edad. Desde entonces, su estudio continúa en el nivel secundario, media superior (bachillerato) y

superior o universitario hasta llegar al conocimiento de los números racionales. Por ello, se espera que al iniciar el bachillerato los alumnos hayan construido conocimiento y desarrollado habilidades específicas y suficientes para ser competentes en actividades en las que las fracciones juegan diferentes papeles. Una de las preguntas que guía esta indagación es: ¿qué conocimiento sobre las fracciones han construido los alumnos de bachillerato que les permite resolver problemas verbales?

Para dar respuesta a la pregunta anterior se diseñó un cuestionario con una serie de problemas en los que se usan fracciones. El cuestionario fue aplicado en diferentes centros educativos de nivel media superior en la Ciudad de México. Parte de los resultados de ese estudio se presentaron en congresos y publicaciones, ver por ejemplo Valenzuela et al. (2022).

En dicha investigación se consideró la aplicación y análisis de tres problemas verbales, y los objetivos fueron: 1) determinar las diferencias por edad y tipo de bachillerato en cuanto al éxito en la resolución de problemas con fracciones, y 2) analizar los procesos de resolución de los estudiantes según el tipo de problema, la edad y tipo de bachillerato.

El tipo de bachillerato se distingue porque en México existen principalmente tres: 1) el bachillerato general, cuyo propósito es preparar a los estudiantes para su ingreso a la universidad, 2) el bachillerato tecnológico que proporciona un certificado en diferentes áreas tecnológicas, y, además, los prepara para su ingreso a la universidad; y 3) el bachillerato técnico profesional proporciona un certificado profesional como técnico.

En el diseño y en el proceso de resolución de un problema verbal se pueden identificar algunas variables, entendidas como las características del problema mismo que pueden influir en el proceso de resolución del estudiante. Puig y Cerdán (1988) identifican tres tipos de variables que pueden ser de interés al tratar con problemas verbales: las variables sintácticas, las de contexto y las de contenido. Para el diseño y caracterización del tipo de problemas verbales que se aplicaron, se tomaron como base los estudios de Gómez et al. (2016) y la caracterización de problemas en un contexto de herencia, en los que cada heredero recibe una porción de una cantidad conocida, o el legado se divide proporcionalmente. El contenido que subyace en ese tipo de problema es referente a la fracción, en particular, según los estudios de Freudenthal (1983) y Kieren (1980) se identifica el uso de la fracción como operador y fracturador. Los problemas que se propusieron se muestran en la Figura 4.

Como puede verse en la Figura 4, los tres problemas (P1, P2 y P3) tienen una estructura similar. Una diferencia es que P2 es de dos etapas, por lo que el proceso de redefinición del todo y el uso de la fracción como operador aparece dos veces. Otra diferencia aparece en P3, en el que se asigna una cantidad a la parte de una parte desconocida.

Figura 4

Problemas propuestos en el cuestionario aplicado a alumnos de bachillerato en México

P1. Un poste está pintado de tres colores diferentes: rojo, azul y negro. La parte negra mide $\frac{1}{3}$ de la longitud del poste, la parte roja mide $\frac{2}{3}$ de la longitud que queda y la parte azul mide 2,70 metros. ¿Cuál es la longitud del poste?

P2. Miguel está jugando a un videojuego. Debe terminar el juego en un tiempo indicado. Juega un tercio del tiempo, pausa el juego y se va a almorzar. Cuando regresa, juega $\frac{1}{5}$ del tiempo que le queda. Después de cenar juega una séptima parte del tiempo que le queda, entonces, aparece en la pantalla un mensaje "quedan 32 minutos". ¿Cuánto tiempo se indicó en la pantalla al iniciar el juego?

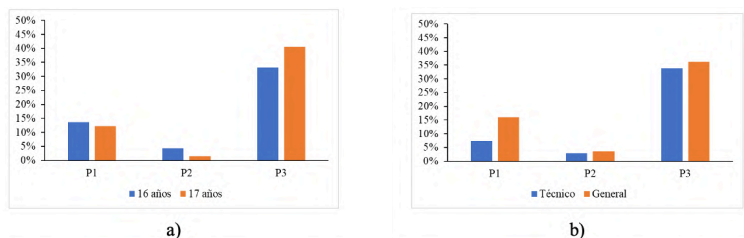
P3. Un ladrón entró en un palacio y encontró una bolsa llena de monedas. La tomó y trató de escapar, pero un guardia le detuvo. Entonces, le ofreció la mitad de las monedas con tal de que le dejara escapar. El guardia le devolvió 80 monedas y le dejó marchar. Pero fue sorprendido por otro guardia, a quien también le ofreció la mitad de las monedas que le quedaban. Cuando el guardia recibió esta cantidad, también fue generoso y le devolvió 50 monedas. Al final el ladrón sale del palacio con 200 monedas en la bolsa. ¿Cuántas monedas había en la bolsa al principio?

Nota: Los colores en los enunciados indican lo siguiente: Rojo- aparece la idea de un todo y de partes-; Morado- la fracción puede usarse como fracturador (parte-todo)-; Verde- la fracción puede usarse como operador y redefinir el todo-; Amarillo- una medida es asignada a una de las partes-; Azul- identificación del todo y su medida (valor de magnitud o cantidad)-.

Los resultados que se describen corresponden a la aplicación de una prueba a 180 estudiantes de 16 años y 78 estudiantes de 17 años, quienes cursaban el bachillerato en diferentes instituciones de la Ciudad de México, ya sea en modalidad general o técnica. Considerando la totalidad de la muestra, el éxito en la resolución de los problemas es bajo (ver Figura 5), ya que 13.17% del total tuvo éxito al resolver P1, solo 3.30% resolvió correctamente P2 y 35.45% respondió correctamente P3. Cabe señalar que, para la resolución de este último problema, los estudiantes emplearon principalmente métodos de prueba y error. En cambio, los procesos que siguieron para los otros dos problemas están asociados principalmente a procesos aritméticos y en pocos casos algebraicos, apoyándose en ambos casos en representaciones gráficas.

Figura 5

Éxito obtenido: a) por edad, b) por tipo de bachillerato



Nota. Elaboración propia

Al hacer la comparación del éxito obtenido por edad y por tipo de bachillerato, de acuerdo con cada problema, pudo observarse que los alumnos

de 16 años tuvieron mayor éxito al resolver los problemas P1 y P2, mientras que los alumnos de 17 años tuvieron mayor éxito al resolver P3 (ver Figura 5a). Aparentemente los alumnos de mayor edad recurrieron a métodos de prueba y error. Con respecto al éxito obtenido por tipo de bachillerato, pudo observarse que tuvieron mayor éxito los alumnos del bachillerato general (Figura 5b).

Entre los resultados de este estudio se tiene que los estudiantes pertenecientes al bachillerato general y con menor edad obtuvieron mayor éxito en la resolución de los problemas. Además, pese a que los cursos están enfocados en el estudio del álgebra, los estudiantes generalmente no utilizaron métodos algebraicos para resolver los problemas, sino que, emplearon procedimientos aritméticos para resolver P1 y P2, y estrategias de ensayo y error para resolver P3, conocimientos y habilidades asociados principalmente a lo que se estudia en la educación primaria. Aunado a esto, pudieron identificarse dificultades en el proceso de comprensión del problema; en los tres problemas los estudiantes tuvieron dificultades para interpretar el sintagma “lo que queda” y asociarlo con el uso de la fracción como operador, en el que se hacen partes de partes y redefiniciones del todo.

Por lo anterior, es necesario continuar investigando la problemática relacionada con la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones, desde la educación básica hasta la educación superior. En particular, resulta crucial indagar sobre la enseñanza de la fracción como operador, dado que existe evidencia de las dificultades asociadas a este uso. Asimismo, es importante proseguir con investigaciones centradas en la resolución de problemas.

En este contexto, y con base en la literatura existente, se han propuesto las lecturas analíticas como un método para desarrollar habilidades de estudiantes durante el proceso de resolución de problemas, facilitar el análisis del proceso que siguen al resolverlos y contribuir al desarrollo de sistemas tutoriales inteligentes⁶.

El Método de Lecturas Analíticas y la resolución de problemas verbales

Los problemas verbales forman parte esencial de la educación matemática, una tradición que se remonta a tiempos antiguos, como lo evidencian los registros de civilizaciones como la egipcia, china, india y griega, entre otras (Swetz, 2009). De acuerdo con Verschaffel et al. (2020), un problema verbal se define como una representación textual de una situación que incluye datos numéricos, los cuales deben ser procesados mediante operaciones matemáticas para responder a las cuestiones planteadas.

⁵ Este estudio, junto con el anterior se enmarca en el proyecto autonómico CIAICO 2022/154.

Para Puig y Cerdán (1988) el proceso de resolución de un problema es “la actividad mental desplegada por el resolutor desde el momento en que, siéndole presentado un problema, asume que lo que tiene delante es un problema y quiere resolverlo, hasta que da por acabada la tarea” (p. 8). Para estos autores existen dos niveles para analizar el proceso de resolución de un problema, uno es el microscópico y otro el macroscópico. En el microscópico se examinan conductas aisladas o concretas. Mientras que, en el nivel de descripción macroscópico se observa la totalidad del proceso de resolución. Dicho proceso se describe por fases, siendo estas la lectura, comprensión, traducción, cálculo, solución y revisión-comprobación.

Basándose en las ideas de Puig y Cerdán (2014), quienes sostienen que para traducir el enunciado de un problema verbal al lenguaje matemático es necesario reescribir el texto del problema de manera que las cantidades involucradas queden claramente explícitas y sus relaciones se expresen mediante una fórmula aritmética o algebraica, se puede afirmar que esta reformulación se fundamenta en los métodos de análisis-síntesis o en el enfoque cartesiano. Este proceso implica una lectura profunda y detallada del problema, conocida como lectura analítica. En este sentido, Gómez et al. (2016) explican que hacer una lectura analítica implica reducir el enunciado del problema “a una lista de cantidades y de relaciones entre cantidades de modo que puede dar lugar a una ecuación o a una fórmula” (p. 588).

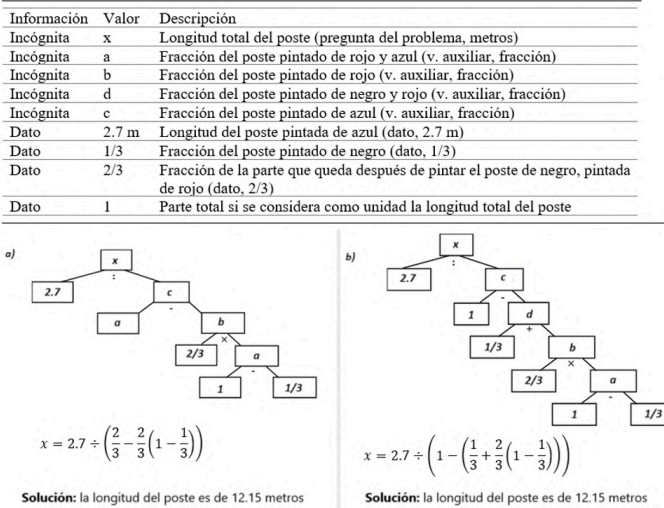
Las ideas antes descritas condujeron a la definición de un método en el contexto de la resolución de problemas al que se denominó Método de Lecturas Analíticas. Se trata de una estrategia pedagógica que utiliza estructuras de grafos jerárquicos (árbol) para representar y analizar conceptos, relaciones y estructuras de información obtenidas a partir de una lectura analítica, lo que permite visualizar la interconexión de ideas mediante nodos y aristas, facilitando la comprensión, el razonamiento lógico y la toma de decisiones a partir de datos complejos.

El Método de Lecturas Analíticas se divide en cinco pasos: 1) la lectura del problema, 2) la construcción del diccionario de cantidades conocidas y desconocidas, así como las posibles relaciones que se establecen entre ellas para encontrar el valor de la incógnita o valor desconocido, 3) la representación de relaciones utilizando grafos tipo árbol, que tienen ciertas propiedades, 4) efectuar los cálculos con la ayuda del grafo-árbol, y 5) dar respuesta al cuestionamiento en el enunciado del problema y comprobación de su veracidad.

Según Roy y Roth (2016), un árbol es una estructura de datos que consta de nodos conectados por aristas, con la propiedad de no contener ciclos. Para el método de lecturas analíticas, se utiliza específicamente un árbol binario enraizado, en el que hay un nodo superior, comúnmente conocido como raíz del árbol, y cada nodo está vinculado a cero o dos nodos sucesores.

Los nodos sin nodos sucesores se denominan hojas. Al resolver un problema los nodos muestran las variables involucradas en el enunciado y las aristas las relaciones entre ellas. Así, un grafo tipo árbol permite tener una reproducción visual de la lectura analítica de un problema verbal.

Figura 6
Lecturas analíticas que representan una resolución aritmética: a) directa, b) indirecta



Este método, como ya se mencionó, puede emplearse para distintos fines: 1) en la instrucción para desarrollar habilidades en la resolución de problemas, 2) en la evaluación e investigación para analizar los procesos que los estudiantes llevan a cabo al resolver problemas, y 3) para el diseño de sistemas tutoriales orientados a la resolución de problemas.

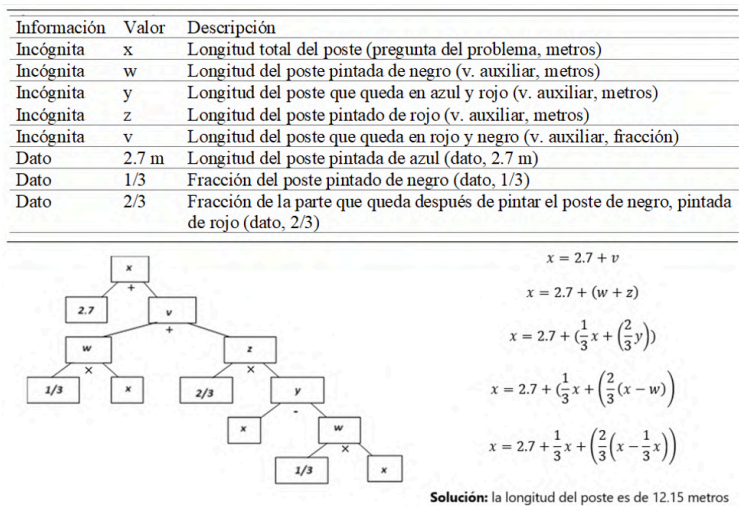
En este capítulo se expone un ejemplo de su uso para analizar procesos de resolución de estudiantes de bachillerato, tomando como referencia el problema P1 de la Figura 4. Para este uso del método es fundamental interpretar la mayor cantidad posible de procesos que los estudiantes pudieran seguir, lo que se hace ya sea antes, o bien durante y después de la recolección de datos. Esto es necesario porque un mismo problema puede ser interpretado desde diferentes lecturas analíticas, dependiendo del razonamiento del resolutor y de cómo relacione las cantidades involucradas. A continuación, se muestran tres prototipos de procesos de resolución diferentes para P1.

Como puede verse en el cálculo de la lectura analítica del P1 que se expone en la Figura 6, las expresiones que surgen para establecer las relaciones entre las cantidades son aritméticas, por ello, la lectura analítica de dicho proceso se caracteriza de la misma manera. El proceso de resolución se

clasifica como directo o indirecto, según si las relaciones entre las cantidades se establecen respetando o no el orden en el que éstas aparecen en el enunciado del problema. Una lectura analítica de naturaleza algebraica puede verse en la Figura 7.

Una diferencia entre los procesos algebraicos y aritméticos que puede notarse en los grafos es que la incógnita principal, que responde a la pregunta del problema, puede aparecer más de una vez en los nodos del grafo cuando la resolución es algebraica; pero, cuando ésta es aritmética sólo aparece en el nodo que representa la raíz del árbol.

Figura 7
Lectura analítica que representa una resolución algebraica



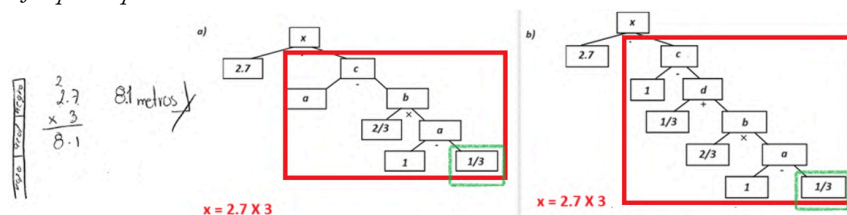
Las lecturas analíticas son utilizadas para interpretar los procesos que siguen los estudiantes al resolver un problema. Por ejemplo, uno de los errores más comunes que los estudiantes de bachillerato cometieron al responder el P1 es el que se observa en la Figura 8. En ese proceso aritmético de resolución no hay un reconocimiento de la fracción como operador y la redefinición del todo asociados al sintagma “de lo que queda”, esto hace que los datos en el recuadro rojo no sean interpretados. En cambio, el dato del recuadro verde da cuenta del número de partes en las que se divide la longitud del poste, o sea, se reconoce solo la fracción como fracturador, y por eso, esas dos cantidades se relacionan multiplicando 2.7 —la longitud de una parte— por 3 —número de partes en las que se divide la longitud del poste—.

Una de las hipótesis que se siguen probando es que, cuando los estudiantes usan el método de lecturas analíticas como herramienta para resolver problemas verbales, ya sea con lápiz y papel o a través de sistemas tutoriales inteligentes, desarrollan habilidades que le permiten, principal-

mente, reconocer, entender y explicar las relaciones entre las cantidades que aparecen en el enunciado de los problemas.

Figura 8

Ejemplo del proceso de resolución del P1 de estudiantes de bachillerato



Consideraciones finales

En este capítulo se han descrito tres estudios que muestran una ruta seguida a lo largo del tiempo para comprender con más profundidad los procesos que llevan a cabo los alumnos de los distintos niveles educativos para construir conocimientos relacionados con la aritmética de los números racionales y desarrollar habilidades para usar esos números en la resolución de una variedad de problemas que conllevan diversos niveles de complejidad. Ha quedado claro en este proceso que el tránsito del uso de los números naturales al de los números racionales es un proceso complejo que requiere de la intervención de los docentes para apoyar a los alumnos a recorrer ese camino. Por ello, uno de los principales objetivos de los proyectos de investigación llevados a cabo fue identificar los aspectos y elementos y contar con explicaciones que sirvieran a los docentes de los diferentes niveles educativos para estructurar secuencias de enseñanza que favorezcan la construcción de conocimientos sobre los números racionales de forma más accesible. La última sección de este capítulo traza una ruta para continuar la colaboración entre investigadores de México y España centrada en el estudio de la resolución de problemas verbales mediante el método de lecturas analíticas y el uso de tecnología.

Referencias

- Behr, M. J., Lesh, R., Post, T., & Silver, A. (1983). Rational numbers concepts. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 91–126). Academic Press.
- Bell, A., Swan, M., & Taylor, G. (1981). Choice of operation in verbal problems with decimal numbers. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 399–420.
- Contreras, M. (2012). *Problemas multiplicativos relacionados con la división de fracciones. Un estudio sobre su enseñanza y aprendizaje* [Tesis doctoral]. Universidad de Valencia.

- Fernández, A., Figueras, O., Gómez, B., Monzó, O., & Puig, L. (2009). *Competencias en razón y proporción en la escuela primaria*. Universitat de València.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Springer.
- Gómez, H. (1996). *Indicios del pensamiento proporcional. Un estudio en la escuela primaria sobre competencias al resolver situaciones de cambio* [Tesis de maestría]. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav.
- Gómez, B., Sanz, M. T., & Huerta, I. (2016). Problemas descriptivos de fracciones. *Bolema*, 30(55), 586–604. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n55a14>
- Hart, K. M. (Ed.). (1980). *Secondary school children's understanding of mathematics (Report of the Concepts in Secondary Mathematics and Science Programme)*. University of London, Centre for Science Education.
- Hart, K. M. (Ed.). (1981). *Children's understanding of mathematics: 11–16*. John Murray.
- Jiménez de la Rosa, E. (1996). *De la lectura del error a una interpretación de los saberes de los niños. Un estudio en la escuela primaria sobre competencias al resolver situaciones de cambio* [Tesis de maestría]. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav.
- Kieren, T. (1980). The rational number construct: Its elements and mechanisms. En T. Kieren (Ed.), *Recent research on number learning* (pp. 125–149). ERIC/SMEAC.
- Kieren, T. (1988). Personal knowledge of rational numbers: Its intuitive and formal development. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades*, 2 (pp. 162–181). National Council of Teachers of Mathematics.
- Muñoz, E. (1996). *Pensamiento relacional en una etapa de transición. Un estudio en la escuela primaria sobre competencias al resolver situaciones de cambio* [Tesis de maestría]. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav.
- Newton, I. (1707). *Arithmétique universelle* (N. Beudeaux, Trad.). Chez Bernard.
- Puig, L. (2004). *Memoria de actividades realizadas en el marco del convenio de colaboración entre la Universidad de Valencia y el Programa Nacional de Formación y Actualización de Profesores de Matemáticas con sede en el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional*. Documento interno PNFAPM/Cinvestav-Universitat de València.
- Puig, L. (2017). *Memoria de actividades realizadas en el marco del convenio de colaboración entre la Universidad de Valencia y el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional*. Documento interno Cinvestav-Universitat de València.
- Puig, L., & Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares*. Síntesis.
- Puig, L., & Cerdán, F. (2014). Acerca del carácter aritmético o algebraico de los problemas verbales. En B. Gómez, & L. Puig (Eds.), *Resolver problemas: Estudios en memoria de Fernando Cerdán* (pp. 21–34). Universitat de València.

- Rey Pastor, J., & Puig Adam, P. (1932). *Elementos de aritmética. Col. Elemental intuitiva*. (Tomo I. Sexta edición). Imp. A. Marzo.
- Roy, S., & Roth, D. (2016). *Solving general arithmetic word problems*. arXiv. <https://arxiv.org/abs/1608.01413>
- Sinicrope, R. W., Mick, H. R., & Kolb, J. (2002). Interpretations of fraction division. En B. Litwiller, & G. Bright (Eds.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions* (pp. 153–155). Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics.
- Swetz, F. (2009). Culture and the development of mathematics: A historical perspective. En B. Greer, S. Mukhopadhyay, A. B. Powell, & N. Nelson-Barber (Eds.), *Culturally responsive mathematics education* (pp. 11–42). Routledge.
- Valenzuela, C., Sanz, M. T., Figueras, O., Gómez, B., & López-Iñesta, E. (2022). En C. Fernández, S. Llinares, A. Gutiérrez, & N. Planas (Eds.), *Proceedings of the 45th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, p. 307). PME.
- Verschaffel, L., Schukajlow, S., Star, J., & Van Dooren, W. (2020). Word problems in mathematics education: A survey. *ZDM Mathematics Education*, 52(1), 1–16. <https://doi.org/10.1007/s11858-020-01130-4>
- Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. En R. Lesh, & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematical concepts and processes* (pp. 127–174). Academic Press.
- Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. En J. Hiebert, & M. Behr (Eds.), *Numbers concepts and operations in the middle grades* (pp. 141–161). Erlbaum.
- Yamaguchi, T., & Iwasaki, H. (1999). *Division with fractions is not division but multiplication: on the development from fractions to rational numbers in terms of the generalization model designed by Dörfler*. En Proceedings of the 23rd Conference of PME (Vol. IV, pp. 337–344).

El esquema gráfico de la derivada. Una colaboración entre investigadoras de España y México

The graphic schema of the derivative. A collaborative work between Spanish and Mexican researchers

María Trigueros ¹ 

Edelmira Badillo ² 

Gloria Sánchez-Matamoros ³ 

Lidia Aurora Hernández-Rebollar ⁴ 

Resumen

En este capítulo se hace un recorrido por las contribuciones al esquema de la derivada realizadas por las autoras, que dan cuenta de una fructífera colaboración entre investigadores de España y México. Este trabajo se ha ido desarrollando a través de la formación de este equipo, que ha ido abordando conceptos del cálculo diferencial usando las herramientas de APOE (Acción, Proceso, Objeto y Esquema). A través del capítulo se muestra la evolución del foco de las investigaciones, comenzando por el desarrollo y refinamiento de una descomposición genética de la derivada, seguido de un estudio riguroso sobre el esquema gráfico de la derivada, hasta profundizar en los mecanismos de la tematización de dicho esquema.

¹ trigue@itam.mx

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

² edelmira.badillo@uab.cat

Universidad Autónoma de Barcelona, España

³ gsanchezmatamoros@us.es

Universidad de Sevilla, España

⁴ lidia.hernandez@correo.buap.mx

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Palabras clave

Cálculo diferencial, esquema gráfico de la derivada, teoría APOE, tematización del esquema, mecanismos de tematización.

Abstract

This chapter presents an overview of the contributions to the concept of the derivative made by the authors, which reflect a fruitful collaboration between researchers from Spain and Mexico. The specific topics addressed have been driven by the needs and interests of the team of authors, so they have addressed differential calculus concepts using APOS theory tools. Through the chapter it is possible to follow the evolution of the researchers focus on the different research studies, starting from the development and refinement of a genetic decomposition for derivatives. followed by a rigorous approach to the graphic derivative schema and leading to a deep analysis of the thematization mechanisms involved in the thematization of the mentioned schema.

Keywords

Differential calculus, graphic derivative Schema, APOS theory, Schema thematization, thematization mechanisms.

Historia de la colaboración

Las diversas colaboraciones que han llevado a la formación del equipo de investigación que conforman las autoras de este trabajo estuvieron motivadas por el interés compartido en la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto y Esquema), especialmente en su aplicación a los contenidos del cálculo diferencial, con un énfasis particular en la comprensión de la derivada. Los encuentros entre las investigadoras tuvieron lugar a lo largo de diferentes etapas de su trayectoria profesional, lo que permitió que el grupo se consolidara gradualmente. Al igual que otros equipos de colaboración, este se fue formando mediante encuentros académicos a lo largo de su formación predoctoral y en su posterior consolidación como investigadoras en el área.

El primer contexto de encuentro se remonta a la etapa de formación doctoral de dos de las autoras. Desde 1999 y hasta la fecha, Gloria Sánchez-Matamoros y Edelmira Badillo han coincidido en el Grupo de Investigación de Análisis Matemático (GIDAM) de la Sociedad Española de Educación Matemática (SEIEM). Este seminario permanente anual del GIDAM, que reúne a investigadores expertos y noveles interesados en el estudio de teorías para abordar problemas de investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje de temas relacionados con el pensamiento matemático avanzado, les permitió conocer y profundizar, entre otras teorías, en las herramientas teóricas y metodológicas de la teoría APOE.

El interés común en el estudio de la derivada, centrado en la comprensión mostrada por los estudiantes de bachillerato y primer curso de universidad (en el caso de Gloria) y en la comprensión de los profesores de matemáticas

en ejercicio (en el caso de Edelmira), les permitió avanzar juntas y profundizar en la lectura de los trabajos que publicaban los participantes del grupo RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics Education Community), del cual María formaba parte. De manera especial, en el GIDAM se discutían e incorporaban las contribuciones centradas en la comprensión del esquema de la derivada y el esquema gráfico de la derivada, estudios en los que María había participado como autora (por ejemplo, Asiala et al., 1997; Cooley et al., 2007). Es así como desde diferentes enfoques de investigación, se profundiza y se hacen aportaciones a la teoría APOE, refinando algunas de sus herramientas a partir de los resultados de los estudios realizados en el seno del GIDAM y de las ideas discutidas en los espacios de encuentro anual sobre diversos aspectos relacionados con la comprensión de la derivada: tipos de tareas, enriquecimiento de las descomposiciones genéticas de la derivada, contribuciones al análisis de los esquemas de la derivada, entre otros.

En octubre de 2010, Vicenç Font y Edelmira Badillo fueron invitados por la Embajada de España en México a participar en las Jornadas Binacionales México-España para la Enseñanza de las Matemáticas en el Colegio Madrid de México. Estas jornadas fueron el contexto en el que coincidieron con María Trigueros e Ivonne Sandoval, quienes también participaron como ponentes representantes de México. Este encuentro marcó un itinerario de colaboración entre Edelmira, María y Vicenç, centrado en la revisión de la descomposición genética (DG) de la derivada, que era uno de los resultados de la tesis doctoral de Edelmira (Badillo, 2003). Esta DG de la derivada fue refinada de la propuesta por RUMEC, incorporando elementos semióticos del Enfoque Ontosemiótico de la instrucción matemática (EOS). De aquí nacen las primeras colaboraciones conjuntas que se inician con una conversación en el evento y, posteriormente, se sella en una cena agradable en la que decidieron compartir sus conocimientos sobre APOE y el EOS, asumiendo el reto de usar el contexto de la revisión de la DG de la derivada propuesta por Edelmira para establecer un diálogo entre dichas teorías.

Poco tiempo después se reúnen en Barcelona para continuar este trabajo que resultó muy interesante y que les acercó mucho. Satisfechos con los resultados obtenidos decidieron presentarlos como comunicación en el Simposio de la SEIEM (Font et al., 2012). Un avance sobre el uso comparativo del EOS y APOE, mostrando tanto similitudes y diferencias como dificultades y potencialidades en el uso conjunto de las herramientas teóricas y analíticas fue publicado en el capítulo del libro de GIDAM de la SEIEM (Badillo et al., 2015) y, finalmente, el artículo dedicado a las aportaciones sobre la conexión entre teorías en el refinamiento de la DG de la derivada se publicó en la revista *Educational Studies in Mathematics* (Font et al., 2016).

Gloria conoció a María en el congreso PME de 2006, después de haber estudiado a fondo los trabajos que María había realizado junto a Bernie Baker y Laurel Cooley, miembros del grupo RUMEC, sobre el uso de la derivada en el esbozo de las gráficas de funciones. Estas investigadoras exploraron la interacción de dos esquemas de la teoría APOE y analizaron las relaciones entre los distintos conceptos involucrados en este problema (Baker et al. 2000). En estos trabajos, las autoras antes mencionadas, abordaron el tema de la derivada y de su uso en la construcción de gráficas utilizando límites, continuidad y derivadas sucesivas para comprender el comportamiento de la gráfica de una función. Su colaboración consistió en mostrar las dificultades de los estudiantes ante este tipo de problemas, identificados como construcción del “esquema gráfico de la derivada”, y al analizar sus respuestas, surgió la necesidad de considerar, además de las propiedades de la derivada definidas en el esquema de este concepto, el esquema de los intervalos y subintervalos del dominio de la función y su relación con el comportamiento de la función en estudio.

Posteriormente, las mismas autoras, Baker, Cooley y Trigueros, se preguntaron por la posibilidad de estudiar la tematización del Esquema propuesto para el gráfico de la derivada, considerando la posibilidad de cambiar las condiciones iniciales en diferentes intervalos del dominio de la función para que los estudiantes actuaran sobre el esquema en términos de los cambios en las relaciones encontradas (Cooley et al., 2007). En esa ocasión trabajaron con estudiantes avanzados en el curso de cálculo y en un curso de análisis.

Los resultados encontrados mostraron la dificultad de este problema, que únicamente pudo ser resuelto por una estudiante que había terminado con éxito un curso de análisis. Por su parte, más adelante, Gloria retomó el mismo tema, centrándose en el análisis de las relaciones lógicas que se establecen en y entre los elementos matemáticos implicados en el esbozo de los gráficos de funciones y su derivada (García et al., 2011; Sánchez-Matamoros et al., 2006, 2008, 2013).

Este interés común dio lugar a que, unos años después, Gloria y Edelmira invitaran a María a Barcelona para colaborar en el análisis de la tematización del problema de esbozar la gráfica de una función, junto con Claudio Fuentealba, un estudiante chileno que estaba realizando su tesis doctoral bajo su dirección (Fuentealba et al., 2019). Aclaramos que, en la teoría APOE, la tematización de un esquema se entiende como el mecanismo mediante el cual dicho esquema se transforma en un objeto. Esta transformación tiene lugar cuando es posible ejercer acciones o procesos sobre el propio esquema. Por ejemplo, al operar con él, se puede descomponer y reconstruir en función de los cambios en las condiciones de un problema, lo que permite comparar esquemas que comparten los mismos componentes, pero presentan relaciones

distintas entre ellos (Cooley et al., 2007). El resultado de esta colaboración fue un par de artículos sobre el análisis del esquema de la derivada de estudiantes universitarios (Fuentealba et al., 2016; Fuentealba et al., 2017) y la participación con comunicaciones en congresos del área. Además, surgió la necesidad de integrar los mecanismos de tematización del concepto propuestos por Piaget y la teoría APOE, con el fin de explicar las distintas estrategias adoptadas por los estudiantes que participaron en el estudio al resolver tareas complejas que involucran el esquema gráfico de la derivada (Fuentealba et al., 2022).

El primer encuentro entre Lidia Hernández-Rebollar y María tuvo lugar en la ciudad de Puebla, México. Una colega en común le mencionó a María el interés de Lidia por adentrarse en el campo de la Educación Matemática. La relación entre ellas surgió con facilidad y juntas estudiaron el axioma del supremo. El fruto de esta colaboración fue un artículo publicado en la revista *Educación Matemática* (Hernández & Trigueros, 2012). A esta colaboración le siguieron otras relacionadas con la participación de María en congresos y eventos desarrollados en la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP). En 2022, María se integró a esta universidad como profesora visitante e inmediatamente se reanudó su colaboración con Lidia. En esta ocasión, realizaron una descomposición genética del límite de una función en un punto, que difiere de otras publicadas anteriormente porque en ella se incluye el papel que juegan las representaciones en el estudio del límite, considerando los tipos de representaciones semióticas de Duval (1996). Los resultados de este análisis se publicaron en la revista *Enseñanza de las Ciencias* (Hernández et al., 2023).

La última colaboración en el tiempo y la primera de las cuatro autoras juntas surgió a partir de la invitación para escribir un artículo en un número especial de la revista *ZDM*, dedicado a la colaboración entre investigadores de España y Latinoamérica. Este artículo se basó en los estudios realizados previamente sobre la comprensión del esquema de la derivada y las líneas abiertas sobre la tematización del esquema. La incorporación de Lidia al equipo, dada su experiencia en la teoría APOE y su interés por analizar la comprensión de la derivada exhibida por profesores de matemáticas que realizaban estudios de posgrado en Educación Matemática en la BUAP, se alineó con el interés de las otras autoras de analizar altos niveles de comprensión del esquema de la derivada con estudiantes del máster en formación del profesorado de matemáticas en España. Las aportaciones más relevantes del estudio sobre el esquema gráfico de la derivada incluyen el análisis en profundidad de la construcción de relaciones entre las estructuras del Esquema y los mecanismos de asimilación y acomodación involucrados en la tematización según la teoría APOE (Trigueros et al., 2024).

Investigaciones desarrolladas por el grupo

Refinar una descomposición genética de la derivada: EOS-APOE

En el primer encuentro de María con Edelmira y Vicenç conversaron sobre la teoría APOE, que era un tema de interés para ellas y él y, en particular, sobre el trabajo de doctorado de Edelmira que versó sobre la noción de derivada en el cálculo (Badillo, 2003). Durante esa conversación surgieron dos cuestiones de interés común: ¿Cómo comparar y coordinar los resultados de las teorías EOS y APOE como lentes del análisis didáctico? ¿es posible relacionar estas teorías a través de la comparación del significado de “objeto” y “esquema” que aparecen como estructuras en ambas teorías? Ambas preguntas se dirigen a la comprensión de la naturaleza de los objetos matemáticos y su participación central en la actividad matemática y, por ende, en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Conscientes de que las diferentes teorías conceptualizan estas nociones de distinta manera, los problemas de investigación que se proponen estudiar cada una de ellas y la interpretación de los resultados que se obtienen son asimismo distintos. La clarificación de los aspectos que cada una de ellas atribuye al “objeto”, su naturaleza, su proceso de formación, sus distintos tipos y la forma en que se utilizan en la actividad matemática, que son centrales en la enseñanza y aprendizaje, se consideraron de importancia y de utilidad en la comparación y la posibilidad de coordinación de ambas teorías. Así, se utilizan los principios de comprensión de ambas teorías y de comparación y contrastación para estudiar la posibilidad de llevar a cabo una coordinación local entre ellas (Bikner-Ahsbahr & Prediger, 2010).

En la teoría EOS, la actividad matemática se modela en términos de configuraciones de objetos y procesos primarios puestos en juego en la práctica. Una práctica consiste en una serie de acciones orientadas hacia un objetivo y reguladas institucionalmente. El término “objeto” se usa para referirse a una entidad que está involucrada en una práctica matemática. Los objetos primarios son: problemas, lenguajes, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos. A través de relaciones, estos objetos primarios forman una configuración. Además, cada objeto tiene asociado un proceso y cualquier configuración se puede describir desde una perspectiva personal o institucional. En la teoría APOE, en cambio, el foco principal es la actividad del sujeto, y en ella las estructuras Acción, Proceso, Objeto y Esquema se definen para determinar la forma en que el sujeto se aproxima a la actividad matemática. Estas estructuras describen la construcción del Objeto y, en el caso del Esquema, la construcción de relaciones entre todas estas estructuras. En APOE no se distingue la estructura objeto de la teoría del objeto matemático, puesto que entre ellos hay una dialéctica que no permite distinguir uno del otro. La construcción del conocimiento en la teoría APOE sigue una secuencia de construcciones de distinto nivel, pero que no

se construye de manera lineal: se construyen Acciones que se interiorizan en Procesos, los Procesos pueden coordinarse con otros Procesos para formar uno nuevo e invertirse en las Acciones que les dieron lugar, los Procesos se encapsulan en Objetos sobre los cuales pueden aplicarse nuevas Acciones. Un Esquema es una colección de Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas entre las cuales se construyen relaciones de correspondencia, de transformación y de conservación que determinan su nivel de evolución. Cuando el Esquema se tematiza, el resultado es un nuevo Objeto sobre el cual pueden hacerse nuevas Acciones. Los mecanismos que intervienen en los cambios del conocimiento de un sujeto se relacionan todos con la abstracción reflexiva definida en la teoría del conocimiento de Piaget (Piaget & García, 1983). En la teoría APOE, el aprendizaje requiere de la aplicación de transformaciones a Objetos previamente contruidos y a través de esas transformaciones se construyen nuevos objetos cognitivos.

Siguiendo la recomendación de la metodología mencionada anteriormente, se decidió usar el objeto matemático derivada en el Cálculo Diferencial de funciones reales como contexto para la reflexión y el análisis requeridos en la comparación y posible coordinación entre estas teorías. De esta manera se abrió la puerta a una posible complementación de las dos teorías a través de cómo la noción de "Objeto" se describe en ambas teorías y de su papel en la construcción y comprensión del Objeto derivada.

Dado que Edelmira y Vicenç habían trabajado sobre el concepto de derivada con la teoría APOE y con la teoría EOS (Badillo et al., 2011), respectivamente, y María había estudiado la construcción de la gráfica de una función a través del uso de la derivada (Baker et al., 2000), se consideró que era un objeto matemático propicio para guiar el trabajo de análisis con las dos teorías y se invitó a Norma Rubio, quien trabajaba con Vicenç en ese momento a colaborar con el grupo. Además, Edelmira había desarrollado una DG del concepto y en la discusión se consideró conjuntamente que, si bien ésta es un elemento de la metodología de APOE, podría jugar un papel fundamental como contexto de reflexión dado que proporcionaba, de manera detallada, la descripción de la construcción del objeto matemático y esta facilitaría el uso de EOS como una lupa para conducir el análisis desde su perspectiva y retroalimentar el conocimiento de los elementos clave de las dos teorías para todos los autores de este trabajo.

Más aún, dado que en la DG se especifican los mecanismos requeridos en cada una de las construcciones, consideramos que, en términos de la teoría EOS, la comparación podría hacerse con los procesos y objetos primarios de dicha teoría. Por ejemplo, determinar el papel de los mecanismos entre las estructuras de APOS y contrastar con las prácticas y configuraciones que describen la emergencia de objetos en EOS, y así intentar una coordinación local entre las dos teorías y lograr con ello una comprensión más profunda de

la dinámica del aprendizaje. Además, la DG permite identificar y dar sentido a las dificultades de los estudiantes, así que la comparación de esta información con la que puede obtenerse utilizando EOS, permitiría abrir nuevas perspectivas de reflexión, entender sus causas y encontrar nuevas formas de abordarlas a partir de los principios fundamentales de esta teoría (Godino et al., 2007) y de incluir el punto de vista institucional que está ausente en la teoría APOE, aunque no en su metodología de investigación ni en su metodología didáctica.

Un resultado obtenido de esta comparación fue una reflexión profunda sobre la naturaleza de las nociones de “objeto” y “esquema” en ambas teorías. Para EOS la dualidad institucional-personal es central en la distinción de las configuraciones epistémicas de los objetos primarios desde el punto de vista institucional, así como distinguirlas de las configuraciones cognitivas de los objetos primarios desde el punto de vista individual. Los objetos matemáticos se consideran como el resultado del trabajo de los matemáticos quienes muestran sus construcciones mentales explícitamente a través de la comunidad matemática. En APOE, las estructuras mentales se consideran simultáneamente mentales y matemáticas debido a la relación dialéctica entre ellas, de manera que el objeto estudiado y el construido es el mismo (Dubinsky, 1997; Arnon et al., 2014). Por otra parte, la teoría APOE tiene una componente didáctica, el ciclo ACE (Actividades, discusión en Clase y Ejercicios), que ofrece múltiples oportunidades a los aprendices de reflexionar en un ambiente colaborativo y construir así las estructuras cognitivas, incluyendo al objeto. El ciclo ACE articula una propuesta didáctica basada en tres tipos de actividades que fomentan la construcción progresiva del pensamiento matemático. Este ciclo inicia con Actividades que los estudiantes resuelven en grupos pequeños, seguidos de una discusión grupal en Clase con el profesor y Ejercicios que se hacen en casa. Por su parte, la posición de EOS es el constructivismo convencionalista inspirado en Wittgenstein (1976). Los objetos emergen de la práctica en dos niveles. En el primer nivel, las representaciones (lenguaje), las definiciones, proposiciones, procedimientos, problemas y argumentos, que son los objetos primarios, emergen y, posteriormente, en un segundo nivel emerge un único objeto, la configuración, que puede asociarse con diferentes representaciones, definiciones equivalentes, propiedades, etc.

Los objetos en APOE resultan de las construcciones de los individuos cuando reflexionan sobre sus acciones en las distintas tareas matemáticas relacionadas con el objeto en cuestión, hacen suyas esas acciones y las interiorizan en un proceso, y este se encapsula en un objeto. El punto de vista institucional se toma en consideración de dos maneras: mediante el reconocimiento de que son el resultado del trabajo de los matemáticos, que informa la DG y a través del ciclo ACE, la componente didáctica de esta teoría.

Desde el principio, los autores discutieron la forma de llevar a cabo el análisis. Se consideró que tomar un concepto específico que hubiera sido estudiado desde las dos teorías podría apoyar la reflexión, y se decidió que un concepto apropiado era el de derivada, en parte por su importancia en el cálculo diferencial y, por otra parte, porque dicho objeto matemático había sido estudiado utilizando tanto APOE como EOS como marcos teóricos. Además, se consideró que la DG elaborada por Edelmira (Badillo, 2003) mostraba algunas posibles concordancias entre las dos teorías.

La posición de ambas teorías sobre la relación de las matemáticas con el mundo es constructivista, la matemática se considera en ambas como una construcción humana, aunque cada teoría toma un punto de vista distinto en relación con la naturaleza de las construcciones. Asimismo, ambas teorías toman en cuenta la dimensión institucional, pero, en EOS esta se toma de manera explícita y en APOE queda implícita en su metodología, tanto de investigación como de enseñanza. En ambas teorías la actividad de los estudiantes es fundamental para el aprendizaje, e incluso cuentan con formas de describirla. Del análisis conjunto surgió la posibilidad de refinar esta DG a partir de la comparación entre las teorías.

El análisis nos condujo a enfocar la reflexión en la noción de objeto y, con menor énfasis, en el esquema. En APOE, el objeto es el resultado de la encapsulación de un proceso y como se mencionó anteriormente, la teoría no distingue entre el objeto matemático y el objeto construido por el sujeto que aprende. En la descripción con EOS el aprendiz debe entender que existen procedimientos ordenados y específicos de acciones (regla o algoritmo) que deben hacerse para alcanzar un objetivo y que, para ello, es necesario un cierto nivel de reificación dado que el procedimiento puede tratarse como una unidad, es decir, en un objeto. Posteriormente, el estudiante necesita considerar un nuevo objeto que resulta de la encapsulación de un proceso y, cuando esto sucede, puede entender el significado de la definición de ese nuevo objeto. Desde el punto de vista de EOS, la encapsulación de un proceso es un mecanismo en el que se consideran dos aspectos: diferentes objetos primarios y la intervención de un entrelazamiento denso de funciones semióticas que relaciona acciones y procesos con procedimientos, y objeto con definiciones. El objeto se produce cuando ocurre el cambio en la naturaleza del objeto primario de un procedimiento a una definición, y la encapsulación del proceso de acuerdo con APOE. Esta doble transformación se puede aplicar en todos los casos de encapsulación mencionados en la DG en estudio, aunque en otras ocasiones el cambio en la naturaleza del objeto primario consiste en un procedimiento de conversión en una propiedad.

En APOE los objetos pueden también construirse mediante la tematización de un esquema. Estos se incluyen en la DG conjunta. Cuando, por ejemplo, el esquema de derivada en un punto se tematiza, las diferentes

representaciones de la derivada se consideran como un mismo objeto. Además, en el caso de la tematización del esquema de función derivada se requiere más tiempo, dado que implica la construcción de numerosas relaciones entre los componentes del esquema. De acuerdo con EOS, el objeto correspondiente a la tematización se debe situar en un segundo nivel de objetos, dado que requiere de la emergencia de una referencia global asociada a distintas configuraciones desarrolladas por los estudiantes. Las nociones de configuración cognitiva y esquema pueden también considerarse como complementarias. En el caso de la derivada, la descripción específica de esas dualidades permite entender por qué el proceso de tematización es lento, como se refiere en APOE (Cooley et al., 2007).

Un esquema está formado por distintas estructuras de APOE relacionadas entre ellas y la configuración cognitiva incluye una tipología de objetos y procesos matemáticos que puede considerarse como un esquema cuando se usa en una situación dada. El esquema se considera como una estructura que permite al individuo responder a una situación problemática, así que puede relacionarse con la organización mental de un sujeto que se usa para responder a problemas o situaciones semejantes. Al analizar la implementación del esquema en un contexto, es posible reconocer una estructura que puede describirse sistemáticamente en términos de EOS mediante configuraciones cognitivas. Este análisis mostró que no hay contradicciones intrínsecas entre estas dos teorías y que es posible establecer relaciones entre ellas.

En relación con la tematización en APOE y el segundo nivel de emergencia de un objeto en EOS, se consideró que, de acuerdo la teoría APOE, un objeto emerge de la tematización de un esquema, es decir, cuando un esquema evoluciona como resultado de un cambio en la naturaleza de las relaciones entre sus estructuras componentes hacia una estructura coherente que puede considerarse como un todo, como un objeto, y se pueden hacer acciones sobre él. Desde el punto de vista de EOS la tematización es un mecanismo que se puede relacionar con el segundo nivel de emergencia de objetos. El objeto que puede relacionarse con el Esquema se puede considerar como una referencia global asociada a varias configuraciones cognitivas de EOS. De nuevo, APOE y EOS se complementan. Mientras APOE describe detalladamente las componentes y sus relaciones, en EOS se analiza cada tarea a través de una configuración cognitiva que indica las diferencias específicas que distinguen a esas tareas y que podrían explicar especificidades de las dificultades de los estudiantes. En ambas teorías, los objetos matemáticos no existen independientemente de las personas que los aprenden, y ambas usan nociones apropiadas para dar seguimiento a su desarrollo. Todos estos hallazgos pueden influir en el diseño de intervenciones didácticas que estimulen la construcción por parte de los estudiantes, así como la formación del profesorado.

Investigaciones centradas en el Esquema de la derivada

En conversaciones de Gloria, Edelmira y Claudio Fuentealba con María se trató el desarrollo del esquema de la derivada desde la teoría APOE. El uso que los estudiantes hacen de las relaciones lógicas en y entre elementos matemáticos evidencia el desarrollo del esquema de la derivada, que era un tema de interés para los tres. En particular, sobre el trabajo de doctorado de Claudio, que trató sobre el análisis del esquema de la derivada en estudiantes universitarios de último curso de diferentes Ingenierías y del grado en Matemáticas.

El primer trabajo sobre el análisis del desarrollo del esquema de la derivada lo realizó María junto con otros investigadores (Baker et al., 2000). En este trabajo se analizó el desarrollo del esquema de la derivada centrándose en la comprensión gráfica de la conexión entre una función y su derivada, siguiendo la aproximación piagetiana del desarrollo de un esquema realizado por Baker et al. (2000). Estos investigadores conjeturan que el esquema gráfico de la derivada está formado por dos esquemas que denominaron el “esquema propiedades” y el “esquema intervalos”, lo que permitía subrayar, por un lado, los diferentes niveles de los estudiantes para coordinar las propiedades del gráfico dadas por condiciones analíticas, y por otro lado, los diferentes niveles de los estudiantes para coordinar una propiedad gráfica a través de intervalos contiguos. Baker et al. (2000) indican varios aspectos que causaron dificultades constantes a los estudiantes como son la existencia de puntos cúspides en la gráfica de la función (y su derivada), la existencia de una tangente vertical y el significado asociado, y la supresión de la condición previa de continuidad. Además, los resultados mostraron que un número significativo de estudiantes tenía una comprensión muy limitada de la segunda derivada, lo que llevó a Baker et al. (2000) a indicar que los estudiantes necesitan considerar la primera derivada en sí misma como una función para entender la importancia de la segunda derivada. Como se mencionó anteriormente, en este trabajo se subrayó la necesidad de incorporar el Esquema de los intervalos del dominio de la función, al constatar que los estudiantes mostraban dificultades para subdividir, unir o intersecar intervalos cuando se añadía una nueva propiedad de la función en estudio. Se definió de esa manera el esquema del gráfico de la derivada, en el que los esquemas antes mencionados interaccionan entre sí.

Por otra parte, Gloria en su trabajo de doctorado, para explicar el desarrollo del esquema de derivada hace uso de la perspectiva piagetiana. Según Piaget y García (1983), el desarrollo de un esquema se caracteriza por tres etapas o niveles: Intra, Inter y Trans. Se considera que un Esquema se encuentra en un nivel Intra de desarrollo cuando sus componentes están aislados. El nivel Inter del desarrollo del esquema aparece cuando comienzan a aparecer agrupaciones de diferentes componentes, a través de relaciones.

El nivel Trans del Esquema se caracteriza por la construcción de relaciones entre todas las estructuras del Esquema, evidenciándose la coherencia del Esquema. Además, Piaget y García (1983) señalan que, al analizar el desarrollo de un esquema, usando la tríada, se observa que cada nivel contiene subniveles que siguen un mismo orden y solo se puede pasarse de uno a otro cuando se ha alcanzado el previo.

Desde esta perspectiva, el desarrollo de un Esquema a través de los niveles Intra, Inter, Trans se caracteriza por el tipo de relación -coordinación de operaciones en términos piagetianos- que los estudiantes son capaces de establecer entre los elementos matemáticos (componentes) del esquema cuando resuelven un problema (Baker et al., 2000; Sánchez-Matamoros, 2004; Sánchez-Matamoros et al., 2006). Desde estas caracterizaciones generales, se considera que un esquema es una manera de comprender un concepto que implica considerar coherentemente las relaciones entre los diferentes elementos matemáticos que lo constituyen (estructura matemática formada por las relaciones lógicas que se establecen en y entre los elementos matemáticos que constituyen una noción matemática, y que puede ser evocado para la resolución de un problema). En este trabajo se han considerado elementos matemáticos de diferente naturaleza. Están por una parte los vinculados a la definición de función derivada. Por ejemplo, la derivada en un punto como límite del cociente incremental o como pendiente de la recta tangente. Y, por otro lado, los elementos matemáticos referidos a las propiedades, teoremas, lemas y corolarios. Siendo un indicador del desarrollo del esquema el tipo de relación (conjunción lógica, contrarrecíproco y equivalencia lógica) que los estudiantes son capaces de establecer entre los elementos matemáticos cuando resuelven problemas (Sánchez-Matamoros, 2004).

Entre los resultados obtenidos de este trabajo de doctorado destacan que el desarrollo del esquema de derivada no está necesariamente vinculado a conocer muchos elementos constitutivos del concepto, sino a ser capaces de coordinarlos durante la resolución de problemas. También, que el desarrollo del esquema es progresivo y que influyen los registros de representación para poder establecer relaciones. En este contexto, la síntesis de la información gráfica y analítica se considera una característica del nivel de desarrollo de la comprensión de la derivada. Asimismo, dicha investigación revela la existencia de dos subniveles anidados, tanto para el nivel Intra como para el Inter. Estos surgen de la progresión en el desarrollo del esquema, caracterizada en términos de la incorporación de un mayor número de elementos matemáticos y relaciones lógicas entre ellos, así como de la paulatina síntesis de los registros de representación (Sánchez-Matamoros et al., 2006).

Tanto en la investigación de Baker et al. (2000), como en la de Sánchez-Matamoros (2004) se pone de manifiesto que hay una construcción progresiva

del esquema y que los registros de representación influyen en la constitución de los mecanismos de transición de un nivel al siguiente.

Uno de los resultados más importantes de este trabajo relacionado con la investigación de Baker et al. (2000), es que se evidenció que los estudiantes de un alto nivel de comprensión del concepto de derivada son capaces de trasladar las relaciones entre el par (f, f') al par de funciones (f', f'') . Es decir, en esta investigación, se tuvo evidencia de la tematización del esquema de derivada cuando los estudiantes eran capaces de trasladar las relaciones entre una función y su derivada a las relaciones entre la función derivada y la función derivada segunda, y hacer uso de ello para tomar decisiones en la resolución de problemas. Esto les llevó a indicar que el estudiante, cuando ha tematizado el esquema de derivada, toma conciencia que el operador derivado corresponde a una transformación lineal que se puede generalizar, es decir, el estudiante es capaz de transferir todas las relaciones e implicaciones que ha construido y organizado para el par (f, f') al par de funciones (f', f'') y luego al par (f'', f''') y, así sucesivamente (Sánchez-Matamoros, 2004; Sánchez-Matamoros et al., 2006; García et al., 2011).

Desde este contexto, en el trabajo de doctorado de Claudio se realizó, en primer lugar, un análisis exploratorio/confirmatorio para identificar y caracterizar, por medio de métodos de análisis mixtos, los distintos subniveles de desarrollo del esquema de derivada, considerando como población del estudio a estudiantes universitarios con instrucción previa en Cálculo Diferencial. Los resultados muestran la utilidad de estos métodos ya que, unidos a los de Gloria, permitieron identificar los nueve subniveles de desarrollo del esquema de derivada (3 subniveles anidados en cada nivel). Además, la investigación realizada por Claudio permitió caracterizar cinco de los nueve subniveles en función de las variables dominantes y sus elementos matemáticos asociados (Fuentelba et al., 2019).

Uno de los aportes más relevantes sobre la tematización del esquema de la derivada, realizados por Fuentelba et al. (2017), tomando como referencia la investigación de Sánchez-Matamoros et al. (2006), fue encontrar evidencias de que el operador derivado corresponde a una transformación lineal que se puede generalizar. Es decir, los estudiantes que llegaron a la tematización del esquema fueron capaces de transferir todas las relaciones e implicaciones que han construido y organizado para el par (f, f') al par de funciones (f', f'') y luego al par (f'', f''') y así sucesivamente.

Otros estudios, centrados también en el análisis de las relaciones entre las propiedades de la función derivada, han caracterizado el desarrollo del esquema a través de las relaciones de correspondencia, transformación o equivalencia construidas entre las componentes del esquema (Trigueros et al., 2024). Las relaciones de correspondencia son aquellas que resultan de la comparación superficial de estructuras en términos de semejanzas o

diferencias. Pueden surgir de la observación repetida de pares de componentes que aparecen conjuntamente en situaciones de resolución de problemas, de modo que el individuo sabe que están relacionadas de una u otra manera, pero aún no es capaz de justificar la relación. Las relaciones de transformación se desarrollan cuando el individuo descubre que algunas estructuras del Esquema pueden agruparse y relacionarse entre sí en términos de otras estructuras, que desempeñan un papel en el razonamiento y la justificación de las conexiones. Una relación entre dos componentes que desempeñan un papel en la explicación o justificación de dicha interrelación entre otras estructuras se considerará una relación de transformación. Las relaciones de transformación se pueden distinguir cuando la relación está justificada de alguna manera. Las relaciones de equivalencia o conservación implican la conservación de propiedades que se ponen en evidencia cuando una estructura puede utilizarse en lugar de otra sin cambiar el significado del análisis o en la formación de grupos de estructuras. Las relaciones de equivalencia pueden distinguirse cuando una estructura se utiliza indistintamente como sustituto de otra (Trigueros, 2019).

Tematización del esquema

El interés por profundizar en la tematización del Esquema de la derivada y en el papel que desempeñan los mecanismos de equilibración de dicho Esquema surge a partir de los resultados de la tesis doctoral de Claudio (Fuentealba, 2017; Fuentealba et al., 2019; Fuentealba et al., 2017), de los trabajos previos realizados por Gloria (García et al., 2011) y, con especial énfasis en las aportaciones de María (Trigueros, 2019). En el contexto de una invitación para participar en un monográfico de la Revista AIEM sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas en la universidad, se lleva a cabo un estudio que tuvo como objetivo analizar la evidencia de comprensión del Esquema de la derivada mostrada por estudiantes avanzados al enfrentarse a tareas diseñadas para desafiar el equilibrio de sus esquemas y obtener pruebas de su posible tematización (Fuentealba et al., 2022). Con esta investigación se aporta al estudio de la tematización de un Esquema, centrándose en los mecanismos que se activan cuando los estudiantes deben realizar acciones sobre su Esquema de la derivada. En este estudio participaron 40 universitarios de la provincia de Barcelona de la doble titulación de matemáticas y física que habían cursado y aprobado con altas calificaciones, asignaturas de cálculo diferencial. En cuanto a los objetivos de este estudio, se buscó identificar posibles diferencias en los mecanismos que los estudiantes evidencian al tematizar el Esquema. Para ello, se usaron las herramientas teóricas y analíticas proporcionadas por la teoría APOE para caracterizar dicha tematización, basándonos en los trabajos de Baker et al. (2000) y en los resultados de García et al. (2011).

Una aportación metodológica de este estudio para profundizar en la tematización del Esquema de la derivada, utilizando las herramientas de APOE, es el diseño de dos instrumentos de recogida de datos: un cuestionario (Figura 1) y una entrevista clínica semiestructurada (Figura 2). El primer instrumento utilizado fue un cuestionario aplicado a los 40 estudiantes (Figura 1), que incluía tareas diseñadas para evaluar el nivel de desarrollo del Esquema de la derivada. Estas tareas fueron tomadas y, en algunos casos, adaptadas de propuestas previas realizadas en investigaciones sobre el tema (Baker et al., 2000; García et al., 2011; Sánchez-Matamoras et al., 2006). Un aspecto innovador del cuestionario para ahondar en la tematización del Esquema de la derivada es la existencia intencionada de una contradicción entre las condiciones (c, f, g, b, e, i) del enunciado de la Tarea 1 (Figura 1). La percepción de esta contradicción está relacionada con la construcción de una relación entre la información proporcionada por f'' y la que proporciona f' , entendida como la función que describe el comportamiento de la curva representada por la función en los diferentes intervalos de su dominio.

Figura 1

Cuestionario aplicado.

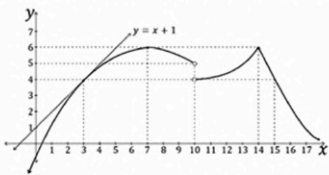
Tarea 1

Esboza la gráfica de una función f que satisfice las siguientes condiciones:

a) f es continua en su dominio	b) $f(2) = 0$
c) $f'(2) = f'(5) = 0$	d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -4$
e) $\lim_{x \rightarrow -8^-} f(x) = -\infty$	f) $f'(x) < 0$ cuando $5 < x < 8$
g) $f'(x) \geq 0$ cuando $x < 5$	h) $f''(x) < 0$ cuando $3 < x < 8$
i) $f''(x) > 0$ cuando $x < 3$	

Tarea 2

Dada la gráfica de la función f , formada por las ramas de parábolas

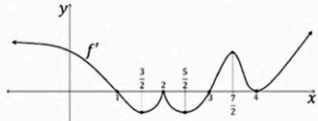


a) Obtener los valores de $f'(3)$, $f'(7)$, $f'(10)$, $f'(14)$ y $f'(15)$. Explicando cómo los obtienes.

b) Realiza un esbozo de la gráfica de f' . Explica cómo los has obtenido.

Tarea 3

La figura muestra la gráfica de la derivada de f , esboza las posibles gráficas de f .



Nota. Fuente Fuentealba et al. (2022)

El análisis de las respuestas de los estudiantes al cuestionario permitió, por un lado, identificar el nivel de desarrollo del Esquema de la derivada (Intra-derivada, Inter-derivada, Trans-derivada) que cada uno de los estudiantes mostraba. Por otro lado, también sirvió como base para la elaboración del segundo instrumento, que fue aplicado a los estudiantes que presentaron un nivel de desarrollo Trans-derivada del Esquema. Este segundo instrumento consistió en una entrevista clínica diseñada para: (i) profundizar en el proceso de resolución de las tareas propuestas a los estudiantes, y (ii) explorar los mecanismos involucrados en la posible necesidad de reconstrucción del Esquema de derivada para permitir su tematización. La entrevista semiestructurada constó de dos partes. En la primera parte, se proponen modificaciones en las condiciones de las tareas del cuestionario. En la Tabla 1 se muestran algunos ejemplos de los tipos de modificaciones en cada tarea, con el objetivo de observar si los estudiantes eran capaces de movilizar las relaciones que habían construido y que formaban parte de su Esquema, aplicándolas a una situación diferente y cómo lo hacían.

Tabla 1
Ejemplo de modificaciones a las tareas del cuestionario

Tarea	Pregunta	Justificación de la modificación
1	¿Existe algún cambio significativo en la gráfica de la tarea 1 si eliminamos la condición c ?	Buscar evidencias de si el estudiante es capaz de darse cuenta de la contradicción del enunciado de la tarea. Para ello se incide en el apartado donde el enunciado presenta dicha contradicción (apartado 'c)'). De esta forma se pretende dar la oportunidad al estudiante, que no lo hizo, de que se fije en dicha contradicción o, en el caso no hacerlo, que la justifique
2	Si la gráfica corresponde a f'' y no a f : ¿Cómo determinarías el crecimiento y decrecimiento de f'' ?	Buscar evidencias de si el estudiante es capaz de relacionar el crecimiento y decrecimiento de f'' con la curvatura de $f(f'')$. Es decir, si es capaz de establecer la monotonía de f' a partir del signo de f'' , y trasladar las relaciones entre los elementos matemáticos del par (f', f'')
3	Si modificamos la gráfica de f'' en $x = 2$ ¿Qué sucedería con la gráfica de f en $x = 2$, si sabemos que f' es continua?	Buscar evidencia de si el estudiante es capaz de identificar que en $x = 2$ existe un máximo local de la función f', correspondiente a un punto anguloso en donde la función no es derivable

El análisis se llevó a cabo en tres fases sucesivas. En la primera fase, se identificaron los niveles de desarrollo del Esquema de la derivada que los estudiantes participantes exhiben. La segunda fase consistió en identificar a los estudiantes con un nivel de desarrollo denominado Trans-derivada. Finalmente, en la tercera fase, se caracterizaron los mecanismos de asimilación y acomodación, analizando cómo estos se vinculan con la tematización del Esquema. En particular, esta última fase se enfocó en el análisis de las relaciones construidas entre las derivadas sucesivas, las cuales se evidencian a

través de la resolución de las tareas y las entrevistas realizadas con los estudiantes.

La información recopilada en la primera parte de la entrevista clínica permitió confirmar que 9 de los 40 estudiantes habían alcanzado un nivel de desarrollo Trans-derivada del Esquema, con indicios de posible tematización. En este nivel, el Esquema mostraba coherencia y flexibilidad en el uso de las relaciones construidas entre las distintas estructuras que lo componen, especialmente cuando los estudiantes se enfrentaban a situaciones distintas. Además, la tematización requiere evidencia de que es posible realizar Acciones sobre el Esquema, lo que implica la reconstrucción de las relaciones previamente establecidas. El hecho de haberlo construido como un Objeto sobre el que se puede operar facilitará al estudiante la transferencia de las relaciones del par (f, f') al par (f'', f''') .

De los 9 estudiantes ubicados en el nivel Trans-derivada del Esquema, solo 4 decidieron participar voluntariamente en las entrevistas clínicas. El análisis de las entrevistas de los 4 estudiantes que presentaron una construcción en el nivel Trans-derivada del Esquema de la derivada mostró que, al enfrentarse a una situación nueva que desafiaba el equilibrio del Esquema construido, solo 3 de estos estudiantes demostraron la tematización del Esquema y adoptaron diversas estrategias para abordarlo. Estas estrategias evidencian que, ante la necesidad de realizar Acciones sobre el Esquema y mostrar su posible tematización, los estudiantes, en ocasiones, requieren equilibrar el Esquema construido mediante mecanismos de asimilación o acomodación.

Los resultados de este estudio muestran que, efectivamente, dos estudiantes demostraron la capacidad de equilibrar el Esquema y de operar sobre él mediante la construcción, en un caso, de una función auxiliar, y en otro, mediante la comparación de diferentes pares de derivadas sucesivas. Esta estrategia les permitió acomodar estos Objetos en su Esquema, reconstruirlo, dar sentido a las relaciones entre sus componentes y operar sobre él. Además, otro estudiante mostró, a través de sus respuestas, la posibilidad de asimilar nuevas estructuras y relaciones a su Esquema, evidenciando de manera más directa la tematización del Esquema. Las respuestas de este estudiante dan cuenta de cómo, al enfrentarse a las preguntas de la entrevista, utilizó las estructuras del Esquema construido, reconstruyendo las relaciones entre ellas para responder a cada desafío planteado.

A partir de los resultados obtenidos, este trabajo contribuye al desarrollo de la teoría APOE al ir más allá del análisis de las estructuras que los estudiantes muestran a partir del aprendizaje de diversos conceptos, enfocándose en los mecanismos que permiten dichas construcciones. El estudio proporciona evidencias claras de los mecanismos de equilibración del Esquema y su relación con el mecanismo de tematización de este.

El más reciente trabajo realizado por el equipo fue, como en el presente artículo, resultado de una invitación para un número especial de colaboraciones entre España y Latinoamérica, pero en esta ocasión para la Revista ZDM. El equipo de María, Edelmira y Gloria invitó a Lidia a aplicar un cuestionario a sus estudiantes de la maestría en educación matemática y a participar en este nuevo proyecto, cuya finalidad era continuar profundizando sobre la tematización del esquema, usando los mecanismos de asimilación y acomodación y las relaciones entre los elementos del esquema (Trigueros et al., 2024).

Para llevar a cabo esta investigación se aplicó un cuestionario (Figura 2) a 26 estudiantes que estudiaban una maestría en educación matemática, 19 de ellos eran de España y 7 eran de México. Este primer cuestionario se tomó de Baker et al. (2000) y buscaba conocer el nivel de construcción del Esquema gráfico de la derivada. Se seleccionó a 9 estudiantes que respondieron el primer cuestionario y que mostraban el nivel más alto de construcción del Esquema en estudio, así como relaciones de conservación. A estos 9 estudiantes (seis eran de España y tres de México) se les aplicó un segundo cuestionario con tres tareas que fueron adaptadas de trabajos previos (Fuentealba, 2017; García et al., 2011; Sánchez-Matamoros et al., 2006). Las tareas buscaban evidencias de una tematización del Esquema gráfico de la derivada. Dos estudiantes de España y dos de México respondieron correctamente el segundo cuestionario y se les invitó a participar en una entrevista semiestructurada. Solo tres de ellos (dos de México y uno de España) fueron entrevistados. El objetivo de la entrevista fue profundizar sobre las relaciones que estos estudiantes establecieron al resolver dos de las tareas y sobre los mecanismos implícitos que ellos utilizaron para hacer Acciones sobre el Esquema, es decir, para tematizar el Esquema.

En la Figura 2 se muestra el cuestionario que se aplicó a los 26 estudiantes de la población inicial y que buscaba conocer el nivel de construcción del esquema gráfico de la derivada, en particular, se buscaba a estudiantes que mostraran el nivel Trans, por ser el nivel más alto de construcción, como ya se ha mencionado antes. Para esbozar la gráfica de la función que se solicita en el cuestionario, los estudiantes deben establecer relaciones entre las diferentes componentes del esquema. En este caso, las relaciones que se requieren son entre los esquemas intervalos y derivada. El éxito en esta tarea hace necesario el uso de relaciones de conservación entre la función, la primera y la segunda derivada en todos los intervalos. Así también, la relación entre intervalos contiguos, mediante uniones, intersecciones y subdivisiones en términos de las propiedades de la función.

El segundo cuestionario contenía tres problemas. El primero es similar al problema del primer cuestionario (Figura 2), y los problemas 2 y 3 son los que siguen y los que se analizaron en este trabajo.

Figura 2

Problema aplicado a estudiantes de posgrado de España y México

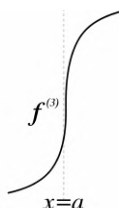
Traza la gráfica de una función h que satisfice las condiciones siguientes:

h es continua;

- a) $h(0) = 2, h'(-2) = h'(3) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow 0} h'(x) = \infty$;
- b) $h'(x) > 0$ cuando $-4 < x < -2$ y cuando $-2 < x < 3$;
- c) $h'(x) < 0$ cuando $x < -4$ y cuando $3 < x$;
- d) $h''(x) < 0$ cuando $x < -4$, cuando $-4 < x < -2$, y cuando $0 < x < 5$;
- e) $h''(x) > 0$ cuando $-2 < x < 0$ y cuando $5 < x$;
- f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \infty$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -2$.

Problema 2

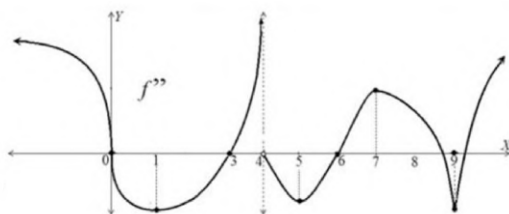
Considera la gráfica de la derivada de tercer orden de una función sobre un intervalo alrededor de , como se muestra en la figura siguiente:



Describe y explica las gráficas de las derivadas de orden dos y cuatro sobre el mismo intervalo alrededor de $x = a$.

Problema 3

Dada la gráfica de la segunda derivada de una función, dibuja, describe y explica la gráfica de la tercera derivada de la función y la de su primera derivada.



Se hallaron diferentes aproximaciones de solución a los dos problemas complejos de la derivada que se analizaron. Los dos estudiantes mexicanos iniciaron siempre con la construcción de la gráfica de la derivada de la función dada, mientras que el estudiante español abordó primero la gráfica de la antiderivada de la función. Sin embargo, los tres coincidieron en utilizar el hecho de que la gráfica de la función dada informaba sobre el comportamiento de la pendiente de las rectas tangentes en cada punto de la función cuya gráfica se buscaba. Uno de los estudiantes mexicanos requirió definir

una función auxiliar y los otros dos lo hicieron de manera directa. Así, se obtuvo información de dos maneras de tematizar el Esquema gráfico de la derivada, pues dos de los estudiantes entrevistados tematizaron el esquema a través del mecanismo de asimilación y el otro lo hizo por acomodación, al requerir de la función auxiliar.

En cuanto al tipo de relaciones establecidas, se identificó que dos de los estudiantes conectaron las propiedades de la derivada con los diferentes intervalos del dominio, mientras que el otro las conectaba, primero con los puntos críticos, y después con los diferentes intervalos. Lo anterior aportó evidencias de relaciones de equivalencia, en dos de los estudiantes y de transformación en el tercero de los participantes.

En este estudio se han utilizado las relaciones específicas necesarias para tematizar este Esquema, así como los mecanismos de asimilación y acomodación. En consecuencia, esta investigación contribuye a la literatura sobre el aprendizaje del cálculo diferencial al mostrar cómo estudiantes avanzados utilizan sus conocimientos para construir relaciones entre conceptos cuando se enfrentan a situaciones complejas. Además, es útil para desarrollar estrategias didácticas que fomenten la comprensión de las derivadas por parte de estudiantes universitarios, lo cual puede facilitar su transición a estudios avanzados de matemáticas.

Líneas futuras de colaboración

Un análisis de los datos existentes en las investigaciones que utilizan la teoría APOE en el estudio de la comprensión de la derivada de funciones reales de variable real y del Esquema de la gráfica de funciones y de su tematización nos conduce a preguntarnos ¿Por qué es este Esquema tan difícil de construir? ¿Es necesario contar con conocimientos avanzados de Cálculo Diferencial y de Análisis Matemático para establecer relaciones de transformación entre sus componentes, entender su coherencia y tematizarlo? ¿Hay posibilidades de que los estudiantes construyan un Esquema coherente de la gráfica de la derivada en un primer acercamiento al Cálculo Diferencial en la universidad? ¿Qué factores se deberían tomar en consideración para lograr una comprensión más profunda de la derivada y del Esquema gráfico de la derivada?

El análisis de la literatura muestra que, a pesar de los diferentes esfuerzos relacionados con la construcción del concepto de derivada en el primer acercamiento al Cálculo diferencial en la universidad, los estudiantes continúan mostrando dificultad para alcanzar niveles altos de comprensión. Estos resultados evidencian la necesidad de diseñar nuevos acercamientos o fortalecer los existentes para lograr que más estudiantes construyan la derivada como un Objeto, tan temprano como sea posible. La comprensión de la derivada como Objeto permitiría la construcción de relaciones entre sus

propiedades y su relación con la continuidad para lograr la construcción del Esquema gráfico de la derivada.

Uno de los proyectos futuros que tenemos en mente es diseñar ciclos de enseñanza de la derivada que partan de una descomposición genética que subraye el papel de la relación entre la recta tangente a una curva y el concepto de derivada, de la relación de las propiedades de la derivada con los intervalos, así como del tránsito entre derivadas sucesivas. Los resultados de los estudios previos que hemos realizado evidencian que los estudiantes que mostraron una comprensión profunda de estas relaciones las utilizaron en la resolución de los problemas sobre la gráfica de la derivada, manifestando la tematización de dicho Esquema (Fuentealba, et al., 2022; Trigueros et al., 2024)

Otro proyecto posible de investigación que toma como base los resultados relativos a la construcción del Esquema gráfico de la derivada sería analizar la influencia de los ciclos de enseñanza diseñados para profundizar sobre el tránsito entre derivadas sucesivas en términos de los mecanismos, las relaciones y los intervalos, y valorar si aumenta el número de estudiantes que tematizan dicho Esquema. Todo lo anterior podría determinar si es necesario o no el refinamiento de la DG inicial.

Estos proyectos pueden desarrollarse a largo plazo, aunque seguramente habrá proyectos parciales que surjan de ellos y que puedan realizarse en un lapso de tiempo más corto.

Agradecimientos

Este estudio se ha realizado con financiamiento de PID2023-149580NB-I00 y PID2023-149624NB-I00 (MICINN-España) y GIPEAM-2021-SGR-00159. Se agradece a la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla el apoyo a este trabajo.

Referencias

- Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa Fuentes, S., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). *APOS Theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education*. Springer.
- Asiala, M., Cottrill, J., Dubinsky, E., & Schwingendorf, K. (1997). The development of students' graphical understanding of the derivative. *Journal of Mathematical Behaviour*, 16(4), 399–431.
- Badillo, E. (2003). *La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matemática de Colombia* [Tesis doctoral]. Universidad Autónoma de Barcelona.

- Badillo, E., Azcárate, C., & Font, V. (2011). Análisis de los niveles de comprensión de los objetos $f'(a)$ y $f'(x)$ de profesores de matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias*, 29(2), 191–206. <https://doi.org/10.5565/rev/ec/v29n2.546>
- Badillo, E., Trigueros, M., & Font, V. (2015). Dos aproximaciones teóricas en Didáctica del Análisis Matemático: APOE y EOS. En C. Azcárate (Coord.), *Didáctica del análisis matemático: una revisión de las investigaciones sobre su enseñanza y aprendizaje en el contexto de la SEIEM: periodo 1997–2014* (pp. 31–51). SEIEM.
- Baker, B., Cooley, L., & Trigueros, M. (2000). A calculus graphing schema. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(5), 557–578.
- Bikner-Ahsbahr, A., & Prediger, S. (2010). Networking of theories—an approach for exploiting the diversity of theoretical approaches. En B. Sriraman, & L. English (Eds.), *Theories of mathematics education: Seeking new frontiers. Advances in Mathematics Education series* (Vol. 1. pp. 483–506). Springer.
- Cooley, L., Trigueros, M., & Baker, B. (2007). Schema thematization: A framework and an example. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(4), 370–392.
- Duval, R. (1996). Les représentations graphiques: fonctionnement et conditions de leur apprentissage', En *Actes de la 46ème Rencontre Internationale de la CIEAEM* (Tome 1, pp. 3–15). Université Paul Sabatier, Toulouse.
- Dubinsky, E. (1997). A reaction to a critique of the selection of mathematical objects as a central metaphor for advanced mathematical thinking by Confrey and Costa. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 2, 67–91.
- Font, V., Badillo, E., Trigueros, M., & Rubio, N. (2012). La encapsulación de procesos en objetos analizada desde la perspectiva del enfoque ontosemiótico. En A. Estepa Castro, A. Contreras de la Fuente, J. Deulofeu Piquet, M. del C. Penalva Martínez, F. García García, & L. Ordóñez Cañada (Eds.), *Investigación en educación matemática XVI* (Vol. 2, pp. 239–248). SEIEM.
- Font, V., Godino, J. D., & Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, 82(1), 97–124. <https://doi.org/10.1007/s10649-012-9411-0>
- Font, V., Trigueros, M., Badillo, E., & Rubio, N. (2016). Mathematical objects through the lens of two different theoretical perspectives: APOS and OSA. *Educational Studies in Mathematics*, 91(1), 107–122. <https://doi.org/n3d3>
- Fuentealba, C., Badillo, E., & Sánchez-Matamoros, G. (2016). Las conexiones entre las derivadas sucesivas de una función: Un estudio exploratorio sobre la existencia de matices en la tematización del Esquema de la derivada. *Avances en Matemática Educativa teorías y enfoques*, 3, 47–59.
- Fuentealba Aguilera, C. (2017). *Análisis del esquema de la derivada en estudiantes universitarios* [Tesis doctoral]. Universidad Autónoma de Barcelona.

- Fuentealba, C., Sánchez-Matamoros, G., Badillo, E., & Trigueros, M. (2017). The-matization of the derivative schema in university students: a study about the existence of nuances in constructing relations between a function's successive derivatives. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 48, 374–392. doi.org/10.1080/0020739X.2016.1248508
- Fuentealba, C., Trigueros M., Sánchez-Matamoros G., & Badillo E. (2022). Los mecanismos de asimilación y acomodación en la tematización de un Esquema de derivada. *AIEM Avances de investigación en educación matemática*, 21, 23–44. https://doi.org/10.35763/aiem21.4241
- Fuentealba, C., Badillo, E., Sánchez-Matamoros, G., & Cárcamo, A. (2019). Los subniveles de desarrollo del esquema de derivada: un estudio exploratorio en el nivel universitario. En A. Carvalho (Ed.), *Educação Matemática e suas Tecnologias* (Vol. 2, pp. 133–141). Atena Editora.
- García, M., Llinares, S., & Sánchez-Matamoros, G. (2011). Characterizing thematized derivative schema by the underlying emergent structures. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 9, 1023–1045. https://doi.org/b886xk
- Godino, J., Batanero, C., & Font, V. (2007). The ontosemiotic approach to research in mathematics education. *ZDM - Mathematics Education*, 39(1–2), 127–135. https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1
- Hernández-Rebollar, L. A., & Trigueros-Gaisman, M. (2012). Acerca de la comprensión del concepto del supremo. *Educación Matemática*, 24(3), 67–87.
- Hernández-Rebollar, L. A., Gaisman, M. T., Estrada, H. R., & Ruiz, E. J. (2023). La concepción dinámica del límite de una función desde APOE y los registros semióticos. *Enseñanza de las Ciencias. Revista de investigación y experiencias didácticas*, 41(2), 117–135.
- Piaget J., & García R. (1983). *Psicogénesis e Historia de la Ciencia*. Siglo veintiuno editores.
- Sánchez-Matamoros, G. (2004). *Análisis de la comprensión en los alumnos de Bachillerato y primer año de la Universidad sobre la noción matemática de derivada (desarrollo del concepto)* [Tesis Doctoral]. Universidad de Sevilla.
- Sánchez-Matamoros, G., García, M., & Llinares, S. (2006). El desarrollo del esquema de derivada. *Enseñanza de las Ciencias*, 24(1), 85–98.
- Trigueros, M. (2019). The development of a Linear Algebra schema: learning as result of the use of a cognitive theory and models. *ZDM - Mathematics Education*, 51(7), 1055–1068. https://doi.org/10.1007/s11858-019-01064-6
- Trigueros, M., Badillo, E., Sánchez-Matamoros, G., & Hernández, L. (2024). Contributions to the characterization of the Schema using APOS theory: Graphing with derivative. *ZDM - Mathematics Education*, 56(6), 1093–1108. https://doi.org/10.1007/s11858-024-01615-6
- Wittgenstein, L. (1976). *Observaciones sobre los fundamentos de las matemáticas*. Alianza.

Contribuciones y perspectivas en la resolución y formulación de problemas matemáticos: El uso sistemático de tecnologías digitales en escenarios de enseñanza

Contributions and perspectives in mathematical problem posing and problem-solving approaches: The systematic use of digital technologies in learning scenarios

Matías Camacho-Machín ¹ 

Luz Manuel Santos-Trigo ² 

Fernando Barrera-Mora ³ 

Resumen

En este capítulo se presentan aspectos que han sustentado y guiado la colaboración entre la Universidad de La Laguna y el Cinvestav en los últimos 25 años, así como las perspectivas futuras de trabajo. Se identifican resultados obtenidos y se incorporan nuevos elementos basados en las tendencias actuales, que consideran la importancia del desarrollo y uso sistemático y coordinado de diversas tecnologías y plataformas digitales para la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. Se enfatizan los procesos de resolución y formulación de problemas mediante el uso de herramientas tecnológicas, a partir de un cuestionamiento sistemático que promueve el planteamiento y discusión de preguntas como un medio para que los estudiantes desarrollen una comprensión de conceptos y competencias en resolución de problemas.

¹ mcamacho@ull.edu.es

Universidad de La Laguna (SEIEM)

² msantos@cinvestav.mx

Centro de Investigación y Estudios Avanzados (SOMIDEM)

³ fbarrera10147@gmail.com

Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo (SOMIDEM)

Palabras clave

Formulación de problemas, matemáticas, tecnologías digitales, aprendizaje.

Abstract

This chapter presents key aspects that have characterized the collaboration between the University of La Laguna and Cinvestav (Center for Research and advanced studies) during the last 25 years, as well as future perspectives for joint work. It includes some of the results obtained and incorporates new elements based on current trends, emphasizing the importance of the systematic and coordinated development and use of various technologies and digital platforms for the teaching and learning of Mathematics. Our shared interest is particularly focused on problem formulation and solving through the use of technological tools, based on systematic questioning to enhance the understanding of mathematical concepts.

Keywords

Problem posing, mathematics, digital technologies, learning.

Introducción

Es reconocido ampliamente que la colaboración entre grupos de investigación contribuye directamente al desarrollo de conocimiento disciplinar. En este contexto, el Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional y el Departamento de Análisis Matemático (área de Didáctica de las Matemáticas) de la Universidad de La Laguna iniciaron una fructífera colaboración desde la década de los 80, la cual continúa desarrollándose de manera sostenida en distintos temas de la educación matemática. Ha incluido visitas o estancias académicas recíprocas de profesores y estudiantes en las dos instituciones, la codirección de tesis doctorales, la impartición de cursos y seminarios, la participación en congresos internacionales y la generación de publicaciones de trabajos conjuntos.

La coincidencia en temas de investigación ha propiciado la construcción de una agenda común que ha sustentado el desarrollo de diversos proyectos de investigación y práctica. El área de investigación que ha sido el soporte académico de estas colaboraciones académicas se relaciona con la importancia de las actividades de resolución de problemas en los procesos de construcción de conocimiento matemático, tanto en los profesores como en los estudiantes.

¿Cuáles son los temas y resultados importantes en el dominio de la resolución de problemas y cómo se relacionan con los avances y desarrollos de la Educación Matemática? En términos generales, la Educación Matemática, en su agenda de investigación y práctica, reconoce la importancia de analizar cómo los profesores/estudiantes construyen o desarrollan conoci-

miento matemático y aplican formas de pensar consistentes con las prácticas propias del quehacer matemático en la resolución de problemas.

En esta dirección, los procesos de formulación de problemas y la búsqueda de diversas formas de resolverlos son actividades esenciales asociadas con el desarrollo de las matemáticas (Santos-Trigo, 2020, 2024). ¿Cómo se formula un problema matemático? ¿Qué significa comprender el enunciado de un problema o un concepto matemático? ¿Cómo influye el uso de herramientas concretas o materiales (regla y compás; papel y lápiz), tecnologías digitales (GeoGebra, Wolfram Alpha, Mathematica, ChatGPT o DeepSeek, etc.) o simbólicas (Sistema Cartesiano, representaciones simbólicas, etc.) en las formas de razonamiento matemático que construye el profesor/estudiante en la resolución de problemas o en la comprensión de conceptos? Estas y otras preguntas han guiado y sustentado diversos proyectos de investigación desarrollados en colaboración entre instituciones mexicanas y la Universidad de La Laguna (Tenerife, España).

En este capítulo, se muestran rasgos del origen y evolución de la colaboración, señalando los resultados importantes y las tendencias recientes que consideran el desarrollo y uso sistemático de tecnologías y plataformas digitales en el estudio de las matemáticas. En las actividades de resolución de problemas, los estudiantes tienen la oportunidad de desarrollar un método de indagación que les permite explorar el significado de conceptos matemáticos y su aplicación en la resolución de problemas. En esta dirección, los estudiantes plantean y analizan constantemente preguntas como un medio para comprender conceptos y desarrollar competencias en resolución de problemas.

Antecedentes y racionalidad

La resolución de problemas matemáticos es un campo de investigación y práctica, en la Educación Matemática, que sustenta y relaciona el quehacer y el desarrollo de las matemáticas con las actividades de aprendizaje que promueven y guían la construcción de conocimiento matemático en los profesores y estudiantes. En esta perspectiva, el estudio de las prácticas de la disciplina (¿cómo se desarrolla una idea o concepto matemático?, ¿cómo se formula y resuelve un problema en la disciplina?) proporciona bases para caracterizar lo que significa pensar matemáticamente, y ofrece información importante sobre qué actividades son esenciales durante el desarrollo de un pensamiento matemático robusto de los estudiantes. Así, la formulación de problemas y la búsqueda sistemática de diversos caminos o formas de resolver problemas son actividades esenciales e interconectadas que impulsan el desarrollo del conocimiento matemático.

En la comunidad matemática, la identificación y presentación de listas de problemas abiertos ha sido una tradición que ha inspirado a los matemá-

ticos en la búsqueda de soluciones y en el desarrollo de conocimiento en la disciplina (Santos-Trigo, 2020; 2024). Así, los intentos de resolución, el desarrollo de métodos y las soluciones proveen información relevante sobre qué áreas y contenidos de la disciplina se han desarrollado en distintas etapas de la historia de las matemáticas. Por ejemplo, al tratar de probar el Teorema de Fermat que establece: $x^n + y^n = z^n$ la ecuación no tiene soluciones enteras diferentes de cero, para todo entero $n > 2$, se desarrolló una de las ramas importantes de la teoría de números, la Teoría de Números Algebraicos.

En la Educación Matemática interesa analizar y documentar el desarrollo cognitivo de los estudiantes y la influencia del ambiente social durante la construcción de conocimiento matemático y competencias en resolución de problemas (Liljedahl & Cai, 2021). Santos-Trigo (2024) argumenta que existen diferentes caminos e interpretaciones sobre cómo diseñar e implementar actividades de resolución de problemas en escenarios de aprendizaje. Sin embargo, existen principios comunes que sustentan y distinguen un acercamiento que privilegie la resolución de problemas en el aprendizaje de la disciplina. En este contexto, las experiencias, la disponibilidad y el comportamiento de los estudiantes al abordar una tarea matemática se orientan alrededor de una forma de pensar que es consistente con las prácticas de la disciplina. Las formas de razonamiento se expresan o manifiestan a partir de las actividades que los estudiantes desarrollan durante las fases de resolución de problemas. Pólya (1945) propone un método de indagación donde el estudiante problematiza el proceso de comprender conceptos y resolver problemas. Reconoce la importancia de que los estudiantes formulen preguntas durante las cuatro fases que caracterizan el proceso de resolver problemas: *comprensión* del enunciado y búsqueda de sentido y significado del problema (¿de qué trata el problema?, ¿qué datos incluye?, ¿qué se pregunta?); *diseño* de un plan de solución (¿cómo se puede representar el problema?, ¿se puede pensar en un problema más simple?, ¿se puede construir un modelo dinámico del problema?); *implementación* del plan para resolver el problema (¿qué relaciones o patrones surgen en la exploración del modelo del problema?, ¿existen soluciones parciales que aportan a la solución global?); *revisión* o *análisis retrospectivo* del proceso de resolución del problema (¿qué datos se usaron en la resolución del problema?, ¿las unidades son consistentes y la solución tiene sentido?, ¿se puede generalizar el método de solución o extender el problema inicial?).

Así, durante los procesos de formulación y resolución de problemas, el profesor/estudiante identifica conceptos, recursos y estrategias para analizar propiedades o atributos de objetos matemáticos, construye modelos y explora el comportamiento de sus elementos, formula conjeturas o relaciones y busca argumentos para validar relaciones, formular teoremas y resultados. Además, desarrolla una notación y lenguaje para enunciar y presentar conceptos y

operaciones, así como la solución de problemas o justificación de resultados. Entre las actividades del quehacer matemático se destaca la búsqueda de múltiples caminos para modelar y explorar conceptos y resolver problemas, la formulación de preguntas y la búsqueda de diversos argumentos para validar conjeturas y resultados.

Leung et al. (2024) afirman que los enfoques de aprendizaje basados en problemas promueven en los estudiantes un método de cuestionamiento abierto que les permite involucrarse en ciclos múltiples e iterativos para resolver un problema. En este proceso, los estudiantes tienen la oportunidad de refinar su comprensión de conceptos y así robustecer los métodos y estrategias de resolución de problemas. Por esto, es importante explicar y caracterizar cómo los estudiantes desarrollan competencias en resolución de problemas en sus experiencias de aprendizaje. Con esto se establece un puente entre la investigación en Resolución de Problemas y la práctica de enseñanza (Fried, 2014). “La resolución de problemas es un dominio de investigación central para los educadores matemáticos, quienes han desarrollado marcos conceptuales para formular ideas generales sobre los procesos de resolución de problemas (más allá de ideas puntuales necesarias en la resolución de problemas específicos)” (Fried, 2014, p. 17).

Sobre la comprensión de conceptos matemáticos

¿Cómo se desarrolla la comprensión de un concepto matemático? ¿Qué actividades promueven la comprensión y aplicación de un concepto matemático en la resolución de problemas? Santos-Trigo et al. (2024) afirman que el proceso de comprensión de un concepto matemático implica que los estudiantes analicen, concilien y reflexionen sobre sus diversos significados incluyendo el tránsito entre acercamientos intuitivos, geométricos, operacionales y formales. Además, reconocen que siempre existen diversas maneras de caracterizar e interpretar el significado y las formas de analizar un concepto matemático. Por ejemplo, Thurston (1994) identifica varias dimensiones asociadas con la comprensión del concepto de *derivada* de una función, que permiten a los estudiantes estudiar el concepto desde perspectivas distintas y complementarias. En ese camino, un acercamiento “infinitesimal” centra la atención en el cociente del cambio infinitesimal en el valor de una función y el cambio infinitesimal en una variable, el tratamiento *simbólico* enfatiza las reglas y operaciones para derivar funciones, el significado *geométrico* de la derivada como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función; la derivada como una *razón de cambio* o la velocidad instantánea de la función con respecto al tiempo o la definición *formal de derivada* que involucra el concepto de límite. Así, durante el proceso de comprensión de un concepto, todas las dimensiones y significados son importantes y demandan que el estudiante identifique y active diferentes recursos y estra-

tegias para representar, explorar, operar y aplicar el concepto en la resolución de problemas. Además, el proceso de comprensión de un concepto se desarrolla de manera gradual y en el camino los estudiantes continuamente analizan y contrastan los significados asociados con cada una de las dimensiones del concepto. Así, la integración de los diversos significados o dimensiones del concepto es importante para que los estudiantes desarrollen una comprensión global del concepto que les permita aplicarlo en la resolución de problemas.

En términos generales, la resolución de problemas ofrece bases y principios para estructurar ambientes de enseñanza/aprendizaje alrededor de hábitos y formas de pensar asociados con el quehacer y desarrollo de la disciplina (Cuoco et al., 1996; Santos-Trigo, 2024). En este camino, el profesor o estudiante se involucra en decisiones estratégicas sobre qué hacer durante la comprensión de un concepto o la resolución de un problema (¿qué material o recursos consultar?, ¿con quién dialogar y discutir ideas?, ¿cómo interactuar con pares o expertos?, ¿cómo usar herramientas generativas de inteligencia artificial?). En el estudio de la disciplina, un principio integrador es conceptualizar a las matemáticas como un conjunto de dilemas que el profesor/estudiante problematiza durante su estudio y en el desarrollo de competencias en resolución de problemas. La problematización se manifiesta a partir de las preguntas que el profesor/estudiante plantea durante los procesos de comprensión de conceptos y en las distintas fases de resolución de problemas (Polya, 1945). Además, el uso de distintas herramientas resulta esencial en las formas de razonar y responder las preguntas.

Sobre el uso de sistemas de geometría dinámica (SGD)

El desarrollo de Sistemas de Geometría Dinámica como GeoGebra representa una contribución importante en la representación y exploración de conceptos matemáticos y en la resolución de problemas. Las representaciones estáticas de objetos matemáticos, que se construyen con el uso de lápiz y papel, se transforman en modelos dinámicos donde la herramienta permite mover elementos dentro del modelo y así buscar relaciones o propiedades asociadas con el comportamiento de los atributos de los objetos. Una característica relevante en el uso de un SGD es que la precisión en la representación de objetos matemáticos no depende de las habilidades del estudiante en el uso de un instrumento como el compás, regla u otro artefacto. La herramienta provee al estudiante de un camino para representar objetos como rectas, segmentos, ángulos, polígonos o construir paralelas, perpendiculares, bisectrices, entre otros, de manera precisa. Además, permite mover ordenadamente objetos, cuantificar atributos, trazar lugares geométricos, etc., que resultan importantes en la búsqueda de propiedades o relaciones matemáticas. Santos-Trigo y Camacho-Machín (2009; 2013) proponen un

marco para estructurar prácticas y estrategias de resolución de problemas que permite a los estudiantes transformar problemas rutinarios en una serie de actividades y tareas que extiendan la naturaleza rutinaria de la actividad. En este proceso, el uso coordinado de tecnologías digitales (GeoGebra) y plataformas en línea (Wikipedia, Khan Academy, etc.) resulta importante para extender los problemas y métodos de resolución. Así, de manera explícita, se recomienda que los estudiantes construyan modelos dinámicos de los problemas y consulten recursos en línea como un camino para revisar y extender su comprensión de conceptos (Santos-Trigo et al., 2021). Un ejemplo de un modelo dinámico que involucra figuras u objetos simples (líneas, puntos, circunferencia, etc.) se muestra en las Figuras 1 y 2. En este modelo, al mover el punto P sobre la circunferencia se genera una sección cónica (elipse) (Figura 1) y al mover el punto Q sobre la recta AB , otras cónicas aparecen (Figura 2).

Figura 1

El lugar geométrico del punto R cuando P se mueve sobre la circunferencia es una elipse

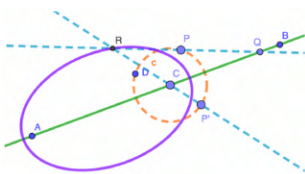
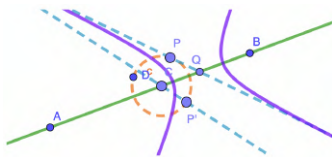


Figura 2

Al mover el punto Q sobre la recta AB , otras secciones cónicas aparecen, una hipérbola



Santos-Trigo et al. (2024) analizan el comportamiento de un tractocamión (camión con remolque) al pasar por debajo de un puente con una altura conocida (Figura 3). La idea es determinar las dimensiones y condiciones del tractocamión para que pueda librar o cruzar la avenida sin afectar el puente. En el modelo dinámico (Figura 4) se observa que debido a la inclinación del camino que se produce al reparar la vía, la altura del remolque, medida desde la superficie de la vía hasta el pie del puente a la parte superior del tractocamión (PR) al pasar el puente, cambia.

En la gráfica se observa la variación de PK y, en este caso, con las dimensiones dadas de la caja del tractocamión, el valor máximo que alcanza PK es 2.219 unidades. Lo que significa es que la altura del puente debe ser mayor que 2.219 unidades para que el tractocamión pase y libere el puente

sin problemas. English (2023) propone extender los dominios y contextos de los problemas de tal manera que los estudiantes desarrollen acercamientos multidisciplinarios en los caminos de resolución. Propone un marco que integra Ciencia, Tecnología, Ingeniería y Matemáticas (modelo STEM) para abordar problemas complejos como el cambio climático, migración, movilidad, etc.

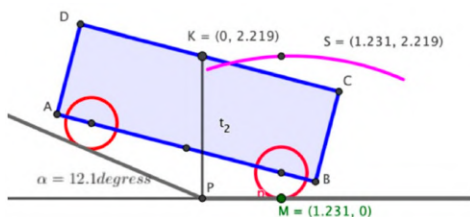
Figura 3

Un tractocamión cruzando por debajo de un puente



Figura 4

Modelo dinámico que muestra la variación de la altura PK



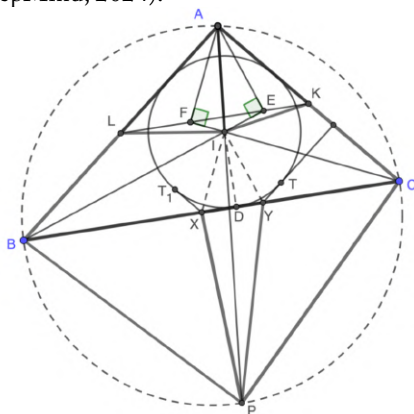
Existe evidencia de que el uso de un SGD (GeoGebra) en la representación y exploración de problemas demanda no solo una reestructuración de los contenidos del currículo; sino que también amplía las rutas didácticas asociadas con el diseño e implementación de actividades de aprendizaje. En el estudio de la geometría analítica, generalmente los temas se presentan en un orden que incluye una breve introducción sobre el uso de un sistema de coordenadas, una caracterización general de lugares geométricos, el estudio de la recta y posteriormente se analiza la ecuación de la circunferencia, la parábola, la elipse, la hipérbola, etc. (Lehmann, 1985). Con un acercamiento dinámico, ese orden se modifica y ahora el estudiante no solo tiene la oportunidad de analizar todas las secciones cónicas en su conjunto; sino también las relaciona con otros conceptos estudiados previamente como perpendicularidad, propiedades de triángulos, mediatrices, paralelas, entre otros. Además, el uso de GeoGebra privilegia el significado geométrico de los conceptos y ofrece una oportunidad para que los estudiantes analicen e interpreten gráficamente propiedades y relaciones entre atributos de los objetos o elementos del modelo dinámico (Santos-Trigo et al., 2021).

Sobre el uso de herramientas de la Inteligencia Artificial

Recientemente, el desarrollo y disponibilidad de herramientas de Inteligencia Artificial Generativa, como el ChatGPT, AlphaGeometry, DeepSeek, y AlphaProof, ha propiciado una discusión abierta sobre cómo usarlas en ambientes de resolución de problemas. Se argumenta que este tipo de aplicaciones pueden generar información relevante en el diseño e implementación de actividades de resolución de problemas y en el proceso mismo de encontrar la solución. En particular, las respuestas y acercamientos que proporcionan estas herramientas deben ser analizados en términos de la coherencia y pertinencia de la respuesta o solución que proporcionan al responder las preguntas planteadas inicialmente. Es decir, los estudiantes deben desarrollar estrategias y métodos para identificar posibles caminos de solución, y respuestas incorrectas que la herramienta produzca al responder o resolver un problema.

Los sistemas AlphaGeometry y AlphaProof están diseñados para resolver problemas matemáticos de los llamados “tipo olimpiada”. En la International Mathematical Olympiad 2024 (IMO2024), AlphaProof junto con AlphaGeometry 2 lograron un resultado de medalla de plata al resolver cuatro de los seis problemas que tradicionalmente se plantean a los competidores. El problema de geometría que resolvió AlphaProof es:

Sea ABC un triángulo con $AB < AC < BC$. Sean I y Ω el incentro y el círculo inscrito (incírculo) respectivamente. Consideremos un punto X sobre el lado BC distinto de C tal que la recta paralela a AC que pasa por X es tangente a Ω . Análogamente, sea Y un punto sobre el lado BC distinto de B cumpliendo que la recta paralela a AB que pasa por Y es tangente a Ω . La recta AI interseca a la circunferencia circunscrita al triángulo ABC en el punto $P \neq A$. Si K y L son los puntos medios de AC y AB respectivamente, probar $\angle KIL + \angle YPX = 180^\circ$ que (GoogleDeepMind, 2024).



Los principales pasos que sigue la herramienta en la resolución del problema consisten en demostrar semejanzas entre una colección de

triángulos, más precisamente, mostrar que las parejas de triángulos (AKI, BPY), (ALI, CPX), (BXI, BIA) y (CYI, CIA) son semejantes. Debe mencionarse que en la justificación de las semejanzas anteriores hay una buena cantidad de pasos intermedios y la aportación principal de la herramienta consiste en identificar la existencia del ángulo recto en el punto E, que se obtiene de la intersección de las rectas BI y LK. Otro elemento que conviene destacar en el enunciado del problema es que la hipótesis sobre las medidas de los lados no es necesaria, como puede ser observado en la justificación de la semejanza de triángulos y también en demostraciones hechas por humanos, que vale decir, son más simples que la que propone el sistema de IA.

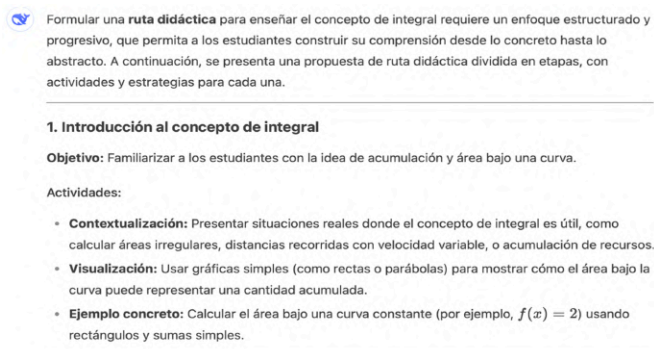
Las herramientas ChatGPT y DeepSeek funcionan a partir de un diálogo continuo con el usuario que se inicia con un prompt que la herramienta recibe y que puede ser un enunciado de un problema, una pregunta o un conjunto de datos para formular un problema. La herramienta produce una respuesta y el usuario la analiza en términos de su viabilidad, consistencia o validez, de acuerdo con el enunciado inicial del problema.

Dependiendo de la respuesta, el usuario puede plantear otras preguntas para intentar corregir o redireccionar la respuesta inicial. También se le puede solicitar que busque otros caminos para abordar la actividad y este diálogo puede continuar hasta que el usuario considere que la herramienta le ha proporcionado información importante para resolver el problema. Además, el usuario puede preguntar qué conceptos y estrategias resultaron importantes en la resolución de los problemas.

A partir de la información generada por la herramienta durante la interacción con el usuario o profesor, se le puede preguntar acerca de una ruta didáctica para presentar el problema a los estudiantes. Por ejemplo, a DeepSeek se le interroga sobre el diseño de una ruta de enseñanza para estudiar el concepto de *integral* y responde:

Figura 5

Respuesta de DeepSeek a la petición de una ruta didáctica



Formular una **ruta didáctica** para enseñar el concepto de integral requiere un enfoque estructurado y progresivo, que permita a los estudiantes construir su comprensión desde lo concreto hasta lo abstracto. A continuación, se presenta una propuesta de ruta didáctica dividida en etapas, con actividades y estrategias para cada una.

1. Introducción al concepto de integral

Objetivo: Familiarizar a los estudiantes con la idea de acumulación y área bajo una curva.

Actividades:

- **Contextualización:** Presentar situaciones reales donde el concepto de integral es útil, como calcular áreas irregulares, distancias recorridas con velocidad variable, o acumulación de recursos.
- **Visualización:** Usar gráficas simples (como rectas o parábolas) para mostrar cómo el área bajo la curva puede representar una cantidad acumulada.
- **Ejemplo concreto:** Calcular el área bajo una curva constante (por ejemplo, $f(x) = 2$) usando rectángulos y sumas simples.

En su respuesta, la aplicación presenta ejemplos que el profesor puede considerar en el diseño e implementación de actividades, al final resume o presenta ideas esenciales para organizar las sesiones de clase:

Figura 6
Resumen de la ruta que presenta DeepSeek

Figura 6. Resumen de la ruta que presenta DeepSeek

Resumen de la ruta didáctica

1. Introducir el concepto de integral mediante ejemplos concretos y visualizaciones.
2. Enseñar las sumas de Riemann como aproximación al área bajo una curva.
3. Presentar la definición formal de la integral definida.
4. Conectar la integral con la derivada mediante el Teorema Fundamental del Cálculo.
5. Enseñar técnicas de integración para resolver problemas más complejos.
6. Aplicar la integral en contextos reales.
7. Evaluar y reforzar el aprendizaje.

Si ahora utilizamos el ChatGPT y le hacemos el mismo cuestionamiento, la aplicación de inteligencia artificial propone seis etapas para desarrollar la ruta e incorpora un elemento o enfoque más robusto que el que proporciona la aplicación DeepSeek. Por ejemplo, explícitamente menciona el sentido de acumulación del concepto de integral.

Figura 7
La ruta didáctica propuesta por ChatGpt (resumen)

🌐 Aquí tienes la tabla con las **etapas y objetivos** de la ruta didáctica:

Etapa	Objetivo
1. Introducción Intuitiva a la Integral	Comprender la integral como acumulación y área bajo la curva sin formalismos.
2. La Integral como Suma de Partes Pequeñas (Sumas de Riemann)	Entender la integral como la suma de pequeñas áreas bajo la curva.
3. Definición Formal de la Integral Definida	Introducir la notación matemática y la idea de límite en la integración.
4. Integral Indefinida y Regla Fundamental del Cálculo	Relacionar la integral con la derivada y calcular integrales indefinidas.
5. Aplicaciones de la Integral	Aplicar la integral en contextos reales.
6. Extensión a Problemas Más Complejos	Explorar aplicaciones avanzadas en geometría y física.

✅ Este resumen permite visualizar la estructura del proceso de enseñanza de la integral de manera clara y progresiva.

🎨 ¿Te gustaría agregar algún detalle más? 😊

A partir de la información generada por las aplicaciones de IA, se identifican diversos significados o dimensiones del concepto de integral que deben incluirse en el diseño de actividades y un plan de enseñanza. Siguiendo las ideas de Thurston (1994), se identifican significados importantes en el estudio de la integral.

Acercamiento geométrico. El área bajo la curva de una función en el sentido estático (áreas de rectángulos- Integral de Riemann) o en el sentido dinámico, el área como acumulación de segmentos que cubren una región (Principio de Cavalieri).

Figura 8
Riemann: Rectángulos

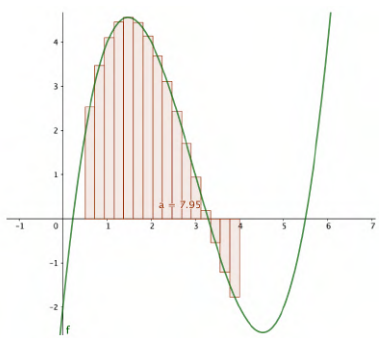
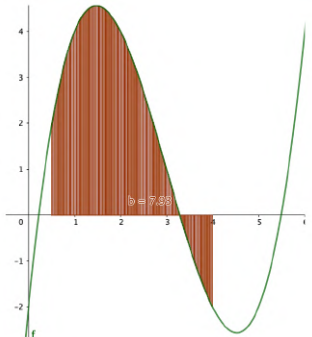


Figura 9
Cavalieri: Segmentos



Lógico o formal. Definición de sumas superiores ($\overline{S}(f, P)$) y sumas inferiores ($\underline{S}(f, P)$) para el conjunto de particiones $\mathcal{P}([a, b])$ del intervalo $[a, b]$,

La función f es Riemann integrable si $\forall \epsilon > 0$, $\left| \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \right| < \epsilon$ siendo

$$\overline{\int_a^b} f = \inf \{ \overline{S}(f, P) : P \in \mathcal{P}([a, b]) \}$$

y

$$\underline{\int_a^b} f = \sup \{ \underline{S}(f, P) : P \in \mathcal{P}([a, b]) \}$$

Simbólico. Utilización de los conceptos de antiderivada o integral definida, por ejemplo, si $f(x) = x^n$, entonces

$$\int f(x) dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

Conexión entre la integral y la derivada. En el sentido de la primera parte del Teorema Fundamental del Cálculo para funciones continuas (Wassermann et al., 2021). Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida como:

$$F(x) = \int_a^x f.$$

Entonces F tiene derivada y $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in [a, b]$ entendiendo que la derivada de F en a es la derivada lateral derecha; similarmente en b . Más aún, si existe una función g tal que $g' = f'$, en el intervalo $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f = g(b) - g(a).$$

Conexión entre la derivada y la integral. En el sentido de la segunda parte del Teorema Fundamental del Cálculo para funciones continuas. Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y definamos

$$F(x) = \int_a^x f,$$

existirá un $c \in [a, b]$, cumpliendo que $F'(c) = f(c)$, esto es

$$F'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{\int_c^x f}{x - c}.$$

(Wasserman et al., 2021).

La integral como un operador. Dado el intervalo $I = [a, b]$, V el espacio vectorial de las funciones Riemann-integrables en I , y W el espacio de las funciones continuas en I , se declara al operador $T: V \rightarrow W$ por

$$T(f) = \int_a^x f.$$

Medida de otras magnitudes. Lineales (longitudes de arcos de curvas) y volúmenes (método de secciones o método de anillos).

Modelización de fenómenos. Físicos, biológicos (trabajo, momentos de inercia, crecimiento o decrecimiento de poblaciones).

Otras interpretaciones y aplicaciones se obtienen al considerar integrales de funciones de R^n a R^m .

Al igual que para el caso de la derivada (Thurston, 1994), se pueden considerar diversos significados y maneras de interpretar el concepto de integral. La lista de significados se puede extender, por ejemplo, en la Teoría

de Operadores, el concepto de integral resulta importante en el estudio y solución de ecuaciones diferenciales, ecuaciones y transformadas integrales que son temas de los cursos de análisis real y complejo.

Podría considerarse, por otra parte, que las investigaciones sobre la enseñanza y aprendizaje de la integral definida se basan en dos concepciones diferentes del concepto (Jones & Ely, 2023). De un lado se considera la integral como “*adding up pieces*” (AUP), y de otro “*accumulation from rate*” (AR). En las investigaciones realizadas a partir de la primera consideración, la integral definida se considera como el área bajo una curva que se particiona en trozos infinitesimales que al sumarse cuando se suman estas áreas y se da el paso al límite (sobre el número de particiones), da lugar al concepto de la integral definida. En la otra concepción (AR) también se tiene el sentido del área bajo la curva, pero está centrada en la covariación entre dos variables que se relacionan a través del análisis de la acumulación producida por su tasa de variación al acumularse en la otra variable. La mayor parte de las investigaciones desarrolladas en España se han centrado en los aspectos del AUP (e.g., Camacho et al., 2010; Camacho & Moreno, 2015).

Dreyfus et al. (2021) consideran que se debe hacer más hincapié en la segunda concepción para aproximarse al concepto de integral definida, ya que incrementa la diversidad de interpretación, la cual muchas veces está limitada al sentido de área bajo una curva. Se ilustra que el sentido de acumulación se puede observar en el siguiente modelo dinámico (ver Figura 10):

Figura 10

Storm problem

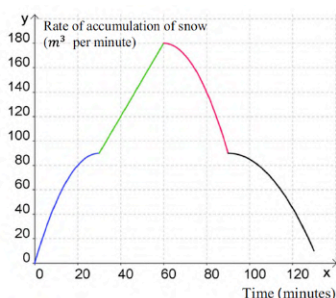
La gráfica de la derecha muestra la variación de la cantidad de nieve acumulada ($\text{m}^3/\text{min.}$) durante una tormenta, el tiempo está en minutos

1. ¿Cuándo es máxima la cantidad de nieve?

Si la representación algebraica de la función es.

$$f(x) = \begin{cases} -0.1(x-30)^2 + 90, & 0 \leq x \leq 30 \\ 3x, & 30 \leq x \leq 60 \\ -0.1(x-60)^2 + 180, & 60 \leq x \leq 90 \\ -0.05(x-90)^2 + 90, & x > 90 \end{cases}$$

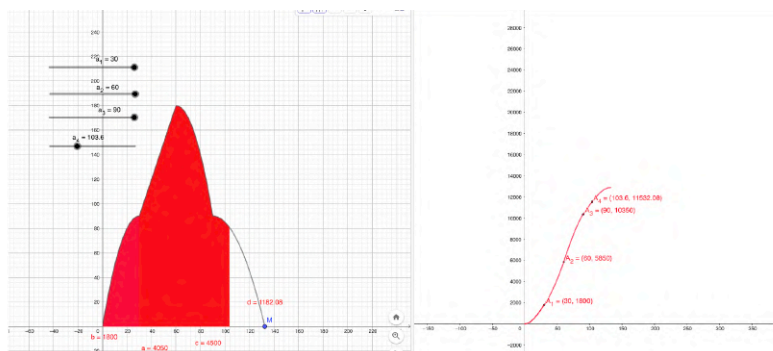
2. ¿Cuál es la cantidad de nieve acumulada entre los minutos 0-120?
3. Expresar algebraicamente una nueva función $V(x)$ que represente la cantidad acumulada de nieve entre los instantes $0 \leq x \leq 120$



Usando GeoGebra, el problema podría resolverse e incorporar otra serie de preguntas que profundizarán en la comprensión de la situación planteada. Utilizando la visión de doble gráfica que permite el DGS se observa (ver Figura 11):

Figura 11

Problema de la tormenta



En la gráfica de la derecha se representa la función de acumulación que se corresponde con la integral de la función definida a trozos $y = f(x)$. Para resolver la cuestión 2, bastaría con mover los deslizadores que permiten observar la variación de la acumulación de las áreas. Moviendo el deslizador a_4 hasta 120, el resultado se obtiene de inmediato, que será justamente el punto de la curva que representa la función $V(x)$ (parte derecha de la gráfica).

El uso de aplicaciones de la Inteligencia Artificial Generativa como el ChatGPT o el DeepSeek ofrece a los profesores/estudiantes información importante tanto en el estudio de conceptos matemáticos y la resolución de problemas, como en el diseño de rutas didácticas sobre cómo enseñar/aprender la disciplina. En el ejemplo que involucra el estudio del concepto de integral, la herramienta identifica temas esenciales que se deben considerar en el diseño de actividades de aprendizaje. Se destaca el diálogo interactivo que se basa en el método inquisitivo para iniciar y mantener una comunicación entre el usuario y la herramienta. Así, el usuario analiza las respuestas con la finalidad de ampliar el grado de comprensión del concepto en estudio. En esta dirección, el papel del profesor resulta esencial en términos de guiar a los estudiantes en el análisis de las respuestas que genera la herramienta y en la búsqueda de posibles caminos para detectar respuestas incompletas o erróneas durante la interacción con la herramienta. En algunos casos, es necesario que el estudiante busque otros caminos de resolución de los problemas y los contraste con aquellos que genera la herramienta. En particular, el uso de un SGD puede extender las formas de representar y explorar los conceptos y los métodos de resolución de los problemas.

La resolución de problemas y el diseño de libros interactivos

Los desarrollos y disponibilidad de diversas herramientas y plataformas digitales están transformando el diseño y uso de materiales con la intención de favorecer el desarrollo de un pensamiento matemático en los estudiantes. En general, los estudiantes, al trabajar una tarea o problema matemático, consultan recursos en línea para aclarar dudas, extender su comprensión de conceptos, revisar problemas resueltos, etc. Johnson et al. (2017) señalan que las actividades y los tipos de problemas que resuelven y discuten los estudiantes permean sus formas de razonar y de resolver las tareas matemáticas. Santos-Trigo y Camacho-Machín (2018) formulan un conjunto de preguntas sobre los posibles cambios que el uso sistemático de tecnologías digitales en las propuestas del currículum y en los escenarios de enseñanza/aprendizaje incluyendo el desarrollo de materiales que propicien y promuevan diversas formas de razonar y resolver problemas en las experiencias de los estudiantes.

¿Seguirán siendo trascendentales los contenidos que se estudian en matemáticas y ciencias en la educación preuniversitaria? o ¿habrá una geometría distinta que incluya el estudio del movimiento de las figuras o un álgebra con poco énfasis en las operaciones o cálculos algebraicos y su significado? ¿Será todavía necesario que el niño en la educación primaria haga copias y copias para aprender a escribir? o ¿es mejor guiar al joven en el uso de los ordenadores y tabletas que lo ayuden a desarrollar o presentar un argumento estructurado y comprender lo que leen? ¿Desaparecerá el modelo de enseñanza donde, en general, un profesor, al frente de la clase, promueve actividades de aprendizaje en un ambiente controlado? ¿Deben considerarse desde ahora aquellos escenarios de enseñanza donde los estudiantes puedan ellos mismos diseñar su propio menú de aprendizaje que incluya una interacción en línea con otros estudiantes y asesores? (Santos-Trigo & Camacho-Machín, 2018, p. 23).

Existen diversos modelos o formas de utilizar las tecnologías en el diseño de materiales para los estudiantes. Santos-Trigo y Camacho-Machín (2018) identifican tres tipos de materiales que transforman la naturaleza de un libro de texto tradicional con el uso de tecnologías digitales:

(i) La digitalización de un libro tradicional y que ahora presenta una serie de uniones o conexiones con otros objetos de aprendizaje [plataformas o desarrollos digitales en línea] que el maestro considera importantes para los estudiantes; (ii) un libro digital en constante revisión y desarrollo a partir de los comentarios recibidos por otros maestros; y (iii) el tipo de libro digital interactivo que se basa en un conjunto de objetos de aprendizaje que incluye tareas y herramientas que el estudiante usa en la comprensión de los conceptos y en la resolución de problemas (p. 26).

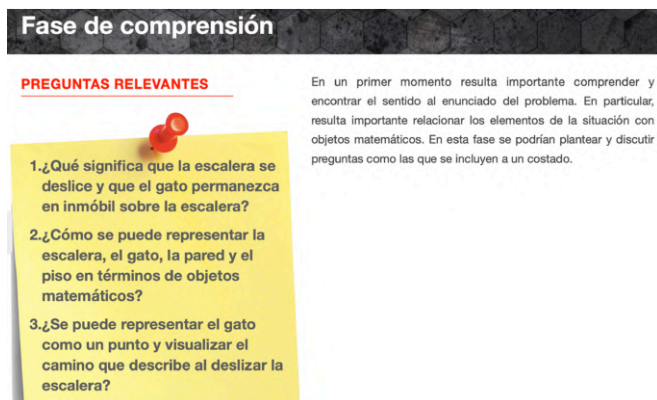
En el diseño de materiales, la idea es que los estudiantes tengan la oportunidad de consultar recursos en línea con el propósito de revisar o ampliar la comprensión de conceptos involucrados en la actividad o

problema. Así, durante todo el proceso de interacción con la actividad, se proponen videos cortos o enlaces a plataformas en línea que incluyen explicaciones o ejemplos de problemas resueltos relacionados con la tarea o actividad que van a resolver. Se propone una estructura que identifica una serie de fases o episodios alrededor del proceso de solución. En el problema “El gato en la escalera” se ilustran las fases de resolución de la actividad (Santos-Trigo & Camacho-Machín, 2018).

1. **Presentación del problema.** Con un video corto se puede explicar los objetivos de la actividad y hacer explícito un plan para abordar el problema.



2. **Comprensión del problema.** La idea es analizar el enunciado del problema en términos de su sentido y significado con la intención de esbozar un posible método de resolución.



3. **La construcción de un modelo dinámico del problema.** En este modelo, el estudiante tiene la oportunidad de explorar el comportamiento de los objetos o atributos al mover elementos dentro del modelo con el propósito de identificar patrones o relaciones que después valida con argumentos matemáticos.

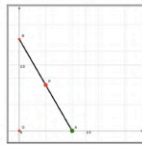
La construcción de un modelo matemático

PREGUNTAS RELEVANTES

1. ¿Se puede representar la escalera con un segmento?
2. ¿Se puede representar la posición del gato con el punto medio del segmento?
3. ¿Cómo representar la pared y el camino por donde se desliza la escalera?

La comprensión del problema provee información importante para la construcción de un modelo matemático que permita explorar el problema a partir de recursos y relaciones matemáticas.

La discusión de este tipo de preguntas puede conducir a establecer un modelo geométrico del problema ([Construcción 4](#))

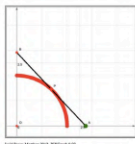


Construcción 4 Un modelo dinámico del problema.

4. La construcción y exploración del modelo dinámico del problema

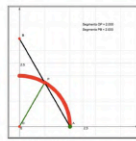
Una exploración dinámica

En la figura 3 el segmento AB representa la longitud de la escalera, P es el punto medio, el eje y es la pared, el eje x es el camino por donde se desliza la escalera. Con la ayuda de un software dinámico es posible determinar el lugar geométrico que deja el punto P al mover el punto A sobre el eje x.



Construcción 1 ¿Cuál es el lugar geométrico del punto P cuando el punto A se mueve sobre el eje x?

Un análisis de los casos extremos cuando el segmento AB coincide con los ejes ([Construcción 5](#)) conduce a formular la conjetura: El lugar geométrico del punto P cuando el punto A se mueve sobre el eje x es un arco de circunferencia.



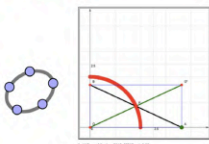
Construcción 5 ¿Qué ocurre cuando el punto A coincide con el origen O? Cuando el punto A se desliza sobre el eje-x se cumple que $d(O, P) = d(P, B)$

Un hábito importante en el quehacer matemático es que toda conjetura se necesita explorar y sustentar matemáticamente. En este contexto, es necesario buscar propiedades y argumentos que permitan justificar la conjetura.

5. Un acercamiento geométrico

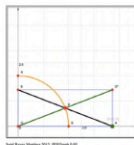
Un argumento geométrico

En la [Construcción 6](#), a partir del triángulo rectángulo AOB se puede construir el rectángulo AOB'O'. Se observa que el punto P es la intersección de las diagonales del rectángulo AOB'O'. Así, se tiene que $d(O, P) = d(B, P) = d(A, P)$. Con esta información se concluye que el camino que sigue el punto P cuando el punto A se mueve sobre el eje x es un arco de circunferencia con radio OP y centro el punto O (origen).



Construcción 6 Completando el rectángulo a partir del triángulo AOB.

Se observa que si se escoge cualquier punto en el arco RS, entonces se puede trazar el rayo OP. Y sobre este rayo se ubica un punto O' de tal forma de $OP = PO'$. Desde el punto O' se trazan perpendiculares con los ejes. El segmento AB representa la longitud de la escalera y P su punto medio ([Construcción 7](#))

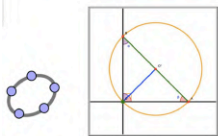


Construcción 7 Encontrar el segmento asociado con el lugar geométrico

6. Búsqueda de relaciones o propiedades. La exploración del comportamiento de los objetos dentro el modelo lleva a los estudiantes a la identificación de nuevas relaciones matemáticas.

La escalera y el ángulo recto

La escalera y el ángulo recto. Si A y B son dos puntos fijos en el plano cuya distancia representa la longitud de la escalera, ¿cuál es el lugar geométrico del punto O para lo cual el ángulo AOB es siempre un ángulo recto? La [Construcción 8](#) muestra que el lugar geométrico es una circunferencia con radio la mitad del segmento.



Construcción 8 El ángulo recto y el segmento

Los estudiantes podrían ver la demostración del Teorema de Thales en el siguiente video.



YouTube 1 Teorema de Thales.

7. Un acercamiento algebraico

Un modelo algebraico

La construcción de un modelo simbólico se basa en el empleo del sistema cartesiano para representar la información importante del problema. El objetivo es representar algebraicamente el lugar geométrico del punto P(x,y) cuando el punto A se mueve sobre el eje-x ([Construcción 9](#))



Construcción 9 Construcción de un modelo algebraico.

De la Construcción 9 se tiene que:

1. P es el punto medio de AB, entonces $x = 2t$, $y = b/2$
2. En el triángulo rectángulo AOB, se tiene que $t^2 + b^2/2 = k^2/2$ y al sustituir los valores de x e y, se tiene que $(2x)^2/2 + (2y)^2/2 = k^2/2$ lo cual puede escribirse como $x^2 + y^2 = (k/2)^2$. Esta ecuación representa un círculo con radio $k/2$ y centro el origen. En términos del problema, el dominio y rango de la expresión es el $[0, k/2]$.

8. Extensiones y conexiones del problema inicial

Extensiones y conexiones

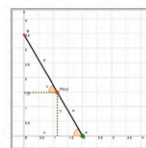
¿Qué lugar geométrico describe el gato si ahora permanece sentado en una posición distinta del punto medio y la escalera se desliza sobre el piso? Un primer acercamiento para responder esta pregunta puede basarse en el uso del modelo dinámico del problema. Con la ayuda de la herramienta directamente se obtiene el lugar geométrico que describe el punto P (ubicado fuera del punto medio) cuando el punto A se desliza sobre el eje x ([Construcción 10](#)). En esta modelo se muestran dos caminos que deja el punto P cuando



Construcción 10 ¿Cuál es el lugar geométrico del punto P cuando el punto A se mueve sobre el eje x?

se localiza en dos posiciones distintas.

De la Construcción 10 se plantea una conjetura: El lugar geométrico del punto P (P no es el punto medio) cuando el punto A se desliza sobre el eje x es una elipse. Como toda conjetura matemática es necesario presentar un argumento matemático que la sustente. En la construcción del argumento utilizamos otra vez



Construcción 11 Un argumento algebraico que sustente que el lugar geométrico es una elipse.

Con el uso coordinado de tecnologías digitales, es posible diseñar materiales interactivos donde los estudiantes tengan la oportunidad de consultar diversos recursos y plataformas en línea durante las fases de resolución de problemas. En el diseño se sustenta un método de indagación que promueve la búsqueda constante de diversos caminos o formas de representar y explorar conceptos y resolver tareas matemáticas. Se destaca la construcción de modelos dinámicos de los problemas y la formulación de preguntas como un hábito para comprender un concepto o analizar el sentido y pertinencia del enunciado de un problema. También, en el diseño de un plan y su implementación el estudiante puede consultar ejemplos resueltos y preguntarse sobre las estrategias que puede usar en la resolución del problema. Además, la formulación de nuevos problemas o la extensión del problema inicial son actividades que el estudiante debe integrar en la resolución de los problemas. Por otro lado, el SGD GeoGebra permite desarrollar libros interactivos (LIGG) que pueden aportar elementos importantes en la formación de futuros profesores de Matemáticas de Educación Secundaria. Por ejemplo, en el año 2021, una estudiante del Grado (licenciatura) en Matemáticas diseñó varias actividades en forma de LIGGs en las que se revisitaban algunos teoremas geométricos que habitualmente no se estudian en su formación (Teoremas de los senos generalizados, Ceva, Morley, Menelao y Pascal), abordados cada uno de ellos con la siguiente estructura:

- Introducción
- Conocimientos previos
- Enunciado formal
- Actividades de comprobación y demostración
- Relación con el currículum de Educación Secundaria y
- Ejercicios

Figura 12

Teorema de Ceva-Video construcción

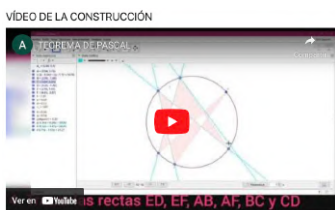


- 1.- Construir un triángulo ABC , usando el comando .
- 2.- Utilizar la herramienta  para construir un punto X del lado a , un punto Y del lado b y un punto Z del lado c del triángulo ABC .
- 3.- Trazar las semirrectas, utilizando , que unen el vértice A con el punto X , el vértice B con el punto Y y el vértice C con el punto Z , que representan las cevianas del triángulo.
- 4.- Construir el punto P , que se obtiene de intersectar dos de las cevianas, mediante .
- 5.- Obtén las razones: $\frac{BX}{XC}$, $\frac{CY}{YA}$ y $\frac{AZ}{ZB}$, y calcula sus productos.
- 6.- Observa la variación del producto a medida que arrastras los distintos vértices del triángulo de partida. Investiga si se cumple el teorema para cualquier triángulo ABC .

En las figuras 12 y 13 se muestran los videos del apartado de construcción. En el siguiente enlace, presenta la estructura de cada capítulo para el Teorema de Menelao (<https://www.geogebra.org/m/h94v3snh>)

Figura 13

Teorema de Pascal. Video de su construcción



- 1.- Construir una circunferencia de centro cualquiera y que pase por el punto A , usando el comando .
- 2.- Utilizar la herramienta  para construir los puntos C, E, B, F y D sobre la circunferencia.
- 3.- Construir un hexágono estrellado $ABCDEF A$, mediante .
- 4.- Trazar las rectas, utilizando , ED, EF, AB, AF, BC y CD .
- 5.- Construir los puntos N, L y M que se obtienen de intersectar las rectas EF y BC, ED y $AB, y CD$ y AF , respectivamente, usando el icono .
- 6.- Observa a medida que arrastras los distintos vértices del hexágono que los puntos L, M y N están alineados. Investiga si el teorema se cumple para cualquier hexágono $ABCDEF A$.

Análisis retrospectivo y conclusiones

La colaboración académica entre grupos de investigación de instituciones mexicanas (Cinvestav y la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo) y la Universidad de la Laguna se ha centrado alrededor de la resolución de problemas como un dominio de investigación que conecta las prácticas y quehacer de la disciplina con las propuestas del currículo y los escenarios o ambientes de enseñanza y aprendizaje. En este capítulo, se enfatiza la importancia de caracterizar el estudio de las matemáticas como un conjunto de dilemas o problemas que el estudiante tiene que identificar y resolver en términos de recursos y estrategias propias de la disciplina. En este camino surge la idea de problematizar la tarea de comprender conceptos y de desarrollar competencias de resolución de problemas. La problematización se manifiesta por medio de las preguntas que el estudiante formula y responde durante el proceso de comprender conceptos y resolver problemas matemáticos. En esta dirección, el uso sistemático y coordinado de diversas herramientas no solo influye en las formas en que los estudiantes razonan y resuelven problemas, sino también en las maneras de compartir sus ideas o discutir sus acercamientos de resolución con sus pares y profesores.

En el capítulo, se presentan algunos ejemplos sobre cómo un SGD (GeoGebra) ofrece a los estudiantes una oportunidad de construir y explorar modelos dinámicos de conceptos o problemas. Durante la exploración de

los modelos surgen nuevas preguntas y problemas que amplían el dominio inicial del problema y sus formas de resolverlos. Los acercamientos dinámicos propician conexiones entre conceptos y demandan una reestructuración de las propuestas del currículum. Con el uso de herramientas de la Inteligencia Artificial Generativa, el estudiante entra en un diálogo que demanda un análisis de las respuestas que proporciona la herramienta con la intención de orientar la discusión hacia la comprensión de conceptos o la resolución de los problemas. Se argumenta que el uso coordinado de las herramientas abre diversos caminos sobre cómo construir conceptos y aplicarlos en la resolución de problemas. Además, en el capítulo se presenta un modelo para el desarrollo e implementación de materiales interactivos que guíen a los estudiantes durante el desarrollo de sus experiencias de aprendizaje. Se esboza un marco que ilustra las dimensiones relevantes en la resolución de problemas y la importancia de consultar desarrollos en línea con la intención de revisar y extender la comprensión de conceptos y buscar diversos caminos para resolver un problema.

Finalmente, es importante señalar que el uso sistemático de herramientas digitales, como el ChatGPT, DeepSeek, AlphaGeometry y AlphaProof, demanda una discusión profunda no solo de las prácticas de enseñanza y los escenarios de aprendizaje; sino también de los marcos conceptuales y protocolos de investigación que sustentan y proporcionan las bases para la comprensión de conceptos y el desarrollo de competencias de resolución de problemas de los profesores y estudiantes. En esta perspectiva, el trabajo de colaboración entre grupos de investigación de instituciones mexicanas y españolas debe ampliar la agenda académica y visitar los avances y resultados en el dominio de la resolución de problemas con la intención de integrar el uso coordinado de tecnologías digitales en el desarrollo de actividades de aprendizaje y las formas de evaluar el aprendizaje de los estudiantes.

Agradecimientos

Esta investigación ha sido subvencionada por el Proyecto de Investigación de referencia PID2022-139007NB-I00 aprobado por el MCIN/AEI/10.13039/501100011033/ FEDER, UE.

Referencias

- Camacho, M., Depool, R., & Santos-Trigo, L.M. (2010) Students' use of DERIVE software in comprehending and making sense of definite integral and area concepts. En F. Hitt, D. Holton, & P. W. Thompson (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education VII, CBMS series* (Vol. 16, pp. 29–61). American Mathematical Society. Providence. USA.

- Camacho, M., & Moreno, M. (2015) Investigaciones sobre la enseñanza y aprendizaje del concepto de integral. En Azcárate, C., M. Camacho, M.; González, & M. Moreno (Eds.), *Didáctica del Análisis Matemático: Una revisión de las investigaciones sobre su enseñanza y aprendizaje en el contexto de la SEIEM* (pp. 121–135). Servicio de publicaciones de la ULL. S/C de Tenerife.
- Cuoco, A., Goldenberg, E. P., & Mark, J. (1996). Habits of mind: An organizing principle for mathematics curricula. *Journal of Mathematical Behavior*, 15, 375–402.
- Dreyfus, T., Kouropatov, A., & Ron, G. (2021). Research as a resource in a high-school calculus curriculum. *ZDM—Mathematics Education*, 53, 679–693. <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01236-3>
- English, L. D. (2023). Ways of thinking in STEM-based problem solving. *ZDM – Mathematics Education*, 55(7). <https://doi.org/10.1007/s11858-023-01474-7>
- Fried, M. N. (2014). Mathematics y mathematics education: Searching for common ground. En M.N. Fried, T. Dreyfus (Eds.), *Mathematics y Mathematics Education: Searching for 3 Common Ground, Advances in Mathematics Education* (pp. 3–22). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-7473-5_1
- GoogleDeepMind (2024). <https://bit.ly/4pTUePN>
- Johnson, H. L., Coles, A., & Clarke, D. (2017). Mathematical tasks and the student: Navigating “tensions of intentions” between designers, teachers, and students. *ZDM – Mathematics Education*, 49(6), 813–822. <https://doi.org/10.1007/s11858-017-0894-0>
- Jones, S. R., & Ely, R. (2023). Approaches to Integration based on quantitative reasoning: adding up pieces and accumulation from rate. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 9, 121–148.
- Lehmann, C. H. (1985). *Geometría Analítica*. Limusa.
- Leung, A., Baccaglini-Frank, A., Mariotti, M. A., & Miragliotta, E. (2024). Enhancing geometry skills with digital technology: The case of Dynamic geometry. En B. Pepin, G. Gueudet, & J. Choppin (eds.), *Handbook of Digital Resources in Mathematics Education* (pp. 410–437) Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-45667-1_15
- Liljedahl, P., & Cai, J. (2021). Empirical research on problem solving and problem posing: A look at the state of the art. *ZDM—Mathematics Education*, 53(4), 723–735. <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01291-w>
- Pólya, G. (1945). *How to solve it* (2nd edition). Princeton University Press.
- Santos-Trigo, M. (2020). Problem-solving in mathematics education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 686–693). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0>
- Santos-Trigo, M. (2024). Problem solving in mathematics education: tracing its foundations and current research-practice trends. *ZDM—Mathematics Education*, 56(2), 211–222. <https://doi.org/10.1007/s11858-024-01578-8>

- Santos-Trigo, M., & Camacho-Machín, M. (2009) Towards the construction of a Framework to deal with routine problems to foster mathematical Inquiry. Problems, *Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies (PRIMUS)*, 19(3), 260–279.
- Santos-Trigo, M., & Camacho-Machín, M. (2013). A Problem-Solving Framework that enhances the use of computational technology. *The Mathematics Enthusiast Journal*, 10(1–2), 279–302.
- Santos-Trigo, M., & Camacho-Machín, M. (2018). La Resolución de Problemas matemáticos y el uso de la tecnología digital en el diseño de libros interactivos. *Educatio Siglo XXI*, 36(3), 21–40. <https://doi.org/10.6018/j/349451>
- Santos-Trigo, M., Barrera-Mora, F., & Camacho-Machín, M. (2021). Teachers' use of technology affordances to contextualize and dynamically enrich and extend mathematical problem-solving strategies. *Mathematics*, 9(793), 1–21. <https://doi.org/10.3390/math9080793>
- Santos-Trigo, M., Camacho-Machín, M., & Barrera-Mora, F. (2024). Focusing on foundational Calculus ideas to understand the derivative concept via problem-solving tasks that involve the use of a Dynamic Geometry System. *ZDM-Mathematics Education*, 56(6), 1287–1301. <https://doi.org/10.1007/s11858-024-01607-6>
- Thurston, P. W. (1994). On proof and progress in mathematics. *Bulletin of American Mathematical Society*, 30(2), 161–177.
- Wasserman, N. H., Fukawa-Connelly, T., Weber, K., Mejía Ramos, J. P., & Abbot, S. (2021). *Understanding Analysis and its connections to Secondary Mathematics Teaching*. Springer

Investigación sobre conexiones matemáticas en España y México

Research on mathematical connections in Spain and Mexico

Vicenç Font ¹ 

Javier García-García ² 

Flor M. Rodríguez-Vásquez ³ 

Yuly Vanegas ⁴ 

Resumen

En este capítulo se explican primero las investigaciones realizadas por el grupo de la Universidad Autónoma de Guerrero (UAGro), México, en el marco de la Teoría Ampliada de las Conexiones, contribuyendo a la caracterización de las conexiones matemáticas y a establecer tipologías de conexiones, así como al estudio de estas para la comprensión de diferentes objetos matemáticos. Después se describen las investigaciones sobre conexiones del grupo de la Universitat de Barcelona, en las que se usa como referente teórico un marco general de la actividad matemática, específicamente el Enfoque Ontosemiótico (EOS). A continuación, se resumen las investigaciones realizadas por algunos de estos grupos o bien conjuntamente en las que se utilizan de manera combinada el EOS con alguna tipología específica de conexiones.

¹ vfont@ub.edu

Universitat de Barcelona (SEIEM)

² jagarcia@uagro.mx

Universidad Autónoma de Guerrero (RED CIMATE)

³ flor.rodriguez@uagro.mx

Universidad Autónoma de Guerrero (RED CIMATE)

⁴ ymvanegas@ub.edu

Universitat de Barcelona (SEIEM)

Palabras clave

Conexiones matemáticas, teoría ampliada de las conexiones, enfoque ontosemiótico.

Abstract

This chapter first explains the research carried out by the group from the Autonomous University of Guerrero (UAGro), Mexico, within the framework of the Extended Theory of Connections, contributing to characterize mathematical connections and to establish typologies of connections, as well as to study these connections to understand different mathematical objects. Then, the research on connections by the group from the University of Barcelona is described in which a general framework of mathematical activity is used as a theoretical reference, specifically the Ontosemiotic Approach (OSA). Next, the research carried out by some of these groups or jointly, in which the OSA is used in a combination with some specific typology of connections, is summarized.

Keywords

Mathematical connections, extended theory of connections, ontosemiotic approach.

Introducción

Las investigaciones sobre el proceso de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas han puesto de manifiesto la importancia que tienen las conexiones en dicho proceso. Una mirada global a la literatura evidencia que la investigación sobre las conexiones matemáticas es una temática cada vez más relevante para la Educación Matemática y, también, que sus referentes teóricos están cada vez más desarrollados.

En el inicio del interés por las conexiones matemáticas podemos situar las investigaciones de tipo cognitivo que consideran que la comprensión se consigue con la integración/conexión de representaciones mentales del sujeto (Hiebert & Carpenter, 1992) y los Principios y Estándares del NCTM (2000), ya que en esta publicación se considera que el establecimiento de conexiones matemáticas es importante para que los estudiantes comprendan conceptos matemáticos, relacionen significados, representaciones, usen fórmulas adecuadamente para completar procedimientos y vinculen las matemáticas con situaciones de la vida real. La publicación de los Principios y Estándares del NCTM (2000) fue un gran impulso para que las conexiones alcanzaran un papel relevante en la Educación Matemática y para aumentar el interés en investigarlas.

La revisión de la literatura de Educación Matemática sobre las conexiones, sobre todo la realizada en Iberoamérica, evidencia diferentes grupos de investigaciones. Un primer grupo está enfocado en el desarrollo de herramientas teóricas específicas para el estudio de la actividad matemática relacionada con el proceso de conexión. Un segundo grupo de investigaciones se centra en el desarrollo de herramientas teóricas para el análisis de la

actividad matemática en general. Ahora bien, dado que en la actividad matemática el establecimiento de conexiones es un aspecto clave, este segundo grupo ha desarrollado, en particular, herramientas para analizar la actividad matemática relacionada con el proceso de conexión.

En este capítulo se explican primero las investigaciones realizadas por el grupo de la UAGro en el marco del primer grupo de investigaciones recién comentado; se trata de investigaciones enfocadas en caracterizar qué son las conexiones matemáticas y a establecer tipologías de conexiones. Después se describen las investigaciones sobre conexiones del grupo de la UB, que han usado como referente teórico un marco general de la actividad matemática (el segundo tipo comentado anteriormente), específicamente el marco del Enfoque Ontosemiótico (EOS). A continuación, se resumen las investigaciones realizadas por algunos de estos grupos, o bien conjuntamente, en las que se usan de manera combinada el EOS con alguna tipología específica de conexiones.

El trabajo conjunto entre el grupo de la UAGro y el de la UB tuvo su origen, por una parte, en el interés de ambos grupos sobre la problemática de las conexiones matemáticas y, por otra parte, por la colaboración que surgió de las estadias de Vicenç Font en 2018 en la Universidad Autónoma de Guerrero y por las estadias de los doctorandos Karen Campo-Meneses y Camilo Rodríguez-Nieto de la UAGro en Barcelona en 2019. De estas dos últimas estadias se derivó que Vicenç Font fuese codirector de ambas tesis.

Investigaciones del grupo de la UAGro para el desarrollo de la Teoría Ampliada de Conexiones

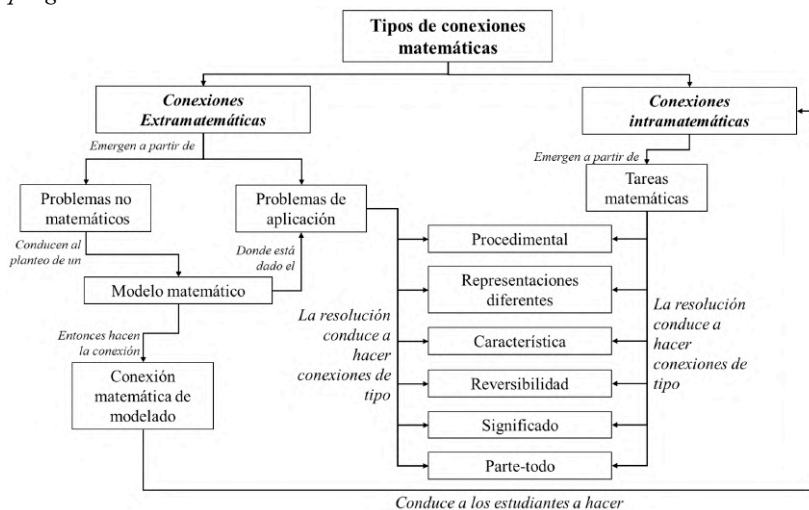
Como resultado del primer grupo de investigaciones comentadas en la introducción, destaca la Teoría Ampliada de las Conexiones (TAC), en cuyo desarrollo ha tenido un papel fundamental el grupo de investigación de la Universidad Autónoma de Guerrero en México. Se trata de una teoría que inicialmente consideró que una conexión matemática es una relación verdadera entre dos ideas matemáticas A y B y que ha propuesto algunas tipologías para el estudio de las conexiones matemáticas. Esta teoría considera dos grandes grupos de conexiones, las intra-matemáticas y las extra-matemáticas, aunque se ha centrado sobre todo en las intra-matemáticas, ya que solo se considera un tipo de conexión extra-matemática: la conexión de modelado (Evitts, 2004). Se puede considerar que con las cinco categorías de conexiones matemáticas propuestas por Evitts (2004) (Modelado, Estructural, Representación, Procedimental-conceptual y entre Conceptos Matemáticos) y las seis propuestas por Businskas (2008) (Modelado, Orientada a la instrucción, Procedimental, Representaciones diferentes, Parte-todo e Implicación) se inicia la Teoría de las Conexiones. Estas primeras categorías se han ido ampliando, en diferentes artículos, con los siguientes tipos:

Característica (Eli et al., 2011), Reversibilidad y significado (García, 2018; García-García, 2019; García-García & Dolores-Flores, 2021a; 2021b) e Inter-conceptual (García-García, 2024).

El grupo de la UAGro realizó inicialmente sus investigaciones en el contexto del Cálculo. En los hallazgos teóricos de sus trabajos, García (2018), García-García y Dolores-Flores (2018; 2021a, 2021b) han propuesto y organizado tipologías de conexiones matemáticas que fueron confrontadas con las investigaciones de Evitts (2004), Businskas (2008) y Eli et al. (2011). En este sentido, García (2018) clasificó las conexiones matemáticas en dos grandes tipologías: extra-matemáticas e intra-matemáticas (ver Figura 1), generando un primer esbozo de lo que aquí llamaremos Teoría Ampliada de las Conexiones (TAC), dado que los tipos de conexiones matemáticas presentadas en la Figura 1, se pueden considerar una ampliación del modelo de Businskas (2008). Además de dicha tipología de conexiones, en García-García (2024) se considera la conexión interconceptual recientemente incorporada a la TAC.

Figura 1

Tipología de conexiones matemáticas



Nota. Tomado de García (2018), p. 166

La TAC es una teoría que se desarrolla por extensión y que se seguirá, previsiblemente, ampliando con nuevos tipos de conexiones. Esta extensión por ampliación de tipologías se debe a que su aplicación a un contenido enseñado en un determinado contexto escolar, en algunos casos, resulta limitada. Por ejemplo, Hatisaru et al. (2024), al investigar las conexiones matemáticas activadas por futuros profesores de matemáticas de secundaria cuando resuelven problemas de álgebra, usaron la TAC como referente

teórico, pero en el análisis de datos se encontraron con que los participantes establecían conexiones que no se podían clasificar en alguno de los tipos de conexiones consideradas en la TAC, bien por algunas limitaciones de esta teoría o bien por el tipo de problemas propuestos. Ante esta situación, estos autores concluyen que la TAC debe robustecerse y matizar sus categorías de conexiones, de manera que se genere una tipología más amplia que ayude a los docentes e investigadores a identificarlas mejor.

En esta línea de proponer nuevas tipologías de conexiones en el marco de la TAC, tenemos un primer trabajo conjunto entre investigadores de la UAGro y de la UB. En Rodríguez-Nieto et al. (2022) se analizaron las conexiones que se dan en la transcripción del desarrollo de una clase sobre derivadas, con una metodología cualitativa de análisis del contenido, a partir de unas categorías a priori suministradas por la TAC. Ahora bien, el hecho de que en algunos párrafos la aplicación de la TAC resultó especialmente ambigua, llevó a los autores a argumentar que es necesario matizar y ampliar las categorías de la TAC para un estudio más profundo de las conexiones que se dan en la transcripción; en particular, proponen considerar, como un nuevo tipo de conexión, las metafóricas. Asimismo, en la tesis doctoral de Rodríguez-Nieto (2021), dirigida por Flor Rodríguez (UAGro) y Vicenç Font (UB) se recopilan las diez tipologías de conexiones consideradas en la TAC las cuales se recogen en la Tabla 1.

Tabla 1
Conexiones matemáticas propuestas en la TAC

CM	Descripción
OI	Se refiere a la comprensión de un concepto C con base en dos o más conceptos previos A y B , requeridos para ser entendidos por un estudiante. Además, estas conexiones se pueden identificar de dos formas: 1) la asociación de un nuevo tema con conocimientos previos, y, 2) los conceptos y procedimientos matemáticos conectados entre sí se consideran prerequisites o habilidades que los estudiantes deben dominar antes del desarrollo de un nuevo concepto (Businkas, 2008). Por ejemplo, cuando se relaciona la interpretación geométrica de la derivada con la pendiente de una recta.
MD	Son relaciones entre las matemáticas y la vida real y se evidencian cuando el sujeto resuelve problemas no matemáticos o de aplicación donde tiene que plantear un modelo o expresión matemática (Evitts, 2004). Por ejemplo, cuando un sujeto puede construir una función que modela el crecimiento de un cultivo de bacterias está empleando esta conexión matemática.
P	Se manifiestan mediante el uso de reglas, algoritmos o fórmulas para resolver una tarea matemática. Estas conexiones son de la forma A es un procedimiento utilizado para trabajar con el concepto B (Businkas, 2008; García-García y Dolores-Flores, 2021a, 2021b). Por ejemplo, un sujeto emplea esta conexión cuando utiliza el gráfico de una función lineal para determinar la solución de la ecuación lineal asociada y argumenta el proceso seguido (García-García, 2024).
RD	Son identificadas cuando el sujeto representa los objetos matemáticos usando representaciones equivalentes y alternas (Businkas, 2008). Las representaciones equivalentes implican el tratamiento entre representaciones en un mismo registro. Las alternas se refieren a representaciones de un mismo objeto donde se modifica el registro en el cual fueron formadas inicialmente (e. g., gráfica-algebraica) (Businkas, 2008). Por ejemplo, cuando un sujeto construye un gráfico de la función $f(x) = 2x + 1$ (dado algebraicamente), está empleando la conexión de tipo RD en su forma alterna. Mientras que, cuando un sujeto parte de una ecuación en la forma $ax + b = cx + d$ realiza operaciones y la transforma en otra forma de la forma $a'x = b'$ (para encontrar el valor de x) en el registro algebraico, está usando esta conexión matemática RD de tipo representaciones equivalentes (García-García, 2024).

Tabla 1 (Continúa)
Conexiones matemáticas propuestas en la TAC

CM	Descripción
P-T	Se presentan cuando el sujeto establece relaciones lógicas de dos maneras: 1) la relación de generalización es de la forma A y es una generalización de B y B es un caso particular de A (Businskas, 2008); 2) La relación de inclusión viene dada cuando un concepto matemático está contenido en otro, por ejemplo, los números enteros están contenidos en los reales (Businskas, 2008). Por ejemplo, cuando un sujeto argumenta que el sistema $2x + 3y = 0, 4x + y = 0$, es un caso particular del sistema de la forma $ax + by = n, cx + dy = m$, está empleando esta conexión matemática (León et al., 2024).
I	Se identifican cuando un concepto P conduce a otro concepto Q mediante una relación lógica ($P \rightarrow Q$) (Businskas, 2008). Por ejemplo, cuando un sujeto argumenta que, si <i>un sistema de ecuaciones lineales es consistente y las gráficas de las ecuaciones se superponen</i> , entonces <i>el sistema tiene infinitas soluciones</i> (León et al., 2024).
C	Se identifica cuando el sujeto expresa características del concepto o describe sus propiedades en términos de otros conceptos que los hace diferente o similar a otro (Eli et al., 2011; García-García y Dolores-Flores, 2021a). De acuerdo con García-García (2024), esta conexión puede incluir descripciones verbales o escritas de los componentes de una representación (algebraica, geométrica, gráfica, etc.) o incluso características de un teorema. Por ejemplo, cuando un sujeto indica que una ecuación lineal de la forma $ax + b = c$ tiene una incógnita x establece esta conexión matemática (García-García, 2024).
R	Se presentan cuando el profesor o el estudiante parte de un concepto P para llegar a un concepto Q e invierte el proceso partiendo de Q para volver a P (García-García & Dolores-Flores, 2021a, 2021b). Por ejemplo, cuando un estudiante construye para $f(x) = 2x + 1$ su inversa $g(x) = \frac{x - 1}{2}$ y a partir de esta puede regresar a $f(x)$ está estableciendo esta conexión (García-García, 2024)
S	Se identifica cuando el estudiante o el profesor atribuye un sentido a un concepto matemático (<i>expresión/contenido</i>), es decir, lo que significa para él o ella. Incluye aquellos en los que un estudiante da una definición que él o ella ha construido para estos conceptos. Este tipo de conexión es diferente del tipo de conexión característica porque no se describen las propiedades y cualidades de los conceptos matemáticos (García-García & Dolores-Flores, 2021a, 2021b). Por ejemplo, cuando un estudiante define que el conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales como el conjunto de valores de las incógnitas que satisfacen simultáneamente las ecuaciones del sistema, está empleando esta conexión matemática (León et al., 2024).
MT	Son entendidas como la proyección de las propiedades, características, etc., un dominio conocido para estructurar otro dominio menos conocido (abstracto) (Rodríguez-Nieto et al., 2022). Por ejemplo, cuando el profesor o el alumno usa expresiones metafóricas como “recorrer la gráfica sin levantar el lápiz del papel” que implícitamente sugieren la metáfora conceptual “la gráfica es un camino” (Rodríguez-Nieto et al., 2022)

Nota: Orientada a la instrucción (OI), Modelado (MD), Procedimental (P), Representaciones diferentes (RD), Parte-Todo (P-T), Implicación (I), Característica (C), Reversibilidad (R), Significado (S) y Metafórica (MT)

Estos tipos de conexiones descritos en la tabla 1 no son conjuntos disjuntos ya que, por ejemplo, algunas conexiones metafóricas, como las de tipo “linking” se pueden considerar conexiones de significado, parte-todo o de representaciones diferentes. En nuestra opinión, de acuerdo con Font (2007), si bien estas tipologías tienen un aire de familia, son tipologías distintas.

El grupo de la UAGro ha realizado numerosas investigaciones sobre diferentes objetos matemáticos y en diferentes niveles educativos, usando algunas tipologías de la TAC. A título de ejemplo, tenemos la investigación de Barragán et al. (2024), en la que se estudian, usando como referente teó-

rico cinco categorías de conexiones contempladas en la TAC y mediante un análisis temático, las conexiones matemáticas que establecen cuatro estudiantes mexicanos de primer semestre de bachillerato cuando resuelven tareas que involucran la ecuación lineal.

Las conexiones en el marco del EOS

Del segundo grupo de investigaciones comentado en la introducción, queremos destacar las fundamentadas en el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS) (Godino, 2024; Godino et al., 2007), en el que se considera que, para estudiar la actividad matemática, es necesario recurrir a la ontología, es decir, considerar los objetos matemáticos que intervienen en la actividad matemática y cómo se relacionan entre sí mediante funciones semióticas. En esta sección se describen brevemente los elementos del EOS que se han utilizado en la investigación del grupo de la Universitat de Barcelona en el estudio de las conexiones matemáticas.

El EOS considera que, para describir la actividad matemática desde un punto de vista institucional y personal, es esencial tener en cuenta los *objetos* involucrados en tal actividad y las relaciones semióticas entre ellos (Font et al., 2013; Godino et al., 2007). La actividad matemática se modeliza en términos de *prácticas*, una *configuración de objetos primarios*, y procesos que se activan por las prácticas. En esta teoría, una práctica matemática se considera como una secuencia de acciones reguladas por normas establecidas institucionalmente y guiadas hacia un objetivo (usualmente, resolver un problema). En la ontología del EOS, el término *objeto* se utiliza en un sentido amplio para referirse a cualquier entidad que esté, de alguna manera, involucrada en una *práctica matemática* y que se pueda aislar del resto de la actividad matemática e identificar como una unidad. Por ejemplo, al llevar a cabo y evaluar una *práctica* de resolución de problemas, se puede identificar el uso de diferentes lenguajes (verbal, gráfico, simbólico, etc.), los cuales son la parte ostensiva de una serie de definiciones, proposiciones, y procedimientos que están involucrados en la argumentación y justificación de la solución del problema. Los problemas, lenguajes, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos son considerados como *objetos*, específicamente, como los seis *objetos matemáticos primarios* los cuales, en conjunto, forman la *configuración de objetos primarios*. El término configuración es utilizado para designar un conjunto o sistema heterogéneo de objetos que están interrelacionados. Toda *configuración de objetos primarios* se puede ver tanto desde una perspectiva personal como institucional, lo cual lleva a la distinción entre *configuraciones cognitivas* (personales) y *epistémicas* (institucionales) de *objetos primarios*.

Los *objetos matemáticos* que intervienen en las prácticas matemáticas y aquellos que emergen de estas, se pueden considerar desde la perspectiva de

las siguientes formas de estar presentes en la actividad matemática, las cuales se agrupan en facetas o dimensiones duales (Font et al., 2013; Godino et al., 2007):

- Extensivo/Intensivo: Los *objetos* intensivos corresponden a aquellas colecciones o conjuntos de entidades, de cualquier naturaleza, que se producen ya sea extensivamente (al enumerar los elementos cuando es posible) o intensivamente (al formular la regla o propiedad que caracteriza la membresía de una clase o tipo de *objetos*).
- Expresión/Contenido: Los *objetos* pueden estar participando como representaciones o como *objetos* representados.
- Personal/Institucional: Los *objetos* institucionales emergen de sistemas de *prácticas* compartidas dentro de una institución, mientras que los objetos personales emergen de prácticas específicas de un individuo.
- Ostensivo/No ostensivo: Algo que se puede mostrar directamente a otra persona, versus algo que no puede mostrarse directamente por sí mismo y debe, por lo tanto, complementarse con otra entidad que sí pueda mostrar.
- Unitario/Sistémico: Los *objetos* pueden participar en las *prácticas matemáticas* como *objetos* unitarios o como un sistema.

El uso y/o la emergencia de los *objetos primarios* de la *configuración* (problemas, lenguajes, definiciones, proposiciones, procedimientos, y argumentos) tiene lugar a través de los respectivos *procesos matemáticos* de comunicación, problematización, definición, enunciación, elaboración de procedimientos (algoritmización, rutinización, etc.), y argumentación (aplicando la dualidad proceso-producto). Mientras tanto, las dualidades antes descritas dan origen a los siguientes *procesos* (Font et al., 2013): institucionalización–personalización; generalización–particularización; análisis/descomposición–síntesis/reificación; materialización/concreción–idealización/abstracción; expresión/representación–significación (ver Figura 2).

Esta lista de procesos se deriva de la tipología de *objetos primarios* y de facetas duales utilizadas como herramientas para analizar la actividad matemática en el EOS. Si bien se contemplan algunos de los *procesos* considerados como importantes en la actividad matemática, no se pretende incluir todos los *procesos* involucrados en dicha actividad. Esto se debe a que, entre otras razones, algunos de los *procesos* más importantes, como la resolución de problemas y la modelización matemática, son *macroprocesos* que involucran *procesos* más elementales, como la representación, argumentación, idealización.

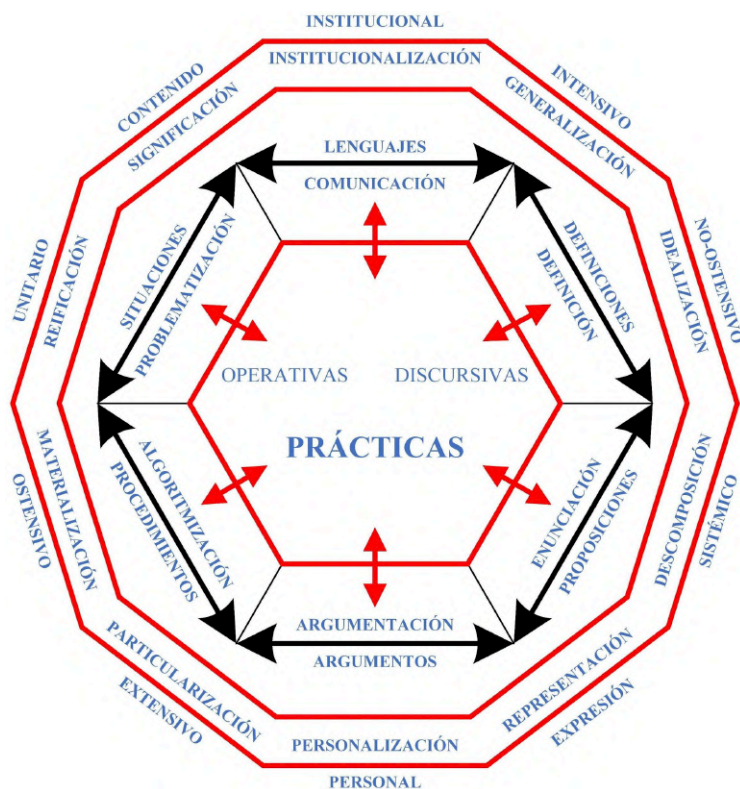
Las herramientas teóricas antes descritas permiten analizar la actividad matemática mediante diferentes tipos de análisis didácticos (véase Breda et al., 2021; Campo-Meneses et al., 2024; Garcés, 2021).

Una noción clave para relacionar las prácticas con los objetos primarios y los procesos activados en ellas es la noción de *función semiótica*, que

permite relacionar las *prácticas* con los *objetos primarios* que se activan en estas. Una *función semiótica* es una relación triádica entre un antecedente (expresión/objeto inicial) y un consecuente (contenido/objeto final), establecida por un sujeto (persona o institución) de acuerdo con un cierto criterio o código de correspondencia.

Figura 2

Representación onto-semiótica del conocimiento matemático



Nota. Adaptado de Font y Contreras (2008, p. 35)

En el EOS, las funciones semióticas se conciben, de manera metafórica, como una correspondencia entre conjuntos que pone en juego tres componentes: un plano de expresión (objeto inicial), un plano de contenido (objeto final), un criterio o regla de correspondencia (Godino et al., 2007). La función semiótica (FS) se relaciona, de entrada, con la dualidad expresión/contenido y con el proceso de significación; un ejemplo, es cuando a alguien se le pregunta qué entiende por derivada en un punto (expresión) y responde que es la pendiente de la recta tangente en este punto (contenido). Pero en

el EOS se amplía esta manera de entender la FS y se considera que tanto el plano de la expresión como el del contenido pueden ser objetos materiales o mentales, que pueden ser cualquiera de los seis tipos de objetos primarios de la configuración y, además, cualquiera de las maneras de estar participando en la práctica matemática consideradas en las dualidades. Teniendo en cuenta los objetos primarios que son la expresión o el contenido de una FS, se contemplan treinta y seis tipos de FS básicas, las cuales se aumentan si se tienen en cuenta las facetas duales—por ejemplo, a la FS que relaciona una propiedad con otra (por ejemplo en el caso de la FS que relaciona el teorema de Pitágoras con el teorema de Pitágoras generalizado, una FS que relaciona una proposición con otra, al contemplar la dualidad extensivo-intensivo, se puede convertir, si es el caso, también en una FS que relaciona un particular (un extensivo) con un general (un intensivo). Además, al cruzar las facetas aparecen nuevas FS, por ejemplo, si consideramos la faceta dual extensivo/intensivo desde la perspectiva de expresión/contenido, aparecen cuatro nuevas FS.

Las FS son un instrumento relacional entre los objetos primarios activados en las prácticas matemáticas. Esta relación puede entenderse como una única FS o bien como el resultado de un encadenamiento semiótico. Por ejemplo, si a alguien se le pregunta cuál es la definición de derivada y responde con una definición correcta. Se puede considerar que esta persona ha realizado una función semiótica, donde la expresión es el término derivada (considerado como un objeto primario de tipo lingüístico) y el contenido es la definición de derivada (considerado como otro objeto primario).

Ahora bien, la tipología de funciones semióticas que contempla el EOS permite entender esta función semiótica lenguaje -definición como el resultado de una trama de funciones semióticas que el alumno ha puesto en funcionamiento para poder expresar este significado. Dicho de otra manera, se puede establecer una recursividad o un zoom a esta función semiótica y entenderla como el resultado de una trama de otras funciones semióticas. El establecimiento de una función semiótica se puede considerar como una conexión no categorizada.

El grupo de la UB ha realizado muchas investigaciones sobre conexiones en las que se ha profundizado en el análisis de las funciones semióticas implicadas en la actividad matemática. Por ejemplo, en Rondero y Font (2015) se consideran las conexiones matemáticas como funciones semióticas sin categorizar, las cuales se pueden agrupar en tres grandes categorías 1) trama de funciones semióticas que determina niveles de generalización, 2) trama de funciones semióticas que determinan proyecciones metafóricas y 3) tramas de funciones semióticas en general. La primera categoría lleva (entre otras) a las conexiones parte-todo, la segunda lleva a las conexiones de tipo metafórico y el tercer grupo lleva a una variedad de tipos de conexiones.

Investigaciones que combinan categorías de conexiones de la TAC con el EOS

La mayoría de los estudios que usan como marco teórico la TAC se enmarcan en el contexto intra-matemático y pocos en el contexto extra-matemático, donde solo se contemplan las conexiones de modelado. Por otra parte, las investigaciones que usan como referente teórico categorías de conexiones de la TAC presentan, entre otros, dos aspectos problemáticos. Primero, la exigencia de que la conexión sea verdadera, lo cual lleva implícito un problema filosófico que no es menor (¿qué hay que entender por verdadero en matemáticas?) y, segundo, el problema de explicar por qué algunas de las conexiones que hacen los alumnos no son correctas y, por tanto, no se pueden considerar conexiones. Estas dos limitaciones han llevado a algunos de los investigadores que usan la TAC a ampliar este referente teórico, recurriendo al segundo grupo de investigaciones comentado en la introducción.

En esta línea, en esta sección comentaremos algunas investigaciones que combinan algunos tipos de conexiones de la TAC con el uso de herramientas de análisis del EOS.

Agenda de investigación iniciada en Vanegas y Giménez (2018)

Se puede considerar que la investigación de Vanegas y Giménez (2018) es un primer intento de combinar algunas categorías de la TAC con el EOS. Estos autores, con relación a las conexiones extra-matemáticas, siguiendo la clasificación de conexiones de Businskas (2008) y elementos del Enfoque Ontosemiótico (Godino et al, 2007), plantean las siguientes categorías:

- **Conexión Modelizadora:** Se refiere a las relaciones establecidas entre un contexto extra-matemático y una idea matemática, relación que requiere de un modelo matemático para existir.
- **Conexión Mediadora:** Establece la relación entre un concepto extra-matemático y una idea o procedimiento matemático mediante el uso de un elemento mediador que permita interpretar mejor un determinado significado de la idea matemática, suponiendo que esto mejora la representatividad de dicho significado.
- **Conexión Interdisciplinar Genérica:** Referida a las relaciones establecidas entre elementos de una disciplina, que funciona como contexto extra-matemático y varias representaciones de un objeto matemático que suelen expresarse de manera genérica o poco profundizada. Con estas relaciones es posible mostrar algunas características y/o propiedades de un conocimiento matemático o problemas asociados.
- **Conexión semiótica:** Indica establecimiento de relaciones explícitas entre diferentes representaciones de una misma noción matemática con ayuda de distintas representaciones de un elemento perteneciente

a un contexto extra-matemático, de tal forma que emergen características o propiedades de dicha idea matemática.

- **Conexión metafórica:** Describe aquellas conexiones en que un elemento extramatemático se usa como una metáfora que permite reconocer elementos particulares o generales implícitos de alguna noción matemática.
- **Materialización:** Se refiere a las relaciones en que un contexto extra-matemático se presenta para materializar una definición o proceso matemático, o bien para ser abstraído.

Esta línea de trabajo ha continuado en la tesis doctoral de Vargas (2024) y en Vargas et al., (2024). En este último artículo se describen las conexiones extra-matemáticas que emergen al enfrentar a un grupo de 250 futuros docentes de Educación Primaria a dos tareas profesionales que abordan diversas nociones geométricas. En el análisis desarrollado se considera la teoría de conexiones extra-matemáticas (Vanegas & Giménez, 2018) y herramientas del Enfoque Ontosemiótico: configuración epistémica y función semiótica, para evidenciar la emergencia de conexiones metafóricas e interdisciplinarias genéricas; las primeras referidas a la constitución de una metáfora como herramienta para acceder desde una idea extramatemática a un objeto intra-matemático; mientras que las segundas, indican el uso de elementos pertenecientes a una disciplina particular y por tanto extra-matemáticos, para comprender un objeto intra-matemático. Los resultados y conclusiones giran en torno a la evidencia presentada sobre la emergencia de dichas conexiones. Por otra parte, se da cuenta del potencial del diseño de tareas escolares en los procesos de formación de maestros de Educación Primaria.

La metáfora del iceberg

Podemos considerar que la tesis de Rodríguez-Nieto (2021) y el artículo de Rodríguez-Nieto et al., (2022) derivado de dicha tesis, constituyen una articulación entre los dos grupos de investigaciones comentados en la introducción, ya que integran un tipo de análisis pensado para cualquier actividad matemática (propuesto por el EOS) con herramientas de análisis para un tipo específico de actividad matemática (conexiones) propuestas por la TAC. En términos metafóricos se puede decir, como resultado de esta articulación, que el proceso de conexión puede ser entendido como un *iceberg* donde, para explicar cómo un individuo establece conexiones, es necesario tener en cuenta la parte sumergida del iceberg, la cual consiste en un conglomerado de prácticas matemáticas, objetos matemáticos primarios activados en ellas, funciones semióticas que relacionan estos objetos primarios, y otros procesos matemáticos. Este conglomerado es necesario para que se activen las conexiones intra y extra-matemáticas y es en este conglomerado dónde hay

que buscar la principal explicación del no establecimiento de alguna conexión por parte del alumnado. Por otra parte, el hecho de considerar la dualidad personal/institucional permite situar las conexiones “verdaderas” de la TAC en el ámbito institucional y considerar también como conexiones las que establece el alumnado que no son verdaderas, y que en este caso serían conexiones personales.

Esta línea de trabajo ha continuado con numerosas investigaciones (Rodríguez-Nieto et al., 2023, Rodríguez-Nieto et al., 2024, entre otras) con la participación de profesores de la UAGro y de la UB. Entre estos artículos queremos destacar primero el de Rodríguez-Nieto et al. (2023). Dado que la literatura reporta que los estudiantes tienen dificultades para conectar significados parciales, múltiples representaciones de la derivada y realizar procesos de reversibilidad entre representaciones de una función f y su derivada f' estos autores se proponen como objetivo de su investigación analizar las conexiones matemáticas que establecen los estudiantes universitarios al resolver tareas que involucran las gráficas de f y f' , cuando ninguna de las dos funciones tiene una expresión simbólica asociada. Para ello realizaron una investigación cualitativa y de estudio de caso en el que participaron siete estudiantes del primer año de licenciatura en matemáticas de una universidad del sur de México. Para la recolección de datos se aplicaron dos tareas que involucran el contexto gráfico de la derivada. Para el estudio de los datos se realizó un análisis de la actividad matemática de los participantes con el modelo de análisis propuesto por el Enfoque Ontosemiótico, y un análisis temático con tipos de conexiones matemáticas de la TAC para inferir las conexiones realizadas en la resolución de las dos tareas, lo que permitió considerar la conexión de reversibilidad entre las gráficas de f y f' como el encapsulamiento de una porción de la actividad matemática. Se concluye que, si bien algunos estudiantes pueden establecer la conexión de reversibilidad entre las gráficas de f y f' , la complejidad de la actividad matemática que encapsula la conexión explica por qué otros estudiantes no pueden establecerla.

También queremos resaltar los trabajos relacionados con la tesis doctoral de Campo-Meneses (2024), dirigida por Javier García-García (UAGro) y Vicenç Font (UB). Por ejemplo, en Campo-Meneses et al., (2021) se usa como referente teórico un networking entre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática y la Teoría Ampliada de las Conexiones Matemáticas para estudiar las conexiones matemáticas activadas por diez estudiantes mexicanos de secundaria al resolver tareas que implican el uso de las nociones de función exponencial y logarítmica. Se concluye que la conexión de reversibilidad es importante para lograr que los alumnos comprendan plenamente la relación existente entre la función exponencial y la logarítmica; sin embargo, esto requiere una red de otras conexiones.

En Campo-Meneses y García-García (2025) también se usa como referente teórico un *networking* entre el EOS y TAC para realizar una investigación cualitativa (un estudio de caso), sobre la comprensión matemática evidenciada por estudiantes de secundaria respecto a las funciones exponencial y logarítmica. Para ello, se estudiaron las producciones y las respuestas a un cuestionario de tres estudiantes de secundaria. Los datos fueron analizados primero con herramientas del EOS; en particular se analizó con estas herramientas la práctica matemática, después se usaron categorías de la TAC para caracterizar las conexiones activadas por los estudiantes en sus resoluciones. Los resultados mostraron que el *networking* entre el EOS y TAC permitió valorar el nivel de comprensión de los estudiantes, quienes a través del establecimiento de conexiones matemáticas mostraron un nivel de comprensión diferente respecto a las funciones exponencial y logarítmica. Los casos estudiados que no evidenciaron un alto nivel de comprensión, según los autores, se debieron a la falta de tiempo para socializar y profundizar algunas características de las funciones durante las sesiones realizadas.

El desarrollo teórico sobre el estudio de las conexiones se ha centrado, sobre todo, en las conexiones intra-matemáticas, quedando pendiente el desarrollo teórico de las conexiones extra-matemáticas, ya que para esta tipología en la TAC inicialmente solo se considera la categoría de modelado. Los trabajos de Vargas (2024) y Vargas et al. (2024), comentados anteriormente profundizan en el desarrollo de la tipología de conexiones extra-matemáticas, al igual que el trabajo de Ledezma et al. (2024). Estos últimos autores formulan la siguiente pregunta: ¿cuál es el papel de las conexiones, en particular el de las extra-matemáticas, en el proceso de modelización? Para responderla se consideran tres referentes teóricos y se sigue la metodología usada en dos articulaciones teóricas previas desarrolladas entre el EOS y la TAC (Rodríguez-Nieto et al., 2022) y entre el EOS y el Ciclo de Modelización Matemática desde una Perspectiva Cognitiva (Ledezma et al., 2022).

Esta metodología se basa en el uso del modelo de análisis de la actividad matemática propuesto por el EOS para analizar la actividad matemática implicada en el establecimiento de conexiones y en el proceso de modelización. Los principales resultados de este estudio son, por una parte, la evidencia del papel que juegan las conexiones en las diferentes fases del proceso de modelización y, por otra parte, la propuesta de una clasificación más detallada de las conexiones, tanto de las intra como de las extra-matemáticas.

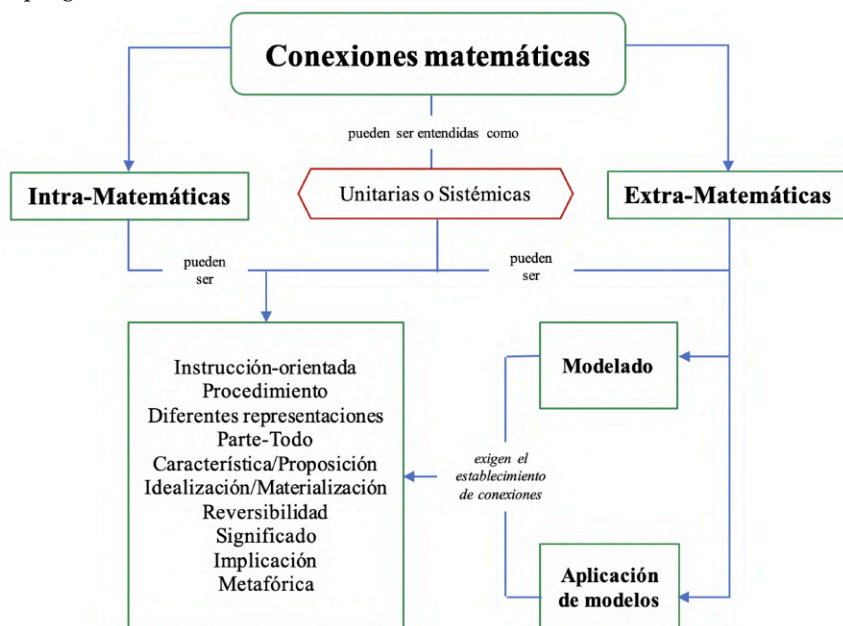
En este artículo las conexiones se estudian desde la dualidad unitaria/sistémica del EOS; y esta última perspectiva lleva a entender el ciclo de modelización también como un iceberg, de manera que las fases del ciclo de modelización estarían en la superficie y su establecimiento dependería de un conglomerado sumergido formado conexiones, prácticas matemáticas,

objetos matemáticos primarios activados en ellas, funciones semióticas que relacionan estos objetos primarios, y otros procesos matemáticos.

En la Figura 3 se presenta la tipología de conexiones propuesta en Ledezma et al. (2024) matizada con la incorporación de la conexión de materialización propuesta en Vargas (2024):

Figura 3

Tipología de conexiones



Nota. Adaptada de Ledezma et al. (2024) y Vargas (2024)

Consideración final

En este momento podemos observar que se está produciendo un doble desarrollo teórico para el estudio de las conexiones. En el caso de la TAC observamos cómo se va ampliando el número de tipos de conexiones, lo que describimos como una ampliación por extensión, con una mirada unitaria a las conexiones; mientras que con la articulación entre el EOS y la TAC podríamos hablar de una ampliación por profundización ya que la conexión, además de ser mirada de manera unitaria, pasa a ser mirada de una forma sistémica.

Una mirada global a los artículos comentados en este documento evidencia que la investigación sobre las conexiones matemáticas es una temática cada vez más relevante para la Educación Matemática y, también, que sus referentes teóricos cada vez más desarrollados. También evidencia

que la colaboración conjunta de investigadores de la UAGro y de la UB ha generado investigaciones con un alto impacto internacional.

La colaboración entre los grupos de la UAGro y de la UB continúa vigente como se puede ver en numerosas publicaciones recientes, siendo las conexiones etnomatemáticas una de las líneas que se están explorando en estos momentos (por ejemplo, Olivero-Acuña et al., 2025).

Agradecimientos

Proyecto PID2021-127104NB-I00 financiado por MICIU/AEI/10.13039/501100011033 y por “FEDER Una manera de hacer Europa”

Referencias

- Barragán-Mosso, G., Campo-Meneses, K. G., & García-García, J. (2024). Conexiones matemáticas asociadas a la ecuación lineal que establecen estudiantes de bachillerato. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 25, 9–31. <https://doi.org/10.35763/aiem25.4616>
- Breda, A., Hummes, V., da Silva, R. S., & Sánchez, A. (2021). El papel de la fase de observación de la implementación en la metodología estudio de clases. *Bolema*, 35(69), 263–288. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v35n69a13>
- Businskas, A. M. (2008). *Conversations about connections: How secondary mathematics teachers conceptualize and contend with mathematical connections*. [Tesis doctoral]. Simon Fraser University.
- Campo-Meneses, K. G., Font, V., García-García, J., & Sánchez, A. (2021). Mathematical connections activated in high school students' practice solving tasks on the exponential and logarithmic functions. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 17(9), em1998. <https://doi.org/10.29333/ejmste/11126>
- Campo-Meneses, K., Font, V., & García-García, J. (2024). Criterios que orientan la práctica de un profesor al enseñar las funciones exponencial y logarítmica. *Educação e Pesquisa*, 50. <https://doi.org/qhwp>
- Campo-Meneses, K. (2024). *Idoneidad didáctica de un proceso de enseñanza basado en conexiones matemáticas que promueve la comprensión sobre las funciones exponencial y logarítmica*. [Tesis doctoral]. Universidad Autónoma de Guerrero.
- Campo-Meneses & García-García, J. (2025). Comprensión matemática evidenciada por estudiantes de secundaria sobre las funciones exponencial y logarítmica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, (27), 179–201. <https://doi.org/10.35763/aiem27.6430>
- Eli, J. A., Mohr-Schroeder, M. J., & Lee, C. W. (2011). Exploring mathematical connections of prospective middle-grades teachers through card-sorting tasks. *Mathematics Education Research Journal*, 23(3), 297–319. <https://doi.org/10.1007/s13394-011-0017-0>

- Evitts, T. (2004). *Investigating the mathematical connections that preservice teachers use and develop while solving problems from reform curricula* [Tesis doctoral]. Pennsylvania State University College of Education.
- Font, V. (2007). Una perspectiva ontosemiótica sobre cuatro instrumentos de conocimiento que comparten un aire de familia: particular-general, representación, metáfora y contexto. *Educación Matemática*, 19(2), 95–128.
- Font, V., & Contreras, A. (2008). The problem of the particular and its relation to the general in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 69(1), 33–52. <https://doi.org/10.1007/s10649-008-9123-7>
- Font, V., Godino, J. D., & Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, 82(1), 97–124. <https://doi.org/10.1007/s10649-012-9411-0>
- Garcés, W. (2021). Análisis de las pautas que rigen la práctica del profesor en la enseñanza de derivadas en ciencias básicas en carreras de ingeniería. *REDIMAT – Journal of Research in Mathematics Education*, 10(3), 239–268. <https://doi.org/10.17583/redimat.7957>
- García, J. (2018). *Conexiones matemáticas y concepciones alternativas asociadas a la derivada y a la integral en estudiantes del preuniversitario* [Tesis doctoral]. Universidad Autónoma de Guerrero.
- García-García, J. G. (2019). Escenarios de exploración de conexiones matemáticas. *Números: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 100, 129–133.
- García-García, J. (2024). Mathematical understanding based on the mathematical connections made by Mexican High School students regarding linear equations and functions. *The Mathematics Enthusiast*, 21(3), 673–718. <https://doi.org/10.54870/1551-3440.1646>
- García-García, J., & Dolores-Flores, C. (2021a). Pre-university students' mathematical connections when sketching the graph of derivative and antiderivative functions. *Mathematics Education Research Journal*, 33(1), 1–22. <https://doi.org/10.1007/s13394-019-00286-x>
- García-García, J., & Dolores-Flores, C. (2021b). Exploring pre-university students' mathematical connections when solving calculus application problems. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 52(6), 912–936. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1729429>
- Godino, J. D. (2024). *Enfoque ontosemiótico en educación matemática. Fundamentos, herramientas y aplicaciones*. McGraw Hill-Aula Magna
- Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM-Mathematics Education*, 39(1–2), 127–135. <https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1>
- Hatisaru, V., Stacey, K., & Star, J. (2024). Conexiones matemáticas en las estrategias de solución de problemas de álgebra de profesores de matemáticas de secundaria en formación. *Avances De Investigación En Educación Matemática*, (25), 33–55. <https://doi.org/10.35763/aiem25.6354>

- Hiebert, J., & Carpenter, T. (1992). Learning and teaching with understanding. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research of mathematics teaching and learning* (pp. 65–79), Macmillan.
- Ledezma, C., Font, V., Sala- Sebastià, G., & Breda, A. (2022). Principios de la modelización matemática desde la perspectiva de la idoneidad didáctica. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas, & J.A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 345–354). SEIEM.
- Ledezma, C., Rodríguez-Nieto, C. A., & Font, V. (2024). El papel de las conexiones extra-matemáticas en el proceso de modelización. *Avances de Investigación en Educación Matemática* (25), 81–103. <https://doi.org/10.35763/aiem25.6363>
- National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2000). *Principles and standards for school mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics.
- León, A., León, W., García-García, J., & Salgado-Beltrán, G. (2024). Mathematical connections made by preservice mathematics teachers when solving tasks about systems of linear equations. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 19(4), 1–14. <https://doi.org/10.29333/iejme/15590>
- Olivero-Acuña, R. R., Rodríguez-Nieto, C. A., Font Moll, V., Cantillo-Rudas, B. M., & Rodríguez-Vásquez, F. M. (2025). Ethnomathematical connections between the production of coastal cheese, geometric solids, measurements, and proportionality: A study with a Colombian merchant. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 21(4), em2608. <https://doi.org/10.29333/ejmste/16081>
- Rodríguez-Nieto, C. (2021). *Análisis de las conexiones matemáticas en la enseñanza y aprendizaje de la derivada basado en un networking of theories entre la teoría de las conexiones y el enfoque ontosemiótico* [Tesis doctoral]. Universidad Autónoma de Guerrero.
- Rodríguez-Nieto, C. A., Font, V., Borji, V., & Rodríguez-Vásquez, F. M. (2022). Mathematical connections from a networking theory between extended theory of mathematical connections and onto-semiotic approach. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 53(9), 2364–2390. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1875071>
- Rodríguez-Nieto, C. A., Rodríguez-Vásquez, F. M., & Font, V. (2022). A new view about connections: the mathematical connections established by a teacher when teaching the derivative. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 53(6), 1231–1256. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1799254>
- Rodríguez-Nieto, C. A., Rodríguez-Vásquez, F. M. y Font, V. (2023). Combined use of the extended theory of connections and the onto-semiotic approach to analyze mathematical connections by relating the graphs of f and f' . *Educational Studies in Mathematics*, 114(1), 63–88. <https://doi.org/gs4wcm>

- Rodríguez-Nieto, C. A., Cabrales, H. A. Arenas-Peñaloza, J., Schnorr, V., & Font, V. (2024). Onto-semiotic analysis of Colombian engineering students' mathematical connections to problems-solving on vectors: A contribution to the natural and exact sciences. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 20(5), 2–24. <https://doi.org/10.29333/ejmste/14450>
- Rondero, C., & Font, V. (2015) Articulación de la complejidad matemática de la media aritmética. *Enseñanza de las Ciencias*, 33(2), 29–49. <http://dx.doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1386>
- Vanegas, Y., & Giménez, J. (2018). Conexões extramatemáticas na formação inicial de docentes. *Estudos Avançados*, 32(94), 153–169. <https://doi.org/qhwr>
- Vargas, J. P. (2024). *Desarrollo del pensamiento geométrico en programas de formación docente: análisis de las Conexiones Extra-Matemáticas* [Tesis doctoral]. Universitat de Barcelona.
- Vargas-Herrera, J. P., Vanegas, Y., & Giménez, J. (2024). Conexiones extra-matemáticas que establecen futuros maestros de educación primaria al diseñar tareas escolares geométricas. *Avances de Investigación en Educación Matemática* (25), 57–80. <https://doi.org/10.35763/aiem25.6441>

Parte II

Investigaciones en grupos temáticos: en la búsqueda de puntos de encuentro

Ambas sociedades, SOMIDEM y SEIEM, se han organizado en torno al trabajo en grupos temáticos, algunos con mayor tradición de trabajo que otros. Esta segunda parte del libro reúne ocho capítulos, cada uno dedicado a un área temática específica abordada de manera conjunta por un grupo de trabajo de la SEIEM y su contraparte en la SOMIDEM. Los capítulos se construyeron de manera conjunta entre los líderes de los grupos en ambas sociedades o personas designadas por ellos. El objetivo es ofrecer un panorama actualizado de las líneas de investigación que desarrolla cada grupo, así como de sus proyecciones futuras, con la intención de favorecer el conocimiento mutuo y la identificación de intereses comunes que abran la puerta a colaboraciones más estrechas. Para ello, se ha definido una estructura compartida que permite describir, primero, el estado actual de los grupos de la SEIEM y de la SOMIDEM (sus intereses, enfoques teóricos y metodológicos, proyectos y resultados recientes) y, después, sus posibles líneas futuras (nuevos desafíos, áreas emergentes y metodologías). Finalmente, cada capítulo culmina con unas conclusiones conjuntas, en las que los autores reflexionan sobre las posibles sinergias y vías de cooperación entre ambas sociedades. De este modo, los capítulos no solo documentan el trabajo realizado hasta el momento en cada grupo temático, sino que también se convierten en un espacio de diálogo entre las comunidades de educadores matemáticos de México y España, proyectando la investigación en nuestra disciplina hacia nuevos escenarios de colaboración internacional.

Los capítulos que conforman esta segunda parte del libro se enfocan en la investigación en educación estocástica, enseñanza del análisis matemático, pensamiento numérico y algebraico, enseñanza y aprendizaje de la geometría, historia de las matemáticas y de la educación matemática, educación

matemática y tecnología, profesorado de matemáticas y, finalmente, el estudio del afecto en la educación matemática. Cada uno de los capítulos está dedicado a uno de estos ámbitos, mostrando cómo se desarrollan las investigaciones en ambos contextos y cuáles son sus perspectivas de futuro.

Así, Muñiz-Rodríguez, Sepúlveda, Gea y García-García abordan en su capítulo *Presente y futuro de las sociedades de investigación en educación estocástica en España y México* el estado de la educación estocástica en ambos países entre 2015 y 2024, a partir de comunicaciones orales de congresos, revistas especializadas y tesis doctorales. Señalan similitudes en la formación investigadora y en el interés por probabilidad y estadística, aunque la combinatoria sigue siendo poco explorada. Identifican diferencias: México enfatiza el razonamiento inferencial informal, muestreo y modelización, y España centra más su atención en el alumnado de primeras edades y en materiales curriculares. Destacan además la creciente dedicación al estudio del impacto de la tecnología y la importancia de fortalecer redes de investigación y colaboraciones entre SEIEM y SOMIDEM, subrayando que estas sinergias pueden potenciar nuevas líneas de trabajo conjunto.

Por su parte, Arnal-Palacián, Chavira, Arce y Viramontes abordan en su capítulo *La enseñanza del análisis matemático: panorama compartido* las investigaciones sobre cálculo en España y México, destacando colaboraciones existentes entre investigadores de ambos países y el potencial de sinergias futuras. Señalan que GIDAM, en España, cuenta con pilares consolidados, pero necesita revitalizar dinámicas de trabajo y explorar nuevas temáticas, mientras que en México el GTT5 comienza a gestar un grupo de investigadores noveles que encuentran en este espacio oportunidades para desarrollar sus propuestas. A pesar de diferencias en la trayectoria de ambas sociedades, coinciden en intereses y temáticas relevantes para la enseñanza y aprendizaje del cálculo, subrayando la necesidad de establecer puentes de comunicación para fortalecer la colaboración y enriquecer la matemática educativa de manera conjunta.

A continuación, Ayala-Altamirano, Valenzuela García, Bruno, Figueras y Ramírez abordan en su capítulo *Tendencias y desafíos acerca del desarrollo del pensamiento numérico y algebraico: un diálogo entre SEIEM y SOMIDEM* las investigaciones de los últimos cinco años de los grupos que estudian estos temas en ambas sociedades. Identifican convergencias y oportunidades de colaboración, destacando coincidencias en intereses sobre pensamiento numérico, algebraico y resolución de problemas, aunque con enfoques teóricos y metodológicos diferenciados que se complementan. Señalan el potencial de estudios conjuntos sobre sentido numérico, proporcionalidad, generalización y pensamiento funcional, así como la invención de problemas y el uso de tecnologías. Además, destacan áreas emergentes como el pensamiento computacional y estrategias para fomentar el sentido numérico, proponiendo

que la articulación de esfuerzos entre ambas sociedades potencie redes de investigación y contribuya a implementar prácticas educativas innovadoras y contextualizadas en España y México.

Seguidamente, Vázquez, Bonilla, Blanco y Sequeiros abordan en su capítulo *Tendencias en la investigación sobre enseñanza y aprendizaje de la geometría: perspectivas desde dos grupos de trabajo* las investigaciones de SOMIDEM y SEIEM, destacando intereses y enfoques compartidos en geometría, incluidos marcos teóricos como Van Hiele, Duval y EOS, y metodologías mayoritariamente cualitativas o mixtas. Señalan el impacto de herramientas como GeoGebra y proponen el intercambio de instrumentos de estudio, análisis de resultados y actividades virtuales para fortalecer la interacción entre estudiantes e investigadores. Destacan sinergias posibles, por ejemplo, en la investigación interdisciplinar y en niveles educativos distintos: el grupo de SOMIDEM se centra en secundaria, mientras que el de la SEIEM desarrolla estudios en infantil y primaria, lo que abre oportunidades para avanzar en la formación del profesorado en educación infantil y consolidar modelos de conocimiento especializado en ambos contextos.

Por su parte, Madrid, León-Mantero, Viramontes Miranda y Moreno Ochoa abordan en su capítulo *Pasado y futuro en la historia de las matemáticas y la educación matemática: tendiendo puentes en investigación entre España y México* la investigación en historia de las matemáticas y la educación matemática, identificando puntos de encuentro entre los grupos de ambos países. Señalan que las investigaciones abarcan desde el análisis de libros de texto históricos y la evolución de conceptos en distintos contextos sociales hasta la introducción de contenidos históricos en el aula. Destacan la complementariedad de marcos teóricos y metodológicos, y proponen nuevas líneas de trabajo, como la conexión con la filosofía de las matemáticas y estudios comparativos sobre legislación, planes de estudio y experiencias docentes en cada país. Además, subrayan la importancia de la participación conjunta en seminarios y congresos virtuales como estrategia para afianzar la colaboración y enriquecer la investigación en HMEM.

Continuando con la temática tecnológica, Del Olmo-Muñoz, Hoyos, Diago, Martínez-Ortega y Sacristán abordan en su capítulo *Investigación en educación matemática y tecnología: aportes desde los grupos Entornos Tecnológicos en SEIEM y Tecnologías Digitales en SOMIDEM* la integración de tecnologías digitales en la educación matemática. Destacan afinidades en objetivos, intereses y metodologías, y señalan oportunidades de colaboración como estudios comparativos sobre el impacto de tecnologías, el uso de inteligencia artificial, pensamiento computacional y herramientas de evaluación adaptativa. Proponen iniciativas conjuntas como proyectos de investigación, seminarios, publicaciones y programas de formación docente en el uso pedagógico de tecnologías. Estas acciones permitirían fortalecer la investigación, enriquecer

la práctica educativa y adaptarse a la rápida evolución de los entornos digitales en la enseñanza de las matemáticas en ambos países.

Avanzando hacia el estudio del profesorado, Aké, Ruiz-Hidalgo y Joglar abordan en su capítulo *Investigaciones sobre el profesorado de matemáticas en México y España* las diferencias y similitudes en la formación y desarrollo profesional de docentes en ambos países. Señalan que en México la formación inicial se realiza en Escuelas Normales, con menor tradición investigadora y enfoque variable según los niveles educativos, mientras que en España la formación universitaria y el Máster en Formación del Profesorado ofrecen bases consistentes y homogeneidad normativa. A pesar de estas diferencias, ambos grupos coinciden en intereses y marcos teóricos, como MTSK, EOS y la Mirada profesional, y comparten preocupaciones sobre el conocimiento docente, prácticas profesionales y formación continua. Asimismo, destacan temas emergentes de interés común, como inclusión, inteligencia artificial y enfoques STEAM, señalando que estas áreas podrían favorecer futuras colaboraciones y el desarrollo de investigaciones contextualizadas en ambos sistemas educativos.

Finalmente, Marbán y García-González abordan en su capítulo *La investigación en afectos como reto compartido* la investigación sobre el dominio afectivo en la educación matemática, destacando la trayectoria consolidada de sus integrantes y la incorporación de jóvenes investigadores que asegurarán la continuidad de esta línea. Señalan que ambos grupos comparten intereses, preocupaciones y retos comunes, integrando perspectivas socioculturales e internacionales. Proponen un mecanismo de colaboración basado en seis etapas: conocimiento mutuo, consultas entre miembros, compartición de recursos, generación conjunta de materiales, presentación de proyectos conjuntos y formación de equipos de trabajo integrados por investigadores de ambos grupos, con el objetivo de fortalecer la investigación, generar sinergias sostenibles y contribuir al avance global en la enseñanza de los afectos en matemáticas. Entre los temas de interés destacan la influencia de las emociones y actitudes de los estudiantes sobre su aprendizaje, la relación entre ansiedad y confianza matemática, y la importancia de estrategias que fomenten la motivación, la resiliencia y la experiencia positiva en la resolución de problemas, promoviendo así entornos de aprendizaje más inclusivos y comprometidos con el bienestar emocional del alumnado.

En conjunto, esta sección del libro refleja cómo se identifican coincidencias, diferencias y retos compartidos entre los grupos que investigan áreas temáticas similares en la SEIEM y la SOMIDEM. Los ocho capítulos muestran cómo se desarrolla la investigación en los grupos de ambas sociedades desde distintos contextos y metodologías, evidenciando puntos de convergencia que pueden ser la base de propuestas de colaboración futura. Al documentar tanto el estado actual de los grupos como posibles líneas emergentes de

investigación en ambas sociedades, se proyectan ideas para futuras colaboraciones en educación matemática que puedan consolidarse a partir de la identificación de afinidades y sinergias potenciales.

Presente y futuro de las sociedades de investigación en educación estocástica en España y México

Present and future of stochastic education research societies in Spain and Mexico

Laura Muñoz-Rodríguez ¹ 

Francisco Sepúlveda ² 

María M. Gea ³ 

Jaime I. García-García ⁴ 

Resumen

La educación estocástica es una disciplina clave en el siglo XXI por su impacto en la toma de decisiones y el análisis de datos. Este estudio examina el estado actual de la educación estocástica en España y en México, analizando investigaciones de los últimos diez años, con el fin de fortalecer la colaboración entre las sociedades de investigación SEIEM y SOMIDEM. En ambos países, la investigación en educación estocástica ha abordado principalmente la comprensión de conceptos estadísticos y probabilísticos en el alumnado, la formación del profesorado y el análisis de materiales curriculares. Predomina el estudio de la estadística sobre la probabilidad, y se detectan áreas poco exploradas, como la combinatoria o el uso de la tecnología en la enseñanza. La educación estocástica avanza en ambas sociedades al promover iniciativas para estructurar programas de investigación y para fortalecer los lazos de colaboración académica internacional.

¹ munizlaura@uniovi.es

Universidad de Oviedo (SEIEM)

² francisco.sepulveda@cinvestav.mx

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (SOMIDEM)

³ mmgea@ugr.es

Universidad de Granada (SEIEM)

⁴ jaime.garcia@umce.cl

Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación (SOMIDEM)

Muñoz-Rodríguez, L., Sepúlveda, F., Gea, M.M., & García-García, J.I. (2025). Presente y futuro de las sociedades de investigación en educación estocástica en España y México. E. Flores-Medrano, M. Molina, I. Sandoval, & I. Polo-Blanco (Eds.), *Educación Matemática en México y España: Investigaciones y líneas de trabajo compartidas* (pp. 199–225). Editorial SOMIDEM - SEIEM. <https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S2/2025/03-08>

Palabras clave

Combinatoria, educación estocástica, estadística, probabilidad, sociedades de investigación.

Abstract

Stochastic education is a key discipline in the 21st century because of its impact on decision making and data analysis. This study examines the current state of stochastic education in Spain and Mexico, analyzing research from the last ten years, in order to strengthen the collaboration between the research societies SEIEM and SOMIDEM. In both countries, research in stochastic education has mainly addressed the understanding of statistical and probabilistic concepts in students, teacher training and the analysis of curricular materials. The study of statistics predominates over probability, and areas such as combinatorics or the use of technology in teaching have been little explored. Stochastic education is advancing in both societies by promoting initiatives to structure research programs and to strengthen international academic collaboration ties.

Keywords

Combinatorics, stochastic education, statistics, probability, research societies.

Introducción

La estadística y la probabilidad desempeñan un papel central en el siglo XXI, caracterizado por el manejo masivo de datos, la toma de decisiones informadas y la comprensión de fenómenos complejos en diversos ámbitos como la ciencia, la economía y la educación. A medida que cambian las formas de comunicación y las maneras de presentar y recibir datos, también cambia el conocimiento estadístico que los ciudadanos requieren en su cotidianidad (Wild, 2017). Por ende, estas disciplinas no solo son fundamentales para la investigación científica, sino también para el desarrollo del pensamiento crítico y el análisis riguroso de la información en la vida cotidiana. En el ámbito educativo, su enseñanza y aprendizaje han cobrado relevancia debido a la necesidad de formar ciudadanos capaces de leer, analizar e interpretar datos, así como comprender la incertidumbre inherente a muchos procesos sociales y naturales.

La estadística es una disciplina distinta de las matemáticas y existen diferencias importantes en la forma en que se deben enseñar ambas disciplinas (Cobb & Moore, 1997). Al hacer matemáticas, los estudiantes pueden operar en completa abstracción; esto no ocurre en la indagación estadística. En la indagación estadística, según los Lineamientos para la Evaluación y Enseñanza en Educación Estadística, Reporte GAISE II [Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education], los estudiantes deben participar en un proceso de investigación que incluye formular preguntas estadísticas, recopilar o considerar los datos, analizar los datos e interpretar

los resultados (Bargagliotti et al., 2020). Tres características que distinguen la estadística de las matemáticas son la consideración del contexto, la omnipresencia de la variabilidad y la inferencia. Para atender estas tres características, la estadística hace uso de la probabilidad.

El grupo de investigación Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (DEPC) de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM) y el Grupo de Trabajo Temático 3: Enseñanza y Aprendizaje de Estocásticos (GTT03) de la Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática (SOMIDEM) han generado aportes significativos al estudio de la educación estocástica, considerando los procesos de enseñanza y aprendizaje de la estadística, la probabilidad y la combinatoria. Sus investigaciones han contribuido a identificar buenas prácticas, desafíos pedagógicos y estrategias didácticas innovadoras en diferentes niveles educativos. No obstante, a pesar de las sinergias y coincidencias en sus objetivos y enfoques, los trabajos conjuntos entre ambas sociedades han sido escasos. Al respecto, se reconoce como un punto de encuentro entre ambas sociedades la invitación realizada en 2015 al Dr. Ernesto Sánchez al XIX Simposio de la SEIEM por la Dra. Carmen Batanero (Sánchez & Valdez, 2015).

Con el objetivo de fortalecer los lazos entre la SEIEM y la SOMIDEM, a continuación, se presentan los resultados de un análisis documental sobre el estado actual de la investigación y las líneas futuras de cada una de las sociedades. Este capítulo representa un esfuerzo por fomentar un intercambio de perspectivas que promueva la colaboración académica e investigativa internacional. Se busca impulsar un diálogo enriquecedor que fortalezca la educación estocástica en ambos contextos y ofrezca una visión integral para enfrentar los retos del siglo XXI.

Para establecer el estado actual de cada grupo de investigación, se llevó a cabo una revisión sistemática de las contribuciones realizadas por los miembros de ambas sociedades en los últimos 10 años, 2015-2024, en las revistas *Avances de Investigación en Educación Matemática* (AIEM) y *Revista Educación Matemática* (REM), así como en las actas de los congresos de la SEIEM y de la SOMIDEM, considerando únicamente las comunicaciones. Para la recolección de datos sobre tesis doctorales realizadas en dicho periodo, se solicitó, por correo electrónico, a los miembros del GTT03 información al respecto. En el caso del grupo DEPC, se consultó el repositorio digital de tesis de la SEIEM. Además, se solicitó a los miembros de los grupos de investigación de ambas sociedades información sobre las tesis doctorales en desarrollo y las líneas de investigación en las que trabajan o prevén trabajar en el futuro.

Para el análisis documental de las contribuciones seleccionadas, se siguió una metodología cualitativa de tipo descriptiva (Cohen et al., 2017); en

particular, se utilizó la técnica de análisis de contenido (Bernete, 2013). La muestra de documentos, seleccionados por un muestreo no probabilístico por conveniencia, está conformada por 111 contribuciones, tanto en las revistas como en las actas de los congresos mencionados, y 29 tesis doctorales defendidas. Además, se consideró la información recopilada respecto a las tesis doctorales en desarrollo y futuras líneas de investigación.

El procedimiento de análisis se realizó en tres etapas. En primer lugar, se seleccionaron las contribuciones relacionadas exclusivamente con educación estocástica tomando en cuenta la localización geográfica de los autores, para considerar aquellos estudios relacionados con España y México, así como su adscripción como miembros de la SEIEM y la SOMIDEM. En segundo lugar, se realizó el análisis de contenido de las contribuciones identificadas, considerando como variables de análisis: el objeto de estudio, el ámbito (alumnado, profesorado, material curricular) y el nivel educativo. En tercer lugar, mediante un proceso cíclico e inductivo, se extrajo la información de acuerdo con las variables de análisis; para garantizar la fiabilidad de este proceso se realizó la comparación sistémica de los resultados del análisis realizado por cada uno de los autores y, en caso de desacuerdo, se analizó nuevamente hasta llegar a un consenso. Conviene señalar que, durante todo el proceso de elaboración de este capítulo, las y los autores tomaron decisiones metodológicas consensuadas que delimitaron su alcance, para lo cual se realizaron varias reuniones en videoconferencia. Dado el espacio limitado de este trabajo, no fue posible incluir todas las referencias, pero se ha procurado realizar una selección representativa del panorama analizado. A continuación, se dan a conocer los principales hallazgos del estudio.

Estado actual de la investigación

La investigación en educación estocástica en España

En los últimos diez años, se han defendido 17 tesis doctorales sobre educación estocástica en España, que reflejan un panorama diverso y multidimensional en la investigación en este campo, tanto por su temática como por el ámbito en el que se desarrollan.

Un total de 9 de estas tesis doctorales centran su atención en el alumnado, considerando en algunos casos más de una etapa: Educación Primaria (4), Secundaria y Bachillerato (6) y Educación Superior (1). Todas ellas analizan la comprensión del alumnado respecto a conceptos como los gráficos estadísticos (Díaz-Levicoy, 2018) o el razonamiento probabilístico (Hernández-Solís, 2024; Nettle-Valenzuela, 2019) en Educación Primaria, el tratamiento de datos, el razonamiento lógico y la estadística descriptiva (Pitarch-Andrés, 2016), el razonamiento probabilístico (Hernández-Solís, 2024; Nettle-Valenzuela, 2019), las medidas de dispersión (del Pino-Ruiz, 2019), las tablas estadísticas (Díaz-Pallauta, 2022) o el muestreo (Begué,

2019; Ruiz-Reyes, 2020) en Educación Secundaria y Bachillerato, y el análisis de la varianza (Vera, 2015) en Educación Superior. Estas investigaciones permiten, además, identificar y clasificar los principales conflictos semióticos en torno a estos conceptos.

Las investigaciones sobre el profesorado ocupan también un lugar destacado en el conjunto de tesis doctorales analizadas. De estas, 5 se centran en profesorado en formación desde Educación Infantil hasta Secundaria y Bachillerato, y 2 en profesorado de Educación Primaria y Secundaria en activo. En este contexto, se investiga el conocimiento matemático y pedagógico de estos sujetos, así como sus creencias, para la enseñanza de la estadística y la probabilidad en general (Anasagasti-Aguirre, 2019; Franco, 2024; Ricart-Aranda, 2021), o en aspectos más específicos relacionados con los recursos didácticos para la enseñanza y el aprendizaje del azar y la probabilidad (Marrero-Santana, 2017), la creación y resolución de problemas de probabilidad (Alonso-Castaño, 2021), o el conocimiento didáctico-matemático sobre inferencia estadística (López-Martín, 2021). Estas investigaciones revelan la importancia de preparar a los futuros docentes con herramientas sólidas y prácticas que puedan aplicar en el aula y de actualizar la formación del profesorado en activo con el fin de asegurar una enseñanza coherente con las demandas educativas actuales en lo que se refiere a la educación estocástica.

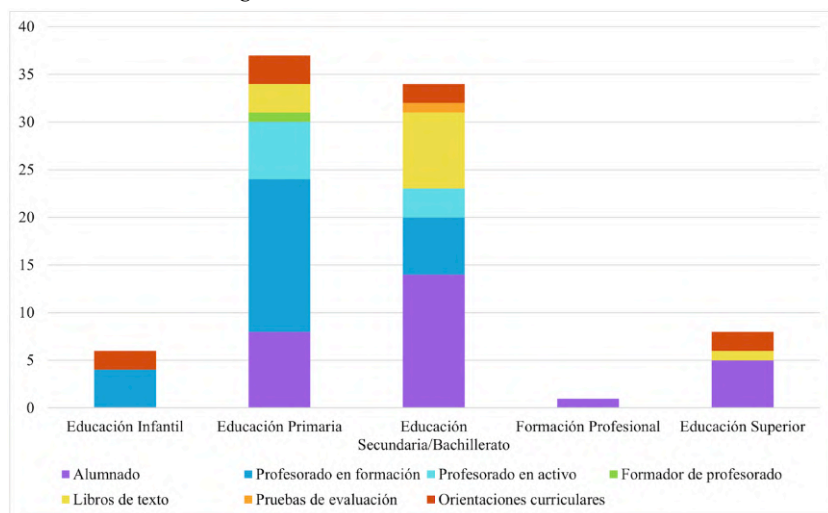
Los documentos y materiales curriculares, como los libros de texto y las pruebas de acceso a la universidad, han sido objeto de estudio en 5 tesis, con un énfasis particular en la etapa de Educación Secundaria y Bachillerato. Algunas de estas investigaciones analizan, de forma global, la influencia de estos elementos en el currículo real frente al oficial (Díaz-Díaz, 2017), mientras que otras plantean un enfoque más específico, al evaluar cómo se trabajan las medidas de dispersión (del Pino-Ruiz, 2019), la inferencia estadística (López-Martín, 2021), las tablas estadísticas (Díaz-Pallauta, 2022) o la probabilidad (Cotrado-Mendoza, 2024) en estos ámbitos curriculares. En general, se detecta una mayor investigación en lo que se refiere a la didáctica de la estadística (con 10 tesis doctorales), frente a la didáctica de la probabilidad (5 tesis doctorales), habiendo 2 tesis que abordan ambos ámbitos. Conviene señalar que ninguna tesis defendida en los diez últimos años atiende la didáctica de la combinatoria.

Como resultado de la búsqueda realizada, se identificaron un total de 78 documentos con autoría o coautoría española. De estos, 20 corresponden a artículos publicados en AIEM, 15 en REM, y 43 en actas de SEIEM. Estos datos destacan la contribución de la comunidad investigadora española en el ámbito de difusión analizado. Algunos de estos trabajos suponen la difusión en abierto de los resultados de las tesis doctorales comentadas con anterioridad, en particular, 3 de AIEM, 2 de REM y 7 de actas de SEIEM.

Al igual que las tesis doctorales, los 78 trabajos de investigación analizados se distribuyen de manera diversa según el ámbito al que van dirigidos. Un número significativo de trabajos se enfoca en el alumnado (28 documentos), seguido de los dirigidos al profesorado en formación (23 documentos) y en menor medida al profesorado en activo (9 documentos). Esto refleja un interés predominante por el desarrollo y aprendizaje de los estudiantes, así como por la formación inicial de los docentes. En cuanto a los materiales y recursos didácticos, los libros de texto están presentes en 12 documentos, mientras que las orientaciones curriculares y las pruebas de evaluación tienen una representación más limitada, con 7 y 1 documento, respectivamente. Este patrón podría indicar un enfoque menor en la investigación sobre herramientas curriculares específicas. Por etapa educativa, se observa una mayor concentración en la Educación Primaria y Secundaria. Las etapas de Educación Infantil, Superior y Formación Profesional muestran una representación más reducida, sugiriendo áreas de oportunidad para investigaciones futuras. La Figura 1 resume esta clasificación. Conviene señalar que al sumar las frecuencias se obtiene un valor superior a 78, ya que 8 trabajos abarcan más de un nivel.

Figura 1

Distribución de trabajos según el ámbito



A la hora de analizar el objeto de estudio en cada uno de estos ámbitos, nos encontramos con resultados similares a los de las tesis doctorales, razón por la cual solo se citarán aquellas líneas no tratadas con anterioridad. Se observa, en muchos casos mayor énfasis en el contenido matemático, más que en el pedagógico o didáctico del contenido. La mayoría de las investi-

gaciones sobre el alumnado se centran en la comprensión de conceptos relacionados con la estadística y la probabilidad, lo que evidencia un interés predominante por el desarrollo del pensamiento estocástico en los estudiantes. Los temas pueden agruparse en las siguientes categorías:

- Comprensión de conceptos estadísticos relacionados con la estadística descriptiva, en particular, media aritmética, mediana y medidas de asociación (Molero et al., 2019), los conflictos semióticos en la interpretación de parámetros como la mediana (Madrid et al., 2022), aspectos relativos a la inferencia estadística, como los intervalos de confianza (Roldán López de Hierro et al., 2020), y el uso de la tecnología para el análisis de datos (Cujba & Pifarré, 2023).
- Comprensión de conceptos relativos a la probabilidad, desde la noción general de razonamiento probabilístico en situaciones como la interpretación de noticias (Lavela et al., 2021), hasta conceptos más específicos como la probabilidad condicionada y conjunta (Huerta & Arnau, 2017) o el empleo del lenguaje en situaciones de azar (Vásquez-Ortiz & Alsina, 2016).
- Comprensión de conceptos relativos a la combinatoria, en particular, un análisis de las estrategias de resolución de problemas de permutaciones sin repetición (González-Ruiz & García-Moya, 2023).

En definitiva, se aprecia un predominio de trabajos sobre estadística descriptiva, interpretación gráfica y probabilidad. Si bien la mayoría se centra en la comprensión conceptual, puntualmente se abordan dimensiones metodológicas, como el uso de software y el trabajo colaborativo. Varios trabajos señalan dificultades de los estudiantes al interpretar representaciones estadísticas y probabilísticas (conflictos semióticos), lo que apunta a una necesidad de enfoques didácticos que aborden explícitamente estas problemáticas. Aunque minoritarios, algunos trabajos abordan áreas complementarias, como el uso del lenguaje en contextos de azar y el impacto de la metodología o el uso de tecnología. El estudio de los diferentes conceptos se ajusta al nivel educativo en el que se ubican según las orientaciones curriculares del contexto donde se llevó a cabo la investigación.

Los trabajos centrados en el profesorado en formación abordan principalmente el conocimiento conceptual y didáctico relacionado con la estadística y la probabilidad, así como las competencias necesarias para su enseñanza. En el área de la estadística, las investigaciones examinan aspectos específicos, como la distinción entre las categorías de una variable y las frecuencias absolutas (Izagirre et al., 2023). Otras desarrollan un enfoque más amplio, atendiendo a la evaluación de la cultura estadística y el sentido estadístico del profesorado en formación (Molina-Portillo et al., 2020), que abarcan tanto el dominio conceptual como el impacto de factores socioafectivos en la enseñanza. En lo que se refiere al conocimiento y dificultades relacio-

nadas con la probabilidad, algunos trabajos se centran en la capacidad de los maestros en formación para diseñar problemas que involucren el razonamiento proporcional a partir de una situación en contexto probabilístico (Tizón-Escamilla et al., 2024) o en el uso del sesgo de equiprobabilidad, una dificultad frecuente entre los futuros docentes (Cardeñoso et al., 2017). Además del conocimiento técnico, varios estudios investigan la formación pedagógica y didáctica de los futuros profesores, como su capacidad para enseñar probabilidad y estadística (Muñiz-Rodríguez et al., 2021). También se diseñan instrumentos para evaluar su actitud hacia la probabilidad (Estrada & Batanero, 2015). En síntesis, las investigaciones en este ámbito se centran en analizar si los futuros docentes tienen una sólida base conceptual y didáctica, necesaria para enseñar estadística y probabilidad. Sin embargo, también consideran aspectos contextuales y emocionales que influyen en este proceso de enseñanza, reflejando la necesidad de desarrollar un enfoque integral en la formación docente.

El análisis de los trabajos centrados en el profesorado en activo revela que la investigación está orientada, principalmente, hacia el conocimiento y las actitudes relacionadas con la probabilidad, con una menor representación de temas centrados exclusivamente en la estadística. Algunos de estos estudios destacan cómo el conocimiento y las actitudes del profesorado pueden influir en sus prácticas pedagógicas (Vásquez et al., 2023), otros proponen herramientas y estrategias didácticas para mejorar la enseñanza de la estadística y la probabilidad, abordando así las necesidades identificadas en la investigación previa.

Otro eje de investigación clave, aunque con una representación menor, se desarrolla en el ámbito de los libros de texto. Estos trabajos se centran en cómo estos materiales abordan los conceptos de estadística y probabilidad, con especial atención a las representaciones gráficas, el lenguaje utilizado y los contextos de los problemas. En el ámbito estadístico, se analiza, por ejemplo, cómo se presentan y trabajan los gráficos estadísticos (García-Alonso, 2021) y los niveles de lectura asociados (Arteaga et al., 2021) o se explora la medida en que los problemas de inferencia sobre la media están contextualizados en situaciones propias del ámbito de aplicación (González-Ruiz et al., 2018).

El tratamiento de la probabilidad también es objeto de varias investigaciones, destacando cómo los libros de texto definen y presentan los enfoques clásicos y frecuenciales de la probabilidad, así como su contextualización en problemas prácticos, y se estudia el lenguaje empleado para explicar los conceptos de probabilidad y cómo este puede influir en la comprensión de los estudiantes (Ortiz et al., 2016). Como eje transversal a la estadística y la probabilidad aparece el análisis del lenguaje y los contextos utilizados en los libros de texto. En general, los resultados destacan la importancia de mejorar

los libros de texto para abordar conflictos semióticos y promover una enseñanza más significativa y comprensible.

El ámbito anterior se complementa con investigaciones que estudian la presencia de la estadística y la probabilidad en las orientaciones curriculares. Aunque menos numerosas, estos trabajos también abarcan, específicamente, cómo se presentan conceptos clave como los significados de la probabilidad (Cotrado et al., 2022), el muestreo, los gráficos estadísticos o la complejidad semiótica de las tablas estadísticas, destacando la necesidad de un enfoque más coherente que favorezca su enseñanza y comprensión.

Además, existen dos trabajos que abordan otros ámbitos: uno sobre las pruebas de acceso a la universidad, en particular, se analizan los problemas de probabilidad que aparecen en las evaluaciones nacionales españolas (López-Martín et al., 2016), y otro sobre el conocimiento del formador sobre razonamiento inferencial informal (Pascual et al., 2024). La escasa investigación publicada en las fuentes consideradas en los últimos diez años en estos dos ámbitos parece indicar la necesidad de explorar ambos contextos en mayor detalle.

Se observa que algunas temáticas se han investigado desde todos los ámbitos considerados. Es el caso, por ejemplo, del tratamiento de los gráficos y representaciones estadísticas. Tanto en el alumnado como en el profesorado (en formación y en activo), en los libros de texto y en las orientaciones curriculares, se investigan aspectos relacionados con la lectura, interpretación y uso de gráficos estadísticos. Este tema incluye análisis de niveles de lectura, conflictos semióticos, estrategias didácticas y adecuación del lenguaje o del contexto, reflejando su relevancia transversal en la investigación en educación estocástica en España.

Al igual que ocurría con las tesis doctorales, las publicaciones en las revistas AIEM y REM y en las actas de SEIEM relacionadas con la didáctica de la estadística (42 en total) casi duplican las relativas a la didáctica de la probabilidad (28), habiendo 6 dedicadas al sentido estocástico en general y solo 2 a combinatoria. Además, se aprecia un enfoque mayoritario en aspectos relativos al conocimiento o las creencias de los distintos sujetos o las metodologías para la enseñanza de la estadística o la probabilidad. Sin embargo, apenas existen trabajos de investigación, en las fuentes consultadas, cuyo objetivo sea la evaluación o el uso de la tecnología.

Conviene indicar que, si bien tanto las tesis doctorales como los trabajos publicados son de autoría o coautoría española, no todas consideran una muestra en el contexto español. Aunque España es la localización geográfica mayoritaria de los estudios analizados (55), también predominan los trabajos en el ámbito chileno (17). Otros países menos representados son Argentina, Australia, Costa Rica, Estados Unidos, Nueva Zelanda, Perú, Portugal y Singapur.

La investigación en educación estocástica en México

En México, en los últimos 10 años, se han defendido 12 tesis doctorales sobre enseñanza y aprendizaje de la probabilidad y la estadística dirigidas por algunos miembros del GTT03 de la SOMIDEM. Como ya se mencionó, la información de estas se obtuvo por correo electrónico, ya que dicha sociedad no cuenta con un repositorio de tesis.

De estos estudios doctorales, 8 enfocan su atención en el alumnado de Bachillerato (7) y Educación Superior (1). Con respecto al foco de estudio, 3 se centran en el desarrollo del razonamiento inferencial informal, considerando temas como el contraste de hipótesis (García-Ríos, 2017), la correlación y la regresión lineal (Medina, 2021; Morgado, 2023); 4 se enfocan en el razonamiento probabilístico, considerando el enfoque clásico y frecuencial de la probabilidad (Martínez, 2021), la variabilidad, la aleatoriedad, la independencia (Valdez, 2016), la distribución binomial (García-García, 2017), el muestreo y la distribución muestral (Silvestre, 2019). El único estudio desarrollado en Educación Superior se enfoca en proponer un marco conceptual para analizar el razonamiento de los estudiantes frente a situaciones inferenciales (Tobías-Lara, 2019).

Las 4 tesis doctorales restantes centran su atención en el profesorado. De estas, 1 se enfoca en futuras profesoras de Telesecundaria (modelo de enseñanza que combina la educación a distancia con la educación presencial), 2 en profesores universitarios en servicio, y 1 en formadores de docentes de Educación Secundaria. En esta línea, se indaga sobre las características de la enseñanza y evaluación de la estadística en cursos introductorios que imparten profesores en diferentes carreras universitarias (Rivera, 2024), se analiza la implementación de proyectos estadísticos como estrategia para el aprendizaje de futuras profesoras de Telesecundaria (Santana, 2020), así como la influencia de las decisiones del profesorado, tomadas fuera del contexto del aula, en la enseñanza-aprendizaje de la probabilidad (Rodríguez, 2020). Cabe destacar que, en el estudio con formadores de docentes, se fomenta el trabajo interdisciplinar a través de la planificación de un proyecto estadístico (Espino, 2023).

En general, se observa un predominio de estudios doctorales en Bachillerato y Educación Superior, enfocados en educación estadística (8 tesis) y en educación probabilística (4 tesis), con énfasis en promover el razonamiento estocástico. Es importante destacar que en ninguna tesis doctoral se atiende la Educación Infantil y Primaria, así como el estudio de documentos y materiales curriculares en México, en los últimos 10 años.

A partir de la búsqueda realizada, se encontró un total de 33 documentos, todos con participación de autores o coautores pertenecientes a la SOMIDEM. De estos, 13 son artículos, 9 publicados en la REM y 4 en la revista AIEM. En relación con publicaciones en actas, se identificaron 7 y 13 en actas de la

SOMIDEM y SEIEM, respectivamente. Algunos de estos trabajos representan la publicación de los resultados de las tesis doctorales previamente mencionadas, específicamente 2 en REM, 1 en AIEM, 1 en actas de SOMIDEM y 5 en actas de SEIEM. Estos resultados evidencian la participación de miembros de la SOMIDEM en el simposio de la SEIEM, así como la aportación de la comunidad mexicana a la educación estocástica.

Entre los 33 documentos analizados, 17 tienen como ámbito de estudio a estudiantes de Bachillerato (Educación Media), lo que representa aproximadamente la mitad de estos. En contraste, solo se encontró un estudio enfocado en estudiantes de Educación Preescolar y ninguno en estudiantes de Educación Primaria o Secundaria.

El único estudio con estudiantes de Educación Preescolar se centra en el tratamiento de la información y toma de decisiones a partir de la misma (Laguna & Block, 2020). De los estudios enfocados en estudiantes de Bachillerato, la gran mayoría (15 de 17) se centran en analizar o caracterizar su razonamiento. Los temas que tocan estos estudios son experiencias aleatorias (Sánchez et al., 2019), razonamiento probabilístico (Sánchez & Valdez, 2015; Sánchez et al., 2016), variabilidad (Orta & Sánchez, 2018), muestreo y distribución muestral (Silvestre et al., 2022), distribución binomial (Sánchez y Carrasco, 2018), intervalos aleatorios (Jiménez & Sánchez, 2024; Martínez-Pérez & Sánchez, 2018), pruebas estadísticas (Sánchez et al., 2017; Sepúlveda & Sánchez, 2023; Silvestre & Sánchez, 2016), regresión y recta de mejor ajuste (Morgado & Sánchez, 2024). Solamente dos estudios se centran en las actitudes de los estudiantes hacia la estadística (Salinas & Mayén, 2015; 2016).

Cinco trabajos se realizaron con estudiantes universitarios. Los temas de interés son similares a los de los estudios en Bachillerato. De nuevo aparece el razonamiento sobre temas como probabilidad de eventos simples y compuestos en un ambiente de modelación computacional (Inzunza, 2017), diagramas de dispersión (Inzunza, 2016; Inzunza & Ward, 2015) y distribuciones muestrales (Inzunza e Islas, 2019). Destaca un único trabajo sobre el desarrollo del pensamiento estadístico a través de proyectos de investigación (Del-Callejo-Canal et al., 2020).

Se identificaron dos estudios con profesores en formación, los cuales se centran en la dispersión (Orta et al., 2015) y la alfabetización estadística (Serrano e Inzunza, 2024). En cuanto al profesorado en activo, se identificaron cuatro estudios: uno enfocado en profesores de Educación Secundaria sobre el dominio en tópicos de estocástica elemental (Cuevas & Ramírez, 2018), y dos con docentes de Bachillerato, uno explora cómo los profesores de matemáticas desarrollan lecciones que promueven la comprensión de los estudiantes de la distribución normal (Salinas et al., 2018) y otro analiza las explicaciones de profesores que dan a concepciones de estudiantes cuando

trabajan pruebas de significación (Sepúlveda & Sánchez, 2024). Finalmente, se identificó un estudio con docentes universitarios, enfocado en analizar sus concepciones y creencias sobre la enseñanza de la estadística (Eudave, 2024).

Por otro lado, entre los trabajos que no se centraron en estudiantes ni en profesores, se identificó un estudio centrado en el análisis de libros de texto de Educación Primaria, específicamente en las tareas que involucran gráficos estadísticos (Morales-García et al., 2022), y dos enfocados en el estudio curricular sobre la formación docente de Educación Secundaria; en concreto, uno se centra en el análisis del programa de estudio del curso denominado Pensamiento Estocástico (Elizarrarás, 2024) y otro en los elementos del razonamiento estadístico en el currículo de formación inicial del profesor de matemáticas (Verástegui et al., 2024). Un último estudio se consideró de corte teórico, en el que se presenta un acercamiento a la noción de sentido probabilístico desde una revisión de literatura (Fernández & García-García, 2024).

En resumen, al igual que en los estudios doctorales, se observa una notable superioridad numérica de investigaciones en el nivel bachillerato, seguido por el nivel universitario. Asimismo, se identifica una carencia de estudios en niveles básicos. Destaca nuevamente la desproporción entre investigaciones en el ámbito de la probabilidad en comparación con la estadística. En cuanto al objeto de estudio, el razonamiento de los estudiantes es el tema más investigado, seguido de algunas investigaciones puntuales sobre las creencias y actitudes de estudiantes y docentes. Además, un número reducido de estudios analiza el currículo, especialmente en niveles básicos. Desde una perspectiva metodológica, resalta la escasez de investigaciones que utilizan la observación de clase como fuente principal de datos, así como la falta de estudios sobre combinatoria y sobre la evaluación del conocimiento estocástico. Estas últimas representan áreas de oportunidad para la SOMIDEM.

Iniciativas en desarrollo

En la actualidad, ambas sociedades siguen impulsando el campo de investigación en educación estocástica al reunir, al menos una vez al año coincidiendo con el evento anual que celebra cada sociedad, a investigadores y demás interesados en didáctica de la estadística, probabilidad y combinatoria. En estas reuniones científicas se presentan y discuten líneas o proyectos de investigación en desarrollo, se valoran tendencias o nuevas problemáticas de interés y se establecen colaboraciones para la consecución de objetivos que fortalezcan el área. En los siguientes apartados se resumen las iniciativas que están desarrollando investigadores en cada sociedad, según la información que nos suministraron, en respuesta a nuestra petición, a propósito del presente trabajo.

Planes de investigación en educación estocástica en España

En el XXVII Simposio de la SEIEM se evidencia el creciente interés y dedicación a la investigación en educación estocástica en España, pues de las 18 contribuciones presentadas, 8 corresponden a comunicaciones, lo que supera la media (6,38) de comunicaciones por año que obtienen De la Fuente y Garrido-Martos (2024) al considerar las ediciones celebradas entre 2010 y 2023. Cabe destacar que las autoras en su estudio no diferencian la procedencia de sus autores, que sí hemos considerado en este trabajo; sin embargo, en 2024, no hubo contribución de miembros de SOMIDEM al simposio de SEIEM.

En las recientes reuniones que han mantenido los miembros del grupo DEPC de la SEIEM se han delimitado problemáticas y propuesto líneas que atender, promoviendo la creación de redes de investigación que impulsen la educación estocástica en España. De las líneas propuestas, que actualmente se desarrollan, se encuentran el diseño, implementación, evaluación y análisis de tareas o propuestas de enseñanza y aprendizaje sobre sentido estocástico, dirigidas tanto al alumnado como a la formación docente (inicial o continua). Estas cubren cualquier etapa educativa, se encuentran abiertas a la colaboración, y las redes que se han establecido se extienden, incluso, a investigadores a nivel internacional.

En cuanto a las tesis doctorales o proyectos de investigación (con o sin financiación) que actualmente se desarrollan, considerando la información recibida por los miembros del grupo DEPC de la SEIEM, la etapa menos atendida es la Educación Infantil, pues solo tenemos información del desarrollo de dos tesis doctorales, que se desarrollan en la Universidad de Girona. En una de ellas se aborda el sentido estocástico, mediante el diseño y validación de una trayectoria hipotética de aprendizaje dirigida a la etapa de cero a ocho años. En la otra se analizan las relaciones entre el ambiente en el hogar, la autorregulación y la matemática informal en niños de entre 4 y 5 años, con una especial atención al pensamiento probabilístico.

Para la etapa de Educación Primaria tenemos información de 4 tesis doctorales en desarrollo, una en estadística y el resto sobre muestreo, inferencia y otra vinculando la alfabetización en datos y la probabilidad. La primera se desarrolla en la Universidad de Girona, y trata de caracterizar el aprendizaje de la estadística en alumnado de entre 9 y 11 años en diferentes contextos (resolución de situaciones problema reales de acuerdo con la necesidad de los estudiantes, libros de texto y herramientas tecnológicas). En la Universidad de Granada se busca evaluar y desarrollar el conocimiento y competencia didáctico-matemática del profesorado en formación inicial en muestreo. El resto se desarrollan en la Universidad de Oviedo. En una se estudian tareas sobre razonamiento inferencial informal y los rasgos que las caracterizan, indagando en el conocimiento que manifiesta el profesorado

en formación a la hora de diseñarlas. En cuanto a la alfabetización en datos y la probabilidad, se considera el diseño, implementación y evaluación de situaciones de aprendizaje que aporten conocimiento sobre el desenvolvimiento tanto del profesorado como del alumnado, prestando especial atención al significado subjetivo y la relación entre ambos conceptos.

Por otra parte, en lo que se refiere a la probabilidad, en la Universidad de Oviedo se continúa la línea de investigación de Alonso-Castaño (2021), mediante un estudio comparado sobre el conocimiento matemático para su enseñanza entre España y Ankara; y se atiende a nuevas líneas de investigación en atención al alumnado con necesidades específicas de apoyo educativo y sobre el concepto de espacio muestral.

En la etapa de Educación Secundaria se desarrollan 6 tesis doctorales, una de ellas en sentido estocástico, otra en estadística y cuatro en probabilidad. En la Universidad de Cádiz se abordan tanto la estadística como la probabilidad, mediante el diseño de una secuencia de enseñanza y aprendizaje con un enfoque STEM (siglas en Science, Technology, Engineering, and Mathematics – Ciencias, Tecnología, Ingeniería y Matemáticas). Para la estadística, en la Universidad de Oviedo se busca analizar el uso de la tecnología en su enseñanza y aprendizaje mediante el diseño y análisis de una intervención didáctica.

En cuanto a la probabilidad, en la Universidad de La Laguna se centra la atención en la esperanza matemática, según el tratamiento de la incertidumbre, la toma de decisiones y el riesgo. En la Universidad de Zaragoza se pretende identificar saberes clave para diseñar una propuesta de enseñanza y aprendizaje idónea en probabilidad condicional, considerando las dificultades asociadas a su aprendizaje. En la Universidad de Granada, se realizan dos tesis doctorales, una sobre el análisis de textos escolares para observar si se manifiestan cambios, según las nuevas directrices curriculares; y otra, sobre evaluar y desarrollar el conocimiento y competencia didáctico-matemática de profesorado en formación sobre probabilidad en contextos no escolares. En la formación universitaria, se está desarrollando una tesis doctoral para analizar el conocimiento del formador de profesorado, en la Universidad de Oviedo, que incluye temas como la didáctica de la estadística y probabilidad.

Atendiendo a líneas de investigación que abarcan diferentes niveles educativos, en la Universidad de Barcelona se están desarrollando propuestas de enseñanza con las que hacer realidad la interdisciplinariedad en la estocástica, la indagación como medio de enseñanza y favorecer la formación docente tanto en Educación Primaria, Secundaria como Universidad (p.ej., Freixanet et al., 2024; Hakamata et al., 2024; Verbisck et al., 2024). Se diseñan y analizan lo que se denominan Recorridos de Estudio e Investigación (REI) y se encuentran en desarrollo dos tesis doctorales y un proyecto de investigación, que abordan tanto la formación docente inicial como continua.

En la Universidad de Granada se continúa la línea de investigación sobre sentido estocástico y razonamiento proporcional y algebraico. En particular, se centra la atención en la probabilidad y se aborda su análisis curricular; se reinterpretan las dificultades en probabilidad, según el razonamiento proporcional y algebraico implicado; y se diseñan y analizan acciones formativas para desarrollar y evaluar el conocimiento y competencia del profesorado, en Educación Primaria y Secundaria, sobre razonamiento proporcional y algebraico al trabajar en probabilidad.

También, con el foco de atención en la formación docente, diversos investigadores españoles colaboran con la Dra. Claudia Vásquez (p.ej., Vásquez et al., 2023) para integrar el sentido estocástico y la educación para el desarrollo sostenible, sobre todo, en las primeras edades.

Planes de investigación en educación estocástica en México

En el marco del primer congreso de la SOMIDEM, nace el Grupo de Trabajo Temático 3 (GTT3): Enseñanza y Aprendizaje de Estocásticos, con el propósito de promover la discusión de los problemas relacionados con la investigación y el desarrollo de la didáctica de la estocástica en México. En la primera versión del congreso, SOMIDEM1, se recibieron 9 propuestas para ser presentadas en dicho evento; para su segunda versión, SOMIDEM2, se recibieron 18 contribuciones, lo que demuestra el interés creciente de la comunidad científica por la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad y la estadística.

Producto del congreso SOMIDEM1, el GTT3 (Sánchez et al., 2024) señala la construcción de un programa de investigación sobre estocásticos; en concreto, propone algunos proyectos de investigación considerando la necesidad de la elaboración de teorías e informes de investigación empírica, así como la importancia de la práctica aplicada y la contextualización dentro del salón de clases. Dentro de las líneas futuras de investigación, se propone: *a)* la indagación de propuestas de intervención educativa derivadas de los planes y programas de estudio actuales, desde Educación Preescolar hasta Superior; *b)* la investigación sobre estocásticos en Bachillerato, dada la inclusión de un curso enfocado en el desarrollo del pensamiento estocástico del alumnado; *c)* el análisis amplio del currículo, especialmente en temas de probabilidad y estadística, para formular un posicionamiento fundamentado sobre los cambios curriculares en la educación obligatoria; y *d)* la creación de un programa de investigación nacional que aborde la problemática de la enseñanza de estocásticos en los diferentes niveles educativos. Estas líneas futuras de investigación propuestas convergen con los proyectos que se encuentran en desarrollo por otros miembros de la SOMIDEM.

En el Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional se encuentran en desarrollo 3

tesis doctorales: la primera enfocada en la coordinación entre una perspectiva de la distribución centrada en los datos y la distribución de modelización en bachillerato; la segunda centrada en el desarrollo de un curso para la enseñanza de Ciencia de Datos, enmarcado en las ideas conceptuales del ciclo del Proceso de Investigación de Datos (PID) dirigido a profesores de Educación Media, y la tercera indaga la enseñanza de probabilidad condicional por parte de profesores de ingeniería. En la Universidad Autónoma de Zacatecas están en desarrollo dos proyectos de investigación: uno enfocado en la comparación de significados y en el planteamiento de perspectivas de aprendizaje del concepto y contenido matemático escolar de probabilidad; y otro sobre la línea del pensamiento y lenguaje variacional, uso de gráficas en estadística con recursos tecnológicos, etnomatemática y uso del conocimiento matemático en campos profesionales.

Mientras, en la Universidad Autónoma de Guerrero se están desarrollando estudios sobre: las ideas fundamentales estocásticas en estudiantes de Educación Media a través de la simulación de un modelo de urna; la ley de los grandes números y los enfoques de la probabilidad; y un experimento de enseñanza para fomentar las ideas fundamentales estocásticas en profesores de matemáticas en activo. Finalmente, en el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, se desarrolla un seminario bajo la tutela del Dr. Ernesto Sánchez, centrado en el desarrollo del razonamiento sobre probabilidad frecuencial en estudiantes de Educación Media.

Puntos de encuentro y sinergias

Como puntos de encuentro entre la SEIEM y la SOMIDEM destacamos las diversas participaciones mexicanas en el simposio de la SEIEM, así como las publicaciones de autores mexicanos en la revista AIEM y de autores españoles en la revista REM, lo que evidencia un intercambio de trabajo entre ambas sociedades. Sin embargo, a pesar de este intercambio de conocimientos, se identificó solo un trabajo desarrollado en colaboración entre autores españoles y mexicanos (Salinas et al., 2021). En este trabajo, los autores desarrollaron un experimento de enseñanza para introducir a estudiantes de Bachillerato en nociones de probabilidad mediante el muestreo repetido en Fathom, poniendo el foco en el concepto de distribución. Cabe destacar que tampoco se registró ninguna participación de miembros de la SEIEM en el congreso SOMIDEM1.

Tanto en España como en México, se observa un interés creciente por la investigación en educación estocástica, con líneas de trabajo que incluyen el diseño y análisis de tareas de enseñanza y aprendizaje, la formación docente y el desarrollo del pensamiento probabilístico y estadístico en distintos niveles educativos. En ambos países, los grupos de investigación en didáctica de la estadística, probabilidad y combinatoria de SEIEM y SOMIDEM

promueven iniciativas para estructurar programas de investigación, lo cual refleja una base común para el intercambio académico. Además, en las dos comunidades se están impulsando estudios sobre probabilidad condicional, alfabetización estadística y probabilística, áreas en las que se podrían establecer proyectos conjuntos que integren perspectivas y contextos diversos. Una mayor colaboración entre los investigadores de ambos países, mediante redes internacionales, intercambios académicos o el desarrollo de estudios comparativos, permitiría enriquecer las metodologías y enfoques, generando sinergias que fortalezcan la educación estocástica en Iberoamérica.

Conclusiones

En este trabajo se presenta el estudio realizado sobre investigaciones en educación estocástica presentadas por miembros de las sociedades SEIEM y SOMIDEM de España y México, respectivamente. La revisión realizada es de tipo documental y se ajustó a las contribuciones de los miembros de ambas sociedades en los últimos 10 años, 2015-2024, considerando como fuentes de información los repositorios de las revistas AIEM y REM, así como las actas de los congresos de la SEIEM y de la SOMIDEM, donde solo se escogieron las comunicaciones orales para su análisis debido a la extensa información que aportaban respecto a otro tipo de contribución (póster o participación de los miembros de cada grupo de investigación en educación estocástica en las respectivas sesiones de simposios celebrados en el periodo considerado). Además, se llevó a cabo una consulta para recolectar datos sobre tesis doctorales (defendidas y en desarrollo) y planes de investigación futuros, para completar nuestra mirada hacia el estado actual de investigación en educación estocástica de cada sociedad.

Con un mismo enfoque, se describieron los resultados de nuestra investigación por los autores de ambas sociedades, organizados, en primer lugar, para ofrecer una mirada hacia la literatura desarrollada y, en segundo lugar, para proporcionar una mirada en perspectiva de futuro, lo cual nos ha permitido establecer ciertas sinergias entre ambas sociedades.

En cuanto a la dedicación a la formación en la trayectoria investigadora en el campo de investigación en educación estocástica, consideramos que es prácticamente similar en España y México, pues se han defendido 17 y 12 tesis doctorales en esta área de conocimiento, respectivamente, en los últimos diez años. En cuanto a las temáticas abordadas, se ha considerado un amplio espectro de contenidos en probabilidad y estadística en ambos países, aunque se comparte la necesidad de prestar más atención a la combinatoria. Además, destacamos que la intensidad de los temas de interés abordados difiere en ambos países, puesto que en México destacan las líneas de investigación en razonamiento inferencial informal, muestreo y modelización en variables aleatorias, mientras que en España el interés no se ha concentrado

tanto en una línea específica. Eso sí, en ambos países el centro de interés es mayoritariamente el alumnado, siguiendo con el profesorado en formación y en menor medida el profesorado en activo, sobre todo en el contexto español. Al respecto, en España se presta más atención al alumnado de las primeras edades que en México, donde la investigación se centra más en alumnado de niveles educativos superiores.

Las mismas líneas de investigación que emprenden o desarrollan las tesis doctorales, en el periodo de análisis en nuestro estudio, son prácticamente las que identificamos en el conjunto de contribuciones analizadas en las fuentes de información consultadas. Al respecto, destacamos que en México se ha prestado menos atención al estudio de documentos y materiales curriculares que en España. Con la mirada puesta en una perspectiva de futuro, ambas sociedades evidencian el creciente interés y dedicación en la investigación en educación estocástica. Los grupos de investigación en educación estocástica en SEIEM y SOMIDEM siguen mostrando su compromiso, proponiendo iniciativas para establecer redes de investigación; en particular, este trabajo es una evidencia de ello.

Consideramos que la información que aporta este estudio nos permite establecer tendencias compartidas por ambas comunidades, por ejemplo, al detectar la dedicación a la estadística frente a la probabilidad, y en menor medida hacia la combinatoria, no solo en la elaboración de tesis doctorales sino también en las diferentes investigaciones consultadas.

Al identificar qué conocimiento se espera ofrecer a la comunidad en educación estadística, según los planes de investigación que actualmente se encuentran en desarrollo por miembros de ambas sociedades, se posibilita su encuentro. Ello no se limita a conocer esta información sino que incita al diálogo para impulsar sendas líneas en desarrollo. En particular, en ambas comunidades se está impulsando el desarrollo de estudios sobre el impacto de la tecnología en la enseñanza de la estadística, áreas en las que se podría colaborar integrando perspectivas y contextos diversos, puesto que en México se evidencia más tradición investigadora en esta línea que en España. En cuanto al estudio de materiales curriculares, España evidencia mayor tendencia investigadora que México, aunque en ambos contextos se presenta una escasa investigación sobre herramientas curriculares específicas y pruebas de acceso estandarizadas en evaluaciones nacionales. La tradición investigadora sobre el profesorado en ejercicio está más desarrollada en el contexto mexicano, por lo que una línea de investigación futura podría orientarse en fortalecer una colaboración en este sentido.

Finalmente, concluimos que las sinergias que identificamos en nuestro estudio, con base en la información descrita a lo largo de este trabajo, son una invitación al encuentro entre ambas sociedades que, sin duda, permitirán enriquecer un trabajo conjunto y potenciar el inicio de otras nuevas.

Referencias

- Alonso-Castaño, M. (2021). *El conocimiento matemático y pedagógico de los futuros maestros cuando crean y resuelven problemas de probabilidad* [Tesis doctoral]. Universidad de Oviedo. <http://hdl.handle.net/10651/61869>
- Anasagasti-Aguirre, J. (2019). *Desarrollo de la competencia estadística del futuro docente de primaria a través del aprendizaje basado en proyectos* [Tesis doctoral, Universidad del País Vasco]. <https://www.educacion.gob.es/teseo/mostrarRef.do?ref=450996>
- Arteaga, P., Jiménez-Castro, M., & Batanero, C. (2021). Variables que caracterizan los gráficos estadísticos y las tareas relacionadas con ellos en los libros de texto de educación secundaria en Costa Rica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 20, 125–140. <https://doi.org/10.35763/aiem20.4001>
- Bargagliotti, A., Franklin, C., Arnold, P., Johnson, S., Perez, L., & Spangler, S. (2020). *Pre-K–12 guidelines for assessment and instruction in statistics education II (GAISE II): A framework for statistics and data science education*. American Statistical Association.
- Begué, N. (2019). Comprensión del muestreo y la distribución muestral en estudiantes de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato [Tesis doctoral, Universidad de Granada]. <https://www.educacion.gob.es/teseo/mostrarRef.do?ref=1812282>
- Bernete, F. (2013). Análisis de contenido. En A. Lucas, & A. Noboa (Eds.), *Conocer lo social: estrategias y técnicas de construcción y análisis de los datos* (pp. 221–261). Editorial Fragua.
- Cardenoso, J. M., Moreno, A., García-González, E., & Jiménez-Fontana, R. (2017). El sesgo de equiprobabilidad como dificultad para comprender la incertidumbre en futuros docentes argentinos. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 11, 145–166. <https://doi.org/10.35763/aiem.v1i11.185>
- Cobb, G. W., & Moore, D. S. (1997). Mathematics, statistics, and teaching. *The American Mathematical Monthly*, 104(9), 801–823. <https://doi.org/nhq9>
- Cohen, L., Manion, L., & Morrison, L. (2017). *Research methods in education* (8va. Ed.). Routledge.
- Cotrado-Mendoza, B. (2024). *Idoneidad didáctica de la probabilidad en documentos normativos y materiales curriculares de Educación Secundaria. Implicaciones para la formación de profesores* [Tesis doctoral, Universidad de Granada]. <https://digibug.ugr.es/handle/10481/90800>
- Cotrado, B., Burgos, M., & Beltrán-Pellicer, P. (2022). Análisis ontosemiótico de los contenidos de probabilidad en los documentos curriculares de Perú. *Educación Matemática*, 34(3), 97–131. <https://doi.org/10.24844/EM3403.04>
- Cuevas, H., & Ramírez, G. (2018). Desempeño en estocástica entre profesores de educación secundaria: un estudio exploratorio en dos regiones de Costa Rica y México. *Educación Matemática*, 30(1), 93–132. <https://doi.org/qh5w>

- Cujba, A., & Pifarré, M. (2023). Relaciones entre el aprendizaje de la estadística y las actitudes del alumnado en el marco de un proyecto de análisis de datos con tecnología. *Educación Matemática*, 35(2), 196–225.
<https://doi.org/10.24844/EM3502.08>
- De la Fuente, A., & Garrido-Martos, R. (2024). El Sentido Estocástico en los simposios de la SEIEM (2010-2023). En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent, & C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 185-192). SEIEM.
- Del-Callejo-Canal, D., Canal-Martínez, M., & Hákim-Krayem, M. R. (2020). Desarrollo del pensamiento estadístico en estudiantes de nivel superior a través de una Experiencia Educativa. *Educación Matemática*, 32(2), 194–216.
<https://doi.org/10.24844/EM3202.08>
- Del Pino-Ruiz, J. (2019). *Las medidas de dispersión en la educación secundaria obligatoria: análisis de libros de texto y de la comprensión de los estudiantes* [Tesis doctoral, Universidad de Jaén].
<https://1drv.ms/b/s!Aq-7kW4vLHTWplCfQ9WQ5aqyTVGa?e=ln6a3A>
- Díaz-Díaz, P. (2017). *La estadística y la probabilidad en los libros de texto de Bachillerato y en las pruebas de acceso a la universidad* [Tesis doctoral, Universidad de Oviedo]. <https://digibuo.uniovi.es/dspace/handle/10651/45032>
- Díaz-Levicoy, D. (2018). *Comprensión de gráficos estadísticos por alumnos chilenos de Educación Primaria* [Tesis doctoral, Universidad de Granada].
<http://digibug.ugr.es/bitstream/handle/10481/53598/29122880.pdf>
- Díaz-Pallauta, J. (2022). *Análisis de las tablas estadísticas en textos escolares y su comprensión por estudiantes de educación básica* [Tesis doctoral, Universidad de Granada]. <https://hdl.handle.net/10481/77953>
- Elizarrarás, S. (2024). Análisis del curso Pensamiento Estocástico para la formación docente inicial de México. En M. Sánchez Aguilar, M. del S. García González, & A. Castañeda (Eds.), *Perspectivas actuales de la Educación Matemática* (pp. 75–84). Editorial SOMIDEM.
<https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S3/2024/01-07>
- Espino, G. (2023). *Uso de proyectos estadísticos como una estrategia didáctica para favorecer la interdisciplinariedad: una experiencia con formadores docentes* [Tesis doctoral]. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional.
- Estrada, A., & Batanero, C. (2015). Construcción de una escala de actitudes hacia la probabilidad y su enseñanza para profesores. En C. Fernández, M. Molina, & N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 239-247). SEIEM.
- Eudave, D. (2024). Formación estadística y metodológica desde el punto de vista de las y los profesores. En M. Sánchez Aguilar, M. del S. García González, & A. Castañeda (Eds.), *Perspectivas actuales de la Educación Matemática* (pp. 97–105). Editorial SOMIDEM. <https://doi.org/qh52>

- Fernández, N. A., & García-García, J. I. (2024). Sentido probabilístico: un primer acercamiento. En M. Sánchez Aguilar, M. del S. García González, & A. Castañeda (Eds.), *Perspectivas actuales de la Educación Matemática* (pp. 107–116). Editorial SOMIDEM. <https://doi.org/qh53>
- Franco, J. (2024). *Conocimientos y creencias del profesorado de educación primaria para enseñar estadística y probabilidad a partir del enfoque de los itinerarios de enseñanza de las matemáticas* [Tesis doctoral, Universidad de Girona]. <https://dugi-doc.udg.edu/handle/10256/25261>
- Freixanet, M. J., Alsina, M., & Bosch, M. (2024). ATD as an Engine for Evolution. En I. Florensa, N. Ruiz-Munzón, K. Markulin, B. Barquero, M. Bosch, & Y. Chevallard (Eds), *Trends in Mathematics. Research Perspectives CRM Barcelona. Vol 16. Extended Abstracts 2022. Proceedings of the CITAD7*. Birkhäuser. https://doi.org/10.1007/978-3-031-55939-6_49
- García-García, J. I. (2017). *Razonamiento probabilístico de estudiantes de bachillerato sobre la noción de la distribución binomial* [Tesis doctoral]. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.
- García-Alonso, I. (2021). Gráficos estadísticos en libros de texto de Secundaria de Ciencias. Análisis exploratorio. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo, & D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 279–286). SEIEM.
- García-Ríos, V. (2017). *Diseño de una trayectoria hipotética de aprendizaje para la introducción y desarrollo del razonamiento sobre el contraste de hipótesis en el nivel medio superior* [Tesis doctoral]. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.
- González-Ruiz, I., & García-Moya, M. (2023). Estrategias de estudiantes con autismo al resolver un problema de permutaciones sin repetición. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 24, 131–150. <https://doi.org/qh54>
- González-Ruiz, I., González- López, M. J., & González-Astudillo, M. T. (2018). Contextos médicos de los datos en problemas de inferencia sobre la media en libros de bioestadística. En L. J. Rodríguez-Muñoz, L. Muñoz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García, & A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 251–260). SEIEM.
- Hakamata, R., Fukuda, H., Otani, H., Otaki, K., Barquero, B., y Bosch, M. (2024). Potential of Brousseau's guessing game in teacher education: two complementary cases. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 1–21. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2024.2321587>
- Hernández-Solís, L. A. (2024). *Influencia del razonamiento proporcional en la comparación de probabilidades y resolución de tareas probabilísticas* [Tesis doctoral, Universidad de Granada]. <https://digibug.ugr.es/handle/10481/92531>
- Huerta, M. P., & Arnau, J. (2017). La probabilidad condicional y la probabilidad conjunta en la resolución de problemas de probabilidad. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 11, 87–106. <https://doi.org/qh55>

- Inzunza, S. (2016). Análisis de datos bivariados en un ambiente basado en applets y software dinámico. *Educación Matemática*, 28(3), 61–89.
- Inzunza, S. (2017). Conexiones entre las aproximaciones clásicas y frecuencial de la probabilidad en un ambiente de modelación computacional. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 11, 69–86.
- Inzunza, S., & Islas, E. (2019). Análisis de una trayectoria de aprendizaje para desarrollar razonamiento sobre muestras, variabilidad y distribuciones muestrales. *Educación Matemática*, 31(3), 203–230. <https://doi.org/qh56>
- Inzunza, S., & Ward, S. E. (2015). Explorando el razonamiento covariacional mediante un ambiente computacional en un curso introductorio de estadística. En C. Fernández, M. Molina, & N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 317–325). SEIEM.
- Izagirre, A., Anasagasti, J., & Berciano, A. (2023). Conocimiento estadístico del futuro profesorado de educación primaria en la representación de datos. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 24, 111–130. <https://doi.org/10.35763/aiem24.4646>
- Jiménez, F., & Sánchez, E. (2024). Marco de desarrollo del razonamiento e instrumento de toma de datos sobre algunos conceptos básicos de muestreo. En M. Sánchez Aguilar, M. del S. García González, & A. Castañeda (Eds.), *Perspectivas actuales de la Educación Matemática* (pp. 135–145). Editorial SOMIDEM. <https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S3/2024/01-13>
- Laguna, M., & Block, D. (2020). Haciendo gelatinas: dos situaciones didácticas sobre la creación y uso de registros con niños preescolares. *Educación Matemática*, 32(3), 8–38. <https://doi.org/10.24844/EM3203.01>
- Lavela, J. F., Batanero, C., & Álvarez-Arroyo, R. (2021). Razonamiento probabilístico de estudiantes de Bachillerato en la interpretación de noticias. En P.D. Diago, D.F. Yáñez, M. T. González-Astudillo, & D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 359–366). SEIEM.
- López-Martín, M. M., Contreras, J. M., Carretero, M., & Serrano, L. (2016). Análisis de los problemas de probabilidad propuestos en las pruebas de acceso a la Universidad en Andalucía. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 9, 65–84. <https://doi.org/10.35763/aiem.v0i9.109>
- López-Martín, M. M. (2021). *La inferencia estadística en bachillerato: análisis de las pruebas de acceso a la universidad y de los conocimientos de futuros profesores* [Tesis doctoral, Universidad de Granada]. <https://digibug.ugr.es/handle/10481/66672>
- Madrid, A. E., Valenzuela-Ruiz, S. M., Batanero, C., & Garzón-Guerrero, J. A. (2022). Comprensión de la mediana por estudiantes universitarios. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 22, 1–21. <https://doi.org/qh57>
- Marrero-Santana, A. (2017). *Recursos didácticos para la enseñanza y aprendizaje del azar y la probabilidad en la educación obligatoria* [Tesis doctoral, Universidad de Las Palmas de Gran Canaria].

- Martínez, S. (2021). *Exploración de nociones básicas relacionadas con los enfoques clásico y frecuencial de probabilidad de estudiantes de bachillerato* [Tesis doctoral]. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.
- Martínez-Pérez, S., & Sánchez, E. (2018). Desarrollo del razonamiento de estudiantes de bachillerato sobre intervalos aleatorios. En L. J. Rodríguez-Muñoz, L. Muñoz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García, & A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 330–337). SEIEM.
- Medina, M. (2021). *Niveles de razonamiento covariacional derivados de las respuestas de estudiantes de bachillerato a problemas de correlación y regresión lineal* [Tesis doctoral]. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.
- Molero, A., Gea, M. M., & Batanero, C. (2019). ¿Qué conocimientos de la media aritmética tienen los estudiantes al inicio de la Educación Secundaria? En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano, & Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 423–432). SEIEM.
- Molina-Portillo, E., Contreras, J., Salcedo, A., & Contreras, J. M. (2020). Evaluación de la postura crítica de futuros profesores de Educación Primaria como componente de la cultura estadística. *Educación Matemática*, 32(3), 97–120. <https://doi.org/10.24844/EM3203.04>
- Morales-García, L., Vidal-Henry, S., García-García, J. I., & Díaz-Levicoy, D. (2022). Análisis ontosemiótico de tareas que involucran gráficos estadísticos en libros de texto mexicanos de Educación Primaria. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 22, 111–135. <https://doi.org/qh58>
- Morgado, C. (2023). *Experimento de diseño con soporte tecnológico para el desarrollo del razonamiento estadístico covariacional de estudiantes de bachillerato* [Tesis doctoral]. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.
- Morgado, C., & Sánchez, E. (2024). La conceptualización de la recta de mejor ajuste desde un enfoque informal por estudiantes de bachillerato. *Educación Matemática*, 36(2), 125–155. <https://doi.org/10.24844/EM3602.05>
- Muñoz-Rodríguez, L., Alonso-Castaño, M., & Rodríguez-Muñoz, L. J. (2021). Análisis de la idoneidad didáctica de vídeos educativos sobre probabilidad elaborados por estudiantes para maestro. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo, & D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 449–456). SEIEM.
- Nettle-Valenzuela, A. H. (2019). *Factores que afectan los razonamientos probabilísticos intuitivos de escolares que enfrentan situaciones problemáticas matemáticamente equivalentes* [Tesis doctoral, Universidad de Girona]. <https://dugi-doc.udg.edu/handle/10256/17772>

- Orta, J. A., & Sánchez, E. (2018). Niveles de razonamiento sobre variación estadística de estudiantes de nivel medio superior al resolver problemas en un contexto de riesgo. *Educación Matemática*, 30(1), 47–71. <https://doi.org/qh59>
- Orta, J. A., Sánchez, E., & Altamirano, J. A. (2015). Interpretación de la dispersión de datos en contexto de riesgo por profesoras en formación. En C. Fernández, M. Molina, & N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XLX* (pp. 441–450). SEIEM.
- Ortiz, J. J., Albanese, V., & Serrano, L. (2016). El lenguaje de la estadística y probabilidad en libros de texto de Educación Secundaria Obligatoria. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández, & A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 397–406). SEIEM.
- Pascual, I., Rifo, L., Castilla, L., & Climent, N. (2024). Conocimiento matemático del formador para la enseñanza del razonamiento inferencial estadístico en formación inicial de maestros. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent, & C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 401–408). SEIEM.
- Pitarch-Andrés, I. (2016). *Desarrollo de la competencia “tratamiento de la información” en la ESO, a través de la lógica y del análisis estadístico de los datos* [Tesis doctoral, Universidad Jaume I]. <https://www.tdx.cat/handle/10803/689054#page=1>
- Ricart-Aranda, M. (2021). *Estadística en educación infantil: competencias y conocimientos didáctico-matemáticos de maestros en formación en el marco del Enfoque Ontosemiótico* [Tesis doctoral, Universidad de Lleida]. <http://hdl.handle.net/10803/672147>
- Roldán López de Hierro, A. F., Batanero, C., & Álvarez-Arroyo, R. (2020). Comprensión del intervalo de confianza por estudiantes de Bachillerato. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 18, 103–117. <https://doi.org/10.35763/aiem.v0i18.284>
- Rivera, J. (2024). *Características de la enseñanza y evaluación de la estadística en carreras universitarias* [Tesis doctoral]. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional.
- Ruiz-Reyes, K. A. (2020). *Comprensión del muestreo por alumnos chilenos de Educación Secundaria* [Tesis doctoral, Universidad de Granada]. <https://digibug.ugr.es/bitstream/handle/10481/59296/69074.pdf>
- Rodríguez, B. (2020). *Decisiones de profesores de estadística tomadas fuera del aula de clase y su influencia en la enseñanza – aprendizaje de las reglas de probabilidad* [Tesis doctoral]. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional.
- Salinas, J., & Mayén, S. (2015). Estudio exploratorio de las actitudes hacia la estadística en estudiantes de bachillerato. En C. Fernández, M. Molina, & N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XLX* (pp. 503–509). SEIEM.

- Salinas, J., & Mayén, S. (2016). Estudio exploratorio de las actitudes hacia la estadística en estudiantes mexicanos de bachillerato. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 10, 73-90. <https://doi.org/10.35763/aiem.v0i10.130>
- Salinas, J., Valdez, J. C., & Salinas-Hernández, U. (2018). Un acercamiento a la metodología lesson study para la enseñanza de la distribución normal. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar González, P. Alonso, F. J. García García, & A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 525-534). SEIEM.
- Salinas, J., Valdez-Monroy, J. C., Salinas-Hernández, U., Sánchez, E., & Carrillo, J. (2021). Análisis de una secuencia para la noción de distribución de probabilidad usando un recurso computacional. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo, & D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 545-552). SEIEM.
- Sánchez, E., & Carrasco, G. (2018). El razonamiento probabilístico de estudiantes de bachillerato en actividades de distribución binomial. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García, & A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 535-543). SEIEM.
- Sánchez, E., García-García, J. I., & Elizarrarás, S. (2024). Enseñanza y aprendizaje de estocásticos en México: La construcción de un programa de investigación. En M. Sánchez Aguilar, M. del S. García González, & A. Castañeda (Eds.), *Perspectivas actuales de la Educación Matemática* (pp. 63-73). Editorial SOMIDEM. <https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S3/2024/01-06>
- Sánchez, E., García-Ríos, V. N., & Mercado, M. (2017). Desarrollo del razonamiento sobre pruebas de significación de estudiantes de bachillerato en un ambiente tecnológico. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo, & J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 447-456). SEIEM.
- Sánchez, E., González, A., Sánchez, M., & Carrasco, G. (2019). El razonamiento de estudiantes de bachillerato sobre la noción de experiencias aleatorias equivalentes. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano, & Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 553-562). SEIEM.
- Sánchez, E., Mercado, M., & García-García, J. I. (2016). La variabilidad en el razonamiento probabilístico informal de estudiantes de Bachillerato. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández, & A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 479-488). SEIEM.
- Sánchez, E., & Valdez, J. C. (2015). El razonamiento probabilístico informal de estudiantes de bachillerato. En C. Fernández, M. Molina, & N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 89-103). SEIEM.

- Santana, A. (2020). *Un estudio con futuros profesores de telesecundaria sobre el aprendizaje de estadística basado en proyectos* [Tesis doctoral]. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional.
- Sepúlveda, F., & Sánchez, E. (2023). Micro desarrollo de las concepciones de distribución muestral simulada de estudiantes de bachillerato. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo, & P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 507–514). SEIEM.
- Sepúlveda, F., & Sánchez, E. (2024). Explicaciones de profesores sobre concepciones de estudiantes de bachillerato acerca de pruebas de significación. En M. Sánchez Aguilar, M. del S. García González, & A. Castañeda (Eds.), *Perspectivas actuales de la Educación Matemática* (pp. 85–95). Editorial SOMIDEM. <https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S3/2024/01-08>
- Serrano, S., & Inzunza, S. (2024). Construcción de situaciones problema para promover el desarrollo de la alfabetización estadística. En M. Sánchez Aguilar, M. del S. García González, & A. Castañeda (Eds.), *Perspectivas actuales de la Educación Matemática* (pp. 117–123). Editorial SOMIDEM. <https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S3/2024/01-11>
- Silvestre, E. (2019). *Actividades sobre distribuciones muestrales utilizando simulaciones en el bachillerato: un experimento de diseño* [Tesis doctoral]. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.
- Silvestre, E., & Sánchez, E. (2016). Patrones en el desarrollo del razonamiento inferencial informal: introducción a las pruebas de significancia en el bachillerato. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández, & A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 509–518). SEIEM.
- Silvestre, E., Sánchez, E., & Inzunza, S. (2022). El razonamiento de estudiantes de bachillerato sobre el muestreo repetido y la distribución muestral empírica. *Educación Matemática*, 34(1), 100–130. <https://doi.org/qh6b>
- Tizón-Escamilla, N., Burgos, M., & Chaverri, J. (2024). Variación de problemas de probabilidad para promover aprendizaje. Una experiencia con docentes en formación inicial. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent, & C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 521–528). SEIEM.
- Tobías-Lara, M. G. (2019). *Uso del modelo de argumentación de Toulmin para analizar el razonamiento inferencial estadístico de estudiantes universitarios* [Tesis doctoral]. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional.
- Valdez, J. (2016). *Las grandes ideas de probabilidad en el razonamiento informal de estudiantes de bachillerato* [Tesis doctoral]. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

- Vásquez-Ortiz, C., & Alsina, A. (2016). Aproximación a la probabilidad en el aula de Educación Primaria. Un estudio de caso sobre los primeros elementos lingüísticos. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández, & A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 529–538). SEIEM.
- Vásquez, C., Seckel, M. J., & Rojas, F. (2023). Conectando la educación estadística y la sostenibilidad: creencias del profesorado de Educación Primaria. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 23, 127–146. <https://doi.org/10.35763/aiem23.5415>
- Vera, O. (2015). *Comprensión de conceptos elementales del análisis de varianza por estudiantes universitarios* [Tesis doctoral, Universidad de Granada]. <https://digibug.ugr.es/handle/10481/41155>
- Verástegui, M. Á., López-Flores, J. I., & García-García, J. I. (2024). El razonamiento estadístico en el currículo de formación inicial del profesor de matemáticas de educación secundaria en México. *Educación Matemática*, 36(3), 116–142. <https://doi.org/10.24844/EM3603.05>
- Verbisck, J., Bittar, M., Barquero, B., & Bosch, M. (2024). Addressing water scarcity through statistical inquiry in teacher education. *Statistics Education Research Journal*, 23(2), 1–15. <https://doi.org/10.52041/serj.v23i2.722>
- Wild, C. (2017). Statistical literacy as the Earth moves. *Statistics Education Research Journal*, 16(1), 31–37. <https://doi.org/10.52041/serj.v16i1>

La enseñanza del análisis matemático: panorama compartido

The teaching of calculus: a shared vision

Mónica Arnal-Palacián ¹ 

Heidy Chavira ² 

Matías Arce ³ 

Juan Viramontes-Miranda ⁴ 

Resumen

Este capítulo revisa los trabajos desarrollados en el Grupo de Investigación de Didáctica del Análisis Matemático (GIDAM), de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM) y el Grupo de Trabajo Temático 5 - Enseñanza y aprendizaje del cálculo (GTT5), de la Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática (SOMIDEM), así como los antecedentes vinculados a cada uno de ellos, ya sea por su trayectoria o por los investigadores asociados. Asimismo, se presentan las perspectivas futuras que pretenden desarrollarse en ambos grupos. Finalmente se exponen las semejanzas y diferencias, así como la existencia de posibles vías de colaboración.

¹ marnalp@unizar.es

Universidad de Zaragoza-IUMA (SEIEM)

² heidy.chavira@uacj.mx

Universidad Autónoma de Ciudad Juárez (SOMIDEM)

³ matias.arce@uva.es

Universidad de Valladolid (SEIEM)

⁴ juan.viramontes@uacj.mx

Universidad Autónoma de Ciudad Juárez (SOMIDEM)

Palabras clave

Didáctica del análisis matemático, didáctica del cálculo, GIDAM, GTT5.

Abstract

This chapter reviews the work developed in the Research Group on Didactics of Mathematical Analysis (GIDAM) and the Thematic Working Group 5 - Teaching and Learning of Calculus (GTT5), as well as the background linked to each of them, both in terms of their trajectory and the researchers linked to them. The future perspectives to be developed in both groups are also presented. Finally, the similarities and differences are exposed, as well as the existence of possible ways of collaboration.

Keywords

Didactics of mathematical analysis, didactics of calculus, GIDAM, GTT5.

Introducción

En este capítulo se hace una revisión de parte del trabajo que se ha realizado en el Grupo de Investigación de Didáctica del Análisis Matemático, en adelante GIDAM, y en el Grupo de Trabajo Temático 5 - Enseñanza y aprendizaje del cálculo, en adelante GTT5, pertenecientes a la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM) y a la Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática (SOMIDEM), respectivamente.

Los objetivos del GIDAM son: establecer una red entre los investigadores que comparten la Didáctica del Análisis Matemático como centro de su investigación; identificar las líneas de investigación relacionadas entre los miembros del grupo, favoreciendo la comunicación, las colaboraciones y las estancias de investigación, etc.; participar activamente en los seminarios específicos de la SEIEM; y difundir las investigaciones realizadas por los distintos miembros del grupo. Para intentar alcanzarlos, existe una reunión anual durante el Simposio de la SEIEM cada mes de septiembre, que permite la presentación de trabajos en diferentes momentos de desarrollo.

Asimismo, el objetivo principal de GTT5 es impulsar la investigación en torno a la enseñanza y el aprendizaje del cálculo, considerado una de las áreas más relevantes dentro de la educación matemática, especialmente por su relevancia en los programas de estudio en los niveles medio superior y superior, así como en carreras relacionadas con la ingeniería y las ciencias exactas. A través de un enfoque desde la matemática educativa, se pretende identificar y analizar las problemáticas que enfrentan tanto docentes como estudiantes en el proceso de enseñanza y aprendizaje del cálculo. Además, el grupo se propone valorar y recuperar los aportes realizados por investigaciones previas en el área, con el fin de consolidar un cuerpo teórico que sirva

de base para el desarrollo de nuevas propuestas y estrategias didácticas. En este sentido, se enfatiza la importancia de construir un diálogo constante entre la práctica docente y la teoría en matemática educativa, que permita enriquecer la línea de investigación del cálculo desde una perspectiva crítica, reflexiva y contextualizada.

Las investigaciones en GIDAM se apoyan en tres pilares fundamentales: temas de contenido matemático en torno al análisis matemático (los números reales, las funciones, el infinito, la continuidad, los límites, las series, el cálculo diferencial, el cálculo integral y las ecuaciones diferenciales), los procesos matemáticos involucrados en la transición entre el pensamiento matemático elemental (PME) y el pensamiento matemático avanzando (PMA) (abstraer, analizar, categorizar, conjeturar, definir, demostrar, formalizar, generalizar y sintetizar), y los temas de desarrollo cognitivo procedentes de la distinción entre los conceptos definidos formalmente y los procesos cognitivos que los conciben (las representaciones mentales, las estructuras cognitivas, los esquemas conceptuales, la dualidad proceso-objeto, la dialéctica instrumento-objeto, el pensamiento estructural versus el pensamiento operacional, la visualización y los modelos visuales). Los niveles educativos en los que se desarrollan son tanto la educación secundaria como la terciaria (grados en matemáticas, ciencias o ingeniería, grados y másteres de formación de profesores de matemáticas).

Las investigaciones en GTT5 se focalizan en la enseñanza y aprendizaje del cálculo, desde los niveles medio superior hasta el superior en carreras de ingeniería y ciencias exactas. En el seno del grupo se busca promover un mayor acceso a las herramientas y el conocimiento del cálculo, a partir de las habilidades presentes y potenciales del profesor y el alumno. Algunos ejemplos de los temas abordados en el grupo son el pensamiento variacional, el cálculo diferencial como herramienta para resolver problemas, la enseñanza de las áreas planas a través de un enfoque multidimensional, las conexiones entre conceptos, teoremas y aplicaciones, y la interpretación y aplicación del concepto de integral definida.

Las similitudes en los temas de interés de ambos grupos son notables, aunque también pueden apreciarse ciertas diferencias. Un ejemplo es la presencia explícita en GIDAM de algunos procesos matemáticos clave propios del PMA que en los grupos de trabajo temático de la SOMIDEM quedan encuadrados en otros grupos (por ejemplo, en el grupo GTT13 de Razonamiento, argumentación y prueba en Educación Matemática). Otro ejemplo es la distinción entre cálculo y análisis matemático que considera el grupo GTT5 y que suele ser habitual al organizar la enseñanza de estos contenidos en México, estando el cálculo más orientado a las técnicas de cálculo de límites, derivadas o integrales y una comprensión instrumental (en el sentido de Skemp, 1978) de los conceptos, mientras que el análisis

matemático se orienta más a desarrollar una comprensión más relacional (Skemp, 1978) de qué son esos conceptos, cómo se construyen y la justificación de reglas o teoremas vinculados con estos contenidos. Esta distinción no suele hacerse explícitamente en la organización de la enseñanza de estos contenidos en España (Ministerio de Educación y Formación Profesional, MEFP, 2022), donde tienden a usarse de forma sinónima (otra cuestión es cómo se enfoque en el aula su tratamiento).

El trabajo desarrollado en ambos grupos, así como las investigaciones de los últimos años por parte de miembros de SEIEM y SOMIDEM vinculados a las líneas de interés señaladas con anterioridad, se han tenido en cuenta para la presentación de las secciones siguientes.

Estado actual de GIDAM

Los contenidos matemáticos presentes en GIDAM en los últimos años han girado en torno a las funciones, los límites, la derivada de una función, y el cálculo integral, y hemos partido de este hecho para organizar las diferentes subsecciones de este apartado. Además, existen otras nociones matemáticas, como por ejemplo las funciones, que permiten a GIDAM establecer sinergias con el grupo de Pensamiento Numérico y Algebraico (PNA) de la SEIEM. Asimismo, y dado que en la enseñanza y aprendizaje de contenidos próximos al análisis matemático se encuentra un foco en los procesos de razonar y demostrar, poniendo en juego características propias del PMA (Tall, 1991), estos también han sido incluidos en la revisión, en una subsección concreta.

Para conocer el estado del arte actual, se ha partido del trabajo ya hecho en revisiones previas como las de Azcárate et al. (2015) y Camacho-Machín (2021), y a partir de ellas se han realizado dos búsquedas bibliográficas: una de ellas de contribuciones vinculadas con las temáticas del GIDAM publicadas en las actas de la SEIEM desde 2020 y otra de artículos publicados sobre estas temáticas en revistas indexadas en las principales bases de datos (Web of Science y Scopus) desde el año 2020 y donde haya autoría de personas vinculadas con el GIDAM y su actividad. En cada contribución, hemos extraído los objetivos de investigación, marcos teóricos o conceptuales utilizados, método y principales resultados como base para el análisis y organización de la revisión. Esta se presenta a continuación, pudiendo usar otras referencias relevantes que sirvan de antecedente de la información o los resultados presentados en cada caso.

En global, esta revisión bibliográfica realizada evidencia que los marcos teóricos utilizados en GIDAM son variados. Esto también, como comenta Camacho-Machín (2021), ha permitido un fortalecimiento progresivo de marcos teóricos y conceptuales fruto de las diferentes investigaciones. Algunos de los marcos teóricos utilizados han sido: APOE (Acción-Proceso-Objeto-Eschema, Arnon et al., 2014), EOS (Enfoque Ontosemiótico,

Godino et al., 2007), análisis didáctico (Rico et al., 2013), professional noticing (Jacobs et al., 2010; Llinares, 2016), fenomenología (Freudenthal, 1983), la teoría de representaciones semióticas (Duval, 2017) y la teoría extendida de conexiones matemáticas (Dolores-Flores & García-García, 2017). Incluso se han desarrollado sinergias entre teorías, como EOS y APOE para el caso particular de la derivada (Font et al., 2016).

En los trabajos que han formado parte de esta revisión bibliográfica predominan diseños de investigación con un paradigma cualitativo. Tienen una presencia muy importante investigaciones basadas en el análisis de producciones de los estudiantes para resolver tareas, aplicando metodologías de análisis de contenido. Estos datos se complementan en ocasiones con entrevistas o grabaciones a los participantes, que posibilitan análisis en mayor profundidad, con enfoques más próximos a estudios de caso. Es importante resaltar que, en algunos casos, esta recogida de datos se produce como parte de experimentos de enseñanza para mejorar el aprendizaje de los diferentes objetos matemáticos (en estudiantes) o el desarrollo de competencias profesionales (en docentes en formación). Investigaciones de este tipo han incrementado su presencia (Camacho-Machín, 2021), y favorecen una transferencia progresivamente más directa al aula del conocimiento generado. Por último, encontramos también investigaciones centradas en el análisis de libros de texto, desde el siglo XIX hasta la actualidad, o de documentos curriculares vinculados con la derivada.

En este capítulo se destaca que buena parte de las investigaciones presentadas en esta sección comenzaron con tesis doctorales dirigidas o realizadas por miembros de la SEIEM. Sin pretender olvidar ninguna, a continuación, se indican, por orden cronológico, las defendidas en los últimos 15 años recogidas en la web de la SEIEM: Javier Claros, Mario Porres, Teresa Sánchez, Luis Pino-Fan, Joan Pons, Carmen Aranda, José Antonio Fernández, Laura Conejo, Mauro Mira, Matías Arce, Astrid Cuida, Claudio Fuentealba, Abilio Orts, Luis Vidal, Mónica Arnal, Yosenith González y Gabriela Calderón.

A continuación, se presentan subsecciones que permitan presentar las investigaciones sobre el concepto de límite, derivada de una función, cálculo integral, otras nociones estrechamente vinculadas al análisis matemático, y procesos matemáticos clave en la didáctica del análisis matemático.

Investigaciones sobre el concepto de límite

Ya son casi 50 años en los que se han venido realizando numerosos trabajos estrechamente vinculados a la noción de límite que han permitido profundizar en las dificultades que se presentan en el aula desde distintos puntos de vista. Esto tampoco ha sido ajeno para la SEIEM. En estas primeras líneas destacamos algunos de los estudios en los que se fundamentan los trabajos

recientemente elaborados o todavía en curso. Algunos de ellos se fundamentan en estudios anteriores, como por ejemplo el análisis de libros de texto (Sierra et al., 1999), las concepciones de los alumnos de bachillerato sobre el límite funcional y la continuidad (Sierra et al., 2000) y los fenómenos que organiza la noción de límite (Claros et al., 2007).

Precisamente tomando como punto de partida este último trabajo, y tomando como marco teórico la fenomenología, entendida en el sentido dado por Freudenthal (1983), que organiza la noción de límite, se han desarrollado tres líneas de trabajo que han tenido lugar dentro del mismo equipo de investigación y que comenzaron con las tesis doctorales de sus componentes. En primer lugar, se desarrollaron los trabajos sobre el límite finito de una sucesión y el límite finito de una función en un punto (Claros et al., 2016). Dado el estudio de manera particular para cada tipo de límite que en estos trabajos se promueve, más recientemente se han estudiado los fenómenos organizados por el límite finito de una sucesión (Arnal-Palacián et al., 2020a) y el límite infinito de una función en el infinito (Arnal-Palacián, 2022). La primera fase de estas investigaciones comienza de manera similar: caracteriza los fenómenos intuitivos y formales organizados a partir de cada uno de estos límites. Posteriormente se han realizado diferentes estudios empíricos que han considerado tanto a los libros de texto como al profesorado en formación. En relación con los libros de texto, Claros et al. (2016), Arnal-Palacián et al. (2020b) y Arnal-Palacián et al. (2024) abordan una investigación documental de carácter exploratorio y descriptivo de libros de texto desde el siglo XIX hasta la actualidad. En el primer estudio, se tomaron 40 libros de texto para analizar el límite finito de una sucesión y el límite finito de una función en un punto. Entre los resultados se muestran cómo algunos periodos temporales se caracterizan por un enfoque formal mientras que en otros se abordan estas nociones desde una perspectiva más intuitiva. En el segundo estudio se analizaron libros de texto teniendo en cuenta el límite infinito de una sucesión, pudiendo así completar el estudio anterior. Se identificaron los fenómenos anteriormente descritos en diferentes sistemas de representación. Además, entre otros resultados de este trabajo, se refleja cómo los diferentes periodos legislativos en España afectan al enfoque que se promueve (formal o intuitivo), la presencia o ausencia de definiciones y/o ejemplos, y la manera en que la noción de límite es presentada. En el tercer estudio, se abordó el análisis de 27 obras del siglo XIX, momento en el que tuvo lugar la formalización del límite. Entre los resultados de este trabajo se aprecia una clara tendencia a incluir el límite en obras de aritmética y álgebra, alejado de la percepción actual de ubicarlo en el análisis matemático.

Dada la importancia del concepto de límite en el currículo español de Bachillerato, correspondiente a la etapa comprendida entre los 16 y los 18

años, Fernández-Plaza et al. (2015) abordaron una investigación sobre los razonamientos basados en el concepto de límite finito de una función en un punto. Para ello, analizaron las concepciones que los estudiantes de educación secundaria postobligatoria tienen sobre el concepto de límite finito de una función en un punto a partir de su representación gráfica. Previamente, este mismo equipo de investigación (Fernández-Plaza et al., 2013) había descrito e interpretado las definiciones aportadas por este mismo tipo de alumnado. Entre los resultados obtenidos resaltaron la riqueza del significado de estas definiciones y su consideración dual como objeto y proceso. Recientemente, y dando continuidad a este trabajo, González-Flores et al. (2021, 2024) analizan los significados que atribuyen estudiantes de primer curso universitario, durante y al finalizar el proceso de enseñanza, al límite en un punto de una función real de variable real.

Asimismo, la investigación en educación matemática ha puesto de manifiesto la necesidad de examinar cómo los futuros profesores de secundaria abordan el pensamiento matemático de los que serán sus futuros estudiantes. En este sentido, Fernández et al. (2024) se fundamentan en la conceptualización del *professional noticing* establecido por Jacobs et al. (2010): atender a las estrategias, interpretar la comprensión y decidir cómo responder. Asimismo, esta investigación se apoya en la importancia del conocimiento de los futuros profesores sobre el pensamiento de sus futuros estudiantes en términos de anticipación de las respuestas que puedan producirse (Fernández et al., 2018; Llinares et al., 2016). Durante la misma, elaboraron un módulo de enseñanza para que los futuros docentes aprendan a identificar las características de la comprensión de los estudiantes sobre el límite de una función en un punto y a proporcionar decisiones instructivas que ayuden a los estudiantes a progresar en su comprensión. Con la aplicación de este módulo, identificaron un cambio en la manera en la que los futuros docentes conciben la comprensión del concepto de límite y un cambio en las decisiones instructivas. Utilizando este mismo marco teórico, *professional noticing*, y apoyado en el conocimiento didáctico del contenido del formador de docentes (MTEPCK), Pérez-Montilla y Arnal-Palacián (2023) analizaron la habilidad para comprender e interpretar las estrategias por parte de futuros docentes en dos tareas en las que aparecía el límite finito de una función en el infinito y el límite infinito en un punto. Esto dio lugar a la identificación de tres posibles niveles de desarrollo en relación con las representaciones semióticas: desde aquellos que solamente hacen comentarios valorativos sobre la corrección de la tarea hasta aquellos que identifican tratamientos y conversiones entre registros de representación.

Las tecnologías no han sido ajenas al desarrollo de la enseñanza y el aprendizaje de este objeto matemático. Barreras et al. (2022) y Dubarbie-Fernández et al. (2025) analizaron la idoneidad didáctica de applets de

GeoGebra para la enseñanza del límite de una función. Para ello, utilizaron como marco teórico el EOS, considerando los seis tipos de objetos matemáticos primarios que permiten describir la actividad matemática. Asimismo, se apoyaron en los trabajos de Tall y Vinner (1981) y Przenioslo (2004) para poder utilizar como variable de análisis la imagen conceptual, así como en los de Blázquez y Ortega (2001) para la categorización de los registros de representación.

Investigaciones sobre la derivada de una función

La derivada de una función sigue teniendo una importante presencia entre las investigaciones en Didáctica del Análisis Matemático, por su importancia y sus numerosas aplicaciones para el análisis de modelos matemáticos y el estudio de su evolución y cambios. No en vano, el desarrollo histórico de las ideas relacionadas con el cálculo de derivadas (tangentes, máximos, mínimos) fue el que condujo al concepto de límite (Ortega y Sierra, 1998), tratado en el apartado anterior.

Tradicionalmente, las investigaciones sobre la derivada en el grupo GIDAM se han desarrollado desde un enfoque mayoritariamente cognitivo, buscando conocer y caracterizar cómo se desarrolla la comprensión de la derivada o cuáles son las concepciones de los estudiantes sobre ella (Sánchez-Matamoros & García, 2015), teniendo en cuenta la dificultad que presenta el aprendizaje de este concepto para el alumnado (Sánchez-Matamoros et al., 2008). En estos últimos años, ha continuado la especialización en estas líneas de investigación, pero también se ha combinado con dos focos que van ganando progresivamente mayor presencia:

- La atención hacia los procesos clave en matemáticas (National Council of Teachers of Mathematics, NCTM, 2000), que se han constituido como ejes de las competencias específicas en matemáticas en el actual currículo español de la LOMLOE (MEFP, 2022).
- La transferencia a la formación inicial de docentes del conocimiento desarrollado sobre el aprendizaje de la derivada, y la caracterización de ese desarrollo profesional en docentes en formación inicial.

La derivada de una función comienza a estudiarse en España en Bachillerato, continuando su estudio en muchos grados universitarios vinculados con matemáticas, ciencias e ingenierías. Esto se refleja en que el alumnado participante es, o bien alumnado de Bachillerato, o bien alumnado universitario de matemáticas o de diversas ingenierías. También hay estudios centrados en la formación inicial de tipo didáctico para docentes de matemáticas de educación secundaria, que en España tiene lugar en un máster profesionalizante.

La trayectoria de investigación de varios miembros activos en la trayectoria de GIDAM, como Carmen Azcárate, Vicenç Font, Mar Moreno,

Edelmira Badillo o Gloria Sánchez-Matamoros, ha estado vinculada con el aprendizaje de la derivada (o de las ecuaciones diferenciales), generando trayectorias fructíferas y líneas de investigación que continúan desarrollándose. Como indican Sánchez-Matamoros et al. (2008), un aprendizaje sólido de la derivada requiere comprender y relacionar las diferentes interpretaciones de la misma (como límite del cociente incremental y como pendiente de la recta tangente a una curva), normalmente asociadas a diferentes sistemas de representación de la función (analítica en el primer caso, gráfica en el segundo), así como diferenciar su carácter puntual (derivada en un punto) del global (función derivada como un nuevo objeto) y manejar adecuadamente el cálculo de derivadas, especialmente la regla de la cadena. Las investigaciones relacionadas con la derivada en GIDAM profundizan en algunos de estos aspectos.

Un primer aspecto relevante es que los propios documentos curriculares o recursos ampliamente utilizados, como los libros de texto, recojan toda esa variedad de interpretaciones y aplicaciones de la derivada. Galindo-Illanes y Breda (2022) analizan, con el apoyo del marco EOS, el significado pretendido para la derivada en ocho programas de asignaturas de cálculo en carreras de Ingeniería Comercial en Chile, encontrando diferencias en el significado que se prepondera (derivada interpretada como razón de cambio o como pendiente de la recta tangente) y en los campos de problemas de aplicación de la derivada que se abordan. Vargas et al. (2020a, 2020b) identifican los significados (entendidos en el sentido del análisis didáctico de Rico et al., 2013) de la derivada que ponen de manifiesto libros de texto de 1.º de Bachillerato (16-17 años) a través de las tareas que plantean, observándose un claro predominio de tareas algorítmicas, de un sistema de representación simbólico y de aplicaciones en contextos meramente matemáticos.

Además de lo anterior, el docente de matemáticas también ha de ser consciente y manejar con solvencia las interpretaciones y aplicaciones de la derivada. Sin embargo, Badillo et al. (2011) ya pusieron de manifiesto algunas inconsistencias en docentes de matemáticas en ejercicio al manejar la función derivada como un objeto global. Vargas et al. (2023a) han detectado cinco perfiles en el profesorado de educación secundaria en formación inicial según el significado de la derivada en un punto que explicitan en un cuestionario semántico, mostrando en general solo un dominio parcial de esta. Dificultades en este dominio del conocimiento matemático pueden ser un obstáculo para desarrollar las competencias docentes de identificar los elementos matemáticos e interpretar las características de la comprensión de la derivada que ponen de manifiesto los estudiantes, competencias que, como muestran Sánchez-Matamoros et al. (2019), son fundamentales en la propuesta de acciones docentes adecuadas para promover el avance en la comprensión conceptual de la derivada por los estudiantes.

La introducción de la derivada suele hacerse en las aulas tras haber trabajado el concepto de límite de una función, en muchos casos con una presencia importante del sistema de representación simbólico y un enfoque procedimental, que se refuerza aún más en los registros de las clases que toma el alumnado (Arce et al., 2016). Propuestas didácticas como las de Azcárate et al. (1996), que proponen la introducción de la derivada apoyándose en el contexto de la velocidad media e instantánea y la pendiente de la recta tangente, ayudarían a conectar los sistemas simbólico y gráfico y a dar sentido a la derivada fuera del contexto matemático. Esto último no es sencillo, pues como muestran Bermejo-Luna y Sánchez-Matamoros (2022), a partir de la propuesta de tareas sobre la derivada en un contexto de cinemática, tener un buen desarrollo del esquema de la derivada (en el sentido del marco APOE) es lo que permite la transferencia de ese conocimiento al contexto físico.

El establecimiento de una interpretación adecuada y de conexiones entre los registros analítico y gráfico, y entre las interpretaciones de la derivada, son claves en el desarrollo de la comprensión de la derivada. Por ejemplo, Orts et al. (2018) destacan la relación entre los registros analítico y gráfico a través de una concepción leibniziana de la recta tangente (como recta que mejor aproxima a la función en un entorno del punto) como clave en la comprensión de la recta tangente. Los trabajos de Gloria Sánchez-Matamoros han sido continuados por Claudio Fuentealba, refinando los niveles inter, intra y trans de desarrollo del esquema de la derivada a través de diferentes subniveles (Fuentealba et al., 2019) y avanzando en la caracterización de la tematización de la derivada (es decir, cuando la función derivada se convierte en un objeto sobre el que aplicar nuevas acciones o procesos), a través de tareas que provocan la reestructuración de ese esquema de la derivada y la aplicación de acciones sobre él (Fuentealba et al., 2022). El trabajo de Trigueros et al. (2024) continúa la caracterización de esta tematización, a través del análisis de las actuaciones de graduados en matemáticas al resolver problemas complejos que involucran el manejo de derivadas de orden superior en un contexto gráfico.

Las conexiones que realizan los estudiantes universitarios de matemáticas al resolver problemas vinculados con la derivada son el foco de los trabajos de Rodríguez-Nieto et al. (2023a, 2023b), en los que se articula el marco EOS con la teoría extendida de las conexiones matemáticas para identificar y analizar esas conexiones, en un caso asociadas a un problema de lanzamiento de un proyectil y en el otro al dibujo e interpretación de la función derivada f' a partir de la representación gráfica de f y viceversa. En este último caso (Rodríguez-Nieto et al., 2023b), se destaca la reversibilidad existente entre las gráficas de f y f' de forma bidireccional como aspecto clave, pero cuyo desarrollo es complejo por la cantidad y variedad de

conexiones necesarias para establecerla. Otro ejemplo importante de articulación de marcos se muestra en Borji et al. (2021), en el que se articulan los marcos APOE y EOS para caracterizar la comprensión de estudiantes universitarios al resolver ejercicios de derivación implícita.

Destacamos en esta última parte investigaciones sobre la derivada de una función en las que tiene una presencia importante el rol de TIC específicas, como los programas de geometría dinámica o calculadoras simbólicas. Galindo-Illanes et al. (2022) muestran los resultados positivos de un experimento de enseñanza de la derivada con estudiantes universitarios de ingeniería, especialmente en lo relativo a la conceptualización de la recta tangente y su relación con la derivada. En un nivel educativo más bajo (1.º de Bachillerato), Lillo et al. (2023) implementan otro experimento de enseñanza sobre la construcción de la gráfica de la función derivada con actividades apoyadas en applets de GeoGebra. Estos autores identifican dos características determinantes para pasar de una comprensión de la gráfica de f' como proceso a objeto: el conocimiento del proceso límite de la tasa de variación media y la reflexión sobre la relación actividad-efecto al usar GeoGebra. Recientemente, Santos-Trigo et al. (2024) han planteado una reflexión teórica en la que, partiendo de las dificultades que muestran los estudiantes al comprender las ideas fundacionales del cálculo y los problemas que involucran cálculo variacional, se discuten las posibilidades que ofrece la resolución de estos problemas a través de programas de geometría dinámica para profundizar en la comprensión de los conceptos y obtener nuevos caminos de pensamiento para abordar y resolver estos problemas.

Investigaciones sobre el cálculo integral

El cálculo integral se encuentra en la legislación educativa española en el segundo curso de Bachillerato (17-18 años). Esta legislación determina que debe impartirse la integral definida como el área bajo una curva y técnicas elementales para el cálculo de primitivas, así como técnicas que permitan la aplicación del concepto de integral a la resolución de problemas. A pesar de esta importancia curricular, la investigación realizada desde la SEIEM, y en particular en GIDAM, no es tan abundante como para el límite y la derivada. Entre los estudios que han promovido la investigación sobre el cálculo integral se encuentran los trabajos de Ortega y Porres-Tomé (2016), Aranda y Callejo (2017) y, más recientemente, Esteve-Blasco et al. (2024). Los resultados de estas investigaciones se resumen a continuación.

Con el uso de herramientas tecnológicas, Ortega y Porres-Tomé (2016) presentaron una investigación sobre la comprensión de una integral definida y el teorema fundamental del cálculo, considerando fundamental el dinamismo de las sumas finitas de Darboux con un número escaso de sumandos. Para ello, se apoyaron en la herramienta tecnológica DERIVE,

permitiendo que el trabajo simultáneo de los registros de representación numérico y gráfico fuese el paso previo a la generalización y la sistematización tanto de la integral definida como del teorema fundamental del cálculo. Por su parte, Aranda y Callejo (2017) identificaron cómo los estudiantes de Bachillerato construyen el concepto de integral en un estudio empírico utilizando applets, diseñando una trayectoria hipotética de aprendizaje. Entre los resultados arrojados por este estudio se encuentra que el concepto de función integral puede ser utilizado para diseñar materiales curriculares apoyándose en el razonamiento covariacional.

En los últimos años, Esteve-Blasco et al. (2024) han contribuido al cálculo integral desde la historia de la matemática. Dentro de GIDAM presentaron un taller en el que expusieron el método de exhaustión, así como diferentes actividades en las que se abordaron los siguientes aspectos: los inconmensurables pitagóricos (perspectiva corpuscular), la divisibilidad y “llenado” del espacio: Paradojas de Zenón, y la contraposición entre infinito potencial e infinito actual. Posteriormente, con una metodología de ingeniería didáctica, este equipo de investigación ha utilizado las series de diferencias de Leibniz para comprender el concepto de integral como un proceso de suma infinita de diferencias infinitamente pequeñas utilizando la historia para obtener un conocimiento profundo del concepto y dotar a los estudiantes de un conocimiento de integral definida a partir de una aproximación por módulos.

Investigación sobre otras nociones estrechamente vinculadas al análisis matemático

Las investigaciones sobre la enseñanza y aprendizaje de las funciones se desarrollan en paralelo por miembros de SEIEM que participan tanto en GIDAM como en el grupo PNA. En el caso de la investigación de Vargas et al. (2023b), se enfocaron en caracterizar un conjunto de tareas sobre funciones propuestas por profesores en formación. Analizaron aspectos de contenido matemático y su significado, y entre los aspectos de aprendizaje o cognitivos observaron una dificultad para plantear este tipo de tareas, además de un predominio de la representación simbólica y tareas con baja demanda cognitiva. Asimismo, Inglada et al. (2023), utilizando como marco teórico el EOS, analizaron la reflexión de profesorado en formación sobre su práctica docente cuando abordan el tema de funciones en su Trabajo Fin de Máster.

Por otra parte, Arce y Conejo (2021) examinaron los procesos de enseñanza y aprendizaje de los intervalos de la recta real en libros de texto, editados durante dos leyes educativas españolas. Los resultados determinan que aparecen algunos comportamientos globales que podrían llegar a comprometer la riqueza y variedad de oportunidades de aprendizaje de las

conversiones provistas, y una frecuencia de aparición muy desigual entre unas conversiones y otras, además de la falta de consideración del registro verbal y el abuso de expresiones algebraicas y verbales. Estos mismos autores, en el seno de GIDAM, presentaron un taller sobre el tratamiento de los intervalos en libros de texto y la generación de un instrumento que permitiera analizar la presentación de este contenido.

Además, Martín-Barcala y González-Astudillo han desarrollado investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje del logaritmo. Estos autores han detectado errores habituales en estudiantes de enseñanza secundaria relacionados con el uso de una definición distorsionada de logaritmo o la generalización inadecuada de sus propiedades (Martín-Barcala y González-Astudillo, 2019). Estos mismos autores, en el seno del GIDAM, presentaron un taller donde expusieron una investigación en la que se pretende determinar si una enseñanza del logaritmo que contemple más definiciones, además de la inversa de la exponencial, favorece la comprensión y el aprendizaje de los alumnos.

Otros conceptos matemáticos abordados han sido el aprendizaje sobre la densidad numérica (Suárez-Rodríguez & Figueras, 2022; Suárez-Rodríguez & Sacristán Rock, 2002), y las sucesiones numéricas (Bajo-Benito et al., 2023), en las que se trata de caracterizar el desarrollo de la comprensión de las sucesiones numéricas en estudiantes de enseñanza secundaria a partir de las conversiones entre diferentes representaciones del concepto matemático.

Procesos matemáticos clave en la didáctica del análisis matemático

La influencia de los estándares del NCTM (2000) ha provocado que procesos matemáticos fundamentales al hacer matemáticas, como la resolución de problemas, el razonamiento y la prueba, las conexiones (intramatemáticas y extramatemáticas), y la representación y la comunicación de ideas matemáticas, se hayan constituido como ejes de las competencias específicas en matemáticas del actual currículo español de la LOMLOE (MEFP, 2022). Su importancia progresivamente mayor ha aumentado la presencia de investigaciones con un foco específico en estos procesos, aunque algunos como la representación de ideas matemáticas, las conexiones o la resolución de problemas han sido muy importantes en investigaciones sobre la enseñanza y aprendizaje de tópicos propios del análisis matemático, y continúan en auge como ponen de manifiesto los epígrafes previos.

Complementaremos lo anterior con una breve revisión, en este apartado, de investigaciones recientes con foco en los procesos de razonar y demostrar y con contenidos próximos al análisis matemático, que requieren poner en juego características propias del llamado pensamiento matemático avanzado (Tall, 1991), uno de los pilares que describe GIDAM. En GIDAM han tenido presencia investigaciones que han analizado la presencia en libros de

texto de procesos de demostración al abordar temas de análisis matemático, al ser un recurso con una alta influencia en lo que se realiza en las aulas. Con el antecedente de las investigaciones de Laura Conejo (ver Conejo y Ortega, 2014; Conejo et al., 2015), que evidenciaban la disminución paulatina en libros de texto españoles de Bachillerato de demostraciones deductivas al trabajar los teoremas de límites y continuidad, y su sustitución por ejemplos gráficos con funciones particulares; en la actualidad se han desarrollado investigaciones como las de Milanesio y Markiewicz (2023) o Milanesio y Burgos (2024). Estas autoras muestran la existencia de algunos conflictos semióticos potenciales que se pueden plantear al trabajar con libros de texto, como el uso no diferenciado de múltiples términos asociados a la demostración (probar, demostrar, justificar, comprobar, estudiar) al abordar los teoremas de continuidad de una función, o conflictos semióticos al abordar una demostración por inducción matemática.

Son relevantes también las investigaciones sobre las concepciones que tiene el alumnado y el profesorado sobre estos procesos, por su complejidad y por su importancia para construir matemáticas. En Camacho-Machín (2021) se recogen los resultados principales de una investigación con alumnado universitario de 1.º de los grados de Matemáticas y Física, que muestra una preferencia por justificaciones de tipo deductivo-simbólico, por considerarlas más claras y rigurosas, y una mayor resistencia hacia justificaciones basadas en argumentos visuales o gráficos. Entre el profesorado, Arce et al. (2019) muestran la existencia de perfiles muy distintos según el rol y funciones que asignan profesores de España y Portugal a la demostración en las aulas de matemáticas de Educación Secundaria y Bachillerato (12-18 años), que tienen incidencia en las prácticas vinculadas al razonamiento y la demostración que se plantean. La presencia de estas prácticas también puede estar influenciada por el conocimiento de estas que tenga el profesorado. Como muestran Vargas et al. (2020c) en un estudio con profesores en formación de matemáticas de Educación Secundaria, en ocasiones hay dificultades para construir argumentos válidos en enunciados sobre la derivabilidad de una función en un punto, al recurrirse a enunciados o reglas sin respaldo o por no tener en cuenta las condiciones necesarias para que una función sea derivable.

Otra línea de trabajo desarrollada muy recientemente, y vinculada con el razonamiento y prueba, es la de Fernández-León et al. (2021), Fernández-León y Gavilán (2022) y Gavilán y Fernández-León (2023). Estos autores, a partir de la adaptación de los conceptos de matematización horizontal y vertical que realizan Rasmussen et al. (2005), y a través de estudios de caso con una investigadora en análisis matemático como informante, caracterizan las actividades desarrolladas por esta matemática profesional al conjeturar y demostrar nuevos resultados. Se destaca el rol e importancia en estas prácticas

de los ejemplos, y en concreto de los ejemplos genéricos, para facilitar la transición entre lo empírico y lo deductivo. Avanzar en esta caracterización es una fuente de información importante para el diseño de una instrucción adecuada vinculada a la enseñanza y aprendizaje de estos procesos.

Líneas futuras de GIDAM

El desafío inmediato del grupo GIDAM es la consolidación de las investigaciones en curso, así como la apertura a otras nuevas líneas que permitan su revitalización. Para ello, además de la reunión anual durante el Simposio de la SEIEM, se pretende dinamizar e impulsar la actividad del grupo con la recuperación, después de diez años, de un encuentro intermedio que permita ser un espacio no solo para la difusión de los trabajos sino también de formación de grupos de discusión y equipos de colaboración. Este primer paso ha tenido lugar durante el año 2025, y se espera su fortalecimiento en años venideros.

Aunque es difícil predecir la aparición de nuevos estudios de investigación, se espera que los trabajos más recientes expuestos en el apartado anterior tengan una continuidad y profundización en aspectos afines a los ya presentados. Asimismo, se espera que esta revisión favorezca el desarrollo de futuras sinergias entre los diferentes equipos de trabajo.

Así, y siguiendo el orden de la sección anterior, en relación con los límites, se espera que la tesis doctoral de Yosenith González, dirigida por Juan Francisco Ruiz-Hidalgo y Ana Belén Montoro, continúe ahondando en los significados del límite atribuidos por estudiantes universitarios. Asimismo, que los trabajos recientes de Mónica Arnal-Palacián y Andrés Pérez-Montilla prosigan con el estudio del profesorado en formación en relación con las imágenes conceptuales de diferentes tipos de asíntotas. Además, es esperable que el equipo formado por Álvaro Barreras, Luis Dubarbie-Fernández y Antonio M. Oller-Marcén continúe con el estudio del uso de GeoGebra en la enseñanza del límite.

Vinculado a las líneas de futuro de la noción de derivada, se confía que, dados los múltiples y recientes trabajos en dos equipos de investigación, formados por Camilo Rodríguez-Nieto, Flor Rodríguez-Vásquez, Vicenç Font y Luis Pino-Fan, y por Fernanda Vargas, José Antonio Fernández-Plaza y Juan Francisco Ruiz-Hidalgo, estos trabajos permitan seguir con un fortalecimiento de los marcos teóricos EOS y análisis didáctico, respectivamente.

Con los recientes trabajos de Miguel Esteve-Blasco, M. Teresa González-Astudillo y Miguel Ángel Fuertes-Prieto presentados en la SEIEM, y citados con anterioridad, sobre sumas y diferencias de Leibniz se espera una nueva línea de investigación que permita trabajar la enseñanza y aprendizaje de la integral.

Aportando a otro de los pilares fundamentales de GIDAM, los procesos matemáticos, se confía en una continuidad del equipo de trabajo formado por José M^a Gavilán y Aurora Fernández-León, en el que se prosiga con la caracterización sobre cómo conjeturan y demuestran los investigadores de matemáticas.

Finalmente, y dada la exposición de talleres o presentaciones de estudios en curso en GIDAM durante el Simposio de la SEIEM en los últimos años, se esperan nuevos resultados de la tesis doctoral en curso de Antonio Martín-Barcala, dirigida por Teresa González-Astudillo, sobre la enseñanza del logaritmo; de la tesis doctoral en curso de Ana María Correal, dirigida por Pablo Beltrán-Pellicer y Mónica Arnal-Palacián, sobre el análisis de videos de funciones cuadráticas; y del equipo investigador formado por Matías Arce y Laura Conejo sobre el tratamiento de los intervalos en los libros de texto.

Estado actual de GTT5

En el Congreso SOMIDEM1 se lanzó la convocatoria a todos los interesados en temáticas relacionadas con la enseñanza y aprendizaje del cálculo, a fin de formar el GTT5: Enseñanza y Aprendizaje del Cálculo. Se estableció como eje conductor para las propuestas el considerar al cálculo como una de las áreas de mayor importancia para la investigación en la educación matemática superior por su presencia en los currículos escolares actuales desde los niveles medio superior hasta el superior en carreras de ingeniería y ciencias exactas.

El objetivo es evidenciar la relevancia de la enseñanza y el aprendizaje del cálculo. Por esta razón, el grupo de trabajo pretende colaborar en la investigación sobre las problemáticas en esta rama de las matemáticas, desde el punto de vista de la matemática educativa y con el fin de promover un mayor acceso a las herramientas y el conocimiento del cálculo, a partir de las habilidades presentes y potenciales del docente y el alumno.

Además, el GTT5 busca ser un espacio tanto de discusión como de difusión de los resultados y aportaciones de investigaciones previas, por lo que se consideraron como parte de los objetivos del grupo de trabajo, las aportaciones teóricas que contribuyeron al desarrollo de la línea de investigación en la enseñanza y el aprendizaje del cálculo.

El GTT5 estableció en su convocatoria, que se aceptaban artículos que abordan las discusiones más recientes dentro de la línea de investigación en la enseñanza y aprendizaje del cálculo, así como también reportes de experiencias de implementación en la práctica en pequeña o gran escala, artículos teóricos que aportaran al desarrollo de la línea de investigación y reportes de estudios de replicación. Es decir, se ofrecía un espectro variado de aportaciones para los interesados en discutir sus ideas, la dinámica del grupo de

trabajo se basó en el envío con antelación de todas las propuestas a los participantes en el GTT5 para su lectura antes de la presentación, con el fin de tener elementos que desencadenaran la reflexión y discusión de ideas. Como segundo paso los participantes tuvieron la oportunidad de volver a enviar sus escritos para publicación, después de escuchar las observaciones, opiniones, sugerencias, reflexiones que los participantes realizaron durante las sesiones de trabajo.

Como resultado a esta convocatoria se recibieron cinco propuestas de estudiantes e investigadores de México o Colombia, cuyas temáticas se enfocan en diferentes niveles educativos, contenidos matemáticos y fundamentación teórica. Los trabajos involucraron diferentes contenidos de cálculo como el pensamiento variacional, el cálculo diferencial, la integral definida, área de regiones planas y el concepto de derivada, estas aportaciones además proponían propuestas didácticas, interpretaciones del proceso de construcción de conocimiento por parte de estudiantes y un enfoque teórico, como el Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) a través de una lección o estudio de clase.

Evidentemente estas temáticas y aproximaciones teóricas no son las únicas que se encuentran presentes en las investigaciones que desde hace años se llevan a cabo en torno a la enseñanza y aprendizaje del cálculo, sin embargo, dan una muestra de los intereses actuales de investigadores noveles y experimentados de diferentes países, dando esto cuenta de la importancia de la labor del GTT5 a través de la SOMIDEM para ser un foro de discusión y reflexión sobre este tema.

Para el Congreso SOMIDEM a desarrollarse en marzo 2025, se recibieron cinco propuestas, las cuales se encuentran en proceso de revisión por lo cual no se pueden declarar aún, pero sí se puede destacar que estas propuestas nuevamente se enfocan en el nivel medio superior y superior, lo cual muestra la relevancia del desarrollo de los conceptos del cálculo desde el nivel medio superior para crear puentes que faciliten la continuidad de este desarrollo en el nivel superior.

Como asociación la SOMIDEM es muy joven, se constituyó hace alrededor de cinco años, teniendo su primer congreso en 2023 de manera virtual y teniendo en puerta el próximo en marzo del 2025. La SOMIDEM nace como un esfuerzo al interés de investigadores adscritos a diferentes instituciones académicas o escolares, interesados en dar a conocer las aportaciones que la investigación en matemática educativa pueda ofrecer a las personas interesadas en la mejora en la calidad de la educación matemática en México.

En este esfuerzo por ser un foro que promueva el desarrollo y la consolidación de la investigación en matemática educativa, la SOMIDEM ha planteado una serie de proyectos para cumplir este objetivo: Proyecto de la

Página web, Proyecto de Alianzas con Asociaciones Nacionales e Internacionales de Educación Matemática, Proyecto de Publicaciones SOMIDEM y por último el Proyecto Charlas con Matemáticos Educativos. Todos estos proyectos de naturaleza y dinámica diferente mantienen la esencia del objetivo de la sociedad.

Un esfuerzo más que realiza la sociedad es la creación de un comité Editorial SOMIDEM, conformado por reconocidos investigadores del área, y esta editorial promueve la creación de puentes entre la teoría y la práctica con el fin de impulsar la educación matemática, hasta la fecha la editorial ha publicado tres series de libros con temáticas relevantes en educación matemática.

Como resultado de los esfuerzos continuos y visionarios del comité editorial, se ha creado a finales del 2024 la Revista Enseñanza de las Matemáticas y Experiencias Docentes, enfocada en la difusión de experiencias docentes, e intercambio de propuestas y la reflexión crítica en la enseñanza de las matemáticas, y esta revista viene a dar voz a los docentes y su práctica a través de los resultados de la matemática educativa.

Como mención aparte nos referiremos a los eventos que organiza la SOMIDEM, uno de ellos es la Escuela SOMIDEM la cual se llevó a cabo por primera vez en 2024, este espacio permitió a los investigadores ofrecer una serie de talleres y cursos en línea a las personas involucradas en la enseñanza de las matemáticas, la modalidad a distancia y la variedad de cursos y talleres que se ofrecieron en esta primera edición permitieron a los asistentes atender las temáticas de su interés, además de acercar la investigación a la práctica docente.

El principal evento de la sociedad es el Congreso SOMIDEM, en este evento se dedica un espacio especial a los Jóvenes Investigadores, para el desarrollo de conversatorios, talleres y salas de discusión sobre sus proyectos. El congreso ofrece un espacio de trabajo colectivo organizado por Grupos de Trabajo Temático (GTT), se propusieron 18 grupos con temáticas de relevancia en la matemática educativa y para el Congreso SOMIDEM 2 se mantuvieron los mismos grupos de trabajo dados los excelentes resultados que se obtuvieron con las contribuciones de estudiantes, profesores e investigadores en el primer congreso, los cuales culminaron con la publicación del libro *Perspectivas actuales de la educación matemática* (2024).

Estos proyectos y eventos brevemente descritos muestran la visión que la SOMIDEM tiene, sobre cómo aportar a la calidad de la educación en matemáticas no solamente en México, promoviendo una serie de actividades que permiten la difusión, intercambio y reflexión de ideas, experiencias y resultados de investigación. Todo esto abona a la consolidación de la matemática educativa como un referente a los desarrollos curriculares y políticas educativas.

Panorama de las principales temáticas sobre la enseñanza y aprendizaje del cálculo

Como parte también de los proyectos vertebrales de la sociedad está el dar continuidad a los más de 30 años de la publicación internacional arbitrada Revista Educación Matemática con el objetivo de difundir los resultados de las investigaciones de los miembros de la sociedad y de otros colegas de la región iberoamericana. Las aportaciones que se han publicado en esta revista ofrecen también un panorama sobre las investigaciones que se han realizado en México en los últimos 30 años. La Revista Educación Matemática ha abordado diversas temáticas relacionadas con la enseñanza y aprendizaje del cálculo a lo largo de los años. Sin pretender ser una relación completa y exhaustiva de lo publicado en sus 36 volúmenes, a continuación, se destacan algunos de los enfoques teóricos y temáticas presentes.

Perspectivas teóricas: las investigaciones publicadas se apoyan en diferentes perspectivas teóricas como lo son el EOS, Teoría Antropológica de lo Didáctico, aprendizaje significativo, resolución de problemas y visualización matemática, por mencionar algunos, lo que permite poner sus propuestas y resultados a la vista de la comunidad de matemática educativa para su discusión y retroalimentación, contribuyendo así al cuerpo de conocimiento del área.

Enfoques históricos y filosóficos

Se ha explorado la evolución histórica del cálculo y su enseñanza, enfatizando la importancia de comprender los procesos históricos en la formación de conceptos matemáticos. Por ejemplo, el artículo “La enseñanza del cálculo - una cuestión de involucramiento” de Rodrigues y Bozola (1995), el cual está presentado como notas de clase; “Interpretaciones erróneas sobre los conceptos de máximos y mínimos en el Cálculo Diferencial” (Moreno Guzmán y Cuevas Vallejo, 2004) en donde se trata de identificar los errores de concepción sobre este tema en estudiantes y profesores e “Introducción de los Conceptos Fundamentales del Cálculo Diferencial e Integral” (Wenzelburger, 1993) presentado como una propuesta didáctica que discute cómo la enseñanza del cálculo debe orientarse en la génesis histórica de la ciencia, promoviendo una formación lenta de conceptos matemáticos a través de la liberación de percepciones sensoriales y la intuición primaria.

Uso de tecnología en la enseñanza

Se han investigado métodos visuales y el uso de herramientas tecnológicas para facilitar la comprensión de conceptos de cálculo. El artículo “Recursos para el cálculo visual de integrales” (Martínez de la Rosa, 2014) presenta métodos visuales de integración que utilizan la simetría de las funciones y las funciones inversas, recuperando el concepto de subtangente para la

computación visual de áreas. La idea de tecnología no solo se centra en computadoras o software especializado de matemáticas, también hay publicaciones que rescatan el uso de las calculadoras, por ejemplo, en el estudio “Cálculo diferencial: aprendizaje cooperativo con base en las representaciones que se logran en calculadoras de tipo avanzado” (Balderas Cañas, 1995), presenta una investigación con alumnado de nivel medio superior durante un curso semestral. Guarín Amoroch y Parada Rico (2023), en “Acciones y expresiones de la comprensión del límite de una función en un punto, por estudiantes de cálculo diferencial”, presentan un estudio con el uso del software GeoGebra para buscar evidencia sobre la comprensión de los estudiantes sobre el concepto del límite de una función en un punto. Como se puede notar, el uso de la tecnología en la enseñanza y aprendizaje del cálculo es un elemento presente de manera permanente en las investigaciones ya sea como eje central o como mediador del conocimiento.

Propuestas de innovaciones didácticas

Se han propuesto enfoques alternativos para la enseñanza del cálculo, como, por ejemplo, el diseño de secuencias didácticas orientadas al descubrimiento del Teorema Fundamental del Cálculo. El artículo “Una propuesta de acercamiento alternativo al teorema fundamental del cálculo” (Robles Arredondo et al., 2014) presenta el diseño de una secuencia didáctica de tareas que promueve, mediante la utilización de ambientes interactivos, el acercamiento intuitivo y la conjetura del teorema. En muchas ocasiones las propuestas vienen acompañadas con el uso de la tecnología (Martínez de la Rosa, 2014). Si bien el panorama presentado no se refiere a investigaciones originadas directamente en el seno de la SOMIDEM, permite observar la trayectoria de uno de sus proyectos institucionales más estables: la Revista Educación Matemática. Esta publicación ha funcionado como un referente importante para quienes investigan en la enseñanza y el aprendizaje del cálculo, particularmente en lo que respecta a la formulación de problemas de investigación, la discusión de marcos teóricos y la presentación de propuestas didácticas. En este sentido, los trabajos que hoy se desarrollan en el GTT5 son pertinentes de acuerdo con investigaciones previamente publicadas en dicha revista, lo que ha favorecido una cierta continuidad temática y metodológica. Así, la revista ha servido como una fuente de consulta y como un punto de partida para quienes posteriormente se integraron al GTT5, sin que ello implique que las investigaciones del grupo dependan de esta publicación o se limiten a su orientación editorial.

Líneas futuras de GTT5

Un aspecto importante que está presente en varias investigaciones sobre la enseñanza y aprendizaje del cálculo es el papel o el uso de las TIC, hasta

este momento no se han recibido propuestas en las dos ediciones del congreso que tengan esta variable como un aspecto relevante de la investigación. Para atender esto, es necesario en la siguiente convocatoria hacer explícita la necesidad de incluir en la discusión del GTT el rol de las TIC.

En este sentido, también es importante traer a discusión el efecto que tienen o tendrán la inteligencia artificial (IA) en el área de interés del grupo y cómo esto se puede interpretar o apoyar a través de los diferentes marcos teóricos de la matemática educativa, lo cual podría dar lugar a nuevas propuestas o reformulaciones teóricas, por eso es importante promover este tipo de discusiones dentro del GTT5.

Es importante reconocer que en México desde hace 15 años se lleva a cabo el Encuentro Internacional Sobre la Enseñanza del Cálculo, Matemáticas y Ciencias (EICAL). Los primeros 10 años el énfasis fue solo sobre la enseñanza del cálculo, pero en las últimas ediciones se decidió incluir matemáticas y ciencias, por la estrecha relación que el cálculo tiene con otras áreas del conocimiento y también en atención a la necesidad de espacios de colaboración y difusión de los resultados de investigación, así como de acercar estos resultados a la práctica de los docentes. Si bien este evento nace de la inquietud de investigadores de todo México desde hace casi 20 años, a través de los cuales se fueron incorporando importantes investigadores de Francia, España, Colombia, Chile, algunos de los cuales también somos miembros de la SOMIDEM, hace falta seguir promoviendo la colaboración más estrecha entre el GTT5 y el EICAL para seguir promoviendo la calidad en la investigación, específicamente del cálculo.

Como mostramos, a pesar del corto tiempo que lleva trabajando la SOMIDEM con respecto a la SEIEM, la sociedad tiene una visión clara de cómo aportar a la consolidación de la matemática educativa desde diferentes frentes con proyectos, eventos, foros y publicaciones, siendo inclusiva a todos los actores de los procesos educativos.

Conclusiones

En toda esta panorámica de investigaciones actuales, se observa que no en pocos casos existen trabajos en los que colaboran investigadores de España y de Latinoamérica y, en concreto, también de México. Centrándonos en esa colaboración España-México, podemos destacar las colaboraciones ya existentes y fructíferas entre Edelmira Badillo, Gloria Sánchez-Matamoras y María Trigueros; entre Matías Camacho y Manuel Santos-Trigo, o entre Vicenç Font y Flor Rodríguez-Vásquez; que son una muestra del potencial que pueden tener las investigaciones compartidas entre ambos países.

En la extensión de las investigaciones mencionadas por ambas partes podemos observar la diferencia de edades en la creación de ambas sociedades, en GIDAM ya se cuenta con tres pilares fundamentales que rigen su trabajo,

pero es necesario revitalizar las dinámicas de trabajo que permitan la sinergia con otros equipos de trabajo, así como seguir fortaleciendo las temáticas que ya se trabajan, sin perder de vista las nuevas posibles temáticas en torno a la enseñanza y aprendizaje del análisis matemático.

Si bien en México hay desde hace muchos años investigaciones sobre el cálculo, dentro de la SOMIDEM se empieza a gestar un grupo de investigadores noveles en matemática educativa, interesados en aportar a la problemática y que encuentran en la dinámica de trabajo del GTT5 un espacio de interlocución enriquecedor para sus propuestas e investigaciones. Dada la forma de organización de los GTT de la SOMIDEM, en este capítulo nos hemos enfocado solo en el GTT5, ya que las temáticas relacionadas con el desarrollo del pensamiento matemático avanzado caen fuera de su alcance, que sí son estudiadas en GIDAM. Estas temáticas se encuentran en GTT13 de Razonamiento, argumentación y prueba en Educación Matemática, así como posiblemente en otros con temáticas más amplias o aplicadas.

Más allá de la diferencia en el tiempo de actividades en ambas asociaciones, en el recorrido mostrado, se puede dar cuenta de la coincidencia en temáticas de interés y de gran relevancia para la enseñanza y aprendizaje del cálculo. Definitivamente aún no tenemos todas las respuestas y si bien actualmente se pueden encontrar propuestas que aportan a la práctica docente y reflexiones que nos llevan a seguir trabajando e investigando, es necesario establecer puentes de comunicación para reconocer y conocer el trabajo realizado en ambas sociedades y seguir aportando a la matemática educativa de manera conjunta.

Referencias

- Aranda, C., & Callejo, M. L. (2017). Construcción de la función integral y razonamiento covariacional: dos estudios de casos. *BOLEMA*, 31(58), 777–798.
<http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n58a13>
- Arce, M., & Conejo, L. (2021). Características de las tareas de conversión entre representaciones de intervalos de la recta real propuestas en libros de texto. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo, & D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 141–148). SEIEM.
- Arce, M., Conejo, L., & Ortega, T. (2016). ¿Cómo son los apuntes de matemáticas de un estudiante? Influencia de los elementos matemáticos y sus relaciones. *Enseñanza de las Ciencias*, 34(1), 149–172.
<https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1706>

- Arce, M., Conejo, L., Dos Santos, C., Ortega, T., & Pecharromán, C. (2019). Concepciones del profesorado de educación secundaria sobre la demostración matemática y su enseñanza y aprendizaje. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández, & M. T. González (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: formación, práctica de aula, conocimiento y competencia profesional* (pp. 417–438). Ediciones Universidad de Salamanca.
- Arnal-Palacián, M. (2022). Infinite limit of a function at infinity and its phenomenology. *Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis | Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia*, 14, 25–41.
<https://doi.org/10.24917/20809751.14.3>
- Arnal-Palacián, M., Claros-Mellado, J., & Oller-Marcén, A. M. (2024). La noción de límite en libros de texto españoles de segunda enseñanza del siglo XIX. *Enseñanza de las Ciencias*, 42(2), 197–219.
<https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.6111>
- Arnal-Palacián, M., Claros-Mellado, J., & Sánchez-Compañía, M. T. (2020a). Límite infinito de sucesiones en libros de texto españoles: desde 1936 hasta 2019. *PNA*, 14(4), 295–322. <https://doi.org/10.30827/pna.v14i4.15143>
- Arnal-Palacián, M., Claros-Mellado, J., & Sánchez-Compañía, M. T. (2020b). Infinite limit of sequences and its phenomenology. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 15(3), em059, <https://doi.org/10.29333/iejme/8279>
- Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa, S., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). *APOS theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-1-4614-7966-6>
- Azcárate, C., Camacho-Machín, M., González, M. T., & Moreno, M. (Eds.) (2015). *Didáctica del Análisis Matemático: una revisión de las investigaciones sobre su enseñanza y aprendizaje en el contexto de la SEIEM*. SEIEM y Servicio de Publicaciones de la Universidad de La Laguna.
- Azcárate, C., Casadevall, M., Casellas, E., & Bosch, D. (1996). *Cálculo diferencial e integral*. Síntesis.
- Badillo, E., Azcárate, C., & Font, V. (2011). Análisis de los niveles de comprensión de los objetos $f'(a)$ y $f''(x)$ en profesores de matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias*, 29(2), 191–206.
- Bajo-Benito, J. M., Gavilán-Izquierdo, J. M., & Sánchez-Matamoros García, G. (2023). The concept of number sequence in graphical representations for secondary school students. *European Journal of Educational Research*, 12(1), 155–166. <https://doi.org/10.12973/eu-jer.12.1.159>
- Balderas Cañas, P. E. (1995). Cálculo diferencial: Aprendizaje cooperativo con base en las representaciones que se logran en calculadoras de tipo avanzado. *Educación Matemática*, 7(3), 136–151. <https://doi.org/10.24844/EM0703.10>

- Barreras, A., Dubarbie-Fernández, L., & Oller-Marcén, A. M. (2022). Análisis de applets de GeoGebra para la enseñanza del límite de una función. *Bordón: Revista de pedagogía*, 74(4), 65–83. <https://doi.org/10.13042/Bordon.2022.93361>
- Bermejo-Luna, M. V., & Sánchez-Matamoros, G. (2022). El esquema de derivada en la respuesta de un estudiante a tareas de cinemática: estudio de caso. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas, & J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 169–177). SEIEM.
- Blázquez, S., & Ortega, T. (2001). Los sistemas de representación en la enseñanza del límite. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME*, 4(3), 219–236.
- Borji, V., Sánchez, A., Font, V., & Garcés, W. (2021). Un estudio sobre la comprensión de los estudiantes de la derivación implícita, basado en APOE y EOS. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo, & D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 173–180). SEIEM.
- Camacho-Machín, M. (2021). Agenda de investigación para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en el nivel universitario. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo, & D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 33–48). SEIEM.
- Claros, F. J., Sánchez, M. T., & Coriat, M. (2007). Fenómenos que organizan el límite. *PNA*, 1(3), 125–137.
- Claros, F. J., Sánchez, M. T., & Coriat, M. (2016). Tratamiento del límite finito en libros de texto españoles de secundaria: 1933–2005. *Educación Matemática*, 28(1), 125–152. <https://doi.org/10.24844/EM2801.05>
- Conejo, L., & Ortega, T. (2014). Las demostraciones de los teoremas de continuidad en los libros de texto para alumnos de 17–18 años correspondientes a las tres últimas leyes educativas españolas. *Números*, 87, 5–23.
- Conejo, L., Arce, M., & Ortega, T. (2015). Análisis de las justificaciones de los teoremas de derivabilidad en los libros de texto desde la Ley General de Educación. *AIEM - Avances de Investigación en Educación Matemática*, 8, 51–71. <https://doi.org/10.35763/aiem.v1i8.117>
- Dolores-Flores, C., & García-García, J. (2017). Conexiones intramatemáticas y extramatemáticas que se producen al resolver problemas de cálculo en contexto: Un estudio de casos en el nivel superior. *BOLEMA*, 31(57), 158–180. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a08>
- Dubarbie-Fernández, L., Barreras, Á., & Oller-Marcén, A. M. (2025). El uso de GeoGebra en la enseñanza de conceptos matemáticos: prácticas, barreras y percepciones docentes. *Revista Latinoamericana de Tecnología Educativa-RELATEC*, 24(1), 77–100. <https://doi.org/10.17398/1695-288X.24.1.77>
- Duval, R. (2017). *Understanding the Mathematical Way of Thinking – The Registers of Semiotic Representations*. Springer. <https://doi.org/qh8d>

- Esteve-Blasco, M., González-Astudillo, M. T., & Fuertes-Prieto, M. A. (2024). Sumas y diferencias de leibniz: antesala de la integral. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent, & C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 580). SEIEM.
- Fernández, C., Moreno, M., & Sánchez-Matamoros, G. (2024). Prospective secondary teachers' noticing of students' thinking about the limit concept: pathways of development. *ZDM Mathematics Education*, 56, 1137–1151. <https://doi.org/10.1007/s11858-024-01573-z>
- Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G., Moreno, M., & Callejo, M. L. (2018). La coordinación de las aproximaciones en la comprensión del concepto de límite cuando los estudiantes para profesor anticipan respuestas de estudiantes. *Enseñanza de las Ciencias*, 36(1), 143–162. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2291>
- Fernández-León, A., & Gavilán-Izquierdo, J. M. (2022). Caracterizando la práctica matemática de demostrar de una investigadora en matemáticas. *BOLEMA*, 36(74), 1215–1235. <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n74a13>
- Fernández-León, A., Gavilán-Izquierdo, J. M., & Toscano, R. (2021). A case study of the practices of conjecturing and proving of research mathematicians. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 52(5), 767–781. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1717658>
- Fernández-Plaza, J. A., Ruiz-Hidalgo, J. F., & Rico, L. (2015). Razonamientos basados en el concepto de límite finito de una función en un punto. *Enseñanza de las Ciencias*, 33(2), 211–229. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1575>
- Fernández-Plaza, J. A., Ruiz-Hidalgo, J. F., Rico, L., & Castro, E. (2013). Definiciones personales y aspectos estructurales del concepto de límite finito de una función en un punto. *PNA*, 7(3), 117–131. <https://doi.org/qh8g>
- Font, V., Trigueros, M., Badillo, E., & Rubio, N. (2016). Mathematical objects through the lens of two different theoretical perspectives: APOS and OSA. *Educational Studies in Mathematics*, 91, 107–122. <https://doi.org/10.1007/s10649-015-9639-6>
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematics Structures*. Springer. <https://doi.org/10.1007/0-306-47235-X>
- Fuentealba, C., Badillo, E., & Sánchez-Matamoros, G. (2019). Identificación y caracterización de los subniveles de desarrollo del esquema de derivada. *Enseñanza de las Ciencias*, 37(2), 63–84. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2518>
- Fuentealba, C., Trigueros, M., Sánchez-Matamoros, G., & Badillo, E. (2022). Los mecanismos de asimilación y acomodación en la tematización de un Esquema de derivada. *AIEM - Avances de Investigación en Educación Matemática*, 21, 23–44. <https://doi.org/10.35763/aiem21.4241>

- Galindo-Illanes, M., & Breda, A. (2022). El tratamiento de la derivada en el plan de estudios de ingeniería comercial en Chile. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas, & J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 285–293). SEIEM.
- Galindo Illanes, M. K., Breda, A., Chamorro Manríquez, D. D., & Alvarado Martínez, H. A. (2022). Analysis of a teaching learning process of the derivative with the use of ICT oriented to engineering students in Chile. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 18(7), em2130. <https://doi.org/10.29333/ejmste/12162>
- Gavilán-Izquierdo, J. M., & Fernández-León, A. (2023). Caracterizando cómo conjeturan los investigadores en matemáticas: un estudio de caso. *AIEM – Avances de Investigación en Educación Matemática*, 24, 21–37. <https://doi.org/10.35763/aiem24.4223>
- Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM Mathematics Education*, 39, 127–135. <https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1>
- González-Flores, Y., Montoro-Medina, A. B., & Ruiz-Hidalgo, J. F. (2021). Análisis de las definiciones de límite que brindan estudiantes universitarios. *Uniciencia*, 35(2), 271–290. <http://dx.doi.org/10.15359/ru.35-2.18>
- González-Flores, Y., Montoro-Medina, A. B., & Ruiz-Hidalgo, J. F. (2024). Significado del límite expresado por estudiantes universitarios. *Educación Matemática*, 36(3), 242–272. <https://doi.org/10.24844/EM3603.09>
- Guarin Amoroch, S. A., & Parada Rico, S. E. (2023). Acciones y expresiones de la comprensión del límite de una función en un punto, por estudiantes de cálculo diferencial. *Educación Matemática*, 35(1), 197–228. <https://doi.org/10.24844/EM3501.08>
- Inglada, N., Breda, A., & Sala-Sebastià, G. (2023). Una pauta especializada para reflexionar sobre la enseñanza de las funciones en secundaria. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo, & P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 291–298). SEIEM.
- Jacobs, V. R., Lamb, L. L., & Philipp, R. A. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, 41(2), 169–202. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.41.2.0169>
- Lillo, E., Moreno, M., Orts, A., & Llinares, S. (2023). Comprensión de la gráfica de la función derivada: de proceso a objeto. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo, & P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 323–330). SEIEM.
- Llinares, S., Fernández, C., & Sánchez-Matamoros, G. (2016). Changes in How Prospective Teachers Anticipate Secondary Students' Answers. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 12(8), 2155–2170. <https://doi.org/10.12973/eurasia.2016.1295a>

- Martín-Barcala, A., & González-Astudillo, M. T. (2019). Errores de los estudiantes de secundaria en torno al concepto de logaritmo. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano, & Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (p. 629). SEIEM.
- Martínez de la Rosa, F. (2014). Recursos para el cálculo visual de integrales. *Educación Matemática*, 26(1), 153–169. <https://doi.org/10.24844/EM2601.06>
- Ministerio de Educación y Formación Profesional [MEFP]. (2022). *Real Decreto 243/2022, de 5 de abril, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas del Bachillerato*. MEFP.
- Milanesio, B., & Burgos, M. (2024). El rol de la demostración en la enseñanza de la continuidad en segundo de bachillerato. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent, & C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 345–352). SEIEM.
- Milanesio, B., & Markiewicz, M. E. (2023). La complejidad semiótica de una demostración por inducción matemática. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo, & P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 363–370). SEIEM.
- Moreno Guzmán, S., & Cuevas Vallejo, C. A. (2004). Interpretaciones erróneas sobre los conceptos de máximos y mínimos en el Cálculo Diferencial. *Educación Matemática*, 16(2), 93–104. <https://doi.org/10.24844/EM1602.05>
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for School Mathematics*. NCTM.
- Ortega, T., & Porres-Tomé, M. (2016). El dinamismo de la finitud en el caso de la integral definida: ¿Cómo facilitar la comprensión? En L. Rico, M. Cañadas, A. Marín, & M. T. Sánchez (Eds.), *Investigaciones en Didáctica de la Matemática: homenaje a Moisés Coriat* (pp. 209–218). Comares.
- Ortega, T., & Sierra, M. (1998). El concepto de derivada: algunas indicaciones para su enseñanza. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, 32, 87–115.
- Orts, A., Llinares, S., & Boigues, F. J. (2018). Trayectorias de aprendizaje del concepto de recta tangente en alumnos de Bachillerato. *Enseñanza de las Ciencias*, 36(3), 121–140. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2252>
- Pérez-Montilla, A., & Arnal-Palacián, M. (2023). An Approach to the Teacher Educator's Pedagogical Content Knowledge for the Development of Professional Noticing in Pre-Service Teacher Education. *Education Sciences*, 13(6), 544. <https://doi.org/10.3390/educsci13060544>
- Przenioslo, M. (2004). Images of the limit of function formed in the course of mathematical studies at the university. *Educational Studies in Mathematics*, 55(1), 103–132.
- Rasmussen, C., Zandieh, M., King, K., & Teppo, A. (2005). Advancing mathematical activity: A practice-oriented view of advanced mathematical thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, 7(1), 51–73. <https://doi.org/dxs3n5>

- Rico, L., Lupiáñez, J. L., & Molina, M. (Eds.) (2013). *Análisis didáctico en Educación Matemática. Metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular*. Comares.
- Robles Arredondo, M. G., Tellechea Armenta, E., & Font Moll, V. (2014). Una propuesta de acercamiento alternativa al teorema fundamental del cálculo. *Educación Matemática*, 26(2), 69–109. <https://doi.org/10.24844/EM2602.03>
- Rodrigues, S., & Bozola, M. A. (1995). La enseñanza del Cálculo – una cuestión de involucramiento. *Educación Matemática*, 7(1), 100–107. <https://doi.org/qh8k>
- Rodríguez-Nieto, C. A., Font, V., Rodríguez-Vásquez, F. M., & Pino-Fan, L. R. (2023). Onto-semiotic analysis of one teacher's and university students' mathematical connections when problem-solving about launching a projectile. *Journal on Mathematics Education*, 14(3), 563–584. <https://doi.org/qh8m>
- Rodríguez-Nieto, C. A., Rodríguez-Vásquez, F. M., & Font, V. (2023b). Combined use of the extended theory of connections and the onto-semiotic approach to analyze mathematical connections by relating the graphs of f and f' . *Educational Studies in Mathematics*, 114, 63–88. <https://doi.org/gS4wcm>
- Sánchez Aguilar, M., García González, M. del S., & Castañeda, A. (Eds.) (2024). *Perspectivas actuales de la Educación Matemática*. Editorial SOMIDEM. <https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S3/2024/01>
- Sánchez-Matamoros, G., & García, M. (2015). Investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje del concepto de derivada. En C. Azcárate, M. Camacho-Machín, M. T. González, & M. Moreno (Eds.), *Didáctica del Análisis Matemático: una revisión de las investigaciones sobre su enseñanza y aprendizaje en el contexto de la SEIEM* (pp. 97–108). SEIEM y Servicio de Publicaciones de la Universidad de La Laguna.
- Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C., & Llinares, S. (2019). Relationships among prospective secondary mathematics teachers' skills of attending, interpreting and responding to students' understanding. *Educational Studies in Mathematics*, 100, 83–99. <https://doi.org/10.1007/s10649-018-9855-y>
- Sánchez-Matamoros, G., García, M., & Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la Matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME*, 11(2), 267–296.
- Santos-Trigo, M., Camacho-Machín, M., & Barrera-Mora, F. (2024). Focusing on foundational Calculus ideas to understand the derivative concept via problem-solving tasks that involve the use of a Dynamic Geometry System. *ZDM Mathematics Education*, 56, 1287–1301. <https://doi.org/nzj7>
- Sierra, M., González-Astudillo, M. T., & López-Esteban, M. C. (1999). Evolución histórica del concepto de “límite funcional” en los libros de texto de Bachillerato y Curso de Orientación Universitaria (COU): 1940-1995. *Enseñanza de las Ciencias*, 17(3), 463–476.

- Sierra, M., González-Astudillo, M. T., & López, C. (2000). Concepciones de los alumnos de bachillerato y curso de orientación universitaria sobre límite funcional y continuidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME*, 3(1), 71–85.
- Skemp, R. (1978). Relational understanding and instrumental understanding. *The Arithmetic Teacher*, 26(3), 9–15.
- Suárez-Rodríguez, M., & Sacristán Rock, A. I. (2022). Actividades para aprender sobre densidad numérica: una trayectoria hipotética con estudiantes de bachillerato. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas, & J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (p. 633). SEIEM.
- Suárez-Rodríguez, M., & Figueras, O. (2022). Una secuencia didáctica para aprender y comprender sobre densidad numérica: Un estudio con profesores en formación. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas, & J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (p. 634). SEIEM.
- Tall, D. (1991). *Advanced Mathematical Thinking*. Springer.
- Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 151–169.
- Trigueros, M., Badillo, E., Sánchez-Matamoros, G., & Hernández-Rebollar, L. A. (2024). Contributions to the characterization of the Schema using APOS theory: Graphing with derivative. *ZDM Mathematics Education*, 56, 1093–1108. <https://doi.org/10.1007/s11858-024-01615-6>
- Vargas, M. F., Fernández-Plaza, J. A., & Ruiz-Hidalgo, J. F. (2020a). La derivada en los libros de texto de 1º de Bachillerato: Un análisis a las tareas propuestas. *AIEM - Avances de Investigación en Educación Matemática*, 18, 87–102. <https://doi.org/10.35763/aiem.v0i18.288>
- Vargas, M. F., Fernández-Plaza, J. A., & Ruiz-Hidalgo, J. F. (2020b). Significado de derivada en las tareas de los libros de 1º de Bachillerato. *BOLEMA*, 34(68), 911–933. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v34n68a04>
- Vargas, M. F., Fernández-Plaza, J. A., & Ruiz-Hidalgo, J. F. (2020c). Análisis de los argumentos dados por docentes en formación a una tarea sobre derivadas. *PNA*, 14(3), 173–203. <https://doi.org/10.30827/pna.v14i3.12229>
- Vargas, M. F., Fernández-Plaza, J. A., & Ruiz-Hidalgo, J. F. (2023a). Pre-service teachers' understanding of the derivative of a function at a point. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 54(4), 483–510. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1957504>
- Vargas, M. F., Fernández-Plaza, J. A., & Ruiz-Hidalgo, J. F. (2023b). Tareas propuestas por futuros docentes sobre el concepto de función. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo, & P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 539–546). SEIEM.

Wenzelburger, E. (1993). Introducción de los Conceptos Fundamentales del Cálculo Diferencial e Integral - Una Propuesta Didáctica. *Educación Matemática*, 5(3), 93–123. <https://doi.org/10.24844/EM0503.06>

Tendencias y desafíos acerca del desarrollo del pensamiento numérico y algebraico: un diálogo entre SEIEM y SOMIDEM

Trends and Challenges in the Development of Numerical and Algebraic Thinking: A Dialogue between SEIEM and SOMIDEM

Cristina Ayala-Altamirano ¹ 

Carlos Valenzuela ² 

Alicia Bruno ³ 

Olimpia Figueras ⁴ 

Rafael Ramírez ⁵ 

Resumen

En el capítulo se describe un análisis de la producción científica sobre la enseñanza y el aprendizaje de la aritmética y el álgebra desarrollada por dos grupos de investigación: el grupo Pensamiento Numérico y Algebraico (PNA) de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM) y el Grupo de Trabajo de Didáctica de la Aritmética y del Álgebra (GTT4) de la Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática (SOMIDEM). Se revisan las contribuciones del grupo PNA presentadas en los últimos cinco simposios de la SEIEM, así como la producción relacionada con la temática del GTT4 publicada en los últimos cinco años en la revista Educación Matemática y en las actas del primer congreso de dicha sociedad. En ambos contextos, la revisión ha llevado a identificar tendencias actuales y marcos teóricos y metodológicos empleados. Se reconocen desafíos de investigación y de práctica educativa para continuar y promover colaboraciones entre miembros de ambas sociedades.

¹ cristina.ayala@uma.es

Universidad de Málaga (SEIEM)

² carlos.valenzuela@academicos.udg.mx

Universidad de Guadalajara (SOMIDEM)

³ abruno@ull.edu.es

Universidad de la Laguna (SEIEM)

⁴ figueras@cinvestav.mx

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN (SOMIDEM)

⁵ rramirez@ugr.es

Universidad de Granada (SEIEM)

Palabras clave

Pensamiento algebraico, pensamiento numérico, didáctica de la aritmética, didáctica del álgebra.

Abstract

The chapter describes an analysis of the scientific production on the teaching and learning of arithmetic and algebra developed by two research groups: the 'Thinking Numerical and Algebraic Thinking' (PNA) group of the Spanish Society for Research in Mathematical Education (SEIEM) and the Working Group on the Didactics of Arithmetic and Algebra (GTT4) of the Society for Research and Dissemination of Mathematical Education (SOMIDEM). The contributions of the PNA group presented at the last five symposia of the SEIEM are reviewed, as well as the production related to the GTT4 theme published in the last five years in the journal *Educación Matemática* and in the proceedings of the first congress of this society. In both contexts, the review has led to the identification of current trends and the theoretical and methodological frameworks used. Challenges of research and educational practice are recognized to continue and promote future collaborations between members of both societies.

Keywords

Algebraic thinking, numerical thinking, didactics of arithmetic, didactics of algebra.

Introducción

La problemática en torno a la didáctica de la aritmética y del álgebra ha sido un tema central desde los inicios de la Educación Matemática como disciplina científica. Tanto en México como en España, y de manera conjunta, se han llevado a cabo estudios relevantes que han impulsado la creación y consolidación de grupos y líneas de investigación sobre esas temáticas en ambos países. Por ejemplo, un referente importante sobre la didáctica del álgebra son los estudios de Filloy et al. (2008) publicados en el libro *Educational Algebra: A Theoretical and Empirical Approach*. Sobre la aritmética de las fracciones puede consultarse el artículo de Real et al. (2013). Ambos son fruto de la colaboración entre académicos mexicanos y españoles.

Como resultado de los esfuerzos e intereses de investigadoras e investigadores, en numerosos congresos se ha reservado consistentemente un espacio para la discusión de estudios sobre la enseñanza y aprendizaje de la aritmética y del álgebra. En España, como parte de los simposios de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), se formó el grupo Pensamiento Numérico y Algebraico (PNA). En México, en el marco del congreso de la Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática (SOMIDEM), recientemente, se ha constituido el Grupo de Trabajo de Didáctica de la Aritmética y del Álgebra (GTT4); sobre esta temática se han estado realizando numerosas investigaciones. El

propósito de este capítulo es mostrar una visión global de la producción científica desarrollada en los últimos cinco años por los miembros de los grupos de la SEIEM y de la SOMIDEM.

Dadas las particularidades de cada agrupación, se adoptaron enfoques diferenciados para analizar su producción científica reciente. En el caso del GTT4, se consideraron artículos, ya que buena parte de sus investigaciones no se ha difundido en actas de congresos. En cambio, para el grupo PNA, estas actas resultaron una fuente suficiente, aunque más limitada en detalle. Esta estrategia busca reconocer las contribuciones de ambos grupos considerando tanto sus trayectorias como los formatos predominantes de difusión científica en cada contexto. Además, las investigaciones analizadas responden a necesidades propias de los sistemas educativos de México y España, y se interpretan desde tradiciones académicas distintas. Mientras en España se habla de “pensamiento numérico” y “pensamiento algebraico”, en México se utiliza “didáctica de la aritmética” y “didáctica del álgebra”. A pesar de estas diferencias terminológicas, el propósito común es identificar temas compartidos que permitan consolidar redes de colaboración científica.

En este capítulo, en primer lugar, quienes escribieron la parte correspondiente a cada sociedad exponen el análisis de los textos en su propio entorno, resaltando las problemáticas estudiadas, los contextos en los que se desarrollan las investigaciones y los marcos teóricos y metodológicos empleados. A partir de esos resultados, en el apartado final se exploran las similitudes y diferencias entre los enfoques adoptados en ambos países, destacando las contribuciones de cada grupo a la enseñanza y al aprendizaje de la aritmética y del álgebra.

Investigaciones en el contexto del grupo PNA

Desde su inicio, en el grupo de investigación PNA de la SEIEM se han desarrollado estudios centrados en estructuras numéricas y relaciones algebraicas, consideradas fundamentos esenciales de las matemáticas y el lenguaje matemático (Lupiáñez, 2015). Parte de la trayectoria del grupo ha sido expuesta en los simposios sobre Investigación en Educación Matemática organizados por la SEIEM. En ellos, se ha mostrado la investigación desarrollada en España en el ámbito numérico y algebraico en las últimas décadas (Bosch et al., 2024; Cañadas, 2023; Lupiáñez, 2015).

Se amplía a continuación esta información con un análisis de la producción científica que las personas integrantes del grupo PNA han publicado en los últimos cinco simposios (desde 2019 hasta 2024). De estas personas, se identificaron en las actas 83 comunicaciones y 65 pósteres. Tal como se muestra en la Tabla 1, la clasificación y el análisis de estos estudios permitió identificar tres líneas principales de investigación: pensamiento numérico, pensamiento algebraico y la resolución de problemas. Estas líneas tratan

aspectos como la enseñanza y el aprendizaje de contenidos curriculares en distintos niveles educativos, la formación docente, la atención a estudiantes con necesidades educativas especiales, así como el análisis de textos escolares y currículos educativos.

Tabla 1
Categorías analizadas según el foco y el nivel en que se sitúa la investigación

Categorías de análisis	Foco y el nivel en que se sitúa la investigación								Total de trabajos
	Infantil	Infantil y primaria	Primaria	Primaria y Secundaria	Secundaria	Universidad	Textos escolares	Otros	
Números	4	0	14	1	15	15	1	2	52
Álgebra	11	2	19	2	2	11	2	3	52
Problemas	0	0	18	1	4	17	0	4	44
Total	15	2	51	4	21	43	3	9	148

Este apartado se divide en tres secciones correspondientes a las líneas de investigación mencionadas. En cada sección se incluyen ejemplos seleccionados de manera intencionada con el propósito de reflejar la diversidad de niveles educativos, diferentes subtemáticas y grupos de investigación participantes. Para quienes deseen profundizar en las temáticas tratadas, se recomienda la consulta de los estudios y publicaciones desarrollados en el marco de la SEIEM durante el periodo considerado.

Pensamiento numérico

Las investigaciones sobre el pensamiento numérico abarcan diversas temáticas, entre ellas el aprendizaje numérico temprano, conceptos asociados a decimales y fracciones (densidad y orden) y sentido numérico en términos generales. Hay pocos estudios sobre los números enteros y reales.

Los estudios sobre aprendizaje numérico temprano se sitúan en la adquisición del concepto de número natural en la etapa infantil (3 a 6 años) y primaria (6 a 12 años). García-Triana et al. (2024) analizaron las representaciones escritas de la descomposición aditiva de un número, producidas por estudiantes de 4 y 5 años a lo largo de varios años en talleres matemáticos. Concluyeron que la mayoría de los niños y niñas lograron expresar dicha descomposición, incluso de varias formas. Utilizando el “modelo MTSK”, se ha examinado el conocimiento especializado que moviliza una profesora de Educación Infantil cuando trabaja la descomposición aditiva del número 6 desde la flexibilidad representacional. Se observa en el estudio cómo la docente moviliza conocimiento didáctico del contenido ligado a su cono-

cimiento profundo de la matemática elemental al contextualizar la descomposición con problemas aritméticos verbales y usar diferentes registros de representación facilitando constantemente las conversiones entre ellos (Muñoz-Catalán et al., 2023). Por otro lado, Olmos-Martínez y Alsina (2024) investigaron los cambios en las habilidades docentes tras un proceso de formación continua, evidenciando modificaciones en las prácticas relacionadas con el aprendizaje numérico en la educación infantil.

En cuanto a la enseñanza de los números naturales, Rodríguez et al. (2019) analizaron su introducción en la etapa primaria, poniendo énfasis en el papel del número cero, a partir de los procesos de conteo y de secuencias de actividades basadas en el modelo de von Neumann. La operatoria con números naturales ha recibido menor atención en la investigación, aunque García et al. (2024) han examinado el tratamiento de la multiplicación en los libros de texto de España y Japón, siguiendo la “Teoría Antropológica de lo Didáctico”, mostrando la existencia de dos paradigmas didácticos vigentes sustentados en modelos epistemológicos diferentes y fines educativos distintos. Por ejemplo, en ambos países lo aritmético aparece ligado a sistemas de cantidades de magnitudes discretas. En otro orden, en España se mantienen los significados aditivos y se promueve una identificación de la multiplicación con la suma, mientras que en Japón se promueve que los estudiantes establezcan una nueva relación en la que cada número tiene un significado diferente (unidades por grupo, número de grupos).

Los números racionales han sido abordados en diversos niveles educativos, desde primaria hasta la formación de futuros docentes. González-Forte et al. (2021) identificaron dificultades que enfrentan estudiantes de primaria y secundaria relacionadas con la densidad de los números racionales, evidenciando la prevalencia del sesgo del número natural, lo que sugiere que muchos estudiantes perciben al conjunto de los racionales como discreto, de manera similar a los números naturales.

Las investigaciones sobre las fracciones agrupan el mayor número de estudios en primaria (6 a 12 años), secundaria (12 a 16 años) y futuros docentes. Ángel et al. (2022) aplicaron una herramienta teórica basada en una red de conceptos para caracterizar problemas multiplicativos con fracciones en materiales curriculares docentes de Telesecundaria (modalidad de la educación secundaria en México). González-Forte et al. (2019) identificaron errores en la ordenación de fracciones por parte del estudiantado, atribuidos al uso inadecuado del conocimiento sobre los números naturales o al pensamiento en diferencias (basado en las diferencias entre numeradores y denominadores). Desde un punto de vista de los docentes, tomando como marco teórico la “Mirada Profesional”, González-Forte y Planas (2024) estudiaron las prácticas matemáticas lingüísticas de futuros docentes, relativas a la enseñanza de la comparación de fracciones. Con el mismo marco teórico,

Zorrilla et al. (2024) investigaron con futuros docentes de primaria, cómo analizar una secuencia de actividades sobre fracciones en un libro de texto y qué aspectos consideran en el diseño de sus actividades sobre esta temática. Cid-Cid et al. (2024) exploraron los procesos que siguen futuras docentes de primaria para comparar fracciones propias y para reflexionar sobre la idea de equivalencia de fracciones. Para ello, tomaron como marco el uso de la “flexibilidad procedimental” y la “flexibilidad representacional”. Por su parte, Fernández-Plaza et al. (2019) analizaron las formas en las cuales futuros docentes de primaria identifican errores sobre el concepto de fracción.

Diversos estudios realizados en el ámbito de la SEIEM se sitúan en la línea del sentido numérico, utilizando sus componentes, los cuales se han indicado en la literatura internacional. El foco de estos trabajos per se, no fue, por lo tanto, un conjunto numérico determinado, sino cómo se manifiesta el sentido numérico. Jiménez-Rubiano et al. (2024) presentaron un estudio teórico sobre los componentes del sentido numérico y la transición de un sistema numérico a otro. Se concluye que el sentido numérico no solo es un conjunto de habilidades dentro de un sistema relacional, sino la capacidad de utilizar las propiedades para interpretar, manipular y representar en otro sistema. El uso de los diferentes componentes del sentido numérico y las dificultades en su aplicación han sido estudiados con alumnado de primaria (Adamuz-Povedano, 2019) y de secundaria (Bruno & Almeida, 2023; Fariña y Bruno, 2021; Garrido et al., 2022). La estimación de cantidades se ha abordado con futuros docentes de primaria en el estudio de Montejo-Gámez et al. (2023).

Finalmente, la revisión de investigaciones sobre sentido numérico en educación primaria presentada por Adamuz-Povedano (2023) destaca que la mayor parte de los estudios se ha centrado en medir el sentido numérico manifestado por los estudiantes para vincularlo con el rendimiento académico o con posibles dificultades posteriores en matemáticas. En la revisión llevada a cabo se observó que se ha prestado menos atención a la implementación de estrategias para fortalecer el sentido numérico en el aula, lo que sugiere la necesidad de nuevas líneas de investigación en este ámbito.

Pensamiento algebraico

En la producción científica relacionada con el pensamiento algebraico se consideran distintos enfoques que reconocen la multidimensionalidad del álgebra escolar, e incluyen aspectos como patrones, aritmética generalizada, funciones, igualdades, desigualdades, ecuaciones e inecuaciones (Cañadas, 2023). El análisis de las actas de la SEIEM de los últimos años indica que la mayoría de las indagaciones se centran en el pensamiento funcional, seguido de estudios sobre patrones y, en menor proporción, sobre ecuaciones e inecuaciones. Además, se ha identificado un grupo adicional de trabajos que

versan sobre intereses algebraicos variados. Para profundizar en el análisis e identificar las temáticas consideradas en las investigaciones sobre pensamiento algebraico se tomó como referencia la revisión de Narváez et al. (2023). Este estudio examinó la producción científica sobre pensamiento algebraico en educación infantil y primaria desde 1981 hasta 2021 en la base de datos de Scopus, en el contexto internacional conocido como *early algebra*. Dentro de este marco, en esta revisión se distinguen temáticas relacionadas con la generalización, las estrategias empleadas y las representaciones utilizadas en tareas diseñadas para fomentar el pensamiento algebraico.

La temática asociada al pensamiento funcional en las primeras etapas de educación ha sido objeto de estudio en numerosos trabajos recientes, impulsados por un grupo de investigación interuniversitario que ha presentado resultados de alumnado de diversos cursos, utilizando como metodología los “experimentos de enseñanza”. En el ámbito de la educación infantil, en las investigaciones se ha indagado en las estrategias para identificar y generalizar la relación funcional, las estructuras, así como las representaciones utilizadas y las tareas que involucran funciones de forma directa e inversa (Anglada et al., 2022). Entre los hallazgos más relevantes se destaca que el contexto y la manera en que se presentaron las tareas facilitaron, por ejemplo, la identificación de distintas estructuras asociadas a la relación funcional implicada y formas de manejar tablas representadas de modo manipulativo. En educación primaria, el mismo grupo de investigación ha presentado estudios relativos a estrategias, estructuras, representaciones, mediaciones, centrándose en el uso de tablas y gráficos (Pérez-Martos et al., 2023) y en el papel de las justificaciones (Ayala-Altamirano & Molina, 2019). Los resultados destacan que, aunque tradicionalmente el álgebra se estudia a partir de secundaria, con un diseño apropiado el alumnado de primaria puede generalizar relaciones funcionales, representarlas de distintos modos —lo que incluye representaciones personales y convencionales, tales como el uso de lenguaje alfanumérico, tablas o gráficos— y justificar sus respuestas razonando sobre las generalidades. Otros trabajos han abordado la generalización en la transición de la educación primaria a la educación secundaria (Ureña et al., 2021), así como en niveles superiores. También se ha investigado acerca del conocimiento didáctico, el sentido estructural o las concepciones de futuros docentes sobre aspectos funcionales asociados a las funciones cuadráticas, las derivadas, integrales, límites o continuidad. En cuanto a líneas de investigación futuras se observa la necesidad de explorar los distintos contextos y el diseño de tareas apropiadas para cada nivel educativo.

En lo relativo a patrones, son mayoritarios los estudios en educación infantil (Acosta et al., 2023). En los estudios realizados por estos autores citados, basándose en el “Enfoque de los Itinerarios de Enseñanza de las Matemáticas (EIAM)”, se han descrito diversas experiencias que relacionan

patrones de repetición con el pensamiento funcional, la representación, los recursos manipulativos, el contexto de enseñanza e incluso el pensamiento computacional. Por ejemplo, concluyen que el diseño de actividades en las que se usan robots programables simples contribuye a la comprensión de conceptos matemáticos abstractos y al reconocimiento de patrones; coexistiendo de manera fusionada el pensamiento algebraico y el computacional. En educación primaria, los investigadores han analizado las finalidades de las tareas de patrones, la iniciación al pensamiento computacional y las estrategias en la resolución de problemas (Arbona et al., 2021; Ayala-Altamirano et al., 2024). También se ha evidenciado el interés por explorar el estudio de patrones en experiencias llevadas a cabo con alumnado con autismo (Santágueda-Villanueva et al., 2019).

Si bien la mayoría de los estudios sobre ecuaciones se han centrado en la educación secundaria, en los últimos años se ha observado un interés creciente por su introducción en educación primaria impulsado por cambios curriculares en España. Este giro en la investigación resalta la importancia de la enseñanza temprana de ecuaciones e inecuaciones, tanto en la formación de los estudiantes más jóvenes como en la formación de futuros docentes. En las actas de la SEIEM, los trabajos sobre ecuaciones se concentran principalmente en educación secundaria, en los cuales se analizan dificultades y estrategias para la resolución de problemas. En menor medida, se abordan el conocimiento especializado de futuros docentes y el tratamiento de ecuaciones en libros de texto desde una perspectiva histórica. En educación primaria, López et al. (2021) investigaron, con alumnado de educación básica, recién iniciados en la resolución de ecuaciones lineales básicas, la comprensión conceptual y semántica. Los resultados de su estudio sugieren que, desde esta etapa, el alumnado puede afrontar tareas algebraicas que involucran ecuaciones, tanto de forma implícita como explícita. Esta capacidad, a su vez, contribuye a la estimulación y el enriquecimiento de su pensamiento matemático. En una línea similar, Pacheco et al. (2024) mostraron una experiencia sobre resolución de tareas de inecuaciones, analizando los significados atribuidos a estas expresiones y las estrategias utilizadas por estudiantes de primaria. Finalmente, el papel de la formación docente en la enseñanza del álgebra sigue siendo un área poco explorada. Pincheira et al. (2023) describieron el conocimiento del profesorado para promover el pensamiento algebraico en educación infantil, sin embargo, aún es necesario explorar más el impacto de la formación específica de futuros docentes de primaria en la enseñanza del álgebra.

Resolución de problemas numéricos y algebraicos

Las publicaciones en las actas de los simposios de la SEIEM vinculadas a la resolución de problemas numéricos y algebraicos se centran principalmente

en dos áreas de interés: procesos de resolución de problemas y formulación o invención de problemas.

La competencia de resolución de problemas es esencial en la actividad matemática. En gran parte de los estudios realizados en este campo se analizan los procedimientos empleados por estudiantes de educación primaria al resolver problemas aritméticos de enunciado verbal. Zorrilla et al. (2023) describieron cómo cambian los procesos (estrategias y representaciones) de estudiantes de sexto de primaria cuando resuelven problemas de estructura multiplicativa con fracciones. La propuesta de instrucción se basó en la “enseñanza con variación”. Los resultados indican que el diseño contribuyó a que algunos estudiantes superaran dificultades, lo que facilitó la transición de estrategias incorrectas a estrategias informales válidas y permitió la identificación de la operación formal que resuelve el problema. Los hallazgos sugieren que la transición de los números naturales a las fracciones presenta dificultades. No obstante, el diseño de la instrucción favoreció la adaptación de estrategias empleadas en el contexto de los números naturales para aplicarlas en problemas similares que involucran fracciones o ajustar estrategias según los distintos tipos de fracciones.

El lenguaje y la comprensión lectora están estrechamente ligados con la competencia de resolución de problemas, lo que ha llevado a analizar la capacidad para identificar y nombrar los elementos que conforman un problema, tales como las cantidades conocidas y desconocidas. Para profundizar en esto, en diversos trabajos se muestran los efectos de emplear el sistema tutorial inteligente HINTS para la resolución aritmética y algebraica de los problemas. Se ha demostrado que los estudiantes tienen una visión favorable de la herramienta, destacando la retroalimentación continua que ofrece al resolutor (Tirado-Olivares et al., 2021). Por ejemplo, Del Olmo-Muñoz et al. (2022) evaluaron la aplicación de HINTS con estudiantes de 5.º y 6.º de primaria dentro de una secuencia didáctica basada en la “flexibilidad intratarea” (ofrecer múltiples soluciones para un mismo problema). Los resultados evidenciaron mejoras en la competencia de resolución de problemas verbales y una percepción favorable de la herramienta, aunque los estudiantes la consideraron menos atractiva en comparación con otros enfoques de enseñanza.

En el ámbito de la educación secundaria, los estudios sobre resolución de problemas de proporcionalidad numérica destacan la necesidad de promover estrategias más allá del uso de algoritmos, enfatizando la importancia de múltiples representaciones en el proceso de solución (Porrás et al., 2021). Martínez-Juste et al. (2019) analizaron respuestas de alumnos a problemas de reparto inversamente proporcionales. En el estudio se promovió la aparición de estrategias iniciales por parte del alumnado, las cuales pueden formalizarse como técnicas de resolución generales.

Una línea de investigación que ha cobrado relevancia es aquella que se centra en estudiantes con dificultades de aprendizaje matemático que requieren atención a necesidades educativas especiales. Recientemente, en la SEIEM se creó el grupo “Investigación en Diversidad e Inclusión en Educación Matemática”, cuyo objetivo es avanzar hacia una educación matemática inclusiva y atender la diversidad. Las investigaciones publicadas en las actas describen experiencias llevadas a cabo con estudiantes con Trastorno del Espectro Autista (TEA), con el objetivo de informar sobre sus fortalezas y debilidades en el ámbito de las matemáticas. Fernández-Cobos y colaboradores, en diversos documentos describen experiencias en las que se ha seguido una “modificación de la instrucción basada en esquemas” (del inglés, MSBI).

Los resultados muestran que este tipo de instrucción facilita el aprendizaje de este alumnado, favorece la autonomía y le permite progresar en los contenidos a través de sus propias estrategias informales. Además, la secuencia puede ayudar al docente o al investigador a identificar las dificultades que manifiestan estos estudiantes y apoyarlos en la comprensión de las operaciones (Fernández-Cobos et al., 2024). Fernández-Cobos et al. (2022) informaron sobre las dificultades de comprensión en el proceso de resolución de problemas destacando la importancia de seguir diseñando propuestas que tengan en cuenta las características individuales de cada estudiante. Una línea de investigación futura es abordar la formación del docente de matemáticas respecto al tratamiento inclusivo en el aula del alumnado con necesidades educativas especiales.

Los estudios sobre resolución de problemas con estudiantes universitarios han sido menos frecuentes. Las investigaciones han abordado la descripción de estrategias utilizadas por futuros docentes de primaria (Cabero, 2021) y el impacto de factores emocionales en la autorregulación durante la resolución de problemas (Landa et al., 2021). En la etapa analizada, las investigaciones relativas a la resolución de problemas numéricos y algebraicos del profesorado son escasas y se han llevado a cabo principalmente con profesorado de secundaria en formación. Espinoza-González et al. (2023) evaluaron las habilidades de futuros docentes de matemáticas de secundaria en la identificación, interpretación y toma de decisiones al analizar la resolución de problemas de proporcionalidad por parte de estudiantes. Los resultados indican que el desarrollo de estas competencias es heterogéneo y depende de la naturaleza de las respuestas estudiantiles. Se recomienda desarrollar programas formativos que integren registros de la práctica docente para abordar una mayor diversidad de problemas y niveles de comprensión.

La formulación de problemas ha cobrado gran interés en los últimos años. Casi la totalidad de los estudios publicados en las actas sobre esta temática se han centrado en explorar la habilidad de docentes en formación

de educación primaria para formular problemas. No obstante, sigue siendo una línea abierta profundizar sobre qué sucede en otros niveles educativos.

García-Alonso et al. (2022) caracterizaron los problemas sobre fracciones inventados por futuros docentes de primaria, analizando su plausibilidad (o resolubilidad), demanda cognitiva, significado y estructura matemática. Los resultados indican que la mayoría de los problemas creados son plausibles, con demanda cognitiva en la categoría “aplicar” y con predominio del significado de fracción parte-todo y operador, mayoritariamente de estructura aditiva. Investigaciones posteriores del mismo grupo han explorado los errores cometidos por los futuros docentes y el impacto del uso de herramientas digitales en la formulación de problemas. Chico et al. (2023) identificaron las intenciones didácticas de futuros maestros cuando resuelven una tarea basada en la formulación de problemas, identificando diversas estrategias como la focalización en contenidos específicos, la variación en la complejidad, la facilitación de la comprensión del enunciado, la orientación hacia la evaluación o la modificación de la práctica matemática promovida. Entre las líneas futuras, proponen profundizar en la influencia de las interpretaciones docentes sobre las consignas en la enseñanza, así como en el desarrollo de instrumentos para analizar sus intenciones didácticas con mayor precisión. Otras investigaciones se han basado en el “Enfoque Ontosemiótico” (Burgos et al., 2022), o en la perspectiva “Etnomatemática” (Albanese, 2024) para dar cuenta del proceso de creación de problemas seguido por docentes en formación. También se han analizado los problemas creados por estudiantes con talento matemático (Espinoza, 2024).

Son escasas las investigaciones sobre formulación de problemas con estudiantes de educación primaria o secundaria. Quevedo (2023) analizó las producciones de estudiantes de 6.º de educación primaria y 1.º de educación secundaria al inventar situaciones con números enteros dada una expresión numérica. En sus resultados se muestra que la mayor parte de las situaciones descritas son cortas, con una estructura sintáctica sencilla y un contexto cercano. Ayala-Altamirano et al. (2023) destacaron el potencial que la invención tiene para observar y fomentar el pensamiento algebraico, ya que permite al alumnado centrarse en estructuras y relaciones matemáticas en lugar de en el cálculo, lo que favorece el desarrollo de habilidades algebraicas.

Se concluye que es fundamental continuar explorando este ámbito, dado que la invención de problemas constituye una estrategia efectiva para el aprendizaje matemático, la resolución de problemas, la construcción del conocimiento y el desarrollo de la creatividad.

Desafíos emergentes en torno al pensamiento numérico y algebraico

En el ámbito del pensamiento numérico, persiste la necesidad de profundizar en la operatoria desde edades tempranas y en el estudio de sistemas como

los enteros y reales, así como de avanzar hacia propuestas didácticas que desarrollen el sentido numérico en el aula. Respecto al pensamiento algebraico, uno de los desafíos más destacados es el diseño de secuencias de enseñanza que permitan una introducción progresiva de este pensamiento desde la educación infantil. Una línea de trabajo futura podría centrarse en estudios comparativos entre los enfoques utilizados por estudiantes de primaria, secundaria y niveles superiores para resolver tareas que involucren el pensamiento algebraico, con el fin de identificar las estrategias más pertinentes y transferibles entre las etapas educativas. Otro desafío reside en el campo de la formación docente, aún son escasos los estudios que exploren cómo el conocimiento profesional se transforma en la práctica o cómo incide en la toma de decisiones didácticas en la enseñanza del álgebra. En cuanto a la resolución de problemas, se destaca el potencial formativo de la invención como estrategia de aprendizaje. Aun así, los estudios que abordan esta temática con estudiantes de primaria y secundaria siguen siendo escasos. Finalmente, la educación matemática inclusiva se presenta como una línea transversal, que demanda propuestas didácticas y formación docente sensible a la diversidad.

Investigaciones en el marco de la temática del grupo GTT4

En marzo del 2023, la SOMIDEM llevó a cabo su primer congreso, en el cual se dedicó un espacio al Grupo de Trabajo Temático denominado “Didáctica de la aritmética y del álgebra” (GTT4). El interés común de quienes participan en este grupo es reflexionar y debatir sobre investigaciones teóricas y empíricas cuyo objeto de estudio es la enseñanza y el aprendizaje de la aritmética o del álgebra desde diversos enfoques teóricos y perspectivas metodológicas, así como en diferentes niveles educativos (Valenzuela & Real, 2024).

Uno de los propósitos de quienes coordinan este grupo es fomentar el interés y la motivación para profundizar en la temática de modo que se mantengan y se amplíen las discusiones en este y en otros espacios de trabajo. Por ello, en este apartado se esboza un panorama del estado actual y de proyecciones futuras de la investigación en torno a la didáctica de la aritmética y del álgebra desde la perspectiva de quienes forman parte de dicha sociedad.

Dado que hasta el momento solo se ha llevado a cabo un congreso de esta asociación, para analizar el estado actual de las indagaciones sobre la didáctica de la aritmética y del álgebra que pueden influir más directamente en las líneas de investigación desarrolladas en México, se consideraron no solo las seis propuestas discutidas en el primer congreso (publicadas en Sánchez et al., 2024), sino también informes de investigación publicados en la revista Educación Matemática (rEM); la cual está prevista como una

publicación periódica editada por la SOMIDEM. En la selección se incluyen estudios publicados en los últimos cinco años en los que participa al menos un investigador mexicano, y están relacionados con la temática del GTT4, con el propósito de ofrecer una visión aproximada del panorama actual de la investigación en esta área. En este periodo se publicaron 47 artículos; de estos, 12 fueron escritos por miembros de la SOMIDEM. A pesar de la ampliación en la selección de artículos para este análisis, cabe señalar que es inevitable omitir contribuciones relevantes para la didáctica de la aritmética y del álgebra en México que se han publicado en otros espacios.

Este apartado se estructura en tres secciones. En la primera, se examinan las contribuciones a la investigación sobre la didáctica de la aritmética y del álgebra tomando como referencia los 47 artículos publicados en la rEM. En la segunda sección se analizan las aportaciones de los socios de la SOMIDEM considerando 18 publicaciones que abarcan los artículos de la rEM y los seis documentos del primer congreso de la sociedad. De esas publicaciones se resaltan las problemáticas estudiadas, los contextos en los que se desarrollan las investigaciones y los marcos teóricos y metodológicos empleados. Finalmente, en la tercera sección se reflexiona sobre desafíos, temas emergentes y posibles líneas de investigación futuras en torno a la didáctica de la aritmética y del álgebra en México.

Contribuciones a la didáctica de la aritmética y del álgebra desde la rEM

El criterio de selección de los artículos de la rEM se basó en la revisión de los títulos y de las palabras clave de las publicaciones. Las palabras consideradas fueron: aritmética, álgebra y términos asociados a estas áreas de las matemáticas, ya sean conceptos, relaciones u operaciones. Por ejemplo: números naturales, fracciones, multiplicación, problemas aditivos, proporcionalidad, razón y ecuaciones.

A continuación, se hace una descripción general de los intereses y estudios reportados en los 47 artículos seleccionados; estos se clasificaron en cuatro categorías según su enfoque y el objeto matemático en cuestión, a saber: didáctica de la aritmética, didáctica del álgebra, transición de la aritmética al álgebra y resolución de problemas.

De los 47 artículos, 25 se clasificaron como propios de la didáctica de la aritmética. De estos, 12 se centran en el estudio de alguna estructura numérica; con mayor frecuencia, el objeto de estudio es la enseñanza o el aprendizaje de las fracciones. En cuanto a las operaciones aritméticas, se identificaron tres artículos sobre multiplicación y adición. El cálculo mental es el objeto de estudio de dos artículos. Las relaciones y propiedades numéricas son el centro de atención de ocho de los 25 documentos acerca de la aritmética, en la mayoría de estos, se estudia el concepto de proporcionalidad.

En relación con la didáctica del álgebra, se identificaron seis de los 47 artículos. Las temáticas principales de estos informes de investigación son las siguientes: dos versan sobre la enseñanza del concepto de ecuación lineal, otros dos se centran en el lenguaje algebraico, y los dos restantes abordan de manera explícita el desarrollo del pensamiento algebraico.

Dado que el pensamiento algebraico puede interpretarse de diversas maneras (Sibgatullin et al., 2022), en esta sección del capítulo se adopta como una perspectiva teórica. Por lo tanto, cuando se hace referencia a este término, es porque en los artículos revisados los investigadores estudian el desarrollo del pensamiento algebraico en alguna de sus interpretaciones. En cambio, hay otros artículos en los que no se menciona explícitamente el pensamiento algebraico, sino que desde otras perspectivas teóricas o metodológicas se centran en la enseñanza o el aprendizaje de algún concepto específico del álgebra.

Con respecto a la categoría “la transición de la aritmética al álgebra”, ocho de 47 publicaciones revisadas aluden a este tema. Se decidió hacer explícita esta clasificación porque, aunque la aritmética y el álgebra están estrechamente relacionadas, en los estudios descritos previamente el centro de atención es claramente una de estas áreas. En cambio, en estos ocho casos, el interés principal radica en la conexión entre ambas áreas de las matemáticas, lo que permite reconocer cómo la generalización de la aritmética se convierte en un aspecto central para el desarrollo del pensamiento algebraico.

En México, en la década de 1990, estas y otras ideas teóricas sentaron bases para el estudio del pensamiento algebraico. Un ejemplo del uso de esas ideas es la investigación de Gallardo (2002), quien analiza la transición del dominio de los números naturales al de los enteros, resaltando su importancia en el paso del pensamiento aritmético al algebraico. Su contribución ha sido relevante respecto a la comprensión de los desafíos en la enseñanza tanto del álgebra como de la aritmética.

Finalmente, en la clasificación referente a la resolución de problemas, ocho de los 47 artículos tratan sobre esta temática. Por lo general, los problemas estudiados son de tipo verbal. Estas indagaciones se consideran relevantes porque analizan cuestiones relacionadas con el proceso de resolución, ya sea desde una perspectiva aritmética o algebraica.

En las 47 publicaciones examinadas se aprecia una tendencia hacia la investigación en didáctica de la aritmética. Asimismo, la mayoría de los proyectos se desarrollaron en el nivel educativo básico (3 a 15 años). Esto se sustenta en el hecho de que, además de los estudios centrados en la didáctica de la aritmética, aquellos sobre la transición de la aritmética al álgebra y otros relacionados con la resolución de problemas corresponden a investigaciones desarrolladas principalmente en este nivel educativo.

Perspectivas desde la SOMIDEM sobre la didáctica de la aritmética y del álgebra

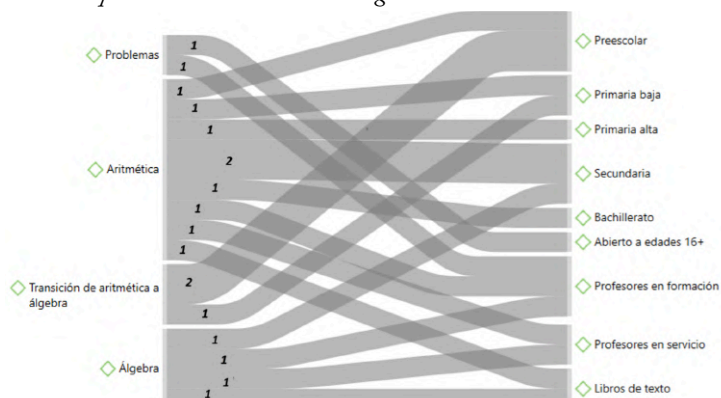
Los resultados que se exponen en este apartado se centran en los 18 artículos publicados por socios de la SOMIDEM. Cabe destacar que algunos de estos estudios surgieron de colaboraciones con investigadores de otros países, lo que implicó que el desarrollo del estudio, en algunos casos, se realizara fuera de México. Sin embargo, para su inclusión, como ya se dijo, se aplicó el criterio de que al menos uno de los autores fuera miembro de esta sociedad mexicana.

La mayoría de los estudios –9 de 18– versan sobre la didáctica de la aritmética. En estas indagaciones se estudian principalmente la proporcionalidad, la adición y conceptos como los números racionales y naturales. Con respecto a la didáctica del álgebra, se identificaron cuatro investigaciones: una sobre el concepto de ecuación lineal y tres acerca del desarrollo del pensamiento algebraico, uno de ellos vinculado con patrones numéricos figurales. Además, tres investigaciones se enfocan en la transición de la aritmética al álgebra, una de ellas aborda la generalización de la aritmética y en dos se estudia el pensamiento funcional. Finalmente, otros dos estudios están relacionados con la resolución de problemas, en los cuales, al igual que en el panorama general de la investigación, se analizan tanto estrategias de solución aritmética como algebraica.

El contexto en el que se desarrollan los estudios sobre la didáctica de la aritmética es variado (Figura 1). Hay estudios que se llevaron a cabo con alumnado de preescolar (3 a 6 años), primaria (6 a 12 años), secundaria (12 a 15 años) y bachillerato (15 a 18 años o más); otras indagaciones se llevaron a cabo con docentes de primaria, ya sea en servicio o en formación; y también se encontraron investigaciones cuyo objeto de estudio son los libros de texto para la educación básica.

Figura 1

Contexto en el que se desarrollaron las investigaciones de los miembros de la SOMIDEM



Las investigaciones relacionadas con la didáctica del álgebra se llevaron a cabo con alumnos de secundaria, así como con docentes de bachillerato y en formación para la educación primaria. Uno de los 18 estudios sobre esta categoría se centra en el análisis de libros, específicamente para primaria alta. En México, se distingue entre primaria baja (estudiantes de 6 a 9 años) y primaria alta (estudiantes entre 9 y 12 años), distinción que funciona como parámetro para la organización del alumnado en las escuelas multi-grado. Un ejemplo de ello puede verse en la investigación de Trejo (2023).

En preescolar y primaria baja se llevaron a cabo investigaciones que se centran en la transición de la aritmética al álgebra. En cambio, los estudios cuya temática es la resolución de problemas se desarrollaron en dos contextos: uno en el que participaron docentes e investigadores en formación, y otro, diseñado como un curso en línea en el que concurrieron tanto docentes como alumnos mayores de 16 años; en este último, las estrategias de resolución de los participantes no solo son algebraicas o aritméticas, sino que integran también procesos geométricos.

Como puede observarse, se requiere avanzar en el desarrollo de más estudios sobre la resolución de problemas desde edades tempranas. Asimismo, conviene ampliar las investigaciones relacionadas con la didáctica del álgebra, en especial con estudiantes de bachillerato. Además, se requiere un mayor número de estudios sobre la transición de la aritmética al álgebra con alumnos de primaria alta, secundaria y bachillerato, así como en contextos que involucren a docentes, tanto en servicio como en formación, y de cualquier nivel educativo.

Las 18 publicaciones revisadas se caracterizan por ser investigaciones empíricas. Sin embargo, surge una pregunta clave: ¿cómo se fundamentan teóricamente y cuáles son los principales marcos de investigación empleados por quienes escribieron los 18 artículos analizados?

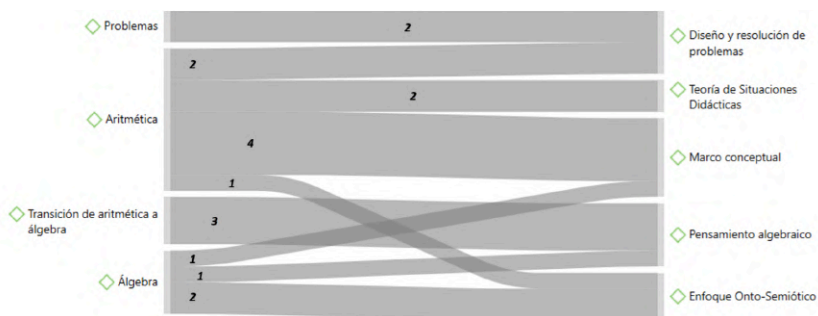
La noción de marco es central para la investigación educativa. De forma general, el marco se interpreta como un conjunto de ideas, principios, acuerdos o reglas que sirven de base para el desarrollo de la investigación. Es posible distinguir distintos tipos de marcos. Eisenhart (1991, citado en Lester, 2005) identifica tres principales: marco teórico, marco práctico y marco conceptual, cada uno con características propias.

De acuerdo con los autores antes citados, un marco teórico guía las actividades de investigación a partir en una teoría formal. Un marco conceptual puede basarse en diferentes teorías o simplemente en ideas, elementos o conceptos de teorías, así como de varios aspectos del conocimiento del profesional. Como parte del marco conceptual, puede incluirse un análisis sobre el desarrollo histórico del concepto matemático alrededor del cual se hace la investigación, siempre y cuando sea pertinente y se use para explicar el diseño y desarrollo de alguna secuencia didáctica, conjunto

de tareas o recursos tecnológicos. Los principales marcos de investigación empleados por los miembros de la SOMIDEM pueden verse en la Figura 2.

Figura 2

Principales marcos de investigación empleados por los miembros de la SOMIDEM



Las investigaciones que adoptan un marco conceptual, en las cuales se desarrollan revisiones y análisis sobre términos o conceptos, se concentran principalmente en los estudios sobre didáctica de la aritmética, mientras que solo una versa acerca de la didáctica del álgebra. Asumir una postura sobre el sentido numérico que se adapte a estudios con alumnos de bachillerato fue parte de la constitución del marco conceptual del estudio de Garrido-Adame et al. (2024). Por su parte, Robles y Nieto (2024) consideran las etapas de desarrollo de la proporcionalidad como un aspecto central para poder explorar los procedimientos que usan docentes en formación en la resolución de problemas que involucran ese concepto. Sobre la proporcionalidad, Block (2021) hace una revisión de otras perspectivas y aportes desde la investigación; de esta forma, asume una postura para el diseño de sus actividades. En el estudio de Luengo et al. (2024) se presenta una revisión sobre el concepto fracción y se adopta una postura sobre ese concepto, considerando algunas de sus propiedades y operaciones, como son la equivalencia y la adición. Además, establecen una relación entre la representación de fracción y la notación musical. Por último, Leyva y Dávila (2024), para diseñar una secuencia didáctica, consideran el método de enseñanza ACODESA y la caracterización de la generalización algebraica de patrones de otras investigaciones.

El pensamiento algebraico no constituye una teoría en sí misma, pero se ha consolidado como un enfoque ampliamente utilizado en estudios internacionales. En el campo de la Educación Matemática, existen diversas posturas sobre cómo comprenderlo. Según Medrano et al. (2022) la aritmética generalizada y el pensamiento funcional son dos dominios del “álgebra temprana” (*early algebra*) considerados centrales para el desarrollo del pensamiento algebraico. Fuentes et al. (2024) y Anglada et al. (2024) destacan

el pensamiento funcional como uno de los enfoques relevantes del pensamiento algebraico, sustentado en la idea de que el cambio es una noción matemática que se refiere a una transformación. Según las autoras, esta perspectiva permite a los alumnos construir, describir, representar y razonar sobre las funciones y sus elementos constitutivos. Estas tres investigaciones se centran explícitamente en la transición de la aritmética al álgebra. En cuanto a la investigación sobre didáctica del álgebra, Nieto (2024) cita el estudio de Butto y Rojano (2010) para definir al pensamiento algebraico. Así, para esta autora, el pensamiento algebraico implica comprender las relaciones funcionales, generalizar patrones y relaciones numéricas, trabajar con la estructura, el simbolismo y la modelización como medios de expresión, así como formalizar generalizaciones.

Dos de las investigaciones sobre didáctica del álgebra y una sobre didáctica de la aritmética toman como marco de investigación aspectos del Enfoque Ontosemiótico (EOS). De acuerdo con Ramírez et al. (2020) este enfoque se concibe como una teoría inclusiva que proporciona herramientas para el análisis didáctico de procesos de instrucción matemática. El EOS integra aspectos ontológicos, epistemológicos y semióticos del conocimiento matemático, proporcionando herramientas para investigar y mejorar los procesos educativos. Para el caso del estudio de Llanes et al. (2022) se consideran los niveles de razonamiento algebraico en el contexto ontosemiótico, esos niveles se definen en términos de los resultados de otras investigaciones, que toman en cuenta los tipos de representaciones usadas, los procesos de generalización implicados y el cálculo analítico que se pone en juego en la actividad matemática correspondiente. Por su parte, Morales-García et al. (2021) centran su investigación en analizar los significados del número natural en libros de texto mexicanos de educación básica, asumiendo aspectos del EOS, específicamente aquellos relacionados con la configuración epistémica y los niveles de análisis de la actividad matemática.

La Teoría de Situaciones Didácticas es la base teórica para el desarrollo de dos investigaciones ubicadas en la didáctica de la aritmética. El estudio de Block et al. (2023) incluye el diseño de situaciones didácticas a partir de un análisis epistemológico de las nociones sobre la razón y la fracción. Estos autores asumen además como metodología a la Ingeniería Didáctica, por lo que describen la secuencia de investigación: análisis preliminar sobre los conceptos en juego, diseño de la situación didáctica, experimentación en el aula y análisis de la implementación que contrasta lo previsto con lo ocurrido. Laguna y Block (2020) analizan dos situaciones didácticas relativas al tratamiento de la información como un enfoque constructivista de la enseñanza que relaciona la estadística con el uso de los números; estos autores aportan evidencia sobre las formas personales en que los alumnos de preescolar representan y combinan distintos sistemas de notación—

icónico, numérico y escrito—según el contexto generado por las tareas propuestas.

El enfoque de la resolución de problemas se plantea como una base teórica y metodológica en cuatro de los artículos analizados: dos pertenecen a la clasificación de estudios centrados en problemas, mientras que los otros dos corresponden a la didáctica de la aritmética. Existen diversas interpretaciones y usos en el campo de la Educación Matemática sobre este enfoque. En los dos primeros, Fino-Miranda et al. (2024) consideran los Problemas Aditivos de Enunciado Verbal (PAEV) con la finalidad de caracterizar las estructuras semánticas utilizadas por docentes e investigadores de matemáticas en formación. Para García y Poveda (2022) la resolución de problemas matemáticos y el uso de tecnologías digitales fueron aspectos centrales para el diseño de un entorno virtual MOOC, con el objetivo de analizar el proceso de resolución de problemas seguido por las personas usuarias del curso. En los estudios sobre didáctica de la aritmética, los problemas sirvieron como medio para analizar las prácticas de enseñanza sobre la proporcionalidad de tres docentes de educación primaria (Ávila y Gutiérrez, 2022), así como la comprensión del sistema métrico decimal de un grupo de alumnos de escuela primaria multigrado (Trejo, 2022).

Como puede observarse, la construcción de un marco conceptual se identifica como el marco de investigación más comúnmente adoptado en las publicaciones analizadas. El Enfoque Ontosemiótico muestra un balance al emplearse en dos áreas, lo cual refleja su flexibilidad para tratar con problemas de investigación en didáctica del álgebra y de la aritmética. La Teoría de Situaciones Didácticas se emplea para el desarrollo de investigaciones sobre didáctica de la aritmética y en educación básica, por lo que podría explorarse su uso para investigar problemas en otras áreas de la didáctica y en otros niveles educativos. Por último, el diseño y la resolución de problemas y el pensamiento algebraico son dos enfoques particulares que pueden emplearse con otras ideas teóricas para constituir un marco conceptual, ya sea para analizar el proceso de resolución o la invención de problemas.

Desafíos o temas emergentes en torno a la didáctica de la aritmética y del álgebra en México

Los estudios analizados sugieren desafíos y temas emergentes de investigación en la didáctica de la aritmética y el álgebra, los cuales podrían considerarse para el desarrollo de proyectos en México.

La mayoría de las investigaciones analizadas sobre la didáctica de la aritmética se han centrado en los números naturales, enteros y racionales, y han sido desarrolladas principalmente en educación preescolar, primaria y secundaria. Para avanzar en el aprendizaje de las matemáticas en los niveles medio y superior, es necesario desarrollar un conocimiento sobre los números

reales y complejos. Estos números, así como su aritmética y sus representaciones, juegan un papel importante en otras ramas de la matemática, como, por ejemplo, el cálculo y el análisis, la geometría analítica y la trigonometría. Por esas razones es conveniente ampliar las líneas de investigación sobre el desarrollo del sentido numérico, así como acerca de la didáctica de la aritmética de los números reales y complejos.

Desde un panorama internacional, en las últimas tres décadas se ha popularizado una corriente educativa que se centra en la enseñanza y el aprendizaje de Ciencias, Tecnología, Ingeniería y Matemáticas (STEM por sus siglas en inglés). Asimismo, ha cobrado importancia el uso de la metodología denominada Aprendizaje Basado en Proyectos. En México, aspectos de estas metodologías se han tomado como referencia para el diseño de la reforma educativa del año 2022. En la revisión de las publicaciones descritas en los apartados anteriores, no se mencionan estudios hechos por integrantes de la SOMIDEM que traten sobre estas corrientes educativas. La situación descrita plantea la necesidad de desarrollar estudios en la didáctica de la aritmética y el álgebra que incorporen estos acercamientos en sus investigaciones.

Además, la incorporación efectiva de nuevas tecnologías en los procesos de enseñanza y aprendizaje ha despertado interés en diversos países. Este escenario ha revelado nuevas problemáticas y oportunidades para hacer investigación. Por ejemplo, Bråting y Kilhamn (2021) destacan la programación y el pensamiento computacional como habilidades necesarias no solo para los científicos e ingenieros informáticos, sino también para todos los ciudadanos. Por ello, estos autores sugieren incorporar la programación en la enseñanza de las matemáticas en Suecia, proponiendo enfoques pedagógicos que vinculen el pensamiento matemático con competencias digitales que hoy resultan indispensables.

Por lo anterior, una línea de investigación emergente es la integración del pensamiento algebraico con el pensamiento computacional, un campo que, hasta ahora, ha sido poco explorado en México. Indagar en esta línea de investigación implicaría el diseño y evaluación de propuestas didácticas que integren herramientas tecnológicas y lenguajes de programación, tanto visuales como textuales, orientadas a la resolución de problemas algebraicos. Asimismo, sería pertinente documentar experiencias pedagógicas que articulen ambos tipos de pensamiento, identificar los retos y oportunidades de su implementación, así como desarrollar modelos didácticos adaptables a diversos contextos y niveles educativos.

Conclusiones

Tras describir las investigaciones realizadas en los últimos cinco años por integrantes de los grupos de PNA de la SEIEM y del GTT4 de la SOMIDEM,

se identifican puntos de convergencia y oportunidades para fortalecer la colaboración. La revisión muestra colaboraciones puntuales entre investigadores de ambas sociedades, lo que evidencia posibilidades de intercambio académico y desarrollo de soluciones educativas compartidas. Además, se han identificado autores que publican en ambas sociedades, lo que deja ver la relación científica establecida entre la SOMIDEN y la SEIEM.

En ambos contextos, los intereses de investigación coinciden en la exploración de estrategias para fortalecer la enseñanza y el aprendizaje en distintos niveles educativos. Además, las investigaciones tratan temas centrales como el pensamiento numérico, el pensamiento algebraico y la resolución de problemas, aunque con enfoques teóricos y metodológicos diferenciados. Estas diferencias constituyen un recurso valioso, dado que el estudio de las problemáticas se puede discutir desde múltiples miradas que se complementan entre sí.

En el caso del pensamiento numérico, los aportes sobre sentido numérico, proporcionalidad y sistemas numéricos en distintos niveles educativos permiten proyectar estudios conjuntos que analicen el desarrollo de estas nociones en contextos escolares y culturales diversos, así como el diseño de materiales didácticos. Sobre el pensamiento algebraico, ambas agrupaciones comparten el interés por introducirlo desde etapas tempranas y estudiar la generalización. Esto abre la posibilidad de trabajar colaborativamente, por ejemplo, en torno a la generalización, las representaciones y el pensamiento funcional, apoyándose en evidencias que muestran la viabilidad de introducir estos contenidos en las primeras etapas de la escolaridad. Esto permitiría avanzar hacia propuestas articuladas que favorezcan el desarrollo del pensamiento algebraico a lo largo de distintos niveles educativos. Finalmente, en el ámbito de la resolución de problemas, ambas agrupaciones reconocen su valor formativo y han explorado enfoques como la invención de problemas y el uso de tecnologías, lo cual ofrece un marco propicio para diseñar investigaciones conjuntas que integren estrategias diversas y evalúen su impacto en el aprendizaje matemático.

Respecto a áreas emergentes, se han identificado líneas de investigación que podrían ser una oportunidad de colaboración entre miembros de ambas sociedades. En primer lugar, se puede considerar el pensamiento computacional, que recientemente ha sido incorporado en el currículo de primaria en España, específicamente relacionándolo con el pensamiento algebraico. Si bien dentro de la SEIEM el grupo “Entornos Tecnológicos en Educación Matemática (ETEM)” ha investigado durante años diversos escenarios en educación matemática que incluyen elementos tecnológicos, este cambio curricular plantea el desafío de que las personas integrantes del grupo PNA exploren y transfieran sus hallazgos a esta área. En México, los miembros de la SOMIDEN han comenzado a explorar esta línea de investigación. En

ambos casos, el desarrollo de la investigación sobre el pensamiento computacional podría fortalecer la enseñanza del pensamiento numérico y algebraico, además de contribuir a la adquisición de habilidades para la resolución de problemas en entornos digitales. Otra área emergente es la invención de problemas. Considerando su potencial en el proceso de enseñanza, se sugiere impulsar investigaciones en las que se analicen experiencias de aula cuya intencionalidad sea la invención de problemas con estudiantes de diferentes niveles educativos. Finalmente, una de las líneas para futuras investigaciones es el estudio de estrategias para fomentar el sentido numérico en el aula, dado su papel central en la comprensión de los sistemas numéricos y en la construcción de conocimientos matemáticos más avanzados.

En conclusión, lo descrito en este capítulo permite identificar oportunidades de colaboración que podrían potenciar el impacto de la investigación en la enseñanza de la aritmética y el álgebra. La articulación de esfuerzos entre la SEIEM y la SOMIDEM no solo contribuiría al fortalecimiento de redes internacionales de investigación, sino que también favorecería la implementación de prácticas innovadoras y contextualizadas en la educación matemática, en beneficio de docentes y estudiantes en España y en México.

Referencias

- Acosta, Y., Alsina, Á., & Pincheira, N. (2023). Patrones en educación infantil: vinculando pensamiento computacional y algebraico. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo, & P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 115–122). SEIEM.
- Adamuz-Povedano, N. (2023). Treinta años de investigaciones sobre desarrollo del sentido numérico en educación primaria. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo, & P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 11–25). SEIEM.
- Adamuz-Povedano, N., Fernández-Ahumada, E., Bracho-López, R., & García-Pérez, M. T. (2019). Implementando estrategias para el desarrollo del cálculo táctico en primer ciclo de Educación Primaria. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano, & Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (p. 605). SEIEM.
- Albanese, V. (2024). Una perspectiva etnomatemática de la contextualización de problemas matemáticos. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent, & C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 97–104). SEIEM.
- Ángel, A., Figueras, O., & Valenzuela, C. (2022). Una herramienta para analizar recursos educativos de telesecundaria: el caso de la división de fracciones. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas, & J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 139–147). SEIEM.

- Anglada, M. L., Cañadas, M. C., & Brizuela, B. M. (2022). Identificación de estructuras por niños de cinco años en una tarea que involucra funciones lineales en sus formas directa e inversa. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas, & J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 149–157). SEIEM.
- Anglada, M. L., Fuentes, S., & Cañadas, M. C. (2024). Identificación y descripción de cambios cualitativos por niños de tres años. En M. Sánchez, M. del S. García, & A. Castañeda (Eds.), *Perspectivas actuales de la Educación Matemática* (pp. 191–200). Editorial SOMIDEM.
<https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S3/2024/01-19>
- Arbona, E., Beltrán-Meneu, M. J., & Gutiérrez, Á. (2021). Estrategias empleadas por estudiantes de primaria en la resolución de problemas de patrones geométricos. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T., & Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 133 – 140). SEIEM.
- Ávila, A., & Gutiérrez, C. (2022). Formas heterogéneas de apropiación: Prácticas de enseñanza después de un proceso formativo sobre la proporcionalidad. *Educación Matemática*, 34(1), 10–41. <https://doi.org/10.24844/EM3401.01>
- Ayala-Altamirano, C., & Molina, M. (2019). Justificación y expresión de la generalización de una relación funcional por estudiantes de cuarto de primaria. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano, & Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 183–192). SEIEM.
- Ayala-Altamirano, C., Arjona-Aranda, G., Moral-Sánchez, S. N., & Sánchez-Cruzado, C. (2024). Iniciación al pensamiento computacional a través de tareas desconectadas sobre patrones. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent, & C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 121–128). SEIEM.
- Ayala-Altamirano, C., Pinto, E., Molina, M., & Cañadas, M. C. (2023). Invención de problemas y sentencias como medio para evidenciar el pensamiento algebraico en educación primaria. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo, & P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 155–162). SEIEM.
- Block, D. (2021). “Los saltos de las ranas”. Estudio de una secuencia didáctica de proporcionalidad, con problemas de comparación de razones, en quinto grado de primaria. *Educación Matemática*, 33(2), 115–146. <https://doi.org/qh89>
- Block, D., Ramos, D., & Sosa, J. J. (2023). De la expresión de la razón con dos números naturales, a su expresión con una fracción. Dos experiencias de ingeniería didáctica en el nivel básico. *Educación Matemática*, 35(3), 82–111. <https://doi.org/10.24844/EM3503.03>
- Bosch, M., Gutiérrez, A., & Llinares, S. (2024). Mapeando la investigación española en educación matemática. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent, & C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 51–94). SEIEM.

- Bråting, K., & Kilhamn, C. (2021). Exploring the intersection of algebraic and computational thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, 23(2), 170–185. <https://doi.org/10.1080/10986065.2020.1779012>
- Bruno, A., & Almeida, R. (2023). Investigaciones sobre el desarrollo del sentido numérico en el aula de secundaria. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo, & P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 27–41). SEIEM.
- Burgos, M., Chaverri, J., & Castillo, M. J. (2022). Creación de problemas matemáticos en la formación de maestros de primaria. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas, & J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (p. 597). SEIEM.
- Butto, C., & Rojano, T. (2010). Pensamiento algebraico temprano: El papel del entorno logo. *Educación Matemática*, 22(3), 55–86. <https://bit.ly/3U6w1Zw>
- Cabero, I., Diago, P. D., González-Calero, J. A., Wu, Y., Arnau, D., & Arevalillo-Herráez, M. (2021). Repercusión de la tipología de presentación de los datos en el aprendizaje de la resolución de problemas verbales. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T., & Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (p. 644). SEIEM.
- Cañadas, M. C. (2023). Una panorámica de las investigaciones sobre pensamiento numérico y pensamiento algebraico. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo, & P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 3–9). SEIEM.
- Chico, J., Martín-Díaz, J. P., Montes, M. A., & Badillo, E. (2023). ¿Qué intenciones didácticas muestran los futuros maestros cuando transforman problemas? En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo, & P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 203–210). SEIEM.
- Cid-Cid, A., Joglar-Prieto, N., Escudero-Ávila, D., & Flores-Medrano, E. (2023). Flexibilidad matemática que muestran futuras maestras de educación primaria al ordenar fracciones. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo, & P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 307–314). SEIEM.
- Del Olmo-Muñoz, J., González-Calero, J. A., Diago, P. D., Arevalillo-Herráez, M., & Arnau, D. (2022). Efecto de una instrucción basada en flexibilidad intratarea en la competencia en resolución aritmética de problemas verbales y en el disfrute y utilidad percibida. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas, & J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 239–247). SEIEM.
- Espinoza-González, J., Bufo, A., & Llinares, S. (2023). Competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de estudiantes de un grupo de profesores en formación. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo, & P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 227–234). SEIEM.

- Espinoza, J., Lupiáñez, J. L., & Segovia, I. (2024). Análisis de la riqueza de los problemas planteados por estudiantes con talento matemático. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent, & C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 217–224). SEIEM.
- Fariña, M., & Bruno, A. (2021). Respuestas numéricas razonables en alumnado de secundaria. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T., & Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 261–268). SEIEM.
- Fernández-Cobos R., Polo-Blanco, I., Goñi-Cervera, J., & Bruno A. (2022). Adaptación de metodologías de instrucción en resolución de problemas para alumnado con autismo. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas, & J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (p. 603). SEIEM.
- Fernández-Cobos, R., González-de Cos, L., & Polo, I. (2024). Errores asociados al uso del esquema en resolución de problemas aditivos por una estudiante con autismo. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent, & C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 225–232). SEIEM.
- Fernández-Plaza, J. A., Ruiz-Hidalgo, J. F., Flores, P., Castro-Rodríguez, E., Segovia, I., Rico, L., & Lupiáñez, J. L. (2019). Identificación de errores escolares en matemáticas por maestros en formación. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano, & Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 293–302). SEIEM.
- Filloy, E., Puig, L., & Rojano, T. (2008). *Educational algebra: A theoretical and empirical approach*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-72229-7>
- Fino-Miranda, G., Navarro, C., & Morales-García, L. (2024). Caracterización de problemas aditivos de enunciado verbal: Una mirada desde su estructura y dependencia semántica. *Educación Matemática*, 36(2), 43–67. <https://doi.org/10.24844/EM3602.02>
- Fuentes, S., Anglada, L., & Cañadas, M. C. (2024). Evidencias de pensamiento funcional en alumnos de 3 años: trabajo con una máquina de funciones. En M. Sánchez, M. del S. García, & A. Castañeda (Eds.), *Perspectivas actuales de la Educación Matemática* (pp. 163–171). Editorial SOMIDEM. <https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S3/2024/01-16>
- Gallardo, A. (2002). The extension of the natural-number domain to the integers in the transition from arithmetic to algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 49(2), 171–192. <https://doi.org/10.1023/A:1016210906658>
- García-Alonso, I., Bruno, A., Almeida, R., Sosa-Martín, D., & Perdomo-Díaz, J. (2022). Problemas de fracciones formulados por futuros profesores: algunas características. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas, & J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 295–304). SEIEM.

- García-Triana, B., Edo, M., & Albarracín, L. (2024). Representaciones matemáticas en papel de estudiantes de I5 sobre la descomposición del número 7. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent, & C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII*, (pp. 265–272). SEIEM.
- García, F.J., Sierra, T.A., & Gascón, J. (2024). Introducción de la multiplicación en libros de texto españoles y japoneses. Un estudio comparativo preliminar orientado a la formación de maestros. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent, & C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 249–256). SEIEM.
- García, M. L., & Poveda, W. E. (2022). El MOOC, un entorno virtual para la resolución de problemas matemáticos. *Educación Matemática*, 34(2), 153–181. <https://doi.org/10.24844/EM3402.06>
- Garrido-Adame, V., Figueras, O., & Martínez-Ortega, M. (2024). Promoviendo el desarrollo del sentido numérico de estudiantes de educación media superior. En M. Sánchez, M. del S. García, & A. Castañeda (Eds.), *Perspectivas actuales de la Educación Matemática* (pp. 153–162). Editorial SOMIDEM. <https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S3/2024/01-15>
- Garrido, V., Figueras, O., & Martínez, M. (2022). Sentido numérico acerca de los números reales: conocimientos y habilidades usados en operaciones de forma general. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas, & J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 315–323). SEIEM.
- González-Forte, J. M., & Planas, N. (2024). Cómo miran profesionalmente los futuros maestros el vocabulario, las explicaciones y los ejemplos en la enseñanza de fracciones. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent, & C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 297–304). SEIEM.
- González-Forte, J. M., Fernández C., Van Hoof, J., & Van Dooren, W. (2021). Formas de responder sobre la densidad de los números racionales de estudiantes de primaria y secundaria. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T., & Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 319 –326). SEIEM.
- González-Forte, J. M., Fernández, C., Van Hoof, J., & Van Dooren, W. (2019). Estudio cualitativo de los razonamientos de los estudiantes de primaria y secundaria sobre la magnitud de las fracciones. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano, & Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 363–372). SEIEM.
- Jiménez-Rubiano, L., Piñeiro, J. L., & Ruiz-Hidalgo, J.F. (2024). Transición entre sistemas numéricos para describir el sentido numérico. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent, & C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 329–336). SEIEM.

- Laguna, M., & Block, D. (2020). Haciendo gelatinas: Dos situaciones didácticas sobre la creación y uso de registros con niños preescolares. *Educación Matemática*, 32(3), 8–38. <https://doi.org/10.24844/EM3203.01>
- Landa, J., Berciano, A., & Marbán, J. M. (2021). Autorregulación y resolución de problemas matemáticos en el alumnado del grado en Educación Primaria. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (p. 662). SEIEM.
- Lester, F.K. (2005). On the theoretical, conceptual, and philosophical foundations for research in mathematics education. *ZDM - Mathematics Education*, 37(6), 457–467.
- Leyva, E. V., & Dávila, M. T. (2024). Secuencia didáctica con uso de patrones numéricos figurales, utilizando ACODESA, para el desarrollo del pensamiento algebraico de alumnos de primer grado de secundaria en México. En M. Sánchez, M. del S. García, & A. Castañeda (Eds.), *Perspectivas actuales de la Educación Matemática* (pp. 173–179). Editorial SOMIDEM. <https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S3/2024/01-17>
- Llanes, A. L., Pino-Fan, L. R., & Ibarra, S. E. (2022). Niveles de razonamiento algebraico en libros de texto de educación básica de Chile. *Educación Matemática*, 34(2), 182–216. <https://doi.org/10.24844/EM3402.07>
- López Centella, E., Slezáková, J., & Jirotková, D. (2021). ¿Esta ecuación describe esta situación? Explorando el pensamiento algebraico de estudiantes de primaria. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T., & Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 393–400). SEIEM.
- Luengo, G., Sanz, M. T., Valenzuela, C., & López-Iñesta, E. (2024). La notación musical: Herramienta para el aprendizaje de las fracciones. *Educación Matemática*, 36(1), 187–221. <https://doi.org/10.24844/EM3601.07>
- Lupiáñez, J. L. (2015). Investigaciones sobre pensamiento numérico y algebraico. En C. Fernández, M. Molina, & N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 17–19). SEIEM.
- Martínez-Juste, S., Muñoz-Escolano, J. M., & Oller-Marcén, A. M. (2019). Introduciendo los repartos inversamente proporcionales durante dos ciclos de Investigación-Acción. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano, & Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 413–422). SEIEM.
- Medrano, A., Xolocotzin, U., & Flores-Macías, R. D. C. (2022). Un análisis de la producción de representaciones al solucionar problemas de álgebra temprana en estudiantes de primaria. *Educación Matemática*, 34(3), 10–41. <https://doi.org/10.24844/EM3403.01>

- Montejo-Gámez, J., Fernández-Ahumada, E., Martínez-Jiménez, E., & Adamuz-Povedano, N. (2023). Análisis de modelos para la estimación de cantidades irregularmente distribuidas. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo, & P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 387–394). SEIEM.
- Morales-García, L., Navarro, C., & Díaz-Levicoy, D. (2021). Significados del número natural en libros de texto mexicanos: Un análisis descriptivo. *Educación Matemática*, 33(3), 94–120. <https://doi.org/10.24844/EM3303.04>
- Muñoz-Catalán, M. C., Liñán-García, M. M., Joglar-Prieto, N., & Ramírez-García, M. (2023). Conocimiento especializado de una maestra de Educación Infantil: la descomposición aditiva del número 6. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo, & P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 403–410). SEIEM.
- Narváez, R., Adamuz-Povedano, N., & Cañadas, M. C. (2023). Análisis de la producción científica sobre pensamiento algebraico en educación infantil y primaria en SCOPUS. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo, & P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 411–418). SEIEM.
- Nieto, A. (2024). El uso de la literal como incógnita específica en docentes en formación. En M. Sánchez, M. del S. García, & A. Castañeda (Eds.), *Perspectivas actuales de la Educación Matemática* (pp. 181–189). Editorial SOMIDEM. <https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S3/2024/01-18>
- Olmos-Martínez, G., & Alsina, A. (2024). Identificando conocimientos para enseñar los primeros números y operaciones en la escuela infantil (0-3 años). En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent, & C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 361–368). SEIEM.
- Pacheco, E., Ayala-Altamirano, C., Molina, M. y Pinto, E. (2024). Resolución de inecuaciones en 5° de primaria: estrategias y significados. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent, & C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 385–392). SEIEM.
- Pérez-Martos, M. C., Moreno, A., Cañadas, M. C., & Torres, M. D. (2023). Una mirada a través de gráficos funcionales del alumnado de quinto de educación primaria. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo, & P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 435–442). SEIEM.
- Pincheira, N., Alsina, Á., & Acosta, Y. (2023). ¿Qué conocimiento de álgebra temprana movilizan las tareas que diseña el profesorado de educación infantil? En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo, & P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 451–458). SEIEM.
- Porras, K., Castro-Rodríguez, E., & Aguayo-Arrigada, C. G. (2021). Estrategias y representaciones en la resolución de una tarea de modelización matemática. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo, & D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 513–520). SEIEM.

- Quevedo Gutiérrez, E., Zapatera Llinares, A., & Lijó Sánchez, R. (2023). Invención de situaciones aditivas con números enteros. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo, & P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 459–466). SEIEM.
- Ramírez, R. A., Ibarra, S. E., & Pino-Fan, L. R. (2020). Prácticas evaluativas y significados evaluados por profesores del bachillerato mexicano sobre la noción de ecuación lineal. *Educación Matemática*, 32(2), 69–98.
<https://doi.org/10.24844/EM3202.03>
- Real, R., Gómez, B., & Figueras, O. (2013). Aspectos de la fracción en los modelos de enseñanza: El caso de un libro de texto. *Épsilon – Revista de Educación Matemática*, 30(3), 21–36.
- Robles, D., & Nieto, A. (2024). El razonamiento proporcional, diferencia entre la estructura aditiva y la multiplicativa. En M. Sánchez, M. del S. García, & A. Castañeda (Eds.), *Perspectivas actuales de la Educación Matemática* (pp. 201–211). Editorial SOMIDEM.
<https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S3/2024/01-20>
- Rodríguez, M. L., Gómez, B., & Filloy, E. (2019). Dificultades en el aprendizaje del número cero, en alumnos de escuela elemental. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano, & Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 513–522). SEIEM.
- Sánchez, M., García, M. del S., & Castañeda, A. (Eds.) (2024). *Perspectivas actuales de la Educación Matemática*. Editorial SOMIDEM.
<https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S3/2024/01>
- Santágueda-Villanueva, M., Yáñez, D. F., & Diago, P. D. (2019). Estudio sobre complejidad-dificultad en tareas con patrones de repetición con niños con TEA-1. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano, & Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (p. 653). SEIEM.
- Sibgatullin, I. R., Korzhuev, A. V., Khairullina, E. R., Sadykova, A. R., Baturina, R. V., & Chauxova, V. (2022). A systematic review on algebraic thinking in education. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 18(1), em2065. <https://doi.org/10.29333/ejmste/11486>
- Tirado-Olivares, S., del Olmo-Muñoz, J., Diago, P. D., González-Calero, J. A., Arnau, D., & Arevalillo-Herráez, M. (2021). “No sé hacerlo, pregúntame más”. Una experiencia de resolución de problemas verbales con HINTS. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T., & Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (p. 681). SEIEM.
- Trejo, L. (2023). La enseñanza de la adición con números naturales en la escuela primaria multi-grado. *Educación Matemática*, 35(1), 142–168.
<https://doi.org/10.24844/EM3501.06>

- Ureña, J., Ramírez, R., Molina, M., & Cañadas, M. C. (2021). Representación de la generalización por estudiantes de primaria y secundaria (11-13 años) en una tarea funcional. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T., & Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 613–620). SEIEM.
- Valenzuela, C., & Real, C. R. (2024). Propuestas y perspectivas sobre la didáctica de la aritmética y del álgebra. En M. Sánchez, M. del S. García, & A. Castañeda (Eds.), *Perspectivas actuales de la Educación Matemática* (pp. 147–152). Editorial SOMIDEM. <https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S3/2024/01-14>
- Zorrilla, C., Fernández, C., & Ivars, P. (2023). Cambios en los procedimientos de los estudiantes de sexto curso en problemas de estructura multiplicativa. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo, & P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 547–554). SEIEM.
- Zorrilla, C., González-Forte, J. M., Ivars, P., & Fernández, C. (2024). Mirar profesionalmente los materiales curriculares: coherencia entre interpretar y decidir. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent, & C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 537–544). SEIEM.

Tendencias en la investigación sobre enseñanza y aprendizaje de la geometría: perspectivas desde dos grupos de trabajo

Trends in Research on Teaching and Learning of Geometry:
Perspectives from two working groups

Orlando Vázquez ¹ 

Maricela Bonilla ² 

Teresa F. Blanco ³ 

Pablo G. Sequeiros ⁴ 

Resumen

En este capítulo se explora el panorama de la investigación en enseñanza y aprendizaje de la geometría en el grupo GTT2 de la Sociedad Mexicana de Investigación y Educación Matemática (SOMIDEM) y en el grupo APRENGEOM de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), abordando tanto los desafíos que enfrentan los educadores como los enfoques innovadores que surgen para enfrentarlos. Se presentan las principales líneas que han desarrollado cada uno de estos grupos a través de la producción científica y los aportes a los simposios de cada una de las sociedades, con énfasis en sus desafíos. Los resultados de este análisis conjunto permiten establecer intereses comunes, aunque también ponen de manifiesto algunas diferencias, sobre todo de contexto, que determinan y establecen los desafíos a los que se enfrentan cada uno de ellos.

¹ orlando.vazquezp@aefcm.gob.mx

Escuela Normal Superior de México (ENSM), SOMIDEM

² maricela.bonillag@aefcm.gob.mx

Escuela Normal Superior de México (ENSM), SOMIDEM

³ teref.blanco@usc.es

Universidade de Santiago de Compostela (USC), SEIEM

⁴ pablo.gonzalez.sequeiros@usc.es

Universidade de Santiago de Compostela (USC), SEIEM

Vázquez, O., Bonilla, M., Blanco, T.F., & Sequeiros, P.G. (2025). Tendencias en la investigación sobre enseñanza y aprendizaje de la geometría: perspectivas desde dos grupos de trabajo. En E. Flores-Medrano, M. Molina, I. Sandoval, & I. Polo-Blanco (Eds.), *Educación Matemática en México y España: Investigaciones y líneas de trabajo compartidas* (pp. 287–315). Editorial SOMIDEM - SEIEM.
<https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S2/2025/03-11>

Palabras clave

Enseñanza de las matemáticas, geometría, recursos tecnológicos, visualización, argumentación.

Abstract

This chapter explores the research landscape in geometry teaching and learning in the GTT2 group of the Sociedad Mexicana de Investigación y Educación Matemática (SOMIDEM) and the APRENCEOM group of the Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), addressing both the challenges faced by educators and the innovative approaches that are emerging to address them. The main lines developed by each of these groups are presented through the scientific production and contributions to the symposia of each of the societies, focusing on their challenges. The results of this joint analysis allow us to identify common interests, but also some differences, particularly in terms of context, which determine and define the challenges faced by each of them.

Keywords

Mathematics education, geometry, technology resources, visualization, argumentation.

Introducción

La geometría, como rama fundamental de las matemáticas, ha experimentado una notable evolución en sus métodos de enseñanza y aprendizaje. Tradicionalmente centrada en la memorización de fórmulas y la resolución de problemas estáticos, actualmente se enfrenta a desafíos que demandan un enfoque más dinámico e interactivo. El interés actual por la enseñanza y el aprendizaje de la geometría se ha recogido en el Estudio número 26 de la Comisión Internacional de Instrucción Matemática (Lowrie et al., 2024), donde se exploran los avances recientes y los desafíos vigentes. Este análisis presta especial atención a los cambios ocurridos en las últimas tres décadas y destaca que la geometría constituye una herramienta poderosa para fomentar la comprensión de conceptos complejos, no solo dentro de las matemáticas escolares, sino también en contextos más amplios. Se analiza la naturaleza y el papel de la geometría en la educación matemática y en disciplinas relacionadas, con el objetivo de profundizar en la investigación, ampliar el conocimiento, innovar en las pedagogías y diseñar enfoques internacionales que potencien su enseñanza. Así, como temas principales del estudio se abordan: Perspectivas teóricas, Enfoques curriculares y metodológicos, Recursos para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría y Perspectivas multidisciplinares. Además, se hace hincapié en que estamos atravesando el período más dinámico y prometedor en la educación geométrica de los últimos cien años.

Siguiendo esa tendencia, los grupos que investigan en aprendizaje y enseñanza de la geometría en México y España han querido, con este capítulo, sumarse al análisis de la evolución que ha sufrido la investigación en

educación geométrica en estos últimos años dentro de cada una de las sociedades. La Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática (SOMIDEM) organiza su labor a través de 18 Grupos de Trabajo Temáticos (GTT). Entre ellos, el GTT2 se enfoca en la enseñanza y el aprendizaje de la geometría, con o sin la incorporación de tecnologías. Por su parte, la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM) cuenta con 11 grupos de trabajo, entre los que se encuentra el grupo de aprendizaje de la geometría, al que en adelante nos referiremos como APRENGEOM. Este capítulo presenta la evolución reciente de ambos grupos con relación a sus principales objetivos y líneas de investigación. Asimismo, se identifican posibles puntos de convergencia entre ambos colectivos y se destacan aquellos elementos que los diferencian.

El GTT2 y su participación en SOMIDEM

En México, en cada cambio de gobierno (sexenio), por lo general se hacen reformas educativas y con ello, cambios en los *Planes y programas de estudios* para la educación básica y Normal (formadores de docentes). Con respecto al estudio de la Geometría Plana y del Espacio, y de acuerdo con revisiones que hemos hecho en los *Planes y programas de estudio* para la educación secundaria (1993, 2006, 2011, 2017 y 2022), los contenidos geométricos han cambiado en cuanto al orden y número de temas que se deben estudiar a lo largo de los tres grados de secundaria (Cruz y Vázquez, 2025). Con relación a la formación docente en las Escuelas Normales Públicas ha ocurrido lo mismo en sus *Planes y Programas de estudios* (1983, 1999, 2018 y 2022).

La Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática (SOMIDEM), fundada en 2013, pretende promover el desarrollo y consolidación de la investigación en la Educación Matemática en México, con el propósito de promover la discusión e intercambio de conocimientos y experiencias, para de esta manera potenciar los resultados de investigación e impactar en las instituciones escolares en sus distintos niveles y en la sociedad.

Principales objetivos del GTT2

La SOMIDEM ha dividido su esfuerzo en diversos temas, para ello, se han llevado a cabo dos congresos internacionales, el primero de ellos fue en 2023 (SOMIDEM1) y el segundo congreso en 2025 (SOMIDEM2).

En ambos congresos se han formado grupos de trabajo denominados Grupo de Trabajo Temático (GTT). Los miembros y colaboradores se han ido modificando en ambos. Para el caso de SOMIDEM2 actualmente lo conforman 18 GTT. El que aquí interesa es el GTT2: *Enseñanza y aprendizaje de la geometría con o sin el uso de la tecnología* (de aquí en adelante GTT2). Actualmente, el GTT2 para SOMIDEM2 está integrado por algunos

docentes de la Licenciatura en Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas de la Escuela Normal Superior de México (ENSM) del turno vespertino. Después de haber revisado lo estipulado en SOMIDEM1, se plantearon los siguientes objetivos para SOMIDEM2:

- 1) Promover la discusión y difusión desde diferentes perspectivas de la investigación en la enseñanza y aprendizaje de la geometría con o sin el uso de la tecnología en los distintos niveles educativos y formación de docentes.
- 2) Identificar los enfoques y resultados de la investigación en torno a esta temática en México.
- 3) Construir un programa de investigación que aluda a la problemática en torno a la enseñanza y aprendizaje de la geometría y hacer que los resultados de la investigación en el tema tengan un impacto en el currículo y en el conocimiento de los profesores del país.
- 4) Crear espacios de proyectos colaborativos de investigación nacional e internacional en esta temática.

Temas centrales

El GTT2 se ha enfocado principalmente en los siguientes temas de interés:

- Resolución de problemas geométricos en la educación básica (primaria, secundaria y medio superior) y formación docente.
- Conexiones de la geometría con otras ramas de la matemática.
- Enseñanza y aprendizaje de la geometría con o sin uso de la tecnología en distintos niveles educativos.
- Uso de materiales y recursos didácticos para la enseñanza y aprendizaje de la geometría.
- La geometría en el currículo escolar.
- Propuestas didácticas de enseñanza de la geometría en los distintos niveles educativos.

Principales marcos teóricos y metodológicos empleados

El GTT2 ha decidido citar perspectiva teórica referencial, en lugar de marco teórico por muchas razones. En principio, porque la perspectiva teórica amplía la visión de las teorías considerándola de modo holístico y porque permite considerar, al mismo tiempo, varias teorías que confluyen en un solo punto (Martínez, 2006), en cambio, el término marco teórico, a decir del autor referido, indica enmarcar o delimitar la búsqueda del investigador, contrario a lo que se persigue en cada investigación. Por otra parte, un marco teórico definido nos impone, ya desde el principio, todo un mundo teórico, conceptual e interpretativo que pudiera no ser el más adecuado para entender la realidad de la investigación, sino más bien un filtro epistemológico que restringe el conjunto de interpretaciones posibles.

La perspectiva teórica referencial utilizada por el grupo GTT2 está orientada en tres perspectivas de carácter: epistemológico, cognitivo y social. La metodología de la investigación que se utiliza esencialmente es de carácter cualitativo conforme a la perspectiva de Eisner (1998), Martínez (2006), Carvalho (2008) y Álvarez-Gayou (2010). En la perspectiva epistemológica Hoffer (1981) plantea que la enseñanza de la geometría debe centrarse hacia el desarrollo de habilidades que no sean orientadas a la demostración formal ni a un nivel de comprensión superior. En este sentido, destaca cinco de este tipo de habilidades: visual, verbal, de dibujar, lógica y de modelar. Para valorar el nivel de desarrollo de estas cinco habilidades, se consideran los niveles de razonamiento geométrico de los Van Hiele (1957). Con relación a la perspectiva cognitiva, interesan los aspectos que ocurren al interior y exterior del pensamiento de los estudiantes, a este respecto, Frawley (1999) argumenta que es casi imposible pensar por los demás, esto es, nadie más sabe lo que está procesando el pensamiento de un sujeto, sino él mismo. En este sentido, podemos señalar que lo que se ha obtenido en algunas investigaciones, no son resultados de lo que realmente pensaron o de lo que pasó por la mente de los estudiantes al momento de dar respuestas a las preguntas y problemas que se les plantearon en cada situación, sino más bien, se obtuvieron evidencias de lo que ellos mismos plasmaron en los trazos que realizaron en los instrumentos de carácter conceptual y procedimental (Vázquez & Elizarrarás, 2016). Por perspectiva social, aquí nos referimos a las matemáticas en la sociedad, pues la matemática, más que un conocimiento en sí mismo, debe ser útil en la vida cotidiana.

Resultados recientes o proyectos destacados

Algunas de las acciones realizadas por los integrantes del GTT2 son investigaciones en curso, otras están en proceso de ser publicadas, tales como *Resolución de problemas geométricos en la formación docente inicial* (Vázquez et al., 2023). Otro proyecto concluido como parte del año sabático en el ciclo escolar 2022-2023 fue el de *Resolución de problemas geométricos con estudiantes normalistas de la licenciatura en enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación secundaria* (aún no publicado), cuyos derechos de autor le pertenecen a la Secretaría de Educación Pública (SEP) por haber sido financiados por ésta.

Como ya se ha referido, el primer congreso de SOMIDEM, denominado SOMIDEM1, se llevó a cabo mediante la modalidad virtual del 9 al 14 de marzo de 2023. Este congreso permitió la participación de asociados de México, pero también de investigadores de otros países, tales como Argentina, Chile, Colombia, España, Estados Unidos, Países Bajos, San Marino y Venezuela. SOMIDEM1 estuvo constituido por 18 GTT, que representan los distintos intereses de la comunidad SOMIDEM. Como producto de

SOMIDEM1, surgió una publicación (Sánchez et al., 2024) con 70 capítulos en los que se pueden encontrar dos trabajos pertenecientes al GTT2 y cinco más que están relacionados con el estudio de la geometría incluidos en otros GTT. Derivado de esta publicación se pudieron identificar algunas líneas temáticas, a saber: Conexiones de la geometría con otras ramas de la matemática.

Benavides (2024) planteó una propuesta didáctica mediante la articulación pedagógica interdisciplinar justificada por la dificultad de los estudiantes de Construcciones Metálicas en el logro de competencias matemáticas, según los resultados de pruebas internas y externas. La articulación se realiza en geometría bajo el modelo de razonamiento y fases que propone Van Hiele y el Aprendizaje Basado en Problemas. Con dicha propuesta se espera obtener evidencias de integración de conocimientos, del trabajo en equipo y de la autonomía en la indagación de información y adquisición de conocimientos.

Enseñanza de la geometría en la educación básica y formación docente

Fúmemé (2024), como parte de las actividades investigativas del Doctorado Interinstitucional en Educación, expone los resultados de una propuesta de actividades que tienen como eje fundamental la gestión de los procesos cognitivos de visualización, representación y argumentación. Este estudio se enfocó en representaciones de algunos cuerpos geométricos realizadas por estudiantes de tercer grado de educación primaria. A partir de un análisis del enfoque mixto de investigación, se describe lo ocurrido en el proceso de aprendizaje de formas de representaciones de algunos cuerpos geométricos y se contrastan las representaciones cuantitativamente. El principal resultado indica que los procesos cognitivos destacados permitieron un alto grado de variación en el nivel de iconicidad de las representaciones.

Núñez y Cabañas (2024) describen el razonamiento matemático basado en los argumentos de dos profesores de secundaria, en el marco de la generalización de patrones cuadráticos figurales. El estudio se fundamenta en una propuesta teórico- metodológica que articula definiciones de Peirce con elementos del modelo argumentativo de Toulmin para delimitar el razonamiento desde los argumentos. Los resultados evidencian que los profesores se movilizaron en el razonamiento abductivo, inductivo y deductivo, basados en acciones como el conteo estratégico, la composición y descomposición del patrón figural, la formulación, verificación y validación de conjeturas.

Enseñanza y aprendizaje de la geometría con uso de la tecnología en nivel universitario

Fernández y Santacruz (2024) presentaron avances de una investigación doctoral sobre las habilidades de visualización dinámica tridimensional con

estudiantes universitarios cuando se les plantean problemas de lugares geométricos en el espacio usando geometría dinámica. Este estudio buscó fomentar habilidades de visualización tales como control teórico, predicción geométrica y cristalización. De modo preliminar encontraron que los estudiantes presentan dificultades para imaginar lugares geométricos en el espacio; sin embargo, el uso de geometría dinámica durante las actividades promovió que los estudiantes desarrollaran habilidades de visualización en geometría 3D, tales como la predicción y la construcción geométrica.

Propuestas de enseñanza en el nivel básico y medio superior

La historia de las matemáticas también juega un papel importante en la enseñanza de la geometría, a este respecto, Viramontes y Chavira (2024) plantean el uso de fuentes históricas originales en el diseño de actividades para promover el desarrollo del pensamiento matemático y, a su vez, dotar a los profesores de herramientas didácticas fundamentadas en la historia de las matemáticas para su uso en el aula. El marco teórico contempla el diseño de las actividades de aprendizaje que se fundamentan en la teoría de la cognición distribuida que estudia la coordinación entre los individuos, los artefactos y el medio ambiente. La metodología utilizada es la creación de ambientes de aprendizaje reflexivos de indagación.

En el nivel medio superior, Rodríguez y Espinosa (2024) estudiaron la construcción de la identidad matemática en alumnas que cursan el tercer semestre de la Educación Media Superior, con la finalidad de hacer visibles sus procesos de construcción en el área de las matemáticas y así contribuir a la línea de investigación Género y Matemáticas. La investigación tuvo como interés considerar la historia matemática y los conocimientos previos con los que cuentan las mujeres al resolver problemas. Para este fin, utilizaron la perspectiva de modelos y modelación, lo que permite que el estudiantado realice múltiples interpretaciones para la construcción de una posible solución a problemas. Es una investigación descriptiva con enfoque cualitativo, se pretende diseñar actividades de modelación en geometría analítica desde la perspectiva de modelos y modelación.

Resolución de problemas geométricos en la formación docente

Flores y Cabañas (2024) han investigado el proceso configural de dos futuros profesores de matemáticas al resolver un problema clásico de geometría. Se encontró que está anclado a dos tipos de aprehensiones: la aprehensión discursiva y la aprehensión operativa. El análisis de los datos empíricos se apoyó en el modelo cognitivo del razonamiento configural para identificar la conjetura que establecen, así como los procesos lógico-deductivos que desarrollan para probarla. Los hallazgos muestran que la coordinación entre las aprehensiones discursiva y operativa favoreció el desarrollo de procesos

lógico-deductivos, lo que desembocó en el desarrollo de un proceso de truncamiento, y con ello la demostración del problema.

SOMIDEM2 se llevó a cabo del 10 al 16 de marzo de 2025. Nuevamente participaron 18 GTT. Para el GTT2 se recopilaron 12 resúmenes de los cuales solo se aceptaron 9 para su publicación en las preactas (<https://somidem.org.mx/?view=preactagt2brt&id=1220>). A continuación, se agrupan los resúmenes de acuerdo con las líneas temáticas de interés del GTT2.

Enseñanza y aprendizaje de la geometría en educación secundaria

Solis (2025) expone el *barroco mexicano como pretexto del uso de la geometría en educación básica*. Plantea que la geometría en educación básica tiene como uno de sus propósitos el estudio de las formas y figuras (como triángulos, rectángulos y círculos), así como describir sus propiedades. Con el *Plan de estudios* (SEP, 2024) el campo de formación Saberes y pensamiento científico tiene como uno de sus objetos de aprendizaje la comprensión y explicación de diversos fenómenos y procesos naturales que involucran la tecnología. Con base en lo anterior, en este trabajo se realiza una propuesta interdisciplinaria que considera el descubrimiento realizado en 1995 por el arquitecto mexicano Franklin Fernández: el trazo original del Barroco a través de un anagrama denominado “Signo de María”. Localizado en algunos edificios religiosos de esos periodos, este trabajo de dicho arquitecto es relevante, dado que demostró con estudios geométricos que el anagrama en relieve representa el trazado armónico de algunas partes arquitectónicas. A partir de este trabajo, se puede hacer más recreativa la enseñanza de la geometría en educación básica y, al mismo tiempo, fomentar en los estudiantes un gusto por la matemática. Quijano y Corica (2025) se centran en el estudio de la geometría espacial en la escuela secundaria. Con la Teoría Antropológica de lo Didáctico como marco referencial, se caracteriza la organización matemática estudiada en relación con la geometría espacial en los primeros cuatro años de escuelas de secundaria. Se describieron y analizaron las tareas escolares presentes en el registro de clases de estudiantes de tres instituciones de una ciudad de la provincia de Río Negro, Argentina. Los principales resultados señalan que el estudio de la geometría espacial es limitado, mayormente vinculado con la aritmética y álgebra. Particularmente, las tareas se relacionan con el cálculo de áreas y volúmenes de cuerpos, mediante fórmulas brindadas previamente.

Enseñanza y aprendizaje de la geometría con o sin uso de la tecnología en el nivel medio superior y universitario

En el nivel medio superior, Cabral y Alvarado (2025) proponen un ambiente de aprendizaje diseñado bajo la metodología STEAM para las relaciones

trigonométricas en situaciones reales con estudiantes de nivel medio superior. La metodología es la Investigación Basada en el Diseño, que sigue ciclos iterativos de concepción de las actividades del ambiente de aprendizaje, su implementación y validación empírica, así como la mejora continua. La propuesta sucede en un contexto forestal en Durango, donde los estudiantes diseñan prototipos para medir alturas de árboles y delimitar terrenos con métodos que requieren modelar relaciones trigonométricas. En el estudio participaron 27 estudiantes, los datos se recolectaron con videos, notas de campo de observadores participantes, fotografías de producciones escritas y prototipos construidos por los estudiantes. La validación se realiza a la luz de los principios de diseño del marco de integración STEAM, destacando los aprendizajes en trigonometría que promueve. Alonso y Hernández (2025) proponen la enseñanza de la geometría a través de GeoGebra como herramienta clave para estudiantes de Ingeniería en Computación. El estudio alude a la enseñanza de matemáticas en la Facultad de Ingeniería en el estado de Guerrero y al tipo de dificultades que enfrentan los estudiantes para conectar conceptos abstractos con aplicaciones prácticas. Para ello, se utiliza GeoGebra como medio de enseñanza para visualizar conceptos de la geometría como vectores y matrices, facilitando su comprensión. Los resultados de este estudio en proceso indican que GeoGebra mejora la comprensión de la geometría, permitiendo a los estudiantes identificar y representar relaciones vectoriales con precisión. Esto sugiere que herramientas tecnológicas como GeoGebra son efectivas para fortalecer la enseñanza de matemáticas en el contexto universitario. López (2025), en su estudio denominado *Repensando la Geometría Analítica Escolar*, expone los resultados y reflexiones sobre la Transposición Didáctica que ha sufrido la Geometría Analítica en la escuela. Esta caracterización se hace a partir de análisis documentales y comparaciones entre un estudio histórico-epistemológico y programas de estudio de matemáticas y libros de textos. Se reportan las características de esta transposición e identifican tres elementos fundamentales que se han perdido en el proceso transpositivo: El método analítico, el rol del parámetro y la ecuación paramétrica, y el sistema de referencia desde un punto de vista más amplio. Con base en estas consideraciones se propone una reflexión para reducir la distancia entre los saberes originales y los escolares de la Geometría Analítica.

Enseñanza y aprendizaje de la geometría en la formación docente

Bonilla et al. (2025) presentan los resultados de lo que realizó un docente en formación inicial de la Escuela Normal Superior de México (ENSM) con respecto a la implementación de una secuencia didáctica en una escuela secundaria sobre el tema “Explora las figuras básicas como rectas y ángulos y su notación”. La investigación se apoya en el Enfoque Ontosemiótico del

Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS), que es un marco teórico integrativo que ofrece de herramientas teóricas necesarias para el estudio de los fenómenos didácticos en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Se pone atención en la idoneidad didáctica, específicamente en la idoneidad en la faceta epistémica, en la que el docente señala que la reflexión realizada le permitió analizar su propia práctica, lo que le ayudará a lograr mejoras progresivas en la misma y a tomar decisiones adecuadas en las distintas fases relacionadas con el diseño, la implementación y la evaluación de la secuencia didáctica. Por su parte, Vázquez et al. (2025) reportan el interés por identificar, analizar e interpretar aspectos relacionados con la geometría plana y del espacio con docentes en formación de la ENSM del turno vespertino. El estudio está en proceso de indagar más sobre los hallazgos y evidencias que se encontraron al aplicar instrumentos de carácter conceptual y procedimental relacionados con el estudio de la geometría plana y del espacio. Esto se llevó a cabo durante el ciclo escolar 2024-2025 con dos grupos de primer semestre que están cursando la Licenciatura en Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas (LEAM).

La geometría en el currículo escolar

Cruz y Vázquez (2025) han realizado un *análisis comparativo de los Programas de Estudio de Geometría Plana y del Espacio de nivel secundaria de 1993, 2006, 2011, 2017 y 2022*. En este reporte de investigación, se analizan y contrastan los cambios que han tenido los diferentes Planes y Programas de estudios de las diferentes Reformas Educativas que se han realizado desde 1993 hasta 2022, se pretende indagar los contenidos geométricos presentes en cada reforma educativa, el tipo de enfoques de enseñanza, así como los propósitos perseguidos en cada una de ellas.

Uso de materiales y recursos didácticos en la enseñanza y aprendizaje de la geometría

Ramírez y Soto (2025) plantean que la geometría es fundamental en la educación matemática, pues fomenta el razonamiento lógico y el pensamiento espacial. Sin embargo, su enseñanza enfrenta diversas dificultades, especialmente al traducir conceptos abstractos en aprendizajes significativos. En este contexto, el enfoque del Building Thinking Classroom (BTC) propuesto por Liljedahl (2021) ofrece un marco para rediseñar las dinámicas de enseñanza, destacando el uso de materiales didácticos como recursos esenciales para estimular el pensamiento matemático y la participación. Este artículo explora cómo el uso de materiales didácticos, integrado en un BTC, transforma el aprendizaje geométrico. A través de una metodología mixta, se propone una investigación para evaluar el impacto de estos materiales en el desarrollo de habilidades geométricas. El análisis sugiere

que los recursos manipulativos y visuales fomentan la interacción, la reflexión y el aprendizaje en entornos colaborativos.

Líneas futuras del GTT2

Desafíos o temas emergentes

El grupo GTT2 considera que necesitamos investigar qué ocurre en educación preescolar (3 a 6 años) y primaria (6 a 12 años), es decir, qué estrategias y materiales didácticos de enseñanza utilizan las y los docentes de este nivel educativo para enseñar a los infantes nociones geométricas, figuras y cuerpos geométricos, y cómo interactúan los docentes con los infantes y, al mismo tiempo, qué reacciones o estímulos tienen los infantes al propiciarles los materiales didácticos. Es por ello que se requiere:

- Análisis del currículo con relación a los contenidos de geometría en educación preescolar, primaria, secundaria, medio superior y Educación Normal (formación de docentes).
- Propuestas metodológicas para la enseñanza y aprendizaje de la geometría en educación preescolar, primaria, secundaria, media superior y Formación Docente.

El grupo APRENGEOM en la SEIEM

El grupo APRENGEOM es uno de los once grupos de trabajo de la SEIEM. Su objetivo principal es el estudio del aprendizaje y la enseñanza de la geometría en todos los niveles educativos, con especial atención al uso de diversos recursos —tanto manipulativos como tecnológicos— como facilitadores de estos procesos. Se trata de un grupo abierto dirigido por un coordinador o coordinadora, al igual que el resto de los grupos de la sociedad, compuesto en su mayoría por socios de la SEIEM vinculados al área de Didáctica de la Matemática y a la formación del profesorado. No obstante, también participan estudiantes de doctorado y, en menor medida, profesoras y profesores de los niveles de educación secundaria y primaria. La pertenencia a un grupo de trabajo de la sociedad no impide la participación simultánea en otros. Esta estructura flexible contribuye a que exista una notable variabilidad tanto en el número de integrantes como en sus perfiles formativos y en los objetivos que persiguen.

A lo largo de los 27 años de historia de la SEIEM, la geometría ha ocupado un lugar destacado en cuatro de los simposios de la sociedad, habiéndosele dedicado uno de los seminarios principales y dado, por tanto, protagonismo al grupo APRENGEOM. En el primero de ellos, el tercer simposio de la SEIEM (Ortega, 1999), se abordaron múltiples cuestiones vinculadas a la geometría, pero sin una línea temática común. El segundo seminario se centró en la enseñanza y el aprendizaje de la geometría (Moreno et al., 2010) y en el del 2013 el eje temático se orientó hacia la

investigación en didáctica de la geometría. De la Torre (2013) señalaba entonces que, a pesar de su relevancia, la investigación en didáctica de la geometría no figuraba entre las áreas más activas en las agendas de investigación, tanto a nivel nacional como internacional, pero también se observaba un creciente interés y un ligero aumento en las publicaciones relacionadas con la geometría. Este interés se ha visto impulsado por el uso del software de geometría dinámica GeoGebra, que en aquel momento ganaba progresivamente popularidad y actualmente se encuentra ampliamente difundido en todos los niveles educativos. En efecto, a lo largo de esta última década, los avances tecnológicos han ampliado considerablemente las posibilidades para la enseñanza y aprendizaje de la geometría. Además de este, recursos como la robótica, el diseño 3D y las tecnologías de realidad aumentada y virtual se han integrado progresivamente, abriendo nuevas vías para la investigación y fortaleciendo el interés por la didáctica de la geometría en los foros académicos nacionales e internacionales. En 2024, en el cuarto seminario de la SEIEM dedicado a la geometría bajo el título *Geometría en evolución: desafíos e innovación en el aprendizaje*, se presentaron tres perspectivas sobre la adaptación de la enseñanza y el aprendizaje de la geometría a un panorama educativo en constante evolución (Blanco, 2024). Las dos primeras mostraron, respectivamente, cómo se están adaptando teorías de otras disciplinas y cómo se integran varios marcos teóricos en la Didáctica de la Matemática para comprender mejor cómo aprenden los estudiantes y sus dificultades. La tercera se centró en la realidad virtual como recurso emergente.

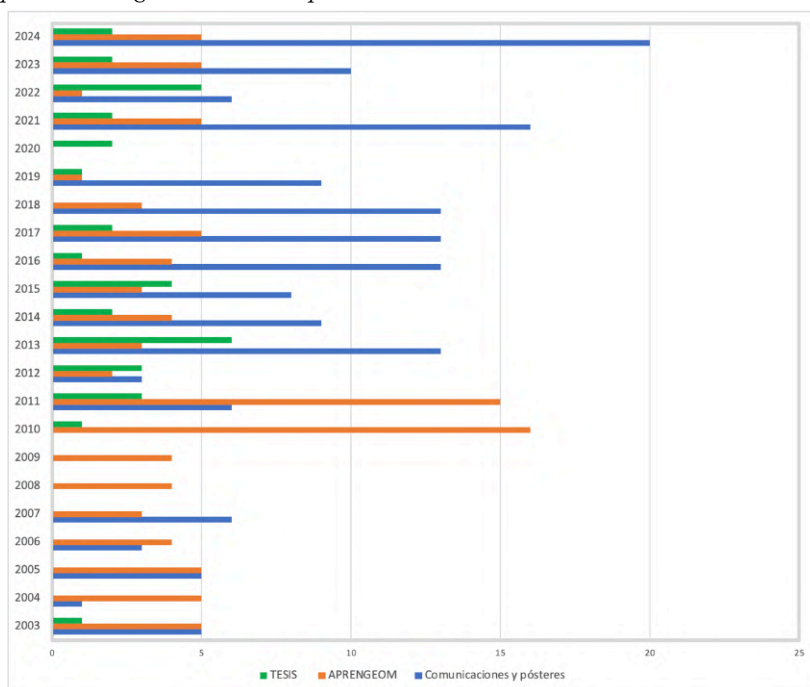
En los simposios de la SEIEM, además de los seminarios generales y las comunicaciones, todos los grupos de trabajo disponen de un espacio específico para desarrollar sus actividades. En estos espacios se presentan investigaciones recientes —tanto en estado inicial como ya finalizadas—, tesis, proyectos o talleres prácticos. En Blanco (2024) se ofrece una visión general sobre la presencia de la geometría en los simposios de la SEIEM, así como de la actividad desarrollada por el grupo APRENGEOM desde el año 2003. En el siguiente gráfico hemos ampliado la información allí recogida incorporando los datos correspondientes al último simposio, así como las tesis de geometría disponibles en la página web de la sociedad. El gráfico muestra tanto las comunicaciones presentadas con orientación geométrica como las contribuciones realizadas en el marco de APRENGEOM.

Muchas de las comunicaciones sobre geometría presentadas en los simposios de la SEIEM y de las investigaciones incipientes propuestas en APRENGEOM, así como de las tesis, han culminado en artículos en revistas JCR o SJR, como Enseñanza de las Ciencias, AIEM, RELIME, Educación Matemática o Journal on Mathematics Education. En Barquero et al. (2022), con motivo del *45th Conference of the International Group for the*

Psychology of Mathematics Education (PME) celebrado en Alicante, se revisó la producción española, no exclusivamente del grupo APRENGEOM, enfocada en la investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje de la geometría que ha sido publicada en revistas de impacto. El análisis muestra que la producción empieza a ser relevante a partir de 2016 y que el nivel educativo al que se han dirigido principalmente las investigaciones es el de la educación secundaria, representando casi el doble de las publicaciones en comparación con otros niveles. Le sigue la educación superior, con un enfoque especial en la formación de futuros maestros, y en los últimos años han aumentado significativamente los trabajos dirigidos a educación primaria y se ha observado un avance importante en la investigación en la etapa de educación infantil (Barquero et al., 2022). A continuación, presentamos un panorama de las actuales líneas de interés españolas en didáctica de la geometría, elaborado a partir de una revisión de la producción mencionada.

Tabla 1

Aportaciones de geometría a los simposios de la SEIEM



Fuente: elaboración propia

Líneas de investigación actuales en APRENGEOM

Las líneas de investigación actuales del grupo APRENGEOM se reúnen en torno a cuatro ejes principales: (1) Visualización y razonamiento geométrico

(2) Escalas cognitivas (3) Procesos de definir en contextos geométricos y (4) Entornos y mediadores tecnológicos en la enseñanza de la geometría. A continuación, se detalla cada uno de ellos con sus respectivas líneas asociadas, indicando las diferentes teorías que los sustentan.

Visualización y razonamiento geométrico

Las investigaciones sobre visualización y razonamiento geométrico se están enfocando actualmente en tres líneas: en su articulación con la argumentación en los procesos de conjeturar y probar, en estudiantes con talento y en su desarrollo en la etapa de infantil.

La articulación entre visualización y argumentación se estudia de manera destacada desde el marco del Razonamiento Configural (Gironés et al., 2010; Prior & Torregrosa, 2020), que se muestra como un modelo teórico con una gran capacidad para abordar la articulación entre visualización y razonamiento en el desarrollo de los procesos deductivos en la resolución de los problemas de probar en geometría en los que se proporciona una configuración geométrica. Parte de los estudios de Duval (1998) sobre las aprehensiones perceptivas (referidas al reconocimiento visual de una forma, incluida la capacidad de reconocer varias subconfiguraciones en la configuración dada), discursivas (que implican asociar una configuración identificada con una afirmación matemática) y operativas (que tienen que ver con la modificación de la configuración original para resolver el problema), denominándose razonamiento configuracional a la coordinación de las aprehensiones discursivas y operativas. Se estudia la influencia que tienen las figuras iniciales, que acompañan a los problemas, y las modificaciones posteriores de estas figuras en el desarrollo de las aprehensiones discursiva y operativa, que constituyen los vínculos entre los procesos de razonamiento matemático y la visualización. Este modelo ha sido testado en diferentes investigaciones, analizando respuestas de alumnos a problemas de demostración de propiedades geométricas (Clemente & Llinares, 2015; Llinares & Clemente, 2014; Prior & Torregrosa, 2020) y se ha extendido a la resolución de problemas empíricos de geometría (Llinares & Clemente, 2019; Saorín et al., 2019; Torregrosa, 2017), en los que los datos iniciales son numéricos o literales y requieren la incorporación del registro algebraico.

Dentro de la línea de investigación centrada en caracterizar las capacidades de estudiantes con talento matemático en torno a la visualización y la generalización, los trabajos de Gutiérrez et al. (2018a, 2018b), Ramírez y Flores (2017) y Ramírez et al. (2018) han sido pioneros en el avance del entendimiento de los aspectos cognitivos que caracterizan este talento. Se ha realizado un seguimiento a este tipo de alumnado en talleres de demostración matemática y se ha avanzado en la determinación de categorías de análisis para estudiar la evolución en su capacidad de justificación y demos-

tración (Mora et al., 2024; Ramírez-Uclés & Ramírez, 2020; 2023; Ramírez-Uclés & Ruiz-Hidalgo, 2022). Desde el punto de vista teórico, se han establecido conexiones entre los marcos teóricos asociados al talento matemático y a la demostración matemática. Desde el punto de vista experimental, se ha identificado el tipo de demostración utilizado, estableciendo el papel de cada uno de ellos, su dependencia y las diferentes estrategias utilizadas por los estudiantes.

La última línea de investigación dentro de este eje está enfocada en analizar los procesos de enseñanza-aprendizaje relacionados con la orientación espacial y la visualización y ha sido impulsada principalmente por los trabajos de Berciano et al. (2017) y Jiménez-Gestal et al. (2022). Se estudian las respuestas de estudiantes de 4 y 5 años a tareas geométricas examinando el nivel de razonamiento y aprehensión evidenciado en sus argumentaciones, identificándose diferentes itinerarios de aprendizaje que oscilan entre la aprehensión perceptiva y discursiva del nivel 1 y ciertas características del nivel 2 del modelo de Van Hiele, pero también flujos de evolución significativamente distintos, que ponen de manifiesto la diversidad en el desarrollo del razonamiento geométrico a edades tempranas. A la par, Nogueira et al. (2025) han presentado recientemente el diseño de un instrumento para analizar el pensamiento espacial en educación infantil y su validación por un comité de expertos.

Escalas cognitivas

El segundo eje de investigación del grupo se centra en el desarrollo de escalas cognitivas, entendidas como herramientas clave para analizar tareas matemáticas. Estas escalas permiten identificar y describir niveles de complejidad cognitiva implicados en el desarrollo de procesos matemáticos específicos, así como en el fomento de habilidades de visualización.

Investigaciones españolas recientes han considerado el modelo de Van Hiele para el diseño educativo con sentido inclusivo (Aravena et al., 2016; Gutiérrez et al., 2021), para su adaptación a grafos y para la caracterización del quinto nivel (Arnal-Bailera et al., 2024; González-Herrera et al., 2022).

Aravena et al. (2016) evalúan la variación en el nivel de razonamiento geométrico de estudiantes de educación media de escuelas con población vulnerable en Chile como resultado de una intervención sobre semejanza de formas planas y espaciales diseñada de acuerdo con el modelo de Van Hiele, mostrando un avance notable en la adquisición de los niveles de razonamiento 1 a 3 del grupo experimental. En Gutiérrez et al. (2021) se presenta una propuesta para trabajar simetrías planas en los últimos años de educación básica a través de un libro electrónico interactivo que incorpora el uso de GeoGebra, junto con un análisis en red de la estructura y contenidos de una unidad didáctica basado en la articulación de los niveles de Van Hiele y los

niveles de demanda cognitiva en la resolución de problemas matemáticos (Smith & Stein, 1998). González-Herrera et al. (2022) han avanzado adaptando el modelo de Van Hiele al estudio de grafos y considerando los niveles de argumentación en teoría de grafos desde la perspectiva de este modelo. Los descriptores propuestos para los cuatro niveles han sido validados con un análisis teórico a través de los procesos de razonamiento activados al resolver problemas de teoría de grafos. Por su parte, Arnal-Bailera et al. (2024) han elaborado una serie de indicadores precisos de cada proceso que involucra al quinto nivel, siguiendo la metodología Delphi, a partir de la información aportada por expertos en geometría.

Se están desarrollando también trabajos sobre niveles de aprehensión al margen del modelo de Van Hiele. Las investigaciones de Bernabeu et al. (2021a, 2021b, 2021c, 2022 y 2024) les han permitido delimitar cuatro niveles de sofisticación en el pensamiento de estudiantes de primaria en torno al concepto de polígono y las clases de polígono. Estos niveles describen cómo las aprehensiones cognitivas, la deconstrucción dimensional de Duval (2017) y el uso del lenguaje matemático intervienen en el proceso mental de estructuración espacial en la comprensión de clases de polígonos. Por otra parte, desde el interés por la instrucción de la visualización, y desde el marco del EOS, Blanco et al. (2019) han investigado el establecimiento de niveles de visualización y razonamiento espacial en tareas visuales, estableciendo cuatro niveles que dependen del tipo de acción y respuesta requerida en la tarea y de las habilidades de visualización necesarias para resolverlas.

Procesos de definir en contextos geométricos

El tercer eje de investigación desarrolla una línea innovadora centrada en los procesos de definición, que busca aportar nuevas perspectivas teóricas al campo de la didáctica de la geometría (Gavilán-Izquierdo, 2024). El marco teórico empleado es la teoría de la *comognición* de Sfard (2007), que entiende el aprendizaje matemático a partir de los cambios en el discurso matemático, enfocados en las cuatro propiedades del discurso: el uso de palabras, los mediadores visuales, las narrativas y las rutinas (Gavilán-Izquierdo, 2024). Este enfoque está llevando a identificar rutinas a la hora de definir y estudiar la aparición de posibles conflictos comognitivos con estudiantes de educación no obligatoria y futuros maestros de Educación Primaria. El contexto de las definiciones se ha centrado en paralelogramos (Escudero et al., 2014; Sánchez & García, 2014) y sólidos, generalmente poliedros o prismas (Fernández-León et al., 2021; González-Regaña et al. 2021; Roper Quintero & Zubieta Badillo, 2023). Estas investigaciones ponen de manifiesto que en el proceso de aprendizaje de la práctica de definir hay dos objetos de estudio, el objeto de estudio matemático y sus definiciones, identificándose conflictos comognitivos a partir de las diferencias entre

normas sociomatemáticas y normas matemáticas presentes en los discursos. En estos trabajos, los mediadores visuales solo se consideran cuando aparecen explícitamente en el discurso de los estudiantes, permitiendo resolver en algunos casos los conflictos comognitivos que surgen (González-Regaña et al., 2021). Una futura línea de interés podría centrarse precisamente en estudiar el papel de los mediadores desde este marco en el proceso de definir.

Entornos y mediadores tecnológicos en la enseñanza de la geometría

El último eje de interés va unido al avance en las últimas dos décadas de los entornos y mediadores tecnológicos que están transformando significativamente la enseñanza y el aprendizaje de la geometría, permitiendo explorar nuevas metodologías, facilitando la transición entre las distintas áreas geométricas y promoviendo competencias argumentativas en estudiantes de diversos niveles educativos. Dentro de este eje, las líneas de investigación giran en torno a GeoGebra, robótica, diseño e impresión 3D y realidad virtual.

En el contexto de APRENCEOM han sido numerosos los trabajos, desde distintos enfoques teóricos, que han puesto el foco en el papel del GeoGebra como mediador. Gómez-Chacón y Escribano (2014) han mostrado cómo puede facilitar el paso de una geometría proto-axiomática a una axiomática completa desde el marco de los Espacios de Trabajo Geométrico, que pretende describir procesos de visualización icónica y no icónica, junto con la deconstrucción instrumental y dimensional, promoviendo así una comprensión profunda en el futuro profesorado de matemáticas. Desde el EOS se ha analizado la influencia de GeoGebra en los procesos de enseñanza y aprendizaje, determinando tres usos centrales: exploración, ilustración y demostración (Lasa y Wilhelmi, 2013). Este desarrollo se ha aplicado al diseño de situaciones para diferentes etapas educativas, desde los primeros años de Educación Primaria (Lasa et al., 2014). Desde la Teoría de la Génesis Instrumental, algunas investigaciones (Martín Nieto & Ruiz-López, 2022; 2023; Ruiz-López, 2018) analizan cómo la instrumentación adecuada puede mejorar la enseñanza de la geometría, a través del estudio de discusiones en gran grupo con futuros maestros en torno a la enseñanza de las isometrías en el plano. En varios de los trabajos, se destaca la contribución de GeoGebra a nivel del dominio afectivo (García-López et al., 2021; Gómez-Chacón et al., 2016; Romero & García, 2024).

Las novedades que ha ido ofreciendo GeoGebra han supuesto el punto de partida para algunas investigaciones. Paneque et al. (2017) han hecho aportaciones respecto al desarrollo de las competencias argumentativas que proporciona el sistema de tutoría inteligente GeoGebraTUTOR, interpretando cómo media este sistema de tutoría en los procesos argumentativos de estudiantes de 16-17 años. Más recientemente, la incorporación a GeoGebra de un subsistema de comprobación automática de teoremas

(ART) que es capaz de calcular pruebas de enunciados de geometría euclidiana ha supuesto el inicio de una potencial línea de investigación en torno a la potencialidad educativa de esta herramienta. En trabajos como los de Kovács et al. (2022) y Recio et al. (2019) se resumen las capacidades de ART en GeoGebra, se discuten las primeras propuestas de investigación de su uso en el aula y se reflexiona sobre el diseño de tareas que puedan aprovechar estas nuevas funcionalidades, proponiendo un camino concreto para la incorporación de ART en el aula. En trabajos recientes (Botana et al., 2024) se ha considerado la comparativa de rendimiento entre ART y Chat GPT, sosteniéndose la hipótesis de que las dos herramientas pueden combinarse para obtener resultados sólidos y más relevantes.

Otra línea en el campo de lo tecnológico se abre con las aportaciones sobre el uso de la robótica educativa en la geometría. Los efectos de una intervención con robots con ganancias estadísticamente significativas en la promoción del pensamiento computacional y de habilidades de visualización como la rotación mental se pueden ver, por ejemplo, en los estudios de Bellas et al. (2019) o Diago et al. (2021).

El modelado e impresión 3D es otro de los recursos que está recibiendo atención por la virtud que se le supone para el desarrollo de conocimientos y habilidades matemáticas, así como para permitir establecer conexiones inter e intramatemáticas. Beltrán-Pellicer y Rodríguez-Jaso (2017) exploran los posibles usos de las impresoras 3D en matemáticas en diferentes niveles educativos, centrándose en el uso de BlocksCAD, un entorno web de programación visual por bloques, de aspecto similar a Scratch. Con esta herramienta, los cuerpos en el espacio se describen mediante algoritmos que incluyen el uso de unas pocas primitivas, como prismas y esferas, transformaciones geométricas y operaciones lógicas y de conjunto. En Beltrán-Pellicer et al. (2020) se describe el recurso y se proponen ejemplos de tareas que se han puesto en práctica con alumnado del segundo ciclo de la ESO y en Beltrán-Pellicer y Muñoz-Escolano (2021) se presenta una experiencia con futuros docentes. Por su parte, Fernández-López et al. (2024) exploran el impacto a nivel del dominio afectivo del empleo del diseño 3D en un proyecto STEAM con futuro profesorado de primaria.

La realidad aumentada y la realidad virtual inmersiva son otros de los recursos tecnológicos emergentes sobre los que se está configurando una línea dentro de este eje. Miembros del grupo APRENCEOM participan en el desarrollo de NeoTrie VR, un software de geometría dinámica que utiliza realidad virtual inmersiva, permitiendo a los estudiantes crear, visualizar, manipular e interactuar dinámicamente con objetos y modelos geométricos en 3D dentro de un entorno tridimensional (Moral-Sánchez et al., 2023; Rodríguez et al., 2021). Este software promueve el desarrollo de los procesos de visualización, construcción y argumentación, fundamentales en

geometría. Se están llevando a cabo investigaciones centradas en su uso para la enseñanza y aprendizaje de la geometría en aulas de educación primaria y secundaria (Rodríguez, 2021; Rodríguez et al., 2021; Romero et al., 2023) y se están explorando sus beneficios en comparación con los métodos clásicos para el estudio de las formas 3D y su relación con la geometría 2D (Flores-Bascuñana et al., 2019).

Líneas futuras y Desafíos en APRENGEOM

Desde APRENGEOM se han identificado distintas líneas de investigación que marcarán parte del rumbo de la investigación del grupo en los próximos años y apuntan a una serie de desafíos a los que la investigación en didáctica de la geometría debiera dar respuesta.

Los trabajos sobre visualización y razonamiento espacial han ido enfocándose hacia su relación con la argumentación y el talento matemático, y la producción hacia el nivel de educación infantil comienza a despegar. En los niveles superiores, cobra protagonismo el estudio de los procesos de definir en geometría. A la vista de la evolución de las líneas aquí presentadas, parece que el devenir natural debiera ir en parte hacia el papel que juegan los mediadores tecnológicos en los distintos procesos matemáticos. Recíprocamente, las líneas de investigación en torno a recursos tecnológicos iniciadas debieran afinar cada vez más en la delimitación de su potencial contribución al desarrollo de esos procesos y también al nivel del dominio afectivo.

En este sentido, un primer desafío apunta a la integración de teorías y perspectivas emergentes para analizar los procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría. El potencial de combinar diversos marcos teóricos y focos de interés abre nuevas posibilidades de interpretación y análisis que podrían mejorar la calidad de los resultados de investigación de cara a su transferencia al diseño de tareas y desarrollo de nuevas metodologías.

En la misma dirección, se hace necesaria la colaboración con docentes de distintos niveles educativos en el diseño y evaluación de propuestas basadas en recursos emergentes (razonamiento automático, realidad aumentada...) ante el reto de evaluar su efectividad real como instrumentos para el aprendizaje, garantizando su accesibilidad y equidad en contextos diversos. Se subraya la necesidad de romper las barreras tradicionales entre las escuelas y las facultades de educación, promoviendo un diálogo constante y bidireccional que permita construir una visión más amplia y conectada de la realidad educativa. Teniendo en cuenta el objetivo 4 del desarrollo sostenible (ONU, 2015), otra línea de investigación futura se dirige a fortalecer la accesibilidad educativa y fomentar la inclusión del alumnado con necesidades educativas especiales, en lo que a la comprensión de conceptos geométricos se refiere. Esto implica, en muchos casos, la creación de materiales para la geometría específicos de la necesidad y el análisis de su impacto en el alumnado.

Por último, desde un enfoque más holístico, todo lo anterior debiera apuntar a la fortaleza de la formación inicial y continua del profesorado en los niveles de infantil, primaria y secundaria. Se hace necesaria una preparación sólida en contenidos geométricos y didácticos que permita abordar la geometría con profundidad y adaptabilidad. El actual enfoque STEAM en los currículos exige desarrollar marcos de investigación que exploren cómo las estrategias interdisciplinarias y las tecnologías están transformando la enseñanza de la geometría. Esto implica, como se ha dicho, evaluar el impacto de herramientas digitales específicas y, por otro, fomentar la colaboración interdisciplinaria. Con relación a esto último, la concreción de propuestas formativas fundamentadas parece necesitar el diálogo entre los marcos teóricos de formación del profesorado de matemáticas y los de otras disciplinas científico-tecnológicas y sociales.

En síntesis, los desafíos en la enseñanza y aprendizaje de la geometría, desde APRENGEOM, requieren un enfoque integral que combine formación docente, innovación tecnológica, investigación interdisciplinaria y una conexión más estrecha entre la teoría y la práctica educativa.

Conclusiones

Sin duda alguna, SOMIDEM y SEIEM comparten intereses comunes con relación al estudio de la geometría. Se ha observado convergencia tanto a nivel de algunos de los marcos teóricos empleados (Van Hiele, Duval, EOS), como del corte metodológico de los estudios, la mayoría de tipo cualitativo o mixto. También es patente en los dos casos el impacto que ha tenido la consolidación de mediadores como GeoGebra en la investigación en educación geométrica. En un futuro cercano sería interesante compartir instrumentos con los sujetos de estudio e intercambiar miradas de análisis e interpretación de resultados obtenidos. También sería importante enlazar talleres en modalidad virtual, conferencias, etc., con el fin de retroalimentar a ambos grupos de investigación y favorecer que nuestros estudiantes interactúen con otros homólogos de ambas sociedades.

Las sinergias entre los dos grupos (sociedades) podrían contribuir al avance de los desafíos esbozados. En el caso del GTT2 se ha referido en este capítulo alguna investigación con relación a las conexiones de la geometría con otras ramas y con un enfoque de investigación más interdisciplinar, lo que se formula como un desafío desde APRENGEOM. Recíprocamente, en APRENGEOM se aprecia un aumento incipiente en la producción de trabajos orientados a los niveles de infantil y primaria, que no se da en el caso del GTT2, lo que parece que venir condicionado, entre otras cosas, por el perfil de las personas investigadoras del GTT2, que en su vertiente docente dirigen su labor exclusivamente a la formación del profesorado de secundaria. En particular, desde el GTT2 se identifica

como una necesidad avanzar en la investigación de la formación para la enseñanza de la geometría del profesorado de educación infantil. Dentro de la SEIEM, además de los aportes desde APRENGEOM, en los últimos años se está avanzando en la concreción de los modelos de conocimiento especializado del profesor de matemáticas al nivel de infantil, principalmente desde el marco del modelo de conocimiento especializado del profesorado que enseña matemáticas (MTSK).

Referencias

- Alonso, L., & Hernández, V. (2025). *Enseñanza de la geometría a través GeoGebra como herramienta clave para estudiantes de Ingeniería en Computación*. En Preactas GTT2. SOMIDEM2.
<https://somidem.org.mx/?view=viewpdf&id=97>
- Álvarez-Gayou, J. (2010). *Cómo hacer investigación cualitativa. Fundamentos y metodologías*. Paidós.
- Aravena Diaz, M., Gutiérrez, A., & Jaime, A. (2016). Study of Van Hiele levels of reasoning in students from vulnerable secondary schools in Chile. *Enseñanza de las Ciencias*, 34(1), 107–128. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1664>
- Arnal-Bailera, A., & Manero, V. (2024). A characterization of Van Hiele's level 5 of geometric reasoning using the Delphi methodology. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 22(3), 537–560.
<https://doi.org/10.1007/s10763-023-10380-z>
- Barquero, B., Batanero, C., Blanco, T.F., Bosch, M., Camacho-Machin, M., Canadas, M.C., Castro, E., Chamoso, J.M., Contreras, L.C., Gea, M.M., Godino, J.D., Molina, V.M., Moreno, M., & Wilhelmi, M.R. (2022). Spanish research on mathematics education. En C. Fernández, S. Llinares, A. Gutiérrez, & N. Planas (Eds.), *Proceedings of the 45th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 223–254). PME.
- Bellas, F., Salgado, M., Blanco, T.F., & Duro, R.J. (2019). Robotics in primary school: A realistic mathematics approach. En L. Daniela (Ed.), *Smart Learning with Educational Robotics*. Springer. <https://doi.org/qjh6>
- Beltrán-Pellicer, P., & Muñoz-Escolano, J. M. (2021). Una experiencia formativa con BlocksCAD con futuros docentes de matemáticas en secundaria. *Didacticae*, (10), 71–90. <https://doi.org/10.1344/did.2021.10.71-90>
- Beltrán-Pellicer, P., & Rodríguez-Jaso, C. (2017). Modelado e impresión en 3D en la enseñanza de las matemáticas: un estudio exploratorio. *Reidocrea*, 6, 16–28. <https://doi.org/10.30827/Digibug.44193>
- Beltrán-Pellicer, P., Rodríguez-Jaso, C., & Muñoz-Escolano, J.M. (2020). Introduciendo BlocksCAD como recurso didáctico en matemáticas. *Suma*, 93, 39–48.

- Benavides, L. (2024). Propuesta didáctica para el desarrollo de competencias matemáticas de razonamiento en un establecimiento Técnico Profesional. En M. Sánchez, M. García, & A. Castañeda (Eds.), *Perspectivas actuales de la Educación Matemática* (pp. 47–52). SOMIDEM.
<https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S3/2024/01>
- Berciano, A., Jiménez-Gestal, C., & Salgado, M. (2017). Razonamiento y argumentación en la resolución de problemas geométricos en educación infantil: un estudio de caso. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo, & J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 147–156). SEIEM.
- Bernabeu, M., Llinares, S., & Moreno, M. (2021c). Levels of sophistication in elementary students' understanding of polygon concept and polygons classes. *Mathematics*, 9, 1966, <https://doi.org/10.3390/math9161966>
- Bernabeu, M., Moreno, M., & Llinares, S. (2021a). Anticipating primary school students' answers of hierarchical classifications tasks: Features of preservice primary teachers' curricular reasoning. *Acta Scientiae*, 23(6), 121–146.
<https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.6874>
- Bernabeu, M., Moreno, M., & Llinares, S. (2021b). Primary school students' understanding of polygons and the relationships between polygons. *Educational Studies in Mathematics*, 106, 251–270, <https://doi.org/qjh7>
- Bernabeu, M., Moreno, M., & Llinares, S. (2022). Cambios en la comprensión de las relaciones entre polígonos en estudiantes de 8–9 años. *Enseñanza de las Ciencias*, 40(2), 49–70, <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3208>
- Bernabeu, M., Moreno, M., & Llinares, S. (2024). Polygon class learning opportunities: Interplay between teacher's moves, children's geometrical thinking and geometrical task. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 22, 1381–1403, <https://doi.org/10.1007/s10763-023-10425-3>
- Blanco, T. F. (2024). Geometría en evolución: desafíos e innovación en el aprendizaje. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent, & C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 3–5). SEIEM.
- Blanco, T.F., Camargo, L., & Sequeiros, P.G. (2024). How visualization and argumentation are articulated in research on teaching and learning geometry. *ZDM Mathematics Education*, 56, 1079–1091.
<https://doi.org/10.1007/s11858-024-01619-2>
- Blanco, T.F., Godino, J.D., Sequeiros, P.G., & Diego-Mantecón, J.M. (2019). Skill levels on visualization and spatial reasoning in pre-service primary teachers. *Universal Journal of Educational Research*, 7(12), 2647–2661.
<https://doi.org/10.13189/ujer.2019.071212>

- Bonilla, M., Elizarraras, S., Orlando, V., & Medardo, J. L. (2025). *Componentes e indicadores de idoneidad epistémica en la implementación de una secuencia didáctica de geometría de un profesor en formación inicial*. En Preactas GTT2. SOMIDEM2. <https://somidem.org.mx/?view=viewpdf&id=98>
- Botana, F., Recio, T., & Vélez, M. P. (2024). On using GeoGebra and ChatGPT for geometric discovery. *Computers*, 13(8), 187. <https://doi.org/10.3390/computers13080187>
- Cabral, R., Mata, A., & Alvarado, A. (2025). *STEAM Integrado: un ambiente de aprendizaje para las relaciones trigonométricas*. Preactas GTT2. SOMIDEM2. <https://somidem.org.mx/?view=viewpdf&id=99>
- Carvalho, M. (2008). *Investigación cualitativa en educación matemática*. Limusa.
- Clemente, F., & Llinares, S. (2015). Formas del discurso y razonamiento configural de estudiantes para maestros en la resolución de problemas de geometría. *Enseñanza de las Ciencias*, 33(1), 9–27. <http://dx.doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1332>
- Cruz, M., & Vázquez, O. (2025). *Análisis comparativo de los Programas de Estudio de Geometría Plana y del Espacio de nivel secundaria de 1993, 2006, 2011, 2017 y 2022*. En Preactas GTT2. SOMIDEM2. <https://somidem.org.mx/?view=viewpdf&id=100>
- De la Torre, E. (2013). Introducción al Seminario I “Perspectivas de Investigación en Didáctica de la Geometría”. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa, & N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 17–17). SEIEM.
- Diago, P. D., González-Calero, J. A., & Yáñez, D. F. (2021). Exploring the development of mental rotation and computational skills in elementary students through educational robotics. *International Journal of Child-Computer Interaction*, 100388. <https://doi.org/10.1016/j.ijcci.2021.100388>
- Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. En C. Mammana, & V. Villani (Eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century. An ICMIS Study* (pp. 37–52). Springer.
- Duval, R. (2004). Cómo hacer que los alumnos entren en las representaciones geométricas. Cuatro entradas y... una quinta. En M. C. Chamorro (Ed.), *Números, formas y volúmenes en el entorno del niño* (pp. 159–188). Ministerio de Educación y Ciencia de España.
- Duval, R. (2017). *Understanding the mathematical way of thinking – The registers of semiotic representations*. Springer. <https://doi.org/qh8d>
- Eisner, E. (1998). *El ojo ilustrado. Indagación cualitativa y mejora de la práctica educativa*. Paidós.
- Escudero, I., Gavilán, J. M., & Sánchez-Matamoros, G. (2014). Una aproximación a los cambios en el discurso matemático generados en el proceso de definir. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 17(1), 7–32. <https://doi.org/10.12802/relime.13.1711>

- Fernández, E., & Santacruz, M. (2024). Visualización dinámica tridimensional en actividades de lugares geométricos 3D en geometría dinámica. En M. Sánchez, M. García, & A. Castañeda (Eds.), *Perspectivas actuales de la Educación Matemática* (pp. 39-45). SOMIDEM.
<https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S3/2024/01>
- Fernández-León, A., Gavilán-Izquierdo, J. M., González-Regaña, A. J., Martín-Molina, V., & Toscano, R. (2021). Identifying routines in the discourse of undergraduate students when defining. *Mathematics Education Research Journal*, 33(2), 301-319. <https://doi.org/10.1007/s13394-019-00301-1>
- Fernández-López, A., Blanco, T. F., & Sequeiros, P. G. (2024). Exploring pre-service primary teachers' emotions in a geometry project with 3D design. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 20(6), em2451.
<https://doi.org/10.29333/ejmste/14589>
- Flores, I., & Cabañas, G. (2024). Proceso configural que coordinan futuros profesores de matemáticas al resolver problemas clásicos de probar en geometría. En M. Sánchez, M. García, & A. Castañeda (Eds.), *Perspectivas actuales de la Educación Matemática* (pp. 457-466). SOMIDEM.
<https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S3/2024/01>
- Flores-Bascuñana, M., Diago, P. D., Villena-Taranilla, R., & Yáñez, D. F. (2019). On augmented reality for the learning of 3D-geometric contents: A preliminary exploratory study with 6-grade primary students. *Education Sciences*, 10(1), 4. <https://doi.org/10.3390/educsci10010004>
- Frawley, W. (1999). *Vygotsky y la ciencia cognitiva*. (Trad.: Arnáiz, Víctor M). Paidós.
- Fúmete, C. (2024). Gestión de la iconicidad en la representación de cuerpos geométricos. En M. Sánchez, M. García, & A. Castañeda (Eds.), *Perspectivas actuales de la Educación Matemática* (pp. 53-62). SOMIDEM.
<https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S3/2024/01>
- García López, M. D. M., Romero Albaladejo, I. M., & Gil Cuadra, F. (2021). Efectos de trabajar con GeoGebra en el aula en la relación afecto-cognición. *Enseñanza de las Ciencias*, 39(3), 0177-198. <https://doi.org/qjkb>
- Gavilán-Izquierdo, J. M. (2024). La investigación sobre enseñanza y aprendizaje de la geometría desde la teoría de la comognición. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent, & C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 7-20). SEIEM.
- Gironés, G. T., Vilella, H. Q., & Martínez, M. P. (2010). Razonamiento configural como coordinación de procesos de visualización. *Enseñanza de las Ciencias*, 28(3), 327-340. <https://doi.org/10.5565/rev/ec/v28n3.187>
- Gómez-Chacón, I. M., & Escribano, J. (2014). Geometric locus activities in a dynamic geometry system. Non-iconic visualization and instrumental genesis. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 17(4-2), 361-383. <https://doi.org/10.12802/relime.13.17418>

- Gómez-Chacón, I. M., Romero Albaladejo, I. M., & del Mar García López, M. (2016). Zig-zagging in geometrical reasoning in technological collaborative environments: a Mathematical Working Space-framed study concerning cognition and affect. *ZDM Mathematics Education*, 48, 909–924. <http://dx.doi.org/10.1007/s11858-016-0755-2>
- González Herrera, A., Gavilán Izquierdo, J. M., Gallego Sánchez, I., & Puertas, M. L. (2022). A theoretical analysis of the validity of the Van Hiele levels of reasoning in graph theory. *Journal on Mathematics Education*, 13(3), 515–530. <http://doi.org/10.22342/jme.v13i3.pp515-530>
- González-Regaña, A., Martín-Molina, V., Toscano, R., Fernández-León, A., & Gavilán-Izquierdo, J. M. (2021). El discurso de estudiantes para maestros cuando describen y definen cuerpos geométricos. *Enseñanza de las Ciencias*, 39(1), 81–97. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3039>
- Gutiérrez, A., Benedicto, C., Jaime, A., & Arbona, E. (2018a). The cognitive demand of a gifted student's answers to geometric pattern problems. En F.M. Singer (Ed.), *Mathematical creativity and mathematical giftedness* (pp. 169–198). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-73156-8_7
- Gutiérrez, A., Jaime, A., & Gutiérrez, P. (2021). Networked analysis of a teaching unit for primary school symmetries in the form of an ebook. *Mathematics*, 9(8), 832. <https://doi.org/10.3390/math9080832>
- Gutiérrez, A., Ramírez, R., Benedicto, C., Beltrán-Meneu, M.J., & Jaime, A. (2018b). Visualization abilities and complexity of reasoning in mathematically gifted students' collaborative solutions to a visualization task. A networked analysis. En K.S. Mix, & M.T. Battista (Eds.), *Visualizing mathematics. The role of spatial reasoning in mathematical thought* (pp. 309–337). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-98767-5_14
- Higginson, W. (1980). On the foundations of mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, 1(2), 3–7.
- Hoffer, A. (1981). Geometry is more than Proof. *The Mathematics Teachers*, 74(1), 11–18. <https://www.jstor.org/stable/27962295>
- Jiménez-Gestal, C., Berciano, A., & Salgado, M. (2022). Razonamiento y aprehensión ante una tarea geométrica: análisis de la pertinencia didáctica de una trayectoria de aprendizaje en educación infantil. *Bolema*, 36(72), 332–357. <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a15>
- Kovács, Z., Recio, T., Richard, P. R., Van Vaerenbergh, S., & Vélez, M. P. (2022). Towards an ecosystem for computer-supported geometric reasoning. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 53(7), 1701–1710. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1837400>
- Lasa, A., & Wilhelmi, M. R. (2013). Use of GeoGebra in explorative, explanatory and demonstrative moments. *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de Sao Paulo*, 2(1), 52–64. <https://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/15160>

- Lasa, A., Wilhelmi, M. R., & Belletich, O. (2014). Una parcela para Txuri. *Educação Matemática Pesquisa*, 16(4), 1089–1110.
<https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/22011>
- Liljedahl, P. (2021). *Building Thinking Classrooms in Mathematics*. Corwin Press.
- Llinares, S., & Clemente, F. (2014). Characteristics of pre-service primary school teachers' configural reasoning. *Mathematical Thinking and Learning*, 16(3), 234–250. <https://doi.org/10.1080/10986065.2014.921133>
- Llinares, S., & Clemente, F. (2019). Characteristics of the shifts from configural reasoning to deductive reasoning in geometry. *Mathematics Education Research Journal*, 31, 259–277. <https://doi.org/10.1007/s13394-018-0253-7>
- López, A. (2025). *Repensando la Geometría Analítica Escolar*. En Preactas GTT2. SOMIDEM2. <https://somidem.org.mx/?view=viewpdf&id=101>
- Lowrie, T., Gutiérrez, A., & Emprin, F. (Eds.) (2024). *Proceedings of the 26th ICMI Study Conference (Advances in Geometry Education)*. ICMI.
<https://bit.ly/49bPzDf>
- Martínez, M. (2006). La investigación cualitativa. Síntesis conceptual. *Revista de Investigación en Psicología*, 9(1), 123–146.
- Martín-Nieto, M., & Ruiz-López, N. (2022). Oportunidades de aprendizaje sobre isometrías en una discusión en gran grupo con GeoGebra. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas, & J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 383–390). SEIEM.
<https://www.seiem.es/docs/actas/25/ActasXXVSEIEM.pdf>
- Martín-Nieto, M., & Ruiz-López, N. (2023). Oportunidades de aprendizaje sobre isometrías en una representación no dinámica. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo, E., & P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 355–362). SEIEM.
<https://www.seiem.es/docs/actas/26/ActasXXVISEIEM.pdf>
- Mora, M., Ramírez, R., Gutiérrez, A., & Jaime, A. (2024). Traits of generalization of problem solution methods exhibited by potential mathematically gifted students when solving problems in a selection process. *ZDM Mathematics Education*, 56(6), 1257–1272. <https://doi.org/10.1007/s11858-024-01625-4>
- Moral-Sánchez, S. N., Sánchez-Compañía, M. T., & Romero-Albaladejo, I. (2023). Uso de realidad virtual en Geometría para el desarrollo de habilidades espaciales. *Enseñanza de las Ciencias*, 41(1), 125–147. <https://doi.org/qcnm>
- Moreno, M. M., Estrada, A., Carrillo, J., & Sierra, T.A. (Eds.) (2010), *Investigación en Educación Matemática XIV*. SEIEM.
- Nogueira, L. G., Fernández Blanco, T., & Maia-Lima, C. (2025). Diseño y validación de un instrumento para analizar el pensamiento espacial en educación infantil. *Avances De Investigación En Educación Matemática*, (27), 87–105.
<https://doi.org/10.35763/aiem27.5937>

- Núñez, K., & Cabañas, G. (2024). Razonamiento matemático de dos profesores de secundaria en el marco de la generalización de patrones figurales. En M. Sánchez, M. García, & A. Castañeda (Eds.), *Perspectivas actuales de la Educación Matemática* (pp. 467-474). SOMIDEM.
<https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S3/2024/01>
- Organización de las Naciones Unidad [ONU]. (2015). Transformar nuestro mundo: la Agenda 2030 para el Desarrollo Sostenible. ONU.
https://unctad.org/meetings/es/sessionaldocuments/ares70d1_es.pdf
- Ortega, T. (Coord.). (1999). *Actas del III SEIEM*. SEIEM.
- Paneque, J. J., Cobo, P., & Fortuny, J. M. (2017). Intelligent tutoring and the development of argumentative competence. *Technology, Knowledge and Learning*, 22(1), 83–104. <https://doi.org/10.1007/s10758-016-9283-y>
- Prior, J. M., & Torregrosa, G. G. (2020). Razonamiento configural y espacio de trabajo geométrico en la resolución de problemas de probar. *Bolema*, 34(66), 178–198. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v34n66a09>
- Quijano, M., & Corica, A. (2025). *Enseñanza de la geometría espacial en la escuela secundaria: análisis de las organizaciones que se proponen estudiar*. En Preactas GTT2. SOMIDEM2. <https://somidem.org.mx/?view=viewpdf&cid=102>
- Ramírez, P., & Soto, C. (2025). *El Building Thinking Classrooms para la enseñanza de la geometría analítica*. En Preactas GTT2. SOMIDEM2.
<https://somidem.org.mx/?view=viewpdf&cid=103>
- Ramírez, R., & Flores, P. (2017). Habilidades de visualización de alumnos con talento matemático: comparativa entre los test psicométricos y las habilidades de visualización manifestadas en tareas geométricas. *Enseñanza de las Ciencias*, 35(2), 179–196. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2152>
- Ramírez, R., Flores, P., & Ramírez, I. (2018). Análisis de los errores en tareas geométricas de argumentación visual por estudiantes con talento matemático. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 21(1) 29–56. <https://doi.org/10.12802/relime.18.2112>
- Ramírez-Uclés, I., & Ramírez, R. (2020). Gender differences in visuospatial abilities and complex mathematical problem solving. *Frontiers in Psychology*, 1, 191. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2020.00191>
- Ramírez-Uclés, I., & Ramírez, R. (2023). Diferencias de género en test de rotación mental: una perspectiva desde la enseñanza de la geometría. *Educación XXI*, 26(2), 351–372. <https://doi.org/10.5944/educxx1.33150>
- Ramírez-Uclés, R., & Ruiz-Hidalgo, J.F. (2022). Reasoning, representing, and generalizing in geometric proof problems among 8th grade talented students. *Mathematics*, 10(15), 789. <https://doi.org/10.3390/math10050789>
- Recio, T., Richard, P. R., & Pilar Vélez, M. (2019). Designing tasks supported by GeoGebra automated reasoning tools for the development of mathematical skills. *International Journal for Technology in Mathematics Education*, 26(2), 81–88. https://doi.org/10.1564/tme_v26.2.05

- Rodríguez, J. L. (2021). Exploring dynamic geometry through immersive virtual reality and distance teaching. En P.R. Richard, M.P. Vélez, & S. Van Vaerenbergh (Eds.), *Mathematics Education in the Age of Artificial Intelligence. Mathematics Education in the Digital Era* (Vol 17, pp. 343–363). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-86909-0_15
- Rodríguez, J. L., Romero, I., & Codina, A. (2021). The influence of NeoTrie VR's immersive virtual reality on the teaching and learning of geometry. *Mathematics*, 9(19), 2411. <https://doi-org.ezbusc.usc.gal/10.3390/math9192411>
- Rodríguez, Y., & Espinosa, C. (2024). Análisis de la construcción de la identidad matemática a través de actividades de modelación en geometría. En M. Sánchez, M. García, & A. Castañeda (Eds.), *Perspectivas actuales de la Educación Matemática* (pp. 529–533). SOMIDEM. <https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S3/2024/01>
- Romero Albaladejo, I. M., & García López, M. D. M. (2024). Mathematical attitudes transformation when introducing GeoGebra in the secondary classroom. *Education and Information Technologies*, 29, 10277–10302. <https://doi.org/10.1007/s10639-023-12085-w>
- Romero, I., Rodríguez-Martínez, J. A., & Rodríguez, J. L. (2023). Optimizing the surface of orthohedra with virtual reality in primary school. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 19(9), em2325. <https://doi.org/10.29333/ejmste/13508>
- Ropero Quintero, D. A., & Zubieta Badillo, G. (2023). Definiendo familias de poliedros: Un estudio con estudiantes de secundaria. *Bolema*, 37(76), 823–848. <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a21>
- Ruiz-López, N. (2018). The instrumental genesis process in future primary teachers using Dynamic Geometry Software. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 49(4), 481–500. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2017.1377302>
- Sánchez Aguilar, M., García González, M. del S., & Castañeda, A. (Eds.) (2024). *Perspectivas actuales de la Educación Matemática*. SOMIDEM. <https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S3/2024/01>
- Sánchez, V., & García, M. (2014). Socio-mathematical and mathematical norms related to definition preservice primary teachers' discourse. *Educational Studies in Mathematics*, 85(2), 305–320. <https://doi.org/g7968m>
- Saorín, A., Torregrosa, G., & Quesada, H. (2019). Razonamiento configural y organización discursiva en procesos de prueba en contexto geométrico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 22(2), 213–244. <https://doi.org/10.12802/relime.19.2224>
- Secretaría de Educación Pública. (2024). *Programa de Estudio para la Educación Secundaria: Programa Sintético de la Fase 6*. SEP.

- Sfard, A. (2007). When the rules of discourse change, but nobody tells you: Making sense of mathematics learning from a commognitive standpoint. *The Journal of the Learning Sciences*, 16(4), 567–615. <https://doi.org/cjck5v>
- Smith, M. S., & Stein, M. K. (1998). Selecting and creating mathematical tasks: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 3(5), 344–350.
- Solís, E. (2025). *El barroco mexicano como pretexto del uso de la geometría en educación básica*. En Preactas GTT2. SOMIDEM2. <https://somidem.org.mx/?view=viewpdf&id=104>
- Sánchez, M., García, M., & Castañeda, A. (2024). *Perspectivas actuales de la Educación Matemática*. SOMIDEM. <https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S3/2024/01>
- Torregrosa, G. (2017). Coordinación de procesos cognitivos en la resolución de problemas: relación entre geometría y álgebra. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, (12), 1–17. <https://doi.org/qjklf>
- Van Hiele, P. M. (1957). *El problema de la comprensión: En conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría*. (Tesis doctoral, Universidad de Utrecht). <https://uv.es/aprengeom/archivos2/VanHiele57.pdf>
- Vázquez, O., & Elizarrarás, S. (2016). Resolución de problemas geométricos con estudiantes normalistas de la especialidad de matemáticas. En D. Castillo, M. Lira, & M. Minor (Coord.), *Prácticas escolares: Aproximaciones teóricas* (pp. 115–141). Universidad Autónoma de Nuevo León.
- Vázquez, O., Elizarrás, S., & Quiroz, J. (2023). *Resolución de problemas geométricos en la formación docente inicial* (en prensa). Sociedad Mexicana de Educación Contemporánea.
- Vázquez, O., Elizarrás, S., & Bonilla, M. (2025). *Indagación de conceptos y procedimientos geométricos con docentes en formación de primer semestre*. En Preactas GTT2. SOMIDEM2. <https://somidem.org.mx/?view=viewpdf&id=105>
- Viramontes, J., & Chavira, H. (2024). Uso de las fuentes originales, el caso de la justificación de las construcciones geométricas. En M. Sánchez, M. García, & A. Castañeda (Eds.), *Perspectivas actuales de la Educación Matemática* (pp. 341–346). SOMIDEM. <https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S3/2024/01El>

Pasado y futuro en la historia de las matemáticas y la educación matemática: tendiendo puentes en investigación entre España y México

Past and future in the history of mathematics and mathematics education: building bridges in research in Spain and Mexico

María José Madrid ¹ 

Carmen León-Mantero ² 

Juan Viramontes-Miranda ³ 

Maribel Moreno Ochoa ⁴ 

Resumen

Este trabajo recoge la colaboración entre grupos de investigación de España y México interesados en la historia de las matemáticas y la educación matemática. Para ello, se describe el panorama actual de la investigación en este campo en ambos países, se reúne el estado de la literatura de las investigaciones abordadas en los últimos años y los distintos intereses que podrían motivar los trabajos que verán la luz en un futuro. Este proyecto ha permitido vislumbrar la diversidad de enfoques teóricos y metodológicos de los que se nutre esta línea temática, la riqueza de la investigación de este campo que ya ha sido documentada y la que queda por descubrir; pero también subraya la necesidad de compartir un espacio entre ambos equipos de investigación que permita compartir hallazgos y experiencias que den pie al debate, la discusión y la participación académica de sus integrantes.

¹ mjmadridma@upsa.es

Universidad Pontificia de Salamanca (SEIEM)

² cmleon@uco.es

Universidad de Córdoba (SEIEM)

³ juan.viramontes@uacj.mx

Universidad Autónoma de Ciudad Juárez (SOMIDEM)

⁴ maribel.m.ochoa@hotmail.com

Estudios de Bachillerato 4/2 "Lic. Jesús Reyes Heróles" (SOMIDEM)

Madrid, M.J., León-Mantero, C., Viramontes Miranda, J.D., & Moreno Ochoa, M. (2025). Pasado y futuro en la historia de las matemáticas y la educación matemática: tendiendo puentes en investigación entre España y México. En E. Flores-Medrano, M. Molina, I. Sandoval, & I. Polo-Blanco (Eds.), *Educación Matemática en México y España: Investigaciones y líneas de trabajo compartidas* (pp. 317–338). Editorial SOMIDEM - SEIEM.
<https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S2/2025/03-12>

Palabras clave

Matemáticas, historia de las matemáticas, historia de la educación matemática, educación matemática.

Abstract

This study highlights the collaboration between research groups from Spain and Mexico interested in the history of mathematics and mathematics education. In order to do this, this initiative outlines the current state of research in this field in both countries, describes the existing literature on studies conducted during the last few years, and identifies the various interests that will drive future works. The project has revealed the diversity of theoretical and methodological approaches that enrich this thematic line, the value of the studies already done in this field, and the discoveries yet to come. It also underscores the need to create a shared space between both research teams to exchange findings and experiences, fostering debate, discussion, and academic participation among their members.

Keywords

Mathematics, history of mathematics, history of mathematics education, mathematics education.

Introducción

La investigación sobre las diferentes interacciones que se establecen entre los campos de la Historia de las Matemáticas y la Educación Matemática ha desempeñado un papel fundamental en la evolución de la investigación en Educación Matemática actual. Este enfoque interdisciplinar enriquece y contribuye al desarrollo de los constructos teóricos clave que permiten entender el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, por lo que se debe continuar fomentando las sinergias entre ambos campos de investigación.

A nivel internacional, es a partir de la década de los ochenta del siglo XX cuando se produce un notable aumento de interés en este tópico, lo que se refleja en el crecimiento significativo del número de investigadores dedicados a este campo, así como a la organización de congresos, simposios y otros eventos académicos. Destacan principalmente la creación del grupo de investigación *International Study Group on the relations between History and Pedagogy of Mathematics* (conocido como grupo HPM) y de los *ICME Topic Study Groups* específicos dedicados al rol de la Historia de las Matemáticas en la enseñanza de la materia y al estudio de la Historia de la Educación Matemática.

No obstante, Schubring (2014) expone que ya en el siglo XIX es posible encontrar los primeros trabajos internacionales que centran su atención en los distintos focos de la línea de investigación sobre Historia de la Educación Matemática. Ejemplos de ello son la historia de la enseñanza de las matemáticas en distintas instituciones o en distintas regiones y países, así

como los distintos métodos utilizados a lo largo de la historia para la enseñanza de diferentes contenidos. Estos estudios continúan con mayor o menor intensidad durante el siglo XX en distintos países, ampliándose las temáticas abordadas para incluir por ejemplo el análisis de los libros de texto para la enseñanza de las matemáticas o la formación de los futuros profesores de matemáticas. Asimismo, se abordan estudios más especializados sobre un país, sobre historia internacional o sobre las últimas tendencias metodológicas, todo ello con el objetivo de descubrir la realidad de la práctica educativa más allá de las decisiones administrativas. Sin embargo, estas investigaciones fueron en su mayoría iniciativas individuales hasta el ICME 10, celebrado en 2004, cuando se creó el *Topic Study Group 29* sobre *History of Teaching and Learning Mathematics* (Historia de la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas).

Del mismo modo, el interés por integrar la Historia de las Matemáticas en la educación matemática se remonta a la segunda mitad del siglo XIX, con las primeras apariciones de la historia de las matemáticas en los libros de texto de la época. Más tarde, a principios del siglo XX, se reavivaron debates relacionados con los fundamentos de las matemáticas que consideraban a la historia de la materia como un recurso clave para diferentes enfoques epistemológicos y para la construcción de ideas relacionadas con el proceso de enseñanza y aprendizaje. Durante los años sesenta y setenta del siglo pasado, comenzaron a surgir voces que empezaron a cuestionar la esencia de las matemáticas y su papel en la construcción del conocimiento y que la concebían como el resultado de una actividad humana y no solo como un lenguaje que describe la realidad, sentando las bases de uno de los principios fundamentales en los que descansa esta línea de investigación. La creación de *Working Groups* temáticos en el *Second International Congress on Mathematical Education* supone el origen del *Working Group 11* titulado *Relations between the history and pedagogy of mathematics* (Relaciones entre la historia y la pedagogía de las matemáticas) y el posterior nacimiento del grupo HPM, que desde entonces trabaja en diferentes temáticas. Entre sus objetivos principales se encuentra hacer investigación empírica basada en implementaciones reales en el aula; diseñar unidades didácticas específicas; desarrollar diversos tipos de recursos didácticos; explorar y comprender la respuesta de los estudiantes a la introducción de la historia de las matemáticas en la enseñanza (incluida la formación docente); diseñar, aplicar y evaluar la enseñanza interdisciplinaria; establecer y/o criticar paralelismos entre el desarrollo histórico y el aprendizaje en un aula moderna; beneficiarse mutuamente de los constructos teóricos y los marcos conceptuales desarrollados en el contexto de otras disciplinas, especialmente la filosofía, la epistemología y la ciencia cognitiva, y evaluar la eficacia de todo esto en la práctica (Clark et al., 2018).

La movilización a nivel internacional despertó interés entre los investigadores españoles que se dedicaban a la Didáctica de la Matemática. Así, durante el VII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM) celebrado en Granada en el año 2003, se celebró el primer seminario dedicado a la Historia de las Matemáticas y la Educación Matemática (en adelante HMEM). Bernardo Gómez, quien asumió las funciones de coordinador del seminario, invitó a colaborar como ponentes a los expertos Luis Puig de la Universitat de València Estudi General, Fulvia Furinghetti de la Università di Genova, y María Teresa González y Modesto Sierra de la Universidad de Salamanca. El resultado principal del seminario fue el compromiso de diferentes investigadores de seguir trabajando en esta temática y la consecuente constitución del Grupo de Investigación HMEM (Maz-Machado, 2019).

Pese a que el grupo de investigación se constituyó formalmente en 2003, la mayoría de sus miembros fundadores ya contaban con una destacada trayectoria en este campo. Esto ha permitido al grupo desempeñar un papel clave en la formación de nuevos investigadores, brindando a quienes se han interesado en esta área la oportunidad de especializarse y enriquecer su formación investigadora en su seno.

Durante los primeros 10 años, Alexander Maz Machado, de la Universidad de Córdoba, fue el encargado de coordinar las actividades del grupo. Tras él, Luis Puig, de la Universitat de València, asumió la coordinación durante 8 años, y nuevamente, en 2018, Alexander Maz Machado retomó el cargo. Bajo su coordinación, en 2019 se organizó un seminario en el marco del XXIII Simposio de la SEIEM celebrado en Valladolid, centrado una vez más en la HMEM y contando con las ponencias invitadas de Luis Puig de la Universitat de València (Puig, 2019a), Carmen López Esteban de la Universidad de Salamanca (López-Esteban, 2019) y Gert Schubring de la Universität Bielefeld, Germany y la Universidade Federal do Rio de Janeiro, Brazil (Schubring, 2019). Desde 2023, Carmen León Mantero de la Universidad de Córdoba y María José Madrid Martín de la Universidad Pontificia de Salamanca han asumido la coordinación del grupo.

En estos años, la investigación española sobre HMEM se ha realizado por grupos o investigadores individuales focalizados principalmente en las universidades de Salamanca, Valencia, Granada, Córdoba, Zaragoza, Murcia y Pontificia de Salamanca. Prueba de ello es que distintos trabajos bibliométricos constatan la inclusión de estudios en HMEM en las investigaciones en Educación Matemática en España en los últimos años (Bosch et al., 2024; Bracho et al. 2014; Marco-Buzunáriz et al., 2016).

A su vez, grupos de investigación en Educación Matemática consolidados incluyen la HMEM entre sus líneas de investigación, ejemplos de ello son Matemáticas, Educación y Sociedad SEJ-589 de la Universidad de Córdoba,

Investigación en Educación Matemática (S60_23R) de la Universidad de Zaragoza, FQM-193. Didáctica de la Matemática y Pensamiento Numérico de la Universidad de Granada o DIMATHEX - Didáctica de la Matemática y Didáctica de las Ciencias Experimentales de la Universitat Jaume I.

Asimismo, la Tabla 1 recoge las tesis doctorales que se engloban en esta línea de investigación realizadas en los últimos 10 años (2015-2024). La mayoría se encuentran publicadas en la sección sobre tesis doctorales que publica la web de la SEIEM (2024b). Se ha completado la información gracias a la Base de datos de Tesis Doctorales (TESEO) (Ministerio de Universidades, 2024).

Tabla 1
Tesis doctorales realizadas en el marco del grupo HMEM entre 2015 y 2024

	Las escuelas normales y la renovación de la enseñanza de las matemáticas (1909-1936). Autora: Encarna Sánchez Jiménez. Directores: Dra. Dolores Carrillo Gallego y Dr. Antonio Viñao Galgo.
	Análisis histórico de las demostraciones en libros de texto sobre los teoremas de límites y continuidad. De la Ley General de Educación a la Ley Orgánica de Educación. Autora: Laura Conejo Garrote. Director: Dr. Tomás Ortega Del Rincón.
2015	La enseñanza de las matemáticas en la Armada Española en el siglo XIX. Autor: Joaquín Comas Roqueta. Directora: Dra. Elena Ausejo Martínez
	La Geometría Analítica en los libros de texto para Secundaria y Universidad en España en el siglo XIX. Autora: Isabel María Sánchez Sierra. Directora: Dra. María Teresa González Astudillo
	Didáctica de las matemáticas y desarrollo profesional de una maestra. El caso de Maria Antònia Canals i Tolosa. Autora: María Sotos Serrano. Directores: Dr. Ricardo López Fernández y Dra. Ana Belén Sánchez García
	Los libros de aritmética en España a lo largo del siglo XVI. Autora: María José Madrid Martín. Directores: Dra. Carmen López Esteban y Dr. Alexander Maz Machado.
2016	La evolución de la Aritmética como material escolar en España durante el periodo 1789-1939. Autora: Carolina del Rosario Carrillo García. Directores: Dr. Ricardo López Fernández y Dra. Ana Belén Sánchez García
2017	Juan Cortázar y su contribución a la formación matemática española en el siglo XIX. Autora: Carmen María León Mantero. Director: Dr. Alexander Maz Machado.
2024	Acercando la historia de las matemáticas al aula: una experiencia con alumnos de educación secundaria. Autor: Jacinto Ruiz Catalán. Directores: Dr. Alexander Maz Machado y Dra. María José Madrid Martín.

Fuente: Tesis doctorales en Educación Matemática (SEIEM, 2024b) y Base de datos de Tesis Doctorales (TESEO) (Ministerio de Universidades, 2024)

En la actualidad el grupo mantiene reuniones bianuales, una intermedia en los meses de febrero o marzo, y una segunda durante los Simposios de la SEIEM. Estas reuniones buscan ser un encuentro entre investigadores que permita crear conexiones, revisar ideas, explorar futuras líneas de investigación, diseñar nuevos proyectos de investigación, entre otros aspectos. Por ello, los principales objetivos del grupo en la actualidad siguen siendo los establecidos en la propuesta de 2003 (SEIEM, 2024a), aunque han ampliado su alcance en los últimos años:

- Difundir la investigación española relacionada con la Historia de las Matemáticas y la Educación Matemática.
- Promover la investigación hacia la Historia de la Educación Matemática Española y hacia la inclusión de la Historia de las Matemáticas y la Educación Matemática en la Educación Matemática.
- Elaborar una base de datos bibliográfica de interés para la investigación en Historia de las Matemáticas y la Educación Matemática.

Por otro lado, en México en los años setenta del siglo XX surge la investigación en Educación Matemática, orientada entre otras cuestiones en el estudio histórico de los conceptos matemáticos que se enseñan en la educación superior (Avila, 2016). La Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática (SOMIDEM) en 2023 realiza su primer congreso, llamado SOMIDEM1 (Sánchez Aguilar, 2022) en el que el Grupo de Trabajo Temático 9 (GTT9) Historia, Filosofía de las Matemáticas y Matemática Crítica hace su primera participación. El GTT9 sólo ha formado parte de los dos congresos de SOMIDEM, el segundo se llevó a cabo en marzo de 2025, y ambos se realizaron con una diferencia de dos años y en un formato virtual.

Los líderes de este grupo han sido Juan de Dios Viramontes Miranda y Maribel Moreno Ochoa, quienes han coordinado las actividades antes, durante y después del congreso. SOMIDEM cuenta con una editorial propia, la cual hizo posible la publicación de un primer libro derivado de las temáticas presentadas en el congreso. Tras este evento, se lanzó una convocatoria después del congreso para proponer artículos, el primer libro fue publicado en 2024, titulado *Perspectivas actuales de la Educación Matemática* y coordinado por M. Sánchez Aguilar, M. del S. García González y A. Castañeda (Eds.), donde aparece una introducción del GTT9 llamada Entre historia, filosofía y matemática crítica con tres trabajos publicados en este libro. Las publicaciones fueron, por orden de aparición en el libro:

- Los instrumentos matemáticos en un libro de enseñanza matemática de finales del S. XVIII en la Nueva España, por Maribel Moreno Ochoa.
- Hacia una educación matemática crítica en la enseñanza de la estadística y la probabilidad, por Jesús Salinas-Herrera y Ulises Salinas-Hernández.
- Uso de las fuentes originales, el caso de la justificación de las construcciones geométricas, por Juan de Dios Viramontes Miranda y Heidy Cecilia Chavira.

El GTT9 considera que la historia de las matemáticas se enfoca en rastrear el desarrollo de conceptos, teorías y métodos matemáticos a lo largo del tiempo, destacando su influencia mutua con la cultura y la sociedad (Katz, 2009; Fauvel y Gray, 1987). Por su parte, la filosofía de las matemáticas

examina la naturaleza de esta disciplina, incluyendo preguntas sobre su existencia, verdad y relación con la realidad (Brown, 2008; Shapiro, 2000). Finalmente, la matemática crítica analiza cómo esta disciplina puede usarse para interpretar fenómenos sociales y empoderar a las personas en contextos diversos (Skovsmose, 1994).

El GTT9 es un espacio de análisis y discusión enfocado en estudios teóricos y empíricos sobre la implementación de la matemática educativa tanto dentro como fuera del aula. Este grupo destaca la relevancia de la historia de las matemáticas para explorar los procesos de creación conceptual y diseñar actividades didácticas efectivas. Además, promueve cuestionamientos profundos sobre cómo la historia, la filosofía de las matemáticas y la matemática crítica pueden enriquecer nuestra comprensión de las matemáticas, su enseñanza y su impacto en el entorno educativo e inmediato.

Estado actual del grupo HMEM de la SEIEM

En la actualidad podemos hablar de que las líneas que han suscitado mayor interés entre los investigadores españoles del grupo de investigación son dos, por un lado, las investigaciones en Historia de la Educación Matemática en España y, por otro, la Historia de las Matemáticas y la Educación Matemática para la Educación Matemática, por otro.

En la primera podemos establecer una clasificación de temáticas, no excluyentes entre sí, basada en la propuesta realizada por Maz-Machado, et al. (2017). A continuación, y sin el propósito de ser exhaustivos, se ejemplifican estas categorías indicando algunas de las investigaciones realizadas en los últimos 10 años (2015-2024):

- Matemáticos y autores de libros: estos estudios dan a conocer las aportaciones de actores relevantes en la enseñanza de las matemáticas en España a lo largo de la historia, que en la mayoría de las ocasiones son desconocidos para el gran público. Ejemplos de estos trabajos son los que abordan las contribuciones del ingeniero español Juan Cortázar (León-Mantero et al., 2019), del marino andaluz Antonio Terry y Rivas (Meavilla & Oller, 2015a) o del catedrático de matemáticas Pedro Puig Adam (Carrillo-Gallego et al., 2024).
- Legislación y currículo: Son investigaciones en las que se busca indagar sobre los currículos y planes de estudios del pasado en relación con la enseñanza de las matemáticas y cómo han afectado tanto al aprendizaje como a las metodologías empleadas. Ejemplo de ello es el estudio centrado en la formación matemática de los maestros en las Escuelas Normales (Sánchez Jiménez y Carrillo Gallego, 2018).
- Libros de texto y otros materiales como catálogos o publicaciones periódicas: Buscan conocer la forma en que se presentan los contenidos

de todas las ramas de las matemáticas, las estrategias didácticas presentes, el tipo de problemas y de qué manera se incorporan o se ven reflejadas las normativas educativas en un determinado periodo de tiempo. Así, Madrid et al. (2023) analizan el tratamiento dado a las matemáticas durante el siglo XVIII en el *Semanario de Salamanca*; Puig (2022) centra su atención en los sistemas de signos usados en los libros de texto sobre álgebra a lo largo del tiempo; Sánchez Sierra y González Astudillo (2017) estudian las soluciones negativas de una ecuación en los libros de texto sobre geometría analítica publicados en España durante el siglo XIX, Santágeda-Villanueva y Gómez (2021) analizan los problemas de aligación en las enciclopedias escolares españolas; y Carrillo (2018) estudió de qué manera se incluyen en un conjunto de catálogos pertenecientes al período 1881-1936 los ábacos.

- Contextos históricos, científicos y sociales: Tratan de identificar, conocer y analizar el entorno social, histórico y de la propia ciencia en el que se sucedieron diversos hechos relacionados con las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje a lo largo de la historia. Entre ellos destacamos el trabajo abordado por Oller-Marcén y Meavilla-Seguí (2018) sobre la instrucción de la aritmética en instituciones militares a finales del siglo XIX.
- Instituciones: se centran en la formación matemática que se impartía a grupos específicos en centros de naturaleza militar, religiosa o civil, como las Sociedades de Amigos del País, las academias militares o el Seminario de Nobles de Madrid. Encontramos un ejemplo de este trabajo en el realizado por Madrid et al. (2020) sobre el cultivo de las matemáticas en la Academia de Guardiamarinas de Cádiz.
- Conceptos: son investigaciones enfocadas en el desarrollo de determinados conceptos matemáticos en España. Por ejemplo, el trabajo de León-Mantero et al. (2022) sobre la evolución de los métodos de resolución de triángulos oblicuángulos durante el siglo XVIII y el de Picado et al. (2015) sobre los sistemas métricos en la España de la segunda mitad del siglo XIX.
- Narrativas o historias de vida: estudian la vida y el trabajo de los docentes en su contexto histórico, permitiendo conocer más sobre su formación y sus prácticas docentes, etc. Ejemplo de ello es el estudio de Sotos Serrano y López Esteban (2015) sobre la profesora Maria Antònia Canals i Tolosa.

En cuanto a los principales marcos teóricos y metodológicos empleados dentro de esta línea de investigación, podemos hablar de una gran variedad de referentes, algunos de ellos previos y otros que han surgido en los últimos años, entre los que destacamos:

- Las fases del método de investigación histórica aplicadas a la investigación en historia de la educación matemática que proponen González Astudillo y Sierra Vázquez (2003).
- El análisis de contenido propuesto por Maz (2009).
- Las categorías planteadas por Muñoz-Escolano y Oller-Marcén (2019) para el análisis de paratextos a partir de la obra de Genette.
- La perspectiva biográfica y los relatos de vida, como proponen Sotos Serrano et al. (2016).

Por otro lado, las investigaciones sobre el uso de la Historia de las Matemáticas y la Educación Matemática en el aula han sido abordadas desde muy diversas perspectivas. Sin ánimo de ser exhaustivos a continuación se engloban algunas de las propuestas realizadas en los últimos 10 años (2015-2024):

- Análisis de las valoraciones sobre la introducción de métodos del pasado en aulas de Educación Secundaria o de Universidad actuales. En este sentido, Ruiz-Catalán et al. (2024) analizan las percepciones de estudiantes de Bachillerato sobre la introducción del método general de resolución de ecuaciones desarrollado por Viète en el aula. Por otro lado, Madrid et al. (2021) analizan las percepciones de futuros docentes ante el uso de métodos de multiplicación antiguos, como son el método de celosía y el método egipcio.
- Propuestas de intervención sobre problemas clásicos en el aula de matemáticas actual, como el diseñado por Meavilla y Oller (2015b) sobre los problemas clásicos de relojes o el propuesto por Gómez (2018) sobre el problema de los gemelos póstumos en el que se destacan los beneficios de los métodos de resolución usados en diferentes épocas pasadas para el proceso de enseñanza y el aprendizaje actual de las matemáticas.
- Identificación de las concepciones y creencias sobre el uso de la historia de las matemáticas y la educación matemática en el aula. Entre este tipo de investigaciones encontramos el trabajo abordado por León-Mantero et al. (2021) en el que se identifica la utilidad otorgada al uso de la Historia de las Matemáticas en el aula por docentes en ejercicio y en formación o el de Santágeda-Villanueva y Lorenzo-Valentín (2019), en el que se analiza la importancia que tiene integrar la Historia de las matemáticas en la formación matemática de los futuros docentes.
- Experiencias de uso de textos o materiales del pasado en la formación docente. Por ejemplo, Muñoz-Escolano y Oller-Marcén (2023) diseñaron una propuesta utilizando fragmentos sobre la enseñanza de la aritmética elemental procedentes de la revista Escuela Española.

Entre los principales marcos teóricos y metodológicos empleados, destacan el propuesto por Rico (1997) sobre la evolución histórica de los distintos tópicos y conceptos matemáticos como uno de los organizadores del currículo, o los diversos estudios internacionales que apoyan la inclusión de la historia de las matemáticas en el aula desde diferentes perspectivas, como Fauvel (1991) o Jankvist (2009).

Han sido diversos los proyectos de investigación solicitados y concedidos por diferentes organismos y que se han desarrollado en el seno del grupo en los últimos 10 años (2015-2024). Destacamos los siguientes:

- *La enseñanza de las matemáticas en el siglo XVIII. Descripción y análisis comparado de libros de texto* (Referencia del proyecto: EDU 2016-78774-P) financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad y cuyo Investigador Principal fue Alexander Maz Machado.
- Entre los resultados obtenidos destaca el libro titulado *Las matemáticas en España durante el siglo XVIII a través de los libros y sus autores* en el que participaron investigadores de distintas universidades españolas (López-Esteban y Maz-Machado, 2020).
- *La difusión del conocimiento matemático en el nacimiento de la imprenta: descripción y análisis comparado de Aritméticas del siglo XVI escritas en castellano* (Referencia del proyecto: EDU2011-27168) financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad y cuyo Investigador Principal fue Alexander Maz Machado.
- Este dio lugar a numerosos resultados, entre los que se encuentra el desarrollo de la tesis doctoral titulada *Los libros de aritmética en España a lo largo del siglo XVI* elaborada y defendida en 2016 por María José Madrid Martín.
- *Las primeras investigadoras y docentes del área de Didáctica de la Matemática en España: trayectorias académicas, contribuciones y obstáculos superados* (Referencia del proyecto: P.P. 2022 Submod. 2.6) financiado por la Universidad de Córdoba y cuya investigadora principal fue Carmen María León Mantero.

Bajo este proyecto se han realizado ya algunas de las entrevistas a docentes e investigadoras relevantes (Madrid et al., 2023; Santágueda et al., 2023), y se espera poder publicar un libro que difunda las numerosas contribuciones a la ciencia de estas mujeres.

También se han realizado proyectos de innovación en este ámbito como Incorporación de fuentes históricas en los procesos de enseñanza-aprendizaje de la probabilidad y estadística en el CUD de Zaragoza y Uso de fuentes y materiales históricos para el desarrollo del conocimiento especializado del docente de matemáticas de la Universidad de Zaragoza. Así como situaciones de aprendizaje STEM en la Educación Obligatoria: integrando a mujeres pioneras en la Historia de la Universitat Jaume I.

En definitiva, el grupo de HMEM alberga enfoques muy variados, lo que permite su continuo crecimiento y expansión, a la vez que fomenta las colaboraciones entre distintos investigadores de la misma temática y abre nuevos caminos y perspectivas de investigación que abordar.

Líneas futuras del grupo HMEM de la SEIEM

Son diversos los desafíos y temas emergentes que el grupo debe abordar en el futuro, entre ellos destacamos:

- Continuar con el desarrollo de investigaciones que profundicen en las distintas líneas temáticas sobre la HMEM.
- Ahondar en los distintos marcos teóricos que sustentan las investigaciones en HMEM.
- Fomentar el uso de la HMEM en el aula a través de experiencias en todos los niveles educativos, y especialmente en los primeros niveles.
- En este sentido, uno de los aspectos a destacar es que si, consideramos los currículos en distintas etapas de la Educación Obligatoria vemos que tanto el Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria (2022) como el Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria (2022), mencionan la importancia de dar a conocer al alumnado las contribuciones de las mujeres y los hombres en las matemáticas a lo largo de la historia y en la actualidad. Por ello, consideramos relevante el fomento del uso de la HMEM en el aula a través de distintas propuestas, lo que a su vez potenciará las investigaciones empíricas en este campo.
- Favorecer el uso de la HMEM en la formación de los maestros y profesores, lo que nuevamente impulsará la investigación en este campo. Para poder abordar este reto, es necesario tener en cuenta que actualmente, en España los futuros docentes de Educación Infantil y Educación Primaria no reciben en general formación sobre HMEM, salvo aquellas experiencias puntuales que pueden realizarse en las distintas asignaturas del Grado que cursen sobre Didáctica de la matemática, todo ello según la decisión del profesorado. Sin embargo, los futuros docentes de Matemáticas en Educación Secundaria y Bachillerato, sí reciben dentro del Máster Universitario en Formación del Profesorado de ESO y Bachillerato, formación específica en historia de las matemáticas, ya que tal y como se indica en la Orden ECI/3858/2007, de 27 de diciembre, por la que se establecen los requisitos para la verificación de los títulos universitarios oficiales que habiliten para el ejercicio de las profesiones de Profesor de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación

Profesional y Enseñanzas de Idiomas (2007), entre las competencias que deben adquirirse se encuentra: “Conocer la historia y los desarrollos recientes de las materias y sus perspectivas para poder transmitir una visión dinámica de las mismas” (p. 53753).

- Analizar cómo se incluye la HMEM en libros de texto, materiales educativos, etc., de matemáticas actuales para conocer mejor la situación actual.
- Beneficiarse de las nuevas posibilidades que supone la digitalización de fondos bibliográficos antiguos a nivel nacional e internacional y cuyo acceso hasta el momento era muy limitado. Esto permitirá el surgimiento de nuevos temas de investigación y la actualización de temas ya conocidos, etc.
- Conectar las investigaciones realizadas en España con las de otros países, favoreciendo los estudios internacionales.
- Impulsar la realización de tesis doctorales en el área.
- Favorecer la difusión de las distintas propuestas e investigaciones en HMEM.

Como pueden verse son muchos los retos pendientes, que sin duda permitirán el crecimiento del grupo. En este sentido, ya en los últimos años, es posible ver cómo han surgido nuevas áreas de investigación que no habían sido tan abordadas hasta la fecha. Una de estas líneas es la relativa a la inclusión de la historia de las matemáticas y la educación matemática en publicaciones periódicas, revistas, diarios, etc. Si bien es cierto que esta línea de investigación es reciente ya pueden encontrarse algunos estudios, como Oller-Marcén (2023) quien habla sobre las matemáticas en el *Diario de Barcelona* del siglo XVIII; la sección de matemáticas del boletín *La Escuela* (1913-1916) (Muñoz Escolano et al., 2022) o las matemáticas en el *Semanario de Salamanca* (Madrid et al., 2023). Asimismo, se han diseñado instrumentos para facilitar el análisis de la prensa periódica (Madrid et al., 2022).

Por otro lado, en nuestra sociedad actual en la que la igualdad efectiva de hombres y mujeres es un objetivo especialmente relevante, aumentar los conocimientos sobre mujeres matemáticas del pasado sin duda nos permitirá poner en valor su contribución, para que puedan ser referentes en la actualidad. Por ello pueden encontrarse ya estudios como Oller-Marcén (2020) sobre María Andresa Casamayor, o Puig (2019b) sobre la formación geométrica de maestras en el siglo XIX. Estos estudios deben continuar en el futuro pues permiten mostrar una perspectiva más completa sobre la HMEM.

Estado actual del GTT9 en la SOMIDEM

El Grupo de Trabajo Temático 9 (GTT9) se orienta al estudio interdisciplinario de la historia y la filosofía de las matemáticas, así como de la matemática crítica, todo ello desde una perspectiva situada en el campo de

la matemática educativa. Su propósito no se limita exclusivamente a aspectos didácticos o pedagógicos, sino que se extiende a la reflexión epistemológica, ontológica y sociopolítica del quehacer matemático. Entre sus líneas de interés se encuentran la génesis y evolución de conceptos matemáticos, la influencia de los contextos históricos y culturales en la construcción del conocimiento matemático, y las implicaciones ideológicas y éticas de la enseñanza y práctica de las matemáticas.

El GTT9 reconoce la importancia de articular la investigación educativa con los debates contemporáneos sobre la naturaleza, el lenguaje y la función social de las matemáticas. En ese sentido, se constituye como un espacio abierto a la discusión crítica, el intercambio académico y la producción colectiva. Actualmente, el grupo está en proceso de revisión de los artículos que se propondrán para el segundo libro derivado de SOMIDEM2, es decir, del segundo congreso. Aunque todavía no se encuentra consolidado formalmente como grupo de investigación, el GTT9 trabaja activamente para fortalecerse a través de la presentación de ponencias diversas, la incorporación de nuevos miembros y la articulación con redes académicas afines.

Un primer reporte del GTT9 como resultado de SOMIDEM1 se encuentra en el libro *Perspectivas actuales de la Educación Matemática*:

La mayor parte de los trabajos enfatizaron en lo conveniente de proponer secuencias didácticas, considerando los aportes de la historia de las matemáticas para el manejo de conceptos y temas. De esta manera, se busca que las matemáticas no sean vistas como una disciplina descontextualizada de la sociedad. Así mismo, se habló de considerar la divulgación de la ciencia en la enseñanza como otra forma interesar y de acercar al profesorado y a los estudiantes a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. (Moreno Ochoa & Viramontes Miranda, 2024; pp. 327–328).

Los temas y áreas de investigación más relevantes en el grupo incluyen:

1. Historia de las matemáticas: Esta línea de investigación se enfoca en el análisis histórico del desarrollo de conceptos y prácticas matemáticas, considerando tanto sus contextos socioculturales como sus transformaciones a lo largo del tiempo. Se estudian ejemplos históricos significativos que permiten comprender cómo el conocimiento matemático ha sido moldeado por necesidades prácticas, visiones filosóficas y estructuras institucionales. Además, se indaga en el uso de la historia como herramienta didáctica, mediante la incorporación de narrativas históricas en el diseño de tareas matemáticas que favorezcan una comprensión más profunda y significativa del saber matemático (Katz, 2009; Fauvel & Gray, 1987).

En el contexto de la SOMIDEM2, se exploraron propuestas de secuencias didácticas basadas en hitos históricos como el surgimiento del cálculo infinitesimal, la geometría griega o la teoría de números, con énfasis en su potencial formativo.

2. Filosofía de las matemáticas: Esta línea se orienta al estudio de los fundamentos epistemológicos y ontológicos de las matemáticas, así como de las diferentes concepciones filosóficas que han orientado su desarrollo, tales como el logicismo, el formalismo, el intuicionismo y el platonismo. Se reflexiona sobre las implicaciones que estas posturas tienen en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, especialmente en lo relativo a la construcción del significado matemático por parte de los estudiantes (Brown, 2008; Shapiro, 2000). Actualmente, dentro del grupo se investiga cómo estas concepciones influyen en la formación del pensamiento matemático en distintos niveles educativos, y se discute el papel que tiene la filosofía para fomentar una actitud reflexiva y crítica ante la naturaleza del conocimiento matemático. Para SOMIDEM2, las ponencias vinculan marcos filosóficos con prácticas de aula, explorando cómo las distintas visiones del conocimiento pueden traducirse en propuestas didácticas concretas.

3. Matemática crítica: Inspirada en los planteamientos de Ole Skovsmose (1994), esta línea busca problematizar el papel de las matemáticas en la reproducción o transformación de estructuras sociales. Se analizan las relaciones entre matemáticas, poder y ciudadanía, con el objetivo de promover una educación matemática que contribuya al desarrollo de una conciencia crítica. Las investigaciones actuales incluyen el análisis de discursos escolares, el estudio de contextos de exclusión y desigualdad, y la construcción de propuestas didácticas orientadas al empoderamiento de los estudiantes a través de la resolución de problemas socialmente relevantes. En el marco de SOMIDEM2, los trabajos abordaron la enseñanza de las matemáticas con enfoque crítico en contextos multiculturales y con poblaciones vulnerables, así como el uso de proyectos interdisciplinarios para el análisis de problemáticas locales mediante herramientas matemáticas.

Principales marcos teóricos y metodológicos

Historia como herramienta didáctica: El uso de la historia de las matemáticas en la enseñanza no se limita a una dimensión anecdótica o decorativa, sino que se concibe como una vía para comprender la evolución conceptual, epistemológica y cultural del pensamiento matemático. Esta línea investiga cómo la reconstrucción de trayectorias históricas —por ejemplo, el desarrollo del número irracional, el cálculo infinitesimal o la geometría euclidiana— puede contribuir a la comprensión profunda de los conceptos por parte del estudiantado, así como a una visión más humanizada y contextualizada de las matemáticas (Katz, 2009). Las investigaciones actuales exploran la adaptación de relatos históricos como estrategias didácticas, el diseño de tareas basadas en fuentes primarias y el análisis del papel de los errores históricos como recursos para promover la reflexión metacognitiva.

Enfoques críticos en educación matemática: Esta línea se enfoca en comprender y transformar las relaciones entre las matemáticas, la educación y la sociedad, tomando como base los aportes de la matemática crítica y de los estudios sociopolíticos en educación. Inspirados en Skovsmose (1994), los trabajos en esta área analizan cómo las matemáticas pueden ser una herramienta de emancipación y de desarrollo del pensamiento crítico, especialmente en contextos de desigualdad, exclusión o diversidad cultural. Las investigaciones actuales abordan, por ejemplo, el diseño de proyectos interdisciplinarios con problemáticas reales, el análisis de discursos normativos en los libros de texto y el papel de la alfabetización matemática crítica para la participación ciudadana.

Esta línea busca no sólo comprender, sino también incidir en la práctica educativa, desarrollando propuestas pedagógicas que promuevan la agencia estudiantil y el compromiso ético.

Métodos cualitativos de investigación: En consonancia con la naturaleza interpretativa de las preguntas que guían al grupo, se privilegia el uso de metodologías cualitativas que permiten explorar en profundidad las experiencias, significados y prácticas de los actores educativos. Se emplean herramientas como el estudio de caso, la entrevista semiestructurada, la observación participante y el análisis documental, para captar la complejidad del aula como espacio cultural y discursivo (Merriam & Tisdell, 2015). Las investigaciones actuales incluyen análisis de interacciones en clase, reconstrucción de trayectorias de aprendizaje, y estudios sobre creencias y concepciones de docentes en formación inicial, con el propósito de generar conocimiento situado y relevante para la mejora de la práctica educativa.

Teorías del aprendizaje con enfoque constructivista: Las investigaciones del grupo se apoyan en marcos teóricos que conciben el aprendizaje como un proceso activo, situado y mediado culturalmente. Desde el constructivismo genético de Piaget hasta el constructivismo sociocultural de Vygotsky, pasando por el enfoque pragmatista de Dewey, se reconoce que los estudiantes no son receptores pasivos, sino sujetos que construyen activamente su conocimiento a partir de sus experiencias previas, las interacciones sociales y los contextos culturales (Dewey, 1938; Vygotsky, 1978). Actualmente se estudian, por ejemplo, los procesos de construcción de significado matemático en escenarios colaborativos, el papel del lenguaje y la mediación semiótica en la comprensión de conceptos abstractos, y el diseño de trayectorias hipotéticas de aprendizaje que articulen niveles progresivos de formalización.

Líneas futuras del GTT9 en la SOMIDEM

El GTT9 se propone como un espacio de reflexión crítica y multidimensional en torno a las matemáticas, su enseñanza y su función en diversos contextos

históricos, sociales y culturales. Entre los temas que se espera discutir se encuentran las problemáticas relacionadas con la evolución de conceptos matemáticos a lo largo de la historia, poniendo énfasis tanto en su dimensión teórica como en las condiciones sociales, filosóficas y tecnológicas que posibilitaron su surgimiento y transformación. Esta perspectiva incluye también el análisis del proceso de institucionalización de las matemáticas en México, entendido como la conformación de estructuras curriculares, políticas educativas y mecanismos de legitimación del saber matemático en diferentes momentos históricos.

Asimismo, el grupo se interesa por examinar críticamente los modelos de libros de texto utilizados en distintas épocas, reconociendo en ellos no solo instrumentos didácticos, sino también artefactos culturales que reflejan determinadas concepciones de la matemática, del aprendizaje y del sujeto educable. Estas investigaciones buscan revelar las implicaciones ideológicas y normativas de tales materiales, así como su impacto en la configuración de prácticas pedagógicas y en la construcción del conocimiento matemático escolar.

Otro eje central del GTT9 es la reflexión sobre la naturaleza de las matemáticas en la sociedad contemporánea, interrogando sus fundamentos epistemológicos, su relación con otras formas de conocimiento, y sus usos en contextos tecnocientíficos, políticos y económicos. Desde esta óptica, se promueve un diálogo que no solo tenga un fin didáctico o pedagógico, sino que también permita realizar una crítica profunda de las matemáticas mismas, cuestionando su aparente neutralidad y desentrañando el papel que desempeñan en la reproducción o transformación de estructuras sociales.

En consonancia con una postura no eurocéntrica ni universalizante, el grupo se abre también a considerar trabajos que aborden las matemáticas desde otras epistemologías, particularmente aquellas que surgen de comunidades indígenas o contextos socioculturales alternativos. En esta línea, se valoran especialmente los estudios etnográficos que investigan el uso de conocimientos matemáticos localizados, así como las formas de razonamiento y simbolización propias de estas comunidades, reconociendo su historia, su lógica interna y su valor epistemológico. Tales enfoques contribuyen a ampliar el horizonte de lo que se entiende por “matemáticas”, enriqueciendo el campo con perspectivas plurales, críticas y contextualizadas.

Conclusiones

Como se muestra en las secciones previas, la investigación en HMEM es una línea de interés en las investigaciones en Educación matemática en los distintos países. El diseño de este estudio ha permitido reconocer puntos de encuentro entre ambos grupos de investigación. Por un lado, las investigaciones en historia de la educación matemática analizan libros de textos del

pasado o la evaluación de los conceptos en el tiempo y en los distintos contextos sociales y, por otro lado, la introducción de distintos contenidos de la historia de las matemáticas en el aula.

Ambos grupos poseen una visión globalizada en cuanto a marcos teóricos y metodológicos que pueden complementarse y aportar herramientas a los distintos problemas de investigación que surjan.

Este punto de partida nos dice que, sin duda, sería posible plantear conexiones entre nuestros grupos, por ejemplo, un enfoque a considerar que no se aborda desde el grupo HMEM de la SEIEM es la conexión con la filosofía de las matemáticas. Esta podría dar lugar a una nueva línea de trabajo paralela a seguir.

Así mismo, sería interesante realizar trabajos comparativos conjuntos sobre la Historia de la Educación Matemática en cada país, relativos a los libros de texto utilizados para la enseñanza, la legislación y los planes de estudio, posibles conexiones entre los matemáticos y los autores de libros, historias de vida y narrativas de profesores y maestros en cada país, entre otros.

Sería de interés también la participación en experiencias combinadas en la que se integre la HMEM en el aula, ya que la comparación de los resultados obtenidos en contextos diferentes puede ser rica y de utilidad.

Es por ello por lo que, para afianzar estas relaciones, se ha propuesto a dos miembros del grupo de Historia de las Matemáticas de la SOMIDEM que participen de forma virtual en el Seminario de Investigación de HMEM de la SEIEM que se celebró el 27 y 28 de febrero de 2025. Y a su vez a dos miembros del grupo de HMEM de la SEIEM se les propuso participar en el Congreso SOMIDEM2: Grupo de Trabajo Temático 9 (GTT9): Historia, filosofía de las matemáticas y matemática crítica.

Referencias

- Avila, A. (2016). La investigación en educación matemática en México: una mirada a 40 años de trabajo. *Educación Matemática*, 28(3), 31–60.
<https://www.redalyc.org/journal/405/40548562002/html/>
- Bosch, M., Gutierrez, A., & Llinares, S. (2024). A survey of Spanish research in mathematics education. *ZDM Mathematics Education*, 56, 1029–1044.
<https://doi.org/10.1007/s11858-024-01638-z>
- Bracho, R., Torralbo, M., Maz-Machado, A., & Adamuz, N. (2014). Tendencias temáticas de la investigación en educación matemática en España. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 28, 1077–1094.
- Brown, J. R. (2008). *Philosophy of mathematics: A contemporary introduction to the world of proofs and pictures*. Routledge.

- Carrillo, D. (2018). Los catálogos de material escolar como fuente de la historia de la educación matemática: el caso de los ábacos. *Historia y Memoria de la Educación*, 7, 573–613.
- Carrillo-Gallego, D., Dólera-Almáida, J., & Sánchez-Jiménez, E. (2024). Puig Adam and the Instituto-Escuela of Madrid. *Historia y Memoria de la Educación*, (19), 401–435. <https://doi.org/10.5944/hme.19.2024.34620>
- Clark, K.M., Kjeldsen, T.H., Schorcht, S., & Tzanakis, C. (2018). Introduction: Integrating History and Epistemology of Mathematics in Mathematics Education. En K.M. Clark, T.H. Kjeldsen, S. Schorcht, & C. Tzanakis (Eds.), *Mathematics, Education and History* (pp. 1–26). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-73924-3>
- Dewey, J. (1938). *Experience and education*. Kappa Delta Pi.
- Fauvel, J., & Gray, J. (Eds.). (1987). *The history of mathematics: A reader*. Macmillan Education.
- Fauvel, J. (1991). Using history in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, 11(2), 3–6.
- Gómez, B. (2018). El uso de la historia en la educación matemática: El caso de los gemelos póstumos. *Matemáticas, Educación y Sociedad*, 1(1), 11–21.
- González Astudillo, M. T., & Sierra Vázquez, M. (2003). El método de investigación histórico en la didáctica del análisis matemático. En E. Castro (Ed.), *Investigación en educación matemática: séptimo simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 109–130). SEIEM.
- Jankvist, U. T. (2009). A categorization of the ‘whys’ and ‘hows’ of using history in mathematics education, *Educational Studies in Mathematics*, 71(3), 235–261. <https://doi.org/10.1007/s10649-008-9174-9>
- Katz, V. J. (2009). *A history of mathematics: An introduction*. Addison-Wesley.
- León Mantero, C. M., Maz Machado, A., & Madrid, M. J. (2019). Juan Cortázar (1809-1873): profesor, autor y matemático. *La Gaceta de la RSME*, 22, 159–169.
- León-Mantero, C., Madrid, M.J., Maz-Machado, A., & Casas-Rosal, J.C. (2021). Utilidad de la historia de las matemáticas para profesores en formación y en ejercicio. En A. Verdú Vázquez, C. Romero García, & O. Buzón García (Eds.), *Innovaciones metodológicas con TIC en educación* (pp. 4222–4239). Dykinson. <https://www.dykinson.com/cart/download/ebooks/12609/>
- León-Mantero, C., Madrid, M. J., & Maz-Machado, A. (2022). La evolución de los métodos de resolución de triángulos oblicuángulos en los libros de texto sobre trigonometría publicados en España. En Fernández-Plaza, J. A., Lupiáñez, J. L., Moreno, A., & Ramírez, R. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a los profesores Pablo Flores e Isidoro Segovia* (pp. 213–230). Barcelona: Octaedro.

- López-Esteban, C. (2019). La institucionalización del análisis matemático en el siglo XVIII a través de libros históricos y su reflejo en la enseñanza para Educación Secundaria en España a través del análisis de manuales. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano, & Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 95-116). SEIEM.
- López-Esteban, C., & Maz-Machado, A. (2020). *Las matemáticas en España durante el siglo XVIII a través de los libros y sus autores*. Ediciones Universidad de Salamanca.
- Madrid, M. J., León-Mantero, C., Casas-Rosal, J. C., & Maz-Machado, A. (2023). Mathematics in the Spanish press: a case study of the 18th century journal *Semanario de Salamanca*. *Humanities and Social Sciences Communications*, 10(1), 1–9. <https://doi.org/10.1057/s41599-023-01512-5>
- Madrid, M. J., López-Esteban, C., & Jiménez-Fanjul, N. N. (2020). La enseñanza de las matemáticas en la Academia de Guardiamarinas de Cádiz: Una visión a partir de tres libros clave. En C. López-Esteban, & A. Maz-Machado (Eds.), *Las matemáticas en España durante el siglo XVIII a través de los libros y sus autores* (pp. 93–113). Ediciones Universidad de Salamanca.
- Madrid, M. J., Maz-Machado, A., Almaraz-Menéndez, F., & León-Mantero, C. (2021). Comparison between a Modern-Day Multiplication Method and Two Historical Ones by Trainee Teachers. *Mathematics*, 9(4), 349. <https://doi.org/10.3390/math9040349>
- Madrid, M. J., Maz-Machado, A., Cuida, A., & Pedrosa-Jesús, C. (2022). Developing an Instrument for Analyzing Mathematics and Mathematics Education Ideas in the Spanish Press of the 18th Century. *Mathematics*, 10(13), 2308. <https://doi.org/10.3390/math10132308>
- Madrid, M. J., Pedrosa-Jesús, C., Gutiérrez-Rubio, D., & León-Mantero, C. (2023). Las primeras investigadoras y docentes del área de Didáctica de la Matemática en España: Dolores Carrillo Gallego. *Matemáticas, educación y sociedad*, 6(1), 54–58.
- Marco-Buzunáriz, M. A., Muñoz-Escolano, J. M., & Oller-Marcén, A. M. (2016). Investigación sobre libros de texto en los Simposios de la SEIEM (1997-2015). En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández, & A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 325–334). SEIEM.
- Maz, A. (2009). Investigación histórica de conceptos en los libros de matemáticas. En M. J. González, M. T. González, & J. Murillo, (Ed), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 5–20). SEIEM.
- Maz-Machado, A. (2019). Un breve balance de la investigación en historia de las matemáticas y la educación matemática en España. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano, & Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 91–94). SEIEM.

- Maz-Machado, A., Madrid, M. J., León-Mantero, C., & Jiménez-Fanjul, N. (2017). Research trends in the history of mathematics education: the Spanish case. En K. Patterson (Ed.), *Focus on Mathematics Education Research* (pp. 150–182). Nova.
- Meavilla, V., & Oller, A. (2015a). Los textos matemáticos de Antonio Terry y Rivas. *Números*, 90, 89–103.
- Meavilla, V., & Oller, A. (2015b). Problemas de relojes. Ejemplos históricos y consideraciones didácticas. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 29, 110–122.
- Merriam, S. B., & Tisdell, E. J. (2015). *Qualitative research: A guide to design and implementation*. Jossey-Bass.
- Ministerio de Universidades. (2024). *Tesis doctorales: TESEO*. Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades. <https://www.educacion.gob.es/teseo>
- Moreno Ochoa, M., & Viramontes Miranda, J. de D. (2024). Entre historia, filosofía y matemática crítica. En M. Sánchez Aguilar, M. del S. García González, & A. Castañeda (Eds.), *Perspectivas actuales de la Educación Matemática* (pp. 327–328). Editorial SOMIDEM. <https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S3/2024/01-37>
- Muñoz-Escolano, J. M., & Oller-Marcén, A. M. (2019). Análisis de los prólogos de los textos algebraicos publicados en España durante el siglo XVI. *Historia y Memoria de la Educación*, 11, 51. <https://doi.org/10.5944/hme.11.2020.23545>
- Muñoz-Escolano, J. M., & Oller-Marcén, A. M. (2023). Researching the use of old professional journals as a tool for infant education prospective teachers training. En P. Drijvers, C. Csapodi, H. Palmér, K. Gosztonyi, & E. Kónya (eds.), *Proceedings of the Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13)* (pp. 1945–1952). Alfréd Rényi Institute of Mathematics - ERME.
- Muñoz Escolano, J. M., Oller Marcén, A. M., & Santágueda-Villanueva, M. (2022). La sección de problemas matemáticos del boletín La Escuela (1913–1916). *Historia y Memoria de la Educación*, 16, 425–458.
- Oller-Marcén, A. M. (2020). El Tyrocinio Arithmetico de María Andresa Casamayor de la Coma. En J. Bernues, & P. J. Miana (Eds.), *Tyrocinio Arithmetico* (pp. 105–127). Universidad de Zaragoza.
- Oller-Marcén, A. M. (2023). Matemáticas en la prensa diaria española del siglo XVIII. Los primeros años del Diario de Barcelona. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 37, 1317–1335.
- Oller-Marcén, A. M., & Meavilla-Seguí, V. (2018). Arithmetic in the Spanish army at the end of the 19th century: the textbooks by Salinas and Benítez. En F. Furinghetti y A. Karp (Eds.), *Researching the History of Mathematics Education. An international overview* (pp. 167–187). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68294-5_9

- Orden ECI/3858/2007, de 27 de diciembre, por la que se establecen los requisitos para la verificación de los títulos universitarios oficiales que habiliten para el ejercicio de las profesiones de Profesor de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas. [BOE, 312], de 29 de diciembre de 2007, 53751-53753.
- Picado, M., Rico, L., & Gómez, B. (2015). Enseñanza de las unidades métricas en España en la segunda mitad del siglo XIX. *Enseñanza de las Ciencias*, 33(3), 175–196.
- Puig, L. (2019a). Geometry for women in teacher training schools in the late 19th century in Spain. En K. Bjarnadóttir, F. Furinghetti, J. Krüger, J. Prytz, G. Schubring, G. y H. J. Smid, (Eds.) (2019). “Dig where you stand” 5. *Proceedings of the fifth International Conference on the History of Mathematics Education* (pp. 301–317). Freudenthal Institute.
- Puig, L. (2019b). Observaciones acerca de la historia de las matemáticas en la matemática educativa. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano, & Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 117130). SEIEM.
- Puig, L. (2022). Ideas of Structure in the History of Algebra and Its Teaching. In T. Rojano (Ed.), *Algebra Structure Sense Development amongst Diverse Learners* (pp. 20–34). Routledge. <https://doi.org/10.4324/9781003197867-2>
- Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. [BOE, 52], de 02/03/2022, 24386– 24504.
- Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria. [BOE, 76], de 30 de marzo de 2022, 41571–41789.
- Rico, L. (1997). Los organizadores del currículo de matemáticas. En L. Rico, E. Castro, E. Castro, M. Coriat, A. Marín, L. Puig, M. Sierra, & M. M. Socas (Eds.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 39–59). ice - Horsori.
- Ruiz-Catalán, J., Madrid, M.J., & Maz-Machado, A. (2024). Valoración de la historia de las matemáticas por estudiantes de Bachillerato: el método general de resolución de ecuaciones de Vieta. *Educación Matemática*, 36(2), 232–257. <https://doi.org/10.24844/EM3602.09>
- Sánchez Aguilar, M. (2022). Rumbo a SOMIDEM1: recuento del Precongreso SOMIDEM 2022. *Educación Matemática*, 34(3), 374–375. <https://doi.org/10.24844/em3403.15>
- Sánchez Aguilar, M., García González, M. del S., & Castañeda, A. (Eds.). (2024). *Perspectivas actuales de la Educación Matemática*. Editorial SOMIDEM. <https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S3/2024/01>

- Sánchez Jiménez, E., & Carrillo Gallego, D. (2018). La Aritmética en las Escuelas Normales españolas en la Segunda República y los años previos. *Paradigma*, XXXIX (Núm. extra 1, Junio), 31–55.
- Sánchez Sierra, I.M., & González Astudillo, M. T. (2017). La geometría analítica en España durante el siglo XIX: estudio de las soluciones negativas de una ecuación. *Enseñanza de las Ciencias*, 35(3), 89–106.
<https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2348>
- Santágueda Villanueva, M., Casas-Rosal, J. C., & León-Mantero, C. (2023). Las primeras investigadoras y docentes del área de Didáctica de la Matemática en España: Pilar Orús Báguena. *Matemáticas, Educación y Sociedad*, 6(1), 59–66.
- Santágueda-Villanueva, M., & Gómez, B. (2021). Los modelos de enseñanza de los problemas de aligación en las enciclopedias escolares españolas. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 35(69), 365–388.
<https://doi.org/10.1590/1980-4415v35n69a17>
- Santágueda-Villanueva, M., & Lorenzo-Valentín, G. (2019). Historia de las matemáticas para la formación de maestros. *Matemáticas, Educación y Sociedad* 2(2), 19–32.
- Schubring, G. (2014). On Historiography of Teaching and Learning Mathematics. En A. Karp, & G. Schubring (Eds.), *Handbook on the History of Mathematics Education* (pp. 3–8). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-1-4614-9155-2>
- Schubring, G. (2019). “Mathematics is not a stalactite hanging over a stalagmite” (W. Kuyk) – The productive role of teaching. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano, & Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 131–140). SEIEM.
- Sociedad Española de Investigación en Educacion Matemática [SEIEM]. (2024a). Historia de las Matemáticas y Educación Matemática. SEIEM.
<https://bit.ly/4alrISS>
- Sociedad Española de Investigación en Educacion Matemática [SEIEM]. (2024b). Tesis Doctorales en Educación Matemática. <https://www.seiem.es>
- Shapiro, S. (2000). *Thinking about mathematics: The philosophy of mathematics*. Oxford University Press.
- Skovsmose, O. (1994). *Towards a philosophy of critical mathematics education*. Springer.
- Sotos Serrano, M., & López Esteban, C. (2015). El proceso de construcción del saber pedagógico en Educación Matemática: el caso de María Antònia Canals. *Épsilon*, 32-2(90), 59–69.
- Sotos Serrano, M., López Esteban, C., & Sánchez García, A. B. (2016). La perspectiva biográfica: el proceso de construcción del saber pedagógico. Teoría de la Educación: *Revista Interuniversitaria*, 28, 2, 249–265.
- Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Harvard University Press.

Investigación en educación matemática y tecnología: aportes desde los grupos entornos tecnológicos en SEIEM y tecnologías digitales en SOMIDEM

Research in mathematics education and technology:
contributions from the groups technological environments in
SEIEM and digital technologies in SOMIDEM

Javier del Olmo-Muñoz ¹ 

Verónica Hoyos ² 

Pascual D. Diago ³ 

Minerva Martínez-Ortega ⁴ 

Ana Isabel Sacristán ⁵ 

Resumen

En este capítulo se analizan la evolución y las perspectivas de futuro de la integración de las tecnologías digitales en Educación Matemática a través del trabajo desarrollado por dos grupos de investigación: el grupo Entornos Tecnológicos en Educación Matemática (ETEM) de la SEIEM y el grupo Educación Matemática y Tecnologías Digitales (EMTD) de la SOMIDEM. Se presentan los objetivos y las líneas de investigación de cada grupo, detallando los marcos teóricos y metodológicos utilizados, así como los resultados más relevantes obtenidos hasta la fecha. Además, se señalan los desafíos y áreas emergentes en el uso de la tecnología en la educación matemática, como el impacto de la inteligencia artificial, el pensamiento computacional y la evaluación mediada por tecnología. Por último, se proponen posibles sinergias entre ETEM y EMTD para fomentar futuras colaboraciones que contribuyan al desarrollo de la investigación en educación matemática y tecnología.

¹ javier.olmo@uclm.es

Universidad de Castilla-La Mancha, España

² vhoyosa@upn.mx

Universidad Pedagógica Nacional, México

³ pascual.diago@uv.es

Universitat de València, España

⁴ minervamarort@gmail.com

Dirección General de Educación Tecnológica Industrial y de Servicios, México

⁵ asacrist@cinvestav.mx

CINVESTAV, México

Palabras clave

Tecnología educativa, educación matemática y tecnologías digitales, pensamiento computacional, inteligencia artificial, evaluación digital.

Abstract

This chapter examines the evolution and future perspectives of in the integration of digital technologies in mathematics education through the work of two research groups: Entornos Tecnológicos en Educación Matemática (ETEM) from SEIEM and Educación Matemática y Tecnologías Digitales (EMTD) from SOMIDEM. The objectives and research lines of each group are presented, detailing the theoretical and methodological frameworks employed, as well as the most relevant results obtained to date. Furthermore, challenges and emerging areas in the use of technology in mathematics education are identified, such as the impact of artificial intelligence, computational thinking, and technology-mediated assessment. Finally, potential synergies between ETEM and EMTD are proposed to foster future collaborations that contribute to the advancement of the research in mathematics education and technology.

Keywords

Educational technology, mathematics education and digital technologies, computational thinking, artificial intelligence, digital assessment.

Introducción

A lo largo de los últimos años, el uso de tecnologías digitales en la educación matemática ha cobrado una gran relevancia, generando diversas líneas de investigación en distintos contextos académicos. En este capítulo se analizan los principales objetivos y temas centrales de dos grupos que han abordado esta temática desde perspectivas complementarias: el grupo Entornos Tecnológicos en Educación Matemática (ETEM) de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM) y el grupo Educación Matemática y Tecnologías Digitales (EMTD) de la Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática (SOMIDEM). A continuación, se presentan sus planteamientos y líneas de trabajo.

Principales objetivos

El principal objetivo del grupo ETEM de la SEIEM es analizar y comprender temas relacionados con el análisis de fenómenos didácticos propios de la educación matemática en entornos tecnológicos, considerando como entorno tecnológico cualquier conjunto de herramientas tecnológicas (ya sea software o hardware) que, aplicado en un contexto educativo, intervenga en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Además, busca generar conocimiento basado en la investigación para informar las prácticas docentes y contribuir a la mejora de la educación matemática.

Por su parte, el grupo EMTD de la SOMIDEM se centra en investigar el uso e integración de las tecnologías digitales en la enseñanza y aprendizaje

de las matemáticas en diversos niveles educativos, con especial atención en el desarrollo de estrategias de enseñanza que incorporen herramientas digitales en la resolución de problemas. Entre sus objetivos se incluyen la evaluación del impacto de estas tecnologías en la formación docente y en el aprendizaje del estudiantado, atendiendo al desarrollo del razonamiento y del pensamiento matemático.

Temas centrales

Ambos grupos comparten un interés común en la exploración de la tecnología como un medio para enriquecer la enseñanza de las matemáticas. En el caso de ETEM, las principales líneas de investigación contemplan el uso de software educativo, el pensamiento computacional, la inteligencia artificial (IA) aplicada a la educación matemática y las analíticas de aprendizaje. Se presta atención asimismo a la forma en que estas tecnologías pueden facilitar la visualización de conceptos matemáticos, personalizar la enseñanza y generar datos para la evaluación del aprendizaje.

En cuanto a EMTD, el grupo ha desarrollado investigaciones sobre la implementación de tecnologías digitales en contextos educativos diversos, en los que se incluye el uso de software dinámico para la enseñanza de las matemáticas, plataformas de aprendizaje y metodologías basadas en la utilización de entornos virtuales. También se ha planteado la integración de IA generativa y el diseño de estrategias de evaluación que incorporen el uso de tecnologías digitales. Además, la formación de docentes es un aspecto en el que se ha hecho hincapié en el período que se revisa.

Partiendo de esta coincidencia en el interés por las tecnologías digitales aplicadas a la educación matemática, resulta pertinente presentar la trayectoria y los planteamientos de ambos grupos. En este capítulo se presentan los avances, intereses y proyecciones de ambos grupos de trabajo con el objetivo de identificar posibles sinergias y áreas de colaboración. Para ello, se describirá primero el estado actual de cada grupo, detallando las principales líneas de investigación, metodologías utilizadas y aportaciones recientes. Posteriormente, se abordarán los desafíos y tendencias emergentes en el campo de las tecnologías digitales en la educación matemática. Finalmente, se reflexionará sobre las oportunidades de colaboración entre ETEM y EMTD, analizando cómo la confluencia de enfoques puede enriquecer la investigación y la aplicación de las tecnologías digitales en la enseñanza de las matemáticas.

Estado actual del grupo ETEM

Breve descripción de los intereses y proyectos actuales

El grupo ETEM es un grupo de trabajo vinculado a la SEIEM relativamente joven. La semilla del grupo comenzó a gestarse en marzo de 2018 en

Valencia, con la realización de un primer *workshop* sobre Entornos Tecnológicos en Educación Matemática en la Facultat de Magisteri de la Universitat de València. A este encuentro piloto asistieron 44 personas, la mayoría de ellas vinculadas a la SEIEM, y en él se presentaron 17 comunicaciones. En 2019, el germen del grupo se consolidó con una segunda edición en abril en el mismo lugar, edición que sentó las bases para su desarrollo formal. En este segundo encuentro se presentaron 15 comunicaciones.

Desde antes de la consolidación oficial del grupo ETEM en el seno de la SEIEM, el interés del grupo ha sido dotar de un enfoque de investigación a la creciente cantidad de tecnologías educativas orientadas a desarrollar la educación matemática en diferentes niveles educativos. En esta línea, además del principal objetivo del grupo mencionado anteriormente relacionado con el análisis de fenómenos didácticos, también son objeto de estudio el uso de soluciones tecnológicas que faciliten la obtención de datos y métricas de aprendizaje, bien a través de herramientas diseñadas ad hoc o de otras ya existentes.

La clasificación que, para este capítulo, se ha hecho de las tecnologías utilizadas en la investigación del grupo ETEM se basa en una observación sistemática de los trabajos presentados en el grupo y en los tipos de tecnología empleados. A diferencia de otras propuestas, como la de funciones didácticas de Drijvers (2015), que clasifican las tecnologías según su uso pedagógico (herramienta, entorno de práctica, desarrollo conceptual), la de Hoyles y Noss (2003), que distingue entre micromundos programables y herramientas expresivas, o la de los roles clásicos de Taylor (1980), centrados en el papel que desempeña la tecnología (tutor, herramienta, alumno), la taxonomía propuesta en este capítulo se interesa por la naturaleza y las características específicas de las herramientas así como por los temas abordados.

De este modo, la clasificación se organiza en siete categorías principales: software especializado, plataformas educativas, dispositivos tecnológicos, IA, entornos 3D, pensamiento computacional y analíticas de aprendizaje. Las contribuciones analizadas, junto con la categoría o categorías tecnológicas bajo las que se han clasificado, se presentan en la Tabla 1.

Como primera categoría dentro de esta clasificación el software especializado ha desempeñado un papel central en las investigaciones del grupo, con 14 contribuciones que han explorado aplicaciones como *GeoGebra*, utilizada para construcción del conocimiento matemático mediante la visualización y la modelización, o *GeoPattern*, creada para promover el desarrollo del pensamiento algebraico temprano en estudiantes de Educación Primaria mediante la resolución de problemas de patrones geométricos. Algunas propuestas han abordado el uso de entornos específicos tales como *Mathematica* para facilitar la resolución de problemas avanzados en álgebra y cálculo, o *Matlab* para la resolución de problemas matemáticos clásicos

desde un enfoque computacional. Otros sistemas como *Read & Learn o Read & Answer* se han usado para estudiar el aprendizaje a través de aspectos específicos en la resolución de problemas, como la comprensión lectora de enunciados y la detección de inconsistencias en ejemplos resueltos paso a paso (*worked examples*). Este tipo de herramientas ha abierto nuevas vías de investigación al permitir registrar los comportamientos e interacciones de los estudiantes con los contenidos matemáticos. También se incluye en esta categoría a *HINTS*, un sistema tutorial inteligente que combina capacidades adaptativas con un diseño específico para el planteamiento y resolución de problemas verbales aritmético-algebraicos.

En la categoría de plataformas educativas, con 11 contribuciones, se destacan los sistemas de gestión del aprendizaje, muchas veces también utilizados como herramientas de analítica educativa. Así, estas plataformas pueden integrar algoritmos para ajustar las tareas según el desempeño del estudiante, como es el caso de *Smartick*, utilizada, por ejemplo, para la clasificación automática de estrategias de cálculo mental representadas en una recta numérica vacía interactiva, o para introducir una secuencia de tareas destinadas al aprendizaje de la modelización mediante el método gráfico de Singapur. Además, se han explorado entornos como *PoliformaT*, una plataforma educativa utilizada para implementar metodologías como la clase invertida, integrando recursos como vídeos, foros y evaluaciones en el ámbito universitario. Otras propuestas innovadoras son *MathCityMap*, una aplicación que permite crear y vivenciar paseos matemáticos a través de dispositivos móviles, desarrollando habilidades matemáticas mediante el análisis de objetos en entornos cotidianos; y *EduCITY*, que promueve el uso de la ciudad como entorno educativo a través de rutas matemáticas diseñadas para transformar los recursos del territorio en espacios de aprendizaje. Por último, *Moodle*, ampliamente reconocido como un sistema de gestión del aprendizaje robusto, se ha utilizado en investigaciones para analizar el rendimiento estudiantil y enriquecer la enseñanza mediante metodologías basadas en datos.

Los dispositivos tecnológicos, con nueve comunicaciones, han ampliado también el abanico de posibilidades en la educación matemática mediante el uso de herramientas físicas e interactivas. La robótica educativa ha gozado de un gran protagonismo con múltiples propósitos. Por ejemplo, se han presentado propuestas que han hecho uso del robot *Bee-Bot* para el estudio de las habilidades espaciales en educación primaria, así como para estudiar los procesos metacognitivos en alumnos de primeras edades escolares cuando abordan y resuelven problemas. También se ha examinado el uso de *mBot* durante el aprendizaje de las isometrías en el plano, relacionando conceptos abstractos con actividades prácticas de programación y manipulación directa. La vertiente analógica también ha ocupado un espacio significativo merced

al uso de dispositivos como *Turing Tumble*, un juego físico que permite a los alumnos manipular piezas mecánicas para descubrir conceptos de lógica o secuencias algorítmicas, pudiendo aprender así cómo pequeños cambios en un sistema pueden influir en su comportamiento general. Por otro lado, herramientas como el *Eye-tracker* han protagonizado trabajos sobre el estudio del razonamiento matemático a partir de la medición de la posición y el movimiento ocular durante el uso de un videojuego comercial. Por último, los dispositivos de respuesta remota *clickers* han mostrado su utilidad al posibilitar la interacción en tiempo real y la evaluación formativa en el aula, haciendo posible que los estudiantes participen activamente mientras los docentes recopilan datos para ajustar su práctica.

De los datos recopilados en algunas de las mencionadas plataformas se nutren las analíticas de aprendizaje, que, con siete trabajos, han permitido investigar patrones de interacción y rendimiento mediante el análisis de datos educativos. Estudios realizados con herramientas como *Moodle*, *Smartick*, *TaskTimeTracker* o los mencionados *clickers*, han puesto de manifiesto la posibilidad de capturar información en tiempo real y emplearla en la predicción del rendimiento académico.

El pensamiento computacional, presente en 17 comunicaciones distribuidas en todas las reuniones, sobresale como el tema más recurrente, reflejando el interés del grupo ETEM por investigar tanto las bases teóricas como las aplicaciones prácticas de esta habilidad, junto con sus conexiones con la educación matemática. No en vano, la primera conferencia invitada que tuvo lugar en la primera de las reuniones versó sobre el tema, deteniéndose en una reflexión preliminar sobre el estudio de la enseñanza y aprendizaje de la programación en edades tempranas como proceso de resolución de problemas, atendiendo a las particularidades de este tipo de tareas y su relevancia en la formación del pensamiento computacional. A menudo asociado con la programación y la robótica educativa, esta recientemente acuñada habilidad ha sido abordada en el grupo a través de propuestas que se han servido de robots como *Bee-Bot* o de simuladores como *Abella*, pero también de dispositivos analógicos como el *Turing Tumble*. Además, iniciativas como el proyecto *PENSACT* han promovido la integración curricular del pensamiento computacional en la formación docente. Otro proyecto, *MAPS*, ha explorado los fundamentos aritméticos de esta habilidad a través del sistema *Exploding Dots*. También se ha investigado la transferencia de estas competencias a contextos prácticos mediante la resolución de problemas de la vida real, como en las tareas *Bebras*, diseñadas para desafiar a los estudiantes con retos accesibles pero intelectualmente estimulantes. Por último, aunque de manera secundaria, el pensamiento computacional ha estado presente en otras investigaciones del grupo, como las propuestas con *BlocksCAD* o el simulador *Abella*.

Vinculada al pensamiento computacional, la reciente explosión de la IA en 2022 ha comenzado a transformar significativamente las prácticas de enseñanza y aprendizaje, y la educación matemática no ha sido la excepción. Aunque presente desde los inicios del grupo, ha cobrado un notable auge en estos últimos años, acumulando un total seis comunicaciones. Entre sus aplicaciones más innovadoras está el uso de la IA para la resolución de problemas mediante análisis generativo, una línea de trabajo centrada en identificar los errores a los que se enfrentan los grandes modelos del lenguaje a la hora de determinar las cantidades necesarias para resolver problemas matemáticos. Sin embargo, esta revolución se asienta sobre un terreno previamente abonado por décadas de investigación en sistemas tutoriales inteligentes, que ya venían marcando la pauta en la personalización del aprendizaje en entornos adaptativos. Un caso notable es *HINTS*, un sistema tutorial inteligente diseñado para el aprendizaje de la resolución de problemas verbales aritméticos y algebraicos, que jerarquiza contenidos y tareas en función del rendimiento individual del estudiante para optimizar su aprendizaje. Además, se han desarrollado modelos dinámicos que emplean algoritmos para predecir el éxito en la resolución de problemas aritmético-algebraicos, ajustando las tareas según las estrategias empleadas por los estudiantes. Algunas plataformas, como *Smartick*, han incorporado recientemente técnicas de IA para ofrecer secuencias de actividades adaptativas.

Por otro lado, los entornos 3D, que han protagonizado hasta siete contribuciones, han abarcado desde tecnologías como el software para el diseño de figuras geométricas hasta la realidad virtual y la aumentada, pasando por la impresión 3D. Todas ellas constituyen entornos que han hecho avanzar de manera apreciable la comprensión de conceptos matemáticos complejos. Estas herramientas se han utilizado especialmente para fomentar el desarrollo de la visualización tridimensional. Un ejemplo destacado es el uso de *NeoTrie VR* en la enseñanza de la geometría tridimensional en secundaria, concretamente para el aprendizaje de las simetrías en los sólidos platónicos y arquimedianos. Además, herramientas como *Tinkercad*, *Mathigon* y *BlocksCAD* se han utilizado para explorar y construir figuras geométricas en 3D, contribuyendo al análisis del conocimiento geométrico y la representación espacial en diferentes niveles educativos. La impresión 3D también ha ocupado un lugar destacado, permitiendo la creación de modelos tangibles que facilitan la visualización espacial y el análisis geométrico, especialmente en educación secundaria.

Por último, otros siete trabajos exploran temas que no encajan en las categorías principales, como los videojuegos, los vídeos educativos, los recursos en Internet, el modelo TPACK o los juegos de estrategia en formato tecnológico, lo que da cuenta de la diversidad de intereses dentro del grupo.

Principales marcos teóricos y metodológicos empleados

Es bien sabida la existencia de multitud de marcos teóricos y metodológicos en el ámbito educativo, cuyo objetivo no solo es el de analizar y entender cómo aprenden las personas, sino también guiar el diseño de experiencias de aprendizaje significativas y efectivas en diversos contextos educativos. La Didáctica de la Matemática se ha nutrido de diferentes marcos para elaborar adaptaciones teóricas y metodológicas diseñadas *ad hoc* para abordar las particularidades de esta disciplina. Así, el enfoque constructivista o la teoría sociocultural han sido reinterpretados para explicar fenómenos propios del aprendizaje matemático, dando lugar a teorías adaptadas para entender cómo las prácticas matemáticas se construyen en contextos específicos. Por otro lado, marcos específicos como la *Teoría de las Situaciones Didácticas* de Brousseau, la *Teoría Instrumental* de Rabardel o el *modelo APOS* (Acción, Proceso, Objeto, Esquema) han sido creados directamente para estudiar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, abordando aspectos como la interacción entre el estudiante y las herramientas, la progresión conceptual y el diseño de situaciones problemáticas que favorecen la comprensión matemática.

El fuerte desarrollo tecnológico experimentado en el inicio del siglo XXI ha conllevado la incorporación de la propia tecnología en diferentes marcos relacionados con la educación. Para el caso de la educación matemática, a finales de la primera década de este siglo, Hoyles y Lagrange (2010), *Mathematics Education and Technology*, describían algunos de los marcos teóricos concretos empleados en la investigación sobre la integración de herramientas tecnológicas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En concreto, el capítulo escrito por Drijvers et al. (2009) recopilaba marcos teóricos empleados en la investigación relacionada con la integración de la tecnología en el dominio de la educación matemática e identificaban los aportes ofrecidos por estos enfoques. Asimismo, ponían de manifiesto la importancia de diferentes factores, como el papel del lenguaje, el rol del docente en entornos tecnológicos o la influencia de las distintas configuraciones disponibles en el diseño de las tareas. Estos aspectos, junto con la creciente variedad de herramientas tecnológicas disponibles actualmente, abren un amplio abanico de posibilidades a la hora de seleccionar un paradigma teórico o metodológico cuando se busca estudiar y comprender las dinámicas de la enseñanza-aprendizaje mediada por la tecnología.

En lo que concierne a la descripción de los marcos metodológicos y teóricos empleados en las comunicaciones del grupo ETEM, el análisis de las 69 contribuciones presentadas en el grupo desde sus inicios nos indica que en 43 de ellas (62%) se menciona explícitamente un marco teórico o metodológico utilizado en el estudio, investigación o intervención presentada. En cambio, en el resto de las comunicaciones (38%) no se aporta información

que permita identificar el marco teórico. A pesar de que es habitual que la mayoría de las contribuciones presentadas en las reuniones del grupo ETEM versen sobre investigaciones en curso, proyectos en desarrollo o situaciones prácticas realizadas en el aula utilizando tecnología, los resultados indican que más de la mitad de las propuestas se presentan bajo un claro enfoque de investigación, pues describen un marco metodológico o teórico para la observación directa, el diseño o el análisis de los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas que integran herramientas tecnológicas.

Como se verá en la próxima sección, esta ratio de trabajos orientados a la investigación se ve reflejada en la producción académica derivada de trabajos presentados previamente en reuniones del grupo ETEM. Categorizando las 69 contribuciones con base en los paradigmas teóricos y metodológicos más característicos de la investigación educativa en general, se obtiene el siguiente panorama de marcos teóricos:

- 39 de las contribuciones (57%) emplean paradigmas propios de la Educación Matemática, indicando que estos marcos propios del área son los predominantes en los trabajos del grupo. Más adelante se analizará la distribución de estos marcos teóricos y metodológicos propios.
- 18 comunicaciones (26%) pueden categorizarse bajo el paradigma de los *modelos basados en prácticas*, pues presentan estudios basados en comunidades de práctica (colaborativa o individualmente), en Aprendizaje Basado en Problemas o en proyectos llevados a cabo en situaciones de aula. Así, la cantidad de trabajos sobre procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas con tecnología en situaciones prácticas o de aula representa también un conjunto significativo.
- Cinco comunicaciones (7%) se enmarcan en el paradigma del *diseño instruccional* (como por ejemplo el TPACK), pues presentan estudios orientados a la creación y evaluación de entornos tecnológicos de aprendizaje efectivos.
- Tres comunicaciones (4%) se clasifican dentro de la teoría de las situaciones didácticas, centrada en la interacción entre el estudiante, el docente y el medio (en este caso las herramientas tecnológicas analizadas) en el proceso de aprendizaje matemático.
- Finalmente, cuatro comunicaciones se categorizan en los marcos del *procesamiento de la información* (una comunicación; 1%), la *génesis instrumental* (una comunicación; 1%) y la *perspectiva crítica* (dos comunicaciones; 3%).

El panorama anterior refleja un fuerte énfasis de las contribuciones en marcos específicos de la Didáctica de la Matemática, lo cual no es de extrañar, pues la especificidad de estos paradigmas ofrece ventajas significativas al

abordar las particularidades de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, aunque esté mediada por herramientas tecnológicas, como es nuestro caso.

Dentro de las 39 comunicaciones que emplean marcos específicos de Didáctica de la Matemática, haciendo una categorización similar, pero tomando los enfoques teóricos propios del área, se obtiene la siguiente distribución de los principales paradigmas teóricos o metodológicos empleados:

- 17 comunicaciones (44%) se categorizan dentro del paradigma de la resolución de problemas matemáticos, centrado en la comprensión de cómo los estudiantes resuelven problemas, analizando sus estrategias, procesos o su competencia a la hora de resolverlos; elementos ampliamente estudiados por autores clásicos como Pólya (1957) o Schoenfeld (1985, 1992), entre otros. En estos trabajos, aunque la tecnología juega un papel relevante en el proceso de enseñanza-aprendizaje, el objeto de estudio sigue siendo la comprensión profunda y la reflexión sobre los procesos involucrados en la resolución de problemas por parte de los estudiantes.
- 18 comunicaciones (46%) quedan ubicadas bajo el paradigma del pensamiento computacional, tan en boga desde su reciente inclusión en muchos planes de estudio de diversos países (Broley et al., 2024), e identificado como uno de los principales actores del desarrollo de las posibilidades de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para este siglo XXI, complementando las matemáticas tradicionales y conectándolas con la ciencia, la tecnología, la ingeniería y otros campos (Pérez, 2018). Además, la investigación ha dejado claro que el pensamiento computacional está especialmente ligado a procedimientos profundamente relacionados con la actividad matemática: la propia resolución de problemas como contenido, los procesos cognitivos relacionados con la resolución de problemas, y la formulación de soluciones que puedan ser transferidas o externalizadas a otra persona o herramienta tecnológica (Kallia et al., 2021). No es de extrañar, por tanto, que en el grupo ETEM haya una fuerte presencia de trabajos relacionados con el pensamiento computacional, pues queda implícito en el objetivo germinal del grupo orientado al análisis de la integración de las herramientas tecnológicas en los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.
- Finalmente, se categorizan cuatro aportaciones (3%, cada una) en los marcos relacionados con el modelo de *Van Hiele*, el early algebra, el trabajo colaborativo en matemáticas y las trayectorias de aprendizaje; reflejando un uso más puntual de estos paradigmas, pero mucho más especializado y relacionado con las particularidades de las herramientas tecnológicas empleadas en estudios concretos.

Los diferentes desarrollos teóricos y metodológicos empleados por el grupo ETEM reflejan un esfuerzo sostenido por integrar perspectivas teóricas y metodológicas, tanto generales como especializadas, con el fin de responder a las necesidades únicas de la educación matemática cuando se involucran elementos tecnológicos. No obstante, queda patente que los marcos especializados ligados a la resolución de problemas y al pensamiento computacional son los paradigmas más empleados en las contribuciones llevadas a cabo por los miembros del grupo ETEM.

Resultados recientes o proyectos destacados

Desde sus inicios, el grupo ETEM ha venido auspiciando una notable producción académica derivada de las comunicaciones presentadas en sus reuniones. Para evaluar esta actividad, se ha llevado a cabo un exhaustivo proceso de rastreo que ha combinado la búsqueda sistemática en bases de datos como Web of Science (WoS) y Google Scholar. Dicho proceso se ha realizado mediante cadenas de búsqueda destinadas a identificar las publicaciones derivadas de las comunicaciones presentadas en las reuniones del grupo.

Estas cadenas han contemplado diversos elementos, como el nombre de los autores, las palabras clave en español y en inglés y el intervalo de tiempo comprendido entre el año de presentación del trabajo y 2025. Por ejemplo, para la primera comunicación “Un entorno tecnológico para el desarrollo de herramientas heurísticas de resolución de problemas basado en Bee-bot”, presentada en la primera reunión de 2018, la cadena de búsqueda utilizada fue la siguiente:

(AU=(Diago PD) OR AU=(González-Calero JA) OR AU=(Arnau D)) AND TS=("Primeras edades escolares" OR "Early childhood education" OR "Robótica educativa" OR "Educational robotics" OR "Resolución de problemas" OR "Problem-solving" OR "Pensamiento computacional" OR "Computational thinking") AND PY=(2018-2025)

Así pues, y aunque no se han cuantificado las actas de congresos y otros formatos, pudimos identificar un total de 29 publicaciones derivadas: 19 indexadas en WoS y 10 en otras fuentes. En cuanto a su impacto nacional e internacional, las publicaciones se distribuyen de forma equilibrada: 12 están escritas en español, 16 en inglés, y una en ambos idiomas. Esto pone de manifiesto tanto su presencia en el contexto hispanohablante como una notable proyección de carácter global. Por otro lado, un análisis temático de estas publicaciones nos permite observar la diversidad de intereses, para lo cual se han retomado las siete categorías ya definidas anteriormente. Esta clasificación, elaborada *ad hoc* a partir de una observación sistemática de las contribuciones presentadas en el grupo, responde a la naturaleza y a las características de las herramientas tecnológicas utilizadas. A continuación,

se presenta la Tabla 1 con la clasificación detallada de estas publicaciones y las características descritas.

Tabla 1
Clasificación temática y bibliográfica de las publicaciones derivadas del grupo ETEM

Nº	Publicación	Formato	Idioma	WoS	Categorías
1	(Sanz et al., 2020)	Artículo	Inglés	Sí	SE
2	(Orts Muñoz et al., 2018)	Artículo	Español	Sí	SE
3	(Sanz Garcia et al., 2019)	Artículo	Español/inglés	Sí	AA, IA
4	(Cañada et al., 2018)	Artículo	Español	No	SE
5	(Escrivà et al., 2021)	Artículo	Español	Sí	SE
6	(Rodríguez-Martínez et al., 2023)	Artículo	Inglés	Sí	AA, DT
7	(Gea et al., 2018)	Artículo	Español	Sí	O
8	(Beltrán-Pellicer et al., 2020)	Artículo	Español	No	3D, PC
9	(Muñiz-Rodríguez et al., 2018)	Artículo	Inglés	No	PE
10	(Suárez Zapata et al., 2018)	Artículo	Español	No	DT, PC
11	(Arbona Picot et al., 2019)	Artículo	Español	Sí	SE
12	(Diago et al., 2019)	Artículo	Español	Sí	SE, PC
13	(Pla-Castells & García-Fernández, 2020)	Artículo	Español	No	SE, AA
14	(Albarracín & Hernández-Sabaté, 2020)	Artículo	Español	No	DT
15	(Del Olmo-Muñoz et al., 2023)	Artículo	Inglés	Sí	O
16	(González-Calero et al., 2019)	Artículo	Inglés	Sí	DT
17	(Sanjosé et al., 2022)	Artículo	Inglés	Sí	SE
18	(Rodríguez-Muñiz et al., 2021)	Artículo	Español	No	O
19	(García-Moreno et al., 2022)	Artículo	Inglés	Sí	PC, SE
20	(Beltrán-Pellicer & Muñoz-Escolano, 2021)	Artículo	Español	No	3D, PC
21	(Van Vaerenbergh & Pérez-Suay, 2022)	Capítulo	Inglés	No	IA
22	(Pla-Castells et al., 2021)	Artículo	Inglés	Sí	SE, AA
23	(Gavilán-Izquierdo & Gallego-Sánchez, 2024)	Artículo	Inglés	Sí	O
24	(Pérez-Suay, Van Vaerenbergh, et al., 2023)	Artículo	Inglés	Sí	PE, AA
25	(Pérez-Suay, Ferris-Castell, et al., 2023)	Artículo	Inglés	Sí	PE, AA
26	(Del Olmo-Muñoz et al., 2024)	Artículo	Inglés	Sí	SE, PC
27	(Nolla et al., 2024)	Artículo	Inglés	Sí	3D
28	(Sánchez-López et al., 2024)	Artículo	Inglés	No	DT, PC
29	(Wu et al., 2025)	Artículo	Inglés	Sí	IA

Software Especializado (SE), Plataformas Educativas (PE), Dispositivos Tecnológicos (DT), Inteligencia Artificial (IA), entornos 3D (3D), Pensamiento Computacional (PC), Analíticas de Aprendizaje (AA), Otra (O)

El software especializado se posiciona como el tema más preponderante en la producción académica, con 11 publicaciones, especialmente en los primeros años del grupo, centradas en herramientas como *GeoGebra*, *Read & Learn* o *HINTS*. Le sigue el pensamiento computacional, con siete contribuciones, con un interés constante a lo largo del tiempo. La analítica del aprendizaje, utilizada tanto para la predicción del rendimiento académico como para la adaptación de procesos formativos, ha dado lugar a cinco publicaciones. Los dispositivos tecnológicos, como la robótica educativa, han inspirado cinco artículos, mientras que los entornos 3D, donde se incluyen herramientas para la visualización y la impresión 3D, están presentes en tres trabajos. La IA, aunque presente desde los inicios del grupo, ha cobrado impulso en los últimos años y cuenta con un total de tres publicaciones. Las plataformas educativas, tales como los sistemas de gestión del aprendizaje, están representadas en dos contribuciones. Por último, otros cuatro estudios abordan temas diversos que no encajan en las categorías principales, como los recursos de Internet, los vídeos educativos o el modelo TPACK.

Paralelamente a estas publicaciones científicas, cabe destacar el lanzamiento de la revista *iETEM (Investigación en Entornos Tecnológicos en Educación Matemática)*¹, una revista electrónica de acceso abierto relacionada con el grupo ETEM. Presentada durante la reunión intermedia de 2019. La revista *iETEM* busca ofrecer un espacio para la difusión de resultados de investigación e innovación sobre el uso de entornos tecnológicos en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Hasta la fecha, dos comunicaciones presentadas en las reuniones del grupo han dado lugar a publicaciones en esta revista, lo que demuestra su papel como canal para visibilizar los proyectos destacados del grupo y estimular el intercambio académico en este ámbito.

Líneas futuras del grupo ETEM

Desafíos o temas emergentes

En el horizonte de la investigación en entornos tecnológicos para la enseñanza de las matemáticas se plantean múltiples desafíos. Durante la pandemia de COVID-19, la brecha digital puso de manifiesto cómo las desigualdades económicas afectan la capacidad de los estudiantes para participar plenamente en las modalidades de aprendizaje a distancia. Como destacan Drijvers y Sinclair (2024), explorar cómo superar estas barreras, es clave. Además, este acontecimiento puso de relieve la importancia de las habilidades de resolución de problemas matemáticos para abordar los retos del mundo real y, ante la imposibilidad de que los estudiantes trabajaran

¹ <https://turia.uv.es/index.php/ietem/index>

juntos en persona, deben encontrarse nuevas vías para la colaboración. Todo esto ha constatado la urgencia de diseñar tecnologías educativas que sean accesibles y pertinentes, tal y como apuntan Engelbrecht y Borba (2024).

Otro reto clave es la integración efectiva de tecnologías emergentes como la IA y la personalización del aprendizaje. Aunque estas herramientas tienen el potencial de enriquecer la enseñanza, su aplicación requiere un marco ético sólido y una formación adecuada del profesorado para evitar que se consideren meros sustitutos de las prácticas pedagógicas tradicionales. Este cambio de paradigma también afecta al rol del profesor, que deberá adoptar un papel de facilitador y mediador a la hora de guiar el desarrollo matemático de los alumnos, sacando partido de la IA para enriquecer las experiencias de aprendizaje sin perder de vista el enfoque humano de la educación (Engelbrecht & Borba, 2024), mientras que los estudiantes toman la iniciativa en su proceso de aprendizaje de las matemáticas como investigadores (Hwang et al., 2023). No debe perderse de vista que existe el riesgo de que estas aplicaciones refuercen los enfoques individualistas y desconecten a los alumnos de las interacciones sociales necesarias para el aprendizaje colaborativo, por lo que alcanzar el equilibrio entre personalización y colaboración es otro reto.

Además, estos fenómenos están comenzando a poner en tela de juicio las métricas de evaluación tradicionales, pues exigen la adopción de sistemas capaces de medir en tiempo real competencias matemáticas complejas como el razonamiento y la resolución de problemas. Las métricas actuales, centradas sobre todo en resultados superficiales, no siempre captan los avances en el pensamiento conceptual de los estudiantes. En este sentido, Lavicza et al. (2022) destacan la importancia de diseñar evaluaciones longitudinales que midan tanto el aprendizaje inmediato como su transferencia a contextos reales.

Nuevas áreas o metodologías a explorar

Paralelamente a los retos emergentes, el grupo ETEM está ante la coyuntura de aventurarse en áreas aún no estudiadas o de avanzar en fórmulas innovadoras que amplíen los horizontes de su actividad.

La literatura sugiere la conveniencia de una mayor integración del pensamiento computacional en los currículos de matemáticas, del mismo modo que en el pasado se amplió el plan de estudios para incluir la estadística y la probabilidad (Drijvers & Sinclair, 2024). Como habilidad en continua evolución, el pensamiento computacional debería seguir ocupando un lugar prominente en la investigación, pero su integración curricular requiere ahora un enfoque más holístico. Más allá de la robótica, el pensamiento computacional tiene el potencial para abordar problemas interdisciplinarios y conectar las matemáticas con situaciones de la vida cotidiana, favoreciendo

que los estudiantes desarrollen habilidades para interpretar y resolver problemas actuales. En esta línea de avance constante, surge la noción de “Pensamiento Computacional 2.0” (Tedre, 2022), que destaca cómo las interacciones mutuas entre pensamiento computacional e IA permiten ampliar su alcance, posibilitando que los estudiantes exploren temas como el aprendizaje automático, el modelado de datos y los dilemas éticos de los sistemas inteligentes.

Otro avance por explorar es el desarrollo de nuevos sistemas de evaluación adaptativa potenciados por la IA, también conocidos como hiperpersonalización (Engelbrecht & Borba, 2024). Estos sistemas pueden analizar los avances de los alumnos, identificar ideas erróneas y ofrecer pistas o explicaciones, esto es, una asistencia personalizada que contribuya a una comprensión más profunda. No obstante, además de las mencionadas cuestiones éticas, la privacidad de los datos y el papel humano en el proceso de aprendizaje, su implementación plantea preguntas críticas sobre cómo integrar estas herramientas en la enseñanza sin desvirtuar el aprendizaje conceptual.

No se trata solo de personalizar el aprendizaje, sino también de evaluar competencias críticas, como el pensamiento lógico o la colaboración. Estos avances tecnológicos en los procesos educativos deberían adherirse a la metáfora *humans-with-media*, con la que Borba y Villarreal (2005) explican cómo el uso de una herramienta tecnológica transforma y reorganiza los procesos de pensamiento matemático mediante una relación de simbiosis. Esto es, la integración de la IA debería centrarse en complementar, y no sustituir, el razonamiento humano en la resolución de problemas.

Pero el desarrollo de las tecnologías de la información en la enseñanza de las matemáticas no solo se manifiesta en las herramientas de IA, sino también a través de la tecnología multitáctil, las herramientas de realidad aumentada, virtual y mixta, o las impresoras 3D, que, si bien aún no son una práctica común en el aprendizaje habitual en las aulas, pueden dar pie a estudios exploratorios (Drijvers & Sinclair, 2024). Nuevos avances en estas herramientas pueden dar lugar a la aparición de otros paradigmas, como el de *body-artifact* (cuerpo-artefacto), en el que los estudiantes, a través de la experiencia corporal o la manipulación virtual, pueden explorar nuevos puntos de vista sobre diferentes conceptos matemáticos abstractos (Shvarts et al., 2021).

Estado actual del grupo EMTD de la SOMIDEM

Breve descripción de los intereses y proyectos actuales

La Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática (SOMIDEM) se fundó en 2013, con el objetivo inicial de asegurar la consolidación de la revista Educación Matemática² y de contribuir al avance del conocimiento sobre el aprendizaje y la enseñanza

de las matemáticas en todos los niveles educativos al mismo tiempo que se ofrece un foro académico para promover la discusión de ideas, conceptos, propuestas y modelos relacionados con la Educación Matemática.

Recientemente (desde 2023) la SOMIDEM ha confirmado su capacidad de fomentar globalmente la presentación y divulgación de investigaciones mediante la realización del congreso³ SOMIDEM, además de promover o apoyar otros proyectos editoriales que más adelante serán mencionados. El congreso *SOMIDEM1* tuvo lugar en línea en el 2023, fue un foro para la presentación de reportes de investigación en los formatos oral y escrito y su organización se basó en el desarrollo de 18 Grupos de Trabajo Temático (GTT). Dos de ellos fueron el GTT1 y el GTT11, ambos centrados en Educación Matemática y Tecnologías Digitales (EMTD).

A continuación, se informará del contenido de las presentaciones en SOMIDEM1 con enfoque EMTD. Como cierre de esta breve introducción baste decir que ya se cuenta con 23 participaciones con enfoque EMTD para SOMIDEM2; y del 2023 a la fecha la labor editorial de SOMIDEM se ha intensificado, al menos con la publicación de otros 4 libros de investigación en educación matemática.

EMTD en el congreso SOMIDEM1

SOMIDEM1 fue un foro académico internacional en lengua española. Se llevó a cabo del 9 al 14 de marzo del 2023, contó con 98 participaciones que permitieron la discusión de problemáticas y hallazgos en torno a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, principalmente de México. Hubo colegas provenientes de Argentina (1), Chile (5), Colombia (8), España (3), Estados Unidos (3), Países Bajos (1) y San Marino (1), y un total de 76 provenientes de diferentes estados o regiones de México.

De las presentaciones de trabajo en los dos grupos GTT1 y GTT11, los grupos con el enfoque en educación matemática y tecnologías digitales (EMTD), se refieren algunos de los aspectos que se presentaron en los reportes del trabajo llevados a cabo por ambos grupos.

Según el reporte “Tecnologías digitales en matemática educativa: reflexiones, propuestas y retos” (Sandoval & Larios, 2024), en el contexto del grupo de trabajo GTT1 en SOMIDEM1 se presentaron 14 contribuciones que los líderes del grupo clasificaron en tres partes: i) propuestas de tecnologías digitales específicas para su uso en el aula; ii) exploraciones basadas en el diseño de situaciones, actividades y herramientas computacionales para

² <https://www.revista-educacion-matematica.org.mx/revista/>

³ Los congresos SOMIDEM se llevan a cabo cada dos años. El próximo (SOMIDEM2) tendrá lugar del 10 al 16 de marzo de 2025.

la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas; iii) reflexiones sobre experiencias específicas de integración de tecnologías digitales en el aula. Entre ellas destacan los temas siguientes: la visualización dinámica tridimensional (en actividades de lugares geométricos 3D) mediante geometría dinámica, la simulación de problemas contextuales para la enseñanza de la combinación lineal, la construcción de trayectorias hipotéticas de aprendizaje para el razonamiento covariacional con apoyo de la tecnología y el desarrollo de habilidades de razonamiento proporcional con apoyo tecnológico. De los trabajos anteriores, solo el trabajo de Fernández-Mosquera y Santacruz-Rodríguez (2024) derivó en un artículo de investigación publicado en el libro editado por Sánchez Aguilar et al. (2024).

Por otro lado, también en SOMIDEM1, en el grupo de trabajo temático 11 (GTT11), “Educación matemática a distancia mediada por tecnologías digitales, en formato híbrido o por medios electrónicos de aprendizaje”, y de acuerdo con el reporte que presenta Hoyos (2024), solo hubo 5 presentaciones: una de ellas (Silva Bautista, 2024) informa acerca del impacto de la modalidad remota en el aprendizaje de un grupo de estudiantes del bachillerato; otra (Dávila Betancourt et al., 2024) aborda las percepciones de estudiantes de matemáticas durante y después de la pandemia del COVID-19.

En otras dos presentaciones se abordó el diseño y la exploración de educación matemática en línea a nivel universitario. En una de ellas (Navarro et al., 2024) se consideró el diseño de un sistema adaptativo en línea para el apoyo de clases presenciales de estudiantes de estadística a nivel universitario; y en la otra (Hoyos & Raggi, 2024) se presentaron resultados de una exploración de desarrollo profesional en línea de docentes del nivel bachillerato, sobre el impacto en la práctica de los docentes del establecimiento de conexiones entre las matemáticas del nivel superior y las matemáticas del bachillerato.

Resalta que en este grupo de trabajo (el GTT11) solo hubo una tercera parte de participantes en comparación con el número de participaciones en el GTT1. Esta disminución en el número de participaciones en el GTT11, confirma que, aunque la temática de la educación a distancia mediada por tecnologías digitales involucra el uso de las tecnologías digitales en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, también es cierto que este tipo de educación matemática (ahora también conocida como ‘en línea’ o administrada mediante una plataforma digital de aprendizaje) siempre ha seguido derroteros propios. En acuerdo con Balacheff (2012), su diseño, implementación y resultados hacen que se cuestionen las modalidades habituales de enseñanza y hacen visibles las limitaciones de las prácticas comunes de enseñanza-aprendizaje. Finalmente, en esta reseña destaca que las cinco presentaciones en el GTT11 derivaron en artículos de investigación que se publicaron en el libro editado por Sánchez Aguilar et al. (2024).

Derivado del potencial del congreso SOMIDEM1 para la promoción de la investigación en la educación matemática, al término del SOMIDEM1 se acordó la celebración de SOMIDEM2 y que estos congresos se irán celebrando periódicamente cada dos años. Así, al momento de escribir estas líneas ya se tiene avanzado el programa del próximo SOMIDEM2, a celebrarse del 14 al 16 de marzo de 2025. Finalmente, además de que hubo convocatoria para participar en los GTT1 y GTT11 (actualmente se cuenta con 16 y 3 contribuciones, respectivamente), se abrió un nuevo grupo de trabajo temático con enfoque EMTD: el GTT10, “Usos y experiencias de Inteligencia Artificial en matemática educativa”, que a la fecha cuenta con cinco contribuciones.

EMTD en la revista de investigación Educación Matemática

Una de las dos plataformas globales de la SOMIDEM para presentar y divulgar de manera escrita las investigaciones en Educación Matemática que se llevan a cabo en Iberoamérica, la ocupa la edición de la revista cuatrimestral Educación Matemática. Sus inicios se remontan a 1989 y, actualmente, es editada por la SOMIDEM junto con la Universidad de Guadalajara (UDG). A partir de su lanzamiento se convirtió en uno de los principales órganos de difusión de la investigación en Educación Matemática que se realiza en Iberoamérica y, en el plano nacional, en México está clasificada por la Secretaría de Ciencias, Humanidades, Tecnología e Innovación (SECIHTI, antes el Consejo Nacional de Humanidades, Ciencia y Tecnología -CONAHCyT) dentro de los más altos estándares de calidad.

La revista se ha publicado en forma ininterrumpida durante 35 años, y desde 2014 es digital y de libre acceso². Su visibilidad se refleja en su inclusión en bases de datos como Scopus, y está presente en índices como SciELO, Redalyc, Latindex y Dialnet. Si bien se aceptan manuscritos escritos en inglés, portugués o francés, la mayor parte de los artículos publicados están en español. Por su calidad e impacto se ha constituido como una de las revistas de investigación en español más importantes en el campo de la Educación Matemática.

En el periodo que en este capítulo interesa revisar, 2019-2024, es posible localizar una serie de artículos de investigación relacionados con el enfoque EMTD, los cuales se presentan a continuación en cuatro bloques, de acuerdo con sus líneas temáticas de investigación.

I. En torno de la investigación en enseñanza y aprendizaje de estocásticos se encuentra el trabajo de Inzunza Cázares e Islas Anguiano (2019), en el que analizan una trayectoria de aprendizaje para desarrollar razonamiento sobre muestras, variabilidad y distribuciones muestrales, mediada por el uso intensivo de tecnología. También sobre la educación en estocásticos, Cañadas

et al. (2019) abordan la influencia de las tecnologías en el contraste de hipótesis en estadística inferencial.

II. Sobre la investigación en la enseñanza y aprendizaje de la Geometría, Mántica y Freyre (2019) construyen una situación problemática mediada por *GeoGebra* para abordar la noción de poliedro regular, a partir de no ejemplos del concepto de poliedro regular. Por otro lado, en el artículo de Sua Flórez y Camargo Uribe (2019) se aborda la resolución de un problema de geometría por parte de una pareja de estudiantes de grado noveno, problema relacionado con el lugar geométrico de los centros de las circunferencias que contienen dos puntos dados. El trabajo de Samper y Vargas (2019) contribuye a la indagación sobre la construcción de definiciones en el aula escolar de geometría con estudiantes de grado décimo (14 a 16 años), utilizando la negación de proposiciones para llegar a definir una figura geométrica. Finalmente, Sánchez Noroño et al. (2020) investigan el impacto del aprendizaje en geometría mediante una experiencia de elaboración de simuladores con *GeoGebra* en la educación media.

III. Sobre la investigación en torno de la enseñanza y aprendizaje del Cálculo, Trejo Martínez et al. (2021) investigan acerca del desarrollo del razonamiento covariacional que logran futuros profesores de matemáticas con apoyo de un programa de geometría dinámica, específicamente centrados en la covariación logarítmico-exponencial.

IV. Sobre la investigación en torno a la identificación del conocimiento y las habilidades de los docentes (en formación o en servicio) en relación con el uso de tecnologías digitales en su práctica, se localizan los trabajos de Santacruz Rodríguez y Sacristán Rock (2019), quienes analizan el proceso de selección de medios (digitales y no digitales) por parte de un profesor de quinto grado de primaria en Colombia, para enseñar transformaciones geométricas. Por su parte, Arnal-Bailera y Oller-Marcén (2020) examinan la realización con *GeoGebra* de tres procedimientos de construcción hechos por alumnos de tercer curso del Grado de Magisterio de Educación Primaria, a partir de las instrucciones presentadas en dos ediciones diferentes de los Elementos de Euclides.

Además, Verástegui Gutiérrez et al. (2024) indagaron sobre la incorporación de la tecnología por parte de docentes de matemáticas en formación, para la formulación de conjeturas, así como para la exploración y el análisis de los datos, por ejemplo, mediante hojas electrónicas de cálculo, juegos de azar virtuales, software dinámico, videos educativos, sitios web y aplicaciones didácticas, así como el uso de calculadoras graficadoras, promoviendo al mismo tiempo el discurso estadístico a partir de la integración de herramientas tecnológicas.

También es importante destacar la publicación en la revista de artículos con impacto alto sobre el estado del arte en relación con un tema específico

(publicación por invitación). Por ejemplo, el de Bakker et al. (2021), donde los autores identifican que nuevas tecnologías, como la impresión 3D, las matemáticas fotográficas y la realidad aumentada y virtual, ofrecen nuevas oportunidades para el aprendizaje de las matemáticas.

Finalmente, en una búsqueda realizada por Sánchez y López (2023) en la Web of Science, se encontraron datos sobre la presencia de la revista Educación Matemática en Iberoamérica. Los autores informan que los países que han publicado con mayor frecuencia en la revista son México, con 143 autores; España con 90; Colombia con 37; Chile con 36; y Argentina con 31.

EMTD en el proyecto editorial SOMIDEM 2018-2024

La segunda plataforma global para la presentación y divulgación de investigaciones de manera escrita de la SOMIDEM es un proyecto editorial que agrupa contribuciones de destacados investigadores en Educación Matemática, cuyas reflexiones buscan enriquecer y diversificar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

En 2018, la SOMIDEM editó el libro *Rutas de la Educación Matemática*. En él se presentan capítulos que hablan de trayectorias de investigación temática iniciadas en la revista Educación Matemática. El libro está dividido en tres partes, la segunda está dedicada al conocimiento, la resolución de problemas y la tecnología, y se integra por las aportaciones de: *i*) Hitt (2018), quien habla de “De un marco teórico constructivista del aprendizaje de las matemáticas a otro sociocultural en ambientes tecnológicos”; *ii*) Moreno-Armella (2018), quien discute “De fractales y cónicas dinámicas: prácticas de enseñanza y mediación instrumental”; Santos-Trigo y Aguilar-Magallón (2018), que presentan “Resolución de problemas matemáticos: del trabajo de Pólya al razonamiento digital”; *iii*) Camargo et al. (2018), quienes detallan “Actividad demostrativa: protagonista en la clase de geometría”; *iv*) Batanero (2018), que expone “Treinta años de investigación didáctica sobre el análisis inferencial de datos”; *v*) Blanco y Cárdenas (2018), quienes presentan “La resolución de problemas en la formación de profesores de matemáticas”.

Recientemente, la SOMIDEM editó tres series de libros que abarcan una gama amplia de temas y enfoques que van desde experiencias concretas de intervención en el aula hasta reflexiones teóricas sobre la naturaleza y los objetivos de la educación matemática. En las Series 1 y 3 se encuentran contribuciones relacionadas con el enfoque EMTD, tal y como se detalla a continuación.

La Serie 1, *Aportes y recursos para la innovación en la educación matemática* (editado por Castañeda, 2023) consta de 12 capítulos de los cuales dos se enmarcan en el enfoque EMTD. En el Capítulo 2, Lemus y Brun Battistini (2023) destacan la implementación de una trayectoria hipotética de apren-

dizaje que puede favorecer la comprensión de la probabilidad y estadística en un contexto universitario aprovechando la tecnología en temas transversales de corte socioemocional. Por otro lado, en el Capítulo 4, Ángel et al. (2023) se adentran en la exploración del uso de herramientas digitales (específicamente Excel) para la enseñanza y comprensión de la multiplicación y división de fracciones.

La Serie 3, *Perspectivas Actuales y Tendencias en la Educación Matemática*, consta de tres libros. El libro *Perspectivas actuales de la educación matemática* (editado por Sánchez Aguilar et al., 2024), se derivó de la realización del congreso SOMIDEM1, y los artículos relacionados con la investigación en educación matemática y tecnologías digitales que ahí se incluyen ya fueron comentados con anterioridad en la sección “EMTD en el congreso SOMIDEM1”.

Figura 1
Serie 3



El libro *Tendencias en la educación Matemática 2023* (editado por Juárez Ruiz et al., 2023) abarca tres tendencias en investigación, dos de las cuales están relacionadas con el enfoque EMTD: a) actividades innovadoras para el desarrollo del pensamiento matemático, y b) resolución de problemas de matemáticas. En la primera se presenta investigación (Lugo-Lugo et al., 2023) que versa sobre el razonamiento proporcional de alumnos de telesecundaria unitaria a través del uso de micromundos; mientras que, en la segunda, Sánchez (2023) aborda el análisis de tres problemas complejos de razonamiento probabilístico, destacando que es el uso de la tecnología (en este caso, el software *Fathom* para la modelación con matemáticas) el que facilita el tratamiento didáctico de dichos problemas en el aula. Por otro lado, también se utiliza el mismo software *Fathom* en el trabajo de Sánchez et al. (2024), pero ahora para el análisis de datos y la estadística inferencial con estudiantes de bachillerato.

Tabla 2
Enfoque EMTD en el Proyecto Editorial SOMIDEM 2023–2024

Serie	Título	Edición	Técno-logías Digitales en juego/uso
1	Aportes y recursos para la innovación en la educación matemática	2023	Excel, Matlab, Symbolab
3	Perspectivas actuales de la Educación Matemática	2023	GeoGebra, dispositivos inteligentes, herramientas de Internet y materiales en plataformas digitales
	Tendencias en la Educación Matemática	2023 y 2024	Hoja de cálculo, GeoGebra, micromundos, Fathom

La edición 2024 de *Tendencias en la educación matemática* (Sánchez Aguilar et al. 2024) reúne investigaciones que reflejan perspectivas actuales sobre el aprendizaje de las matemáticas, enfocadas en la creatividad, comprensión conceptual, desarrollo de modelos mentales y el papel de las herramientas tecnológicas. En dicha edición, se incluyen dos investigaciones con el enfoque EMTD, a saber: 1) La resolución de un problema verbal mediante sistemas de ecuaciones lineales y el uso de la hoja de cálculo (Vargas-Alejo et al., 2024); 2) *GeoGebra* como recurso didáctico en el análisis y solución de problemas que involucran la función logística (Quilantán-Ortega & Rodríguez-Vázquez, 2024) (Tabla 2).

EMTD/SOMIDEM: posibles líneas futuras de investigación
Desafíos y temas emergentes

La innovación y las nuevas tecnologías son piezas clave en los desafíos que se deben afrontar en el siglo XXI como es el caso de la IA y su impacto en la educación matemática. El uso de IA se puede considerar desde tres perspectivas: *i*) un enfoque de capacidad cognitiva; *ii*) de acuerdo con su funcionalidad; *iii*) según su enfoque técnico (Teigens et al., 2020; Medina et al., 2024; Palma et al., 2008). Desde el GTT10 de la SOMIDEM se han encausado esfuerzos hacia algunas de las líneas emergentes de investigación que de ahí se derivan, específicamente aquellas relacionadas con: ajustes y posibles reformas en el currículo propiciadas por la IA; la IA (con o sin código abierto); reformulación de tareas para que los estudiantes utilicen IA en actividades que promuevan diferentes formas de conjeturar, analizar, razonar y resolver problemas; el rol del profesorado en la integración de la IA en la enseñanza; finalmente, formas de promover y evaluar el aprendizaje mediado por IA.

También cabe destacar que, en general, un desafío permanente planteado en la SOMIDEM es continuar realizando acciones que coadyuven a incorporar en la práctica los resultados de la investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, particularmente aquellos derivados de las investigaciones con enfoque EMTD.

Por otro lado, también es pertinente resaltar que las experiencias vividas durante la pandemia de COVID-19 funcionaron como un elemento amplificador del estado de la situación educativa y del papel de los recursos digitales existentes. Así, se hicieron patentes los usos, la disponibilidad y la evolución de las tecnologías digitales en todos los niveles y ámbitos de la educación. Una línea de investigación que de ahí emerge es replantear la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas después de la pandemia, manteniendo la incidencia, o no, de los recursos digitales implementados durante este periodo.

Nuevas áreas o metodologías a explorar en torno a la integración de las tecnologías digitales en la educación matemática

Son muchas las investigaciones (p.e., Hegedus & Moreno-Armella, 2009) que confirman que el uso de tecnología digital en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas implica entender que esta en sí misma no proporciona los medios o las formas necesarias para que los estudiantes las utilicen eficientemente. También es cierto que, a pesar de los muchos años de investigación en torno a la integración de las tecnologías digitales en el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, este objetivo no se ha logrado, e incluso hay evidencias de que la deseada integración se ha revertido (Ruthven, 2018).

Sin embargo, la consideración de ambos aspectos, característicos de la problemática de la integración de las tecnologías digitales en la educación matemática, no provoca abandonar tal empresa, sobre todo ante el potencial de avances tecnológicos como el de la IA, o de tecnologías como la impresión 3D, las matemáticas fotográficas y la realidad aumentada y virtual (siguiendo a Bakker et al., 2021), o la emergencia de nuevos enfoques en donde la incorporación de software es pieza clave (Lowrie et al, 2024). Estos nuevos recursos digitales o enfoques ofrecen nuevas oportunidades para el aprendizaje de las matemáticas.

Por otro lado, atendiendo al conocimiento y a las habilidades que requiere el profesorado para usar recursos digitales en la educación matemática, en el trabajo de Hoyos et al. (2024) se sugiere un potencial investigativo en la conexión o en la transversalidad entre las diferentes conceptualizaciones teóricas que probablemente son las más influyentes en la investigación sobre el desarrollo del conocimiento y las habilidades de los docentes para usar tecnologías digitales en la educación matemática, a saber: *i)* el modelo TPACK; *ii)* el marco naturalístico o de consideración de las características estructurales de la práctica en el salón de clases; *iii)* la teoría de la variación; *iv)* los marcos teóricos instrumentales. Hoyos et al. (2024) también señalan el potencial de la investigación sobre el papel del contexto en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas con recursos digitales.

Otra área con enfoque EMTD que requiere mayor desarrollo es la evaluación en línea, la cual puede ofrecer la ventaja de ampliar la flexibilidad en la toma de exámenes y una puntuación rápida (Bakker et al., 2021), aunque existen problemas adicionales de privacidad, ética y rendimiento que no han sido resueltos de manera favorable, en comparación con la evaluación en papel y lápiz (Backers & Cowan, 2019). Figueras et al. (2021) argumentan que es posible el uso de tecnología digital como un componente cognitivo en el proceso de evaluación. Al respecto, también es importante notar los avances en exploraciones sobre la utilización de las herramientas disponibles en las plataformas digitales tipo *Moodle*, como es el *workshop*, el cual permite llevar a cabo evaluación entre pares, propiciando así mayor interacción y camaradería entre los estudiantes matriculados en un mismo curso (Dahal, 2021)

En acuerdo con Bakker et al. (2021), debido a los avances tecnológicos en la sociedad, los objetivos sociales y de la educación matemática deben ajustarse, por ejemplo, buscando desarrollar el pensamiento computacional para garantizar la empleabilidad en una sociedad tecnológica, cuestión que actualmente se promueve en muchos países de occidente. En México, Sacristán (2008) desarrolló una exploración pionera en su tipo, centrada en el diseño y utilización de un ambiente computacional específico como medio para gestionar y coordinar diferentes representaciones del infinito. Más recientemente, Sacristán, en colaboración con un equipo internacional de investigadores (ver, por ejemplo, Gueudet et al., 2022; Buteau et al., 2020; Buteau et al., 2019), ha indagado en torno a la programación computacional como instrumento para el trabajo matemático, así como en los roles del pensamiento computacional en las matemáticas universitarias.

Por último, pero no menos importante, es necesario señalar que en la investigación en Educación Matemática siempre ha sido significativo indagar sobre el papel de las tecnologías digitales en diferentes contextos educativos como elemento que coadyuva al desarrollo del razonamiento y del pensamiento matemático (p. e., Martínez-Ortega et al., 2017; Hoyos et al., 2018; Santos-Trigo y Aguilar Magallón, 2018; Hoyos & Pecina, 2024). Este tipo de indagación resulta particularmente pertinente ahora, en el marco de la ‘nueva escuela mexicana’, debido a las reformas curriculares que recientemente (2022-2024) se han llevado a cabo en México.

Conclusiones

El análisis del trabajo desarrollado por ETEM y EMTD pone de manifiesto una visión compartida sobre el papel de las tecnologías digitales en la educación matemática. Ambos grupos han explorado diversas aproximaciones para integrar herramientas digitales en los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, entre las que destacan el uso de software

especializado, plataformas educativas, robótica, IA y pensamiento computacional. Además, han generado espacios de discusión y publicación que han contribuido a la consolidación de este campo de investigación en sus respectivos contextos académicos.

Son muchas las afinidades de los dos grupos de investigación en cuanto a objetivos e intereses y se percibe una complementariedad en sus enfoques y metodologías, además de la existencia de posibilidades todavía inexploradas para la colaboración entre ambos grupos. Una de ellas es el estudio comparativo del impacto de las tecnologías digitales en la enseñanza de las matemáticas en distintos contextos educativos y culturales. Asimismo, el avance de la IA y la necesidad de desarrollar estrategias éticas y pedagógicas para su integración en la educación matemática abren una línea de trabajo conjunta de gran potencial y pertinencia. Otro punto de interés común es la conveniencia de desarrollar investigaciones sobre herramientas de evaluación adaptativa que permitan un análisis más preciso del aprendizaje matemático mediado por tecnología.

Para fortalecer la colaboración entre ambos grupos, algunas iniciativas concretas serían el desarrollo de proyectos de investigación conjuntos que estudien la implementación de la tecnología en contextos matemáticos de enseñanza y aprendizaje, lo que permitiría comparar su impacto en diferentes sistemas educativos. Estos proyectos podrían complementarse con la organización de jornadas y seminarios compartidos, donde se presenten avances, se discutan retos comunes y se generen espacios de intercambio académico, lo que a su vez posibilitaría la elaboración de publicaciones conjuntas. Además, como parte de la colaboración, sería de interés el diseño de un programa de formación docente en el uso pedagógico de la IA y el pensamiento computacional, con materiales elaborados por investigadores de ambos grupos, con el fin de atender futuras demandas en el área. En un escenario en el que la tecnología evoluciona y redefine rápidamente los paradigmas educativos, el fomento de estos vínculos reforzaría y enriquecería la labor académica mediante el intercambio de experiencias y puntos de vista y, en última instancia, también podría incidir en la práctica educativa.

Referencias

- Ángel, A., Figueras, O., & Valenzuela-García, C. (2023). Multiplicación y división de fracciones: Excel y otras tecnologías digitales para reflexionar sobre su enseñanza. En A. Castañeda, (Ed.), *Aportes y recursos para la innovación en la educación matemática* (pp. 97–122). SOMIDEM Editorial.
<https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S1/2023/01-04>

- Albarracín, L., & Hernández-Sabaté, A. (2020). El potencial del eye-tracker como herramienta para estudiar el razonamiento matemático: Una experiencia usando videojuegos. *Investigación En Entornos Tecnológicos En Educación Matemática*, 1. <https://doi.org/10.7203/ietem.1.16285>
- Arbona Picot, E., García Costa, D., Beltrán Meneu, M. J., & Gutiérrez Rodríguez, Á. (2019). GeoPattern, una app para resolver problemas de patrones geométricos en Primaria. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 7(2), 1–23. <https://doi.org/10.24197/edmain.2.2018.1-23>
- Arnal-Bailera, A., & Oller-Marcén, A. (2020). Construcciones geométricas en GeoGebra a partir de diferentes sistemas de representación: un estudio con maestros de primaria en formación. *Educación Matemática*, 32(1), 67–98. <https://doi.org/10.24844/em3201.04>
- Bakker, A., Cai J., & Zenger, L. (2021). Future themes of mathematics education research: an international survey before and during the pandemic. *Educational Studies in Mathematics* 107(1), 1–24. <https://doi.org/gpb56t>
- Backers, B., & Cowan, J. (2019). ¿Es el bolígrafo más poderoso que el teclado? El efecto de las pruebas en línea en el rendimiento académico de los estudiantes. *Revista de Economía de la Educación*. 68(C), 89–103. <https://doi.org/qjvb>
- Balacheff, N. (2012). *Note pour un débat “provocateur” sur la formation ouverte et à distance (FOAD)*. <https://bit.ly/493kO2g>
- Batanero, C. (2018). Treinta años de investigación didáctica sobre el análisis inferencial de datos. En A. Ávila (Ed.), *Rutas de la Educación Matemática* (pp. 186–199). Editorial SOMIDEM.
- Beltrán-Pellicer, P., & Muñoz-Escolano, J. M. (2021). Experiencia formativa con blocksCAD con futuros docentes de matemáticas en secundaria. *Didacticae: Revista de Investigación En Didácticas Específicas*, 10, 71–90. <https://doi.org/10.1344/did.2021.10.71-90>
- Beltrán-Pellicer, P., Rodríguez-Jaso, C., & Muñoz-Escolano, J. M. (2020). Introduciendo BlocksCAD como recurso didáctico en matemáticas. *Suma*, 93, 39–48.
- Blanco, L., & Cárdenas, J. (2018). La resolución de problemas en la formación de profesores de matemáticas. En A. Ávila (Ed.), *Rutas de la Educación Matemática* (pp. 200–218). Editorial SOMIDEM.
- Borba, M. C., & Villarreal, M. E. (2005). *Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking*. Springer. <https://doi.org/10.1007/b105001>
- Broley, L., Buteau, C., Modeste, S., Rafalska, M., & Stephens, M. (2024). Computational Thinking and Mathematics. En L. Brolye, C. Buteau, S. Modeste, M. Rafalska, & M. Etephens (Eds.), *Handbook of Digital Resources in Mathematics Education* (pp. 323–360). <https://doi.org/qjvc>
- Buteau, C., Muller, E., Mgombelo, J., Sacristán, A. I., & Dreise, K. (2020). Instrumental genesis stages of programming for mathematical work. *Digital Experiences in Mathematical Education*, 6(3). 367–390

- Buteau C., Sacristán A. I., & Muller E. (2019). Roles and demands in constructionist teaching of computational thinking in university mathematics. *Constructivist Foundations* 14(3), 294–309. <https://constructivist.info/14/3/294>
- Camargo, L., Samper, C., & Perry, P. (2018). Actividad demostrativa: protagonista en la clase de geometría. En A. Ávila (Ed.), *Rutas de la Educación Matemática* (pp. 168–187). Editorial SOMIDEM.
- Cañada, C. O., Ordóñez Cañada, L., Contreras De La Fuente, Á., Ángel, M., Muñoz, G., Francisco, J., & Ruiz, R. (2018). Un proyecto de innovación didáctica e investigación enfocado en la didáctica del álgebra superior mediada por recursos tecnológicos. *Magister*, 30(1 y 2), 1–8. <https://doi.org/qjvf>
- Cañadas, G. Molina-Portillo, Elena, Contreras, José Miguel, & Álvarez-Arroyo, Rocío. (2019). Las tecnologías en el aula para la enseñanza del contraste de hipótesis. *Educación Matemática*, 31(2), 195–211. <https://doi.org/qjvf>
- Castañeda A. (Ed.). (2023). *Aportes y recursos para la innovación en la educación matemática*. SOMIDEM Editorial. <https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S1/2023/01>
- Del Olmo-Muñoz, J., Diago, P. D., Arnau, D., Arnau-Blasco, D., & González-Calero, J. A. (2024). Metacognitive control during problem solving at early ages in programming tasks using a floor robot. *ZDM – Mathematics Education*, 56(6), 1303–1317. <https://doi.org/10.1007/s11858-024-01621-8>
- Dahal, N. (2021). Workshop activity in online courses of mathematics education: insights for learning and assessment/TSG 49. Distance Learning, E-learning, and Blended Learning of Mathematics. En J. Wang (ed.) *Proceedings of the 14th International Congress on Mathematical Education* (pp. 578–581). <https://www.worldscientific.com/doi/epdf/10.1142/13700-vol1>
- Dávila Betancourt, H., Rivera Rosales, E. E., & Quiroz Rivera, S. (2024). Educación matemática en los alumnos post-pandemia. En M. Sánchez Aguilar, M. del S. García González, & A. Castañeda (Eds.) *Perspectivas actuales de la Educación Matemática* (pp. 353–357). Editorial SOMIDEM. <https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S3/2024/01-42>
- Del Olmo-Muñoz, J., González-Calero, J. A., Diago, P. D., Arnau, D., & Arevalillo-Herráez, M. (2023). Intelligent tutoring systems for word problem solving in COVID-19 days: could they have been (part of) the solution? *ZDM – Mathematics Education*, 55(1), 35–48. <https://doi.org/qjvg>
- Diago, P. D., González-Calero, J. A., & Arnau, D. (2019). Fundamentos de diseño de un entorno tecnológico para el estudio de las habilidades en resolución de problemas en primeras edades escolares. *Research in Education and Learning Innovation Archives*, 22, 60. <https://doi.org/10.7203/realia.22.14113>
- Drijvers, P. (2015). Digital Technology in Mathematics Education: Why It Works (Or Doesn't). En S. J. Cho (Ed.), *Selected Regular Lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 135–151). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-17187-6_8

- Drijvers, P., Kieran, C., Mariotti, M.-A., Ainley, J., Andresen, M., Chan, Y. C., Dana-Picard, T., Gueudet, G., Kidron, I., Leung, A., & Meagher, M. (2009). *Integrating Technology into Mathematics Education: Theoretical Perspectives* (pp. 89–132). https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0146-0_7
- Drijvers, P., & Sinclair, N. (2024). The role of digital technologies in mathematics education: purposes and perspectives. *ZDM – Mathematics Education*, 56(2), 239–248. <https://doi.org/10.1007/S11858-023-01535-X/>
- Engelbrecht, J., & Borba, M. C. (2024). Recent developments in using digital technology in mathematics education. *ZDM – Mathematics Education*, 56(2), 281–292. <https://doi.org/10.1007/s11858-023-01530-2>
- Escrivà, M. T., Jaime, A., & Gutiérrez, Á. (2021). Uso de software 3D para el desarrollo de habilidades de visualización en Educación Primaria. *Edma 0-6: Educación Matemática En La Infancia*, 7(1), 42–62. <https://doi.org/qjvh>
- Fernández-Mosquera, E., & Santacruz-Rodríguez, M. (2024). Visualización dinámica tridimensional en actividades de lugares geométricos 3D en geometría dinámica. En M. Sánchez Aguilar, M. del S. García González, & A. Castañeda (Eds.) *Perspectivas actuales de la Educación Matemática* (pp. 39–45). Editorial SOMIDEM. <https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S3/2024/01-03>
- Figueras, O., Valenzuela, C., & Martínez, M. (2021). ¿Debemos usar calculadoras en un examen? *Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 92, 45–53. <https://documat.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=7989194>
- García-Moreno, M. Á., Yáñez, D. F., & Diago, P. D. (2022). Introduction to Computational Mathematics Using the Historical Solutions of the “Hundred Fowls” Problem. *Education Sciences*, 13(1), 18. <https://doi.org/qjvj>
- Gavilán-Izquierdo, J. M., & Gallego-Sánchez, I. (2024). Developing TPACK through task design: exploring the use of multiple modes of representation and the promotion of mathematical processes. *Journal of Education for Teaching*, 1–18. <https://doi.org/10.1080/02607476.2024.2422507>
- Gea, M. M., Arteaga, P., Batanero, C., & Ortiz, J. J. (2018). Conocimiento Tecnológico sobre la Correlación y Regresión: un estudio exploratorio con Futuros Profesores. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 32(60), 134–155. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n60a07>
- González-Calero, J. A., Cózar, R., Villena, R., & Merino, J. M. (2019). The development of mental rotation abilities through robotics-based instruction: An experience mediated by gender. *British Journal of Educational Technology*, 50(6), 3198–3213. <https://doi.org/10.1111/bjet.12726>
- Gueudet, G., Buteau, C., Muller, E. Mgombelo, J., Sacristán, A. I., & Santacruz, M. (2022). Development and evolution of instrumented schemes: a case study of learning programming for mathematical investigations. *Educational Studies in Mathematics*, 110(2), 353–377. <https://doi.org/gqv6bp>

- Hitt, F. (2018). De un marco teórico constructivista del aprendizaje de las matemáticas a otro sociocultural en ambientes tecnológicos. En A. Ávila (Ed.), *Rutas de la Educación Matemática* (pp. 101–125). Editorial SOMIDEM.
- Hoyles, C., & Lagrange, J.-B. (Eds.). (2010). *Mathematics Education and Technology—Rethinking the Terrain* (Vol. 13). Springer. <https://doi.org/cnxp8k>
- Hoyles, C., & Noss, R. (2003). What can digital technologies take from and bring to research in mathematics education? En A. J. Bishop, M. A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. K. S. Leung. (Eds.), *Second International Handbook of Mathematics Education* (pp. 323–349). Springer. <https://doi.org/fhnxyzp>
- Hoyos, V. (2024). Educación matemática a distancia mediada por tecnologías digitales, en formato híbrido o por medios electrónicos de aprendizaje. En M. Sánchez Aguilar, M. del S. García González, & A. Castañeda (Eds.), *Perspectivas actuales de la Educación Matemática* (pp. 347–352). Editorial SOMIDEM. <https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S3/2024/01-41>
- Hoyos, V., Navarro, M. E., Raggi, V., & Rodríguez, G. (2018). Challenges and opportunities in distance and hybrid environments for technology-mediated mathematics teaching and learning. En J. Silverman & V. Hoyos (Eds.), *Distance Learning, E-Learning and Blended Learning in Mathematics Education* (pp. 29–45). Springer-ICME. <https://doi.org/qjvp>
- Hoyos, V., Silverman, J., Carlsen, L. M., & Lee, A. (2024). Teachers' knowledge and capacity for using digital resources in mathematics education. En Pepin, B., Gueudet, G., & Choppin, J. (Eds.), *Handbook of Digital Resources in Mathematics Education*. Springer. <https://doi.org/qjvq>
- Hoyos, V., & Pecina, L. (2024). Connecting secondary and college geometry: Resolution of problems of finding intersections and measures of curves using dynamic geometry software. En T. Lowrie, A. Gutiérrez, & F. Emprin (Eds.), *Proceedings of the 26th ICMI Study Conference (Advances in Geometry Education)* (pp. 361–376). ICMI. <https://bit.ly/3KCvXyZ>
- Hoyos, V., & Raggi, V. J. (2024). Exploración sobre el desarrollo profesional en línea de maestros de matemáticas del bachillerato: Conexiones entre matemáticas avanzadas y matemáticas del bachillerato. En M. Sánchez Aguilar, M. del S. García González, & A. Castañeda (Eds.) *Perspectivas actuales de la Educación Matemática* (pp. 369–378). Editorial SOMIDEM. <https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S3/2024/01-44>
- Hwang, S., Flavin, E., & Lee, J.-E. (2023). Exploring research trends of technology use in mathematics education: A scoping review using topic modeling. *Education and Information Technologies*, 28(8), 10753–10780. <https://doi.org/qjvr>
- Inzunza Cazares, S., & Islas Anguiano, E. (2019). Análisis de una trayectoria de aprendizaje para desarrollar razonamiento sobre muestras, variabilidad y distribuciones muestrales. *Educación Matemática*, 31(3), 203–230. <https://doi.org/10.24844/em3103.08>

- Juárez Ruiz, E., Hernández Rebollar, L., Castañeda, A. (Eds.). (2023). *Tendencias en la Educación Matemática 2023*. Editorial SOMIDEM.
<https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S3/2023/01>
- Juárez Ruiz, E., & Hernández Rebollar, L. (Eds.). (2024). *Tendencias en la Educación Matemática 2024*. Editorial SOMIDEM.
<https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S3/2024/02>
- Kallia, M., van Borkulo, S. P., Drijvers, P., Barendsen, E., & Tolboom, J. (2021). Characterising computational thinking in mathematics education: a literature-informed Delphi study. *Research in Mathematics Education*, 23(2), 159–187.
<https://doi.org/10.1080/14794802.2020.1852104>
- Lavicza, Z., Weinhandl, R., Prodromou, T., Anđić, B., Lieban, D., Hohenwarter, M., Fenyvesi, K., Brownell, C., & Diego-Mantecón, J. M. (2022). Developing and Evaluating Educational Innovations for STEAM Education in Rapidly Changing Digital Technology Environments. *Sustainability*, 14(12), 7237.
<https://doi.org/10.3390/su14127237>
- Lemus, M. E., & Brun Battistini, D. (2023). Aplicación de una trayectoria de aprendizaje en estadística universitaria usando tecnología en un proyecto integrador. En A. Castañeda, (Ed.), *Aportes y recursos para la innovación en la educación matemática* (pp. 43–68). SOMIDEM Editorial.
<https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S1/2023/01-02>
- Lowrie, T., Gutiérrez, A., & Emprin, F. (Eds.). (2024). *Proceedings of the 26th ICMI Study: Advances in Geometry Education*. INSPE- Université de Reims Champagne Ardenne. <https://icmistudy26.sciencesconf.org>
- Mántica, A., & Freyre, M. (2019). Análisis de la relación entre imagen y definición en una situación problemática mediada por GeoGebra a partir de no ejemplos del concepto de poliedro regular. *Educación Matemática*, 31(1), 204–234. <https://doi.org/10.24844/em3101.08>
- Martínez-Ortega, M., Preciado-Babb, P., & Mejía-Velasco, H. (2017). Making Meaning of Periodic Functions through Body Movements. En P. Preciado Babb, L. Yeworiew, & S. Sabbaghan (Eds.). *Selected Proceedings of the IDEAS Conference: Leading Educational Change* (pp. 159–168). Werklund School of Education, University of Calgary.
- Medina, M., Uyasan, R., & Valenzuela, R. (2024). *Riesgos de la Inteligencia Artificial Generativa en la producción de la información para la toma de decisiones*. Universidad EAN.
- Moreno-Armella, L. (2018). De fractales y cónicas dinámicas: prácticas de enseñanza y mediación instrumental. En A. Ávila (Ed.), *Rutas de la Educación Matemática* (pp. 126–147). Editorial SOMIDEM.

- Muñiz-Rodríguez, L., Alonso, P., Rodríguez-Muñiz, L. J., De Coninck, K., Vanderlinde, R., & Valcke, M. (2018). Exploring the Effectiveness of Video-Vignettes to Develop Mathematics Student Teachers' Feedback Competence. *EU-RASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 14(11). <https://doi.org/10.29333/ejmste/92022>
- Navarro Robles, M., Arellano Sánchez, B., & Hernández García, A. (2024). Sistema adaptativo para un curso introductorio de matemáticas en línea, como apoyo para clases presenciales de los estudiantes de la UPN. En M. Sánchez Aguilar, M. del S. García González, & A. Castañeda (Eds.), *Perspectivas actuales de la Educación Matemática* (pp. 385–389). Editorial SOMIDEM. <https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S3/2024/01-46>
- Nolla, Á., Ibricu, Á., & Benito, A. (2024). A Collaborative Experience with Mathematical 3D Modeling and Printing. *International Journal for Technology in Mathematics Education*, 31(2), 37–44. <https://doi.org/qjvs>
- Orts Muñoz, A., Llinares Ciscar, S., & Boigues Planes, F. J. (2018). Trayectorias de aprendizaje del concepto de recta tangente en alumnos de Bachillerato. Enseñanza de Las Ciencias. *Revista de Investigación y Experiencias Didácticas*, 36(3), 121–140. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2252>
- Palma, J., & Marín, R. (2008). *Inteligencia artificial. Técnicas, métodos y aplicaciones*. McGraw- Hill.
- Pérez-Suay, A., Ferrís-Castell, R., Van Vaerenbergh, S., & Pascual-Venteo, A. B. (2023). Assessing the Relevance of Information Sources for Modelling Student Performance in a Higher Mathematics Education Course. *Education Sciences*, 13(6), 555. <https://doi.org/10.3390/educsci13060555>
- Pérez-Suay, A., Van Vaerenbergh, S., Diago, P. D., Pascual-Venteo, A. B., & Ferri, F. J. (2023). Data-Driven Modeling Through the Moodle Learning Management System: An Empirical Study Based on a Mathematics Teaching Subject. *IEEE Revista Iberoamericana de Tecnologías Del Aprendizaje*, 18(1), 19–27. <https://doi.org/10.1109/RITA.2023.3250434>
- Pérez, A. (2018). A Framework for Computational Thinking Dispositions in Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 49(4), 424–461. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.49.4.0424>
- Pla-Castells, M., & García-Fernández, I. (2020). TaskTimeTracker: A tool for temporal analysis of the problem solving process. *Investigación En Entornos Tecnológicos En Educación Matemática*, 1. <https://doi.org/qjvt>
- Pla-Castells, M., Melchor, C., & Chaparro, G. (2021). MAD+. Introducing Misconceptions in the Temporal Analysis of the Mathematical Modelling Process of a Fermi Problem. *Education Sciences*, 11(11), 747. <https://doi.org/qjvv>
- Pólya, G. (1957). *How to solve it* (2nd ed.). Princeton University Press.

- Quilantán-Ortega, I., & Rodríguez-Vázquez, F. M. (2024). Geogebra como recurso didáctico en el análisis y solución de problemas que involucran a la función logística. En E. Juárez Ruiz, & L. Hernández Rebollar (eds.), *Tendencias en la Educación Matemática 2024*. Editorial SOMIDEM.
<https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S3/2024/02-07>
- Rodríguez-Muñiz, L. J., Alonso-Castaño, M., & Muñiz-Rodríguez, L. (2021). Análisis del conocimiento de estudiantes para maestro o maestra en la elaboración de videos educativos: una experiencia didáctica. *Magister*, 75–84.
<https://doi.org/10.17811/msg.33.1.2021.75-84>
- Rodríguez-Martínez, J. A., González-Calero, J. A., del Olmo-Muñoz, J., Arnau, D., & Tirado-Olivares, S. (2023). Building personalised homework from a learning analytics based formative assessment: Effect on fifth-grade students' understanding of fractions. *British Journal of Educational Technology*, 54(1), 76–97. <https://doi.org/10.1111/bjet.13292>
- Ruthven, K. (2018). Constructing dynamic geometry: Insights from a study of teaching practices in English schools. En G. Kaiser, H. Forgasz, M. Graven, A. Kuzniak, E. Simmt, & B. Xu (Eds.), *Invited Lectures from the 13th International Congress on Mathematical Education* (pp. 521–540). Springer-ICME
- Sacristán, A. I., & Noss, R. (2008). Computational construction as a means to coordinate representations of infinity. *International Journal of Computer Mathematics*, 13(1). 47–70.
- Samper, C. & Vargas, C. (2019). La negación: Un aporte a la construcción de definiciones en el aula escolar de geometría. *Educación Matemática*, 31(3), 39–60. <https://doi.org/10.24844/EM3103.02>
- Sánchez, E. (2023). Uso de tecnología en el análisis de tres problemas de probabilidad utilizados en la investigación en educación matemática. En Juárez Ruiz, E. L., Hernández Rebollar, L. A., & Castañeda, A. (Eds.), *Tendencias en la educación matemática 2023* (pp. 91–111). Editorial SOMIDEM.
<https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S3/2023/01-05>
- Sánchez, E., García-Ríos, V. N., & Sepúlveda, F. (2024). Development of high school students' conceptions of sampling distribution in the context of learning significance tests with technology. *Educational Studies in Mathematics*, 117(2). 215–238. <https://doi.org/10.1007/s10649-024-10330-8>
- Sánchez, E., & López, J. L. (2023). Educación Matemática: Conectando a investigadores y educadores por 35 años. *Educación Matemática*, 35(1), 5–8.
<https://doi.org/10.24844/EM3501.00>
- Sánchez Aguilar, M., García González, M. del S., & Castañeda, A. (Eds.). (2024). *Perspectivas actuales de la Educación Matemática*. Editorial SOMIDEM.
<https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S3/2024/01>

- Sánchez-López, M., González-Calero, J. A., & del Olmo-Muñoz, J. (2024). Exploring the role of floor robots in enhancing computational thinking skills and mental rotation in second and third graders. *Quadrante*, 33(2), 36–57. <https://doi.org/https://doi.org/10.48489/quadrante.36860>
- Sánchez Noroño, I., Prieto G., J., Gutiérrez Araujo, R., & Díaz-Urdaneta, S. (2020). Sobre os processos de objetivação de saberes geométricos. Análise de uma experiência de elaboração de simuladores com o GeoGebra. *Educación Matemática*, 32(1), 99–131. <https://doi.org/10.24844/em3201.05>
- Sandoval Cáceres, I. & Larios Osorio, V. (2024). Tecnologías Digitales en Matemática Educativa: Reflexiones, propuestas y retos. En M. Sánchez Aguilar, M. del S. García González, & A. Castañeda (Eds.), *Perspectivas actuales de la Educación Matemática* (pp. 31–38). Editorial SOMIDEM. <https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S3/2024/01-02>
- Sanjosé, V., Gómez-Ferragud, C. B., Verdugo-Perona, J. J., & Solaz-Portolés, J. J. (2022). Testing a Model for the Monitoring of Worked-out Algebra-Problem Examples: From Behaviours to Outcomes on a Math Task. *Psicología Educativa*, 28(2), 141–149. <https://doi.org/10.5093/psed2021a25>
- Santacruz Rodríguez, M. & Sacristán Rock, A. (2019). Una mirada al trabajo documental de un profesor de primaria al seleccionar recursos para enseñar geometría. *Educación Matemática*, 31(3), 7–38. <https://doi.org/10.24844/em3103.01>
- Santos-Trigo, M., & Aguilar Magallón, D. (2018). Resolución de problemas matemáticos: del trabajo de Pólya al razonamiento digital. En A. Ávila (Ed.), *Rutas de la Educación Matemática* (pp. 148–167). Editorial SOMIDEM.
- Sanz Garcia, M. T., González-Calero, J. A., Arnau, D., & Arevalillo-Herráez, M. (2019). Uso de la comprensión lectora para la construcción de un modelo predictivo del éxito de estudiantes de 4o de Primaria cuando resuelven problemas verbales en un sistema inteligente. *Revista de Educacion*, 384, 41–69. <https://doi.org/10.4438/1988-592X-RE-2019-384-409>
- Sanz, M. T., López-Iñesta, E., Garcia-Costa, D., & Grimaldo, F. (2020). Measuring Arithmetic Word Problem Complexity through Reading Comprehension and Learning Analytics. *Mathematics*, 8(9), 1556. <https://doi.org/10.3390/math8091556>
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Academic Press.
- Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334–370). MacMillan.
- Shvarts, A., Alberto, R., Bakker, A., Doorman, M., & Drijvers, P. (2021). Embodied instrumentation in learning mathematics as the genesis of a body-artifact functional system. *Educational Studies in Mathematics*, 107(3), 447–469. <https://doi.org/10.1007/s10649-021-10053-0>

- Silva Bautista, D. (2024). Exploración en modalidad remota de la pedagogía de la variación en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas del bachillerato: El caso de la resolución general de ecuaciones diofánticas lineales. En M. Sánchez Aguilar, M. del S. García González, & A. Castañeda (Eds.), *Perspectivas actuales de la Educación Matemática* (pp. 359–367). Editorial SOMIDEM. <https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S3/2024/01-43>
- Sua Flórez, C., & Camargo Uribe, L. (2019). Geometría dinámica y razonamiento científico: Dúo para resolver problemas. *Educación Matemática*, 31(1), 7–37. <https://doi.org/10.24844/em3101.01>
- Suárez Zapata, A., García Costa, D., Martínez Delgado, P. A., & Martos Torres, J. (2018). Contribución de la robótica educativa en la adquisición de conocimientos de matemáticas en la Educación Primaria/ Contribution of educational robotics in the acquisition of mathematical knowledge in primary education. *Magister*, 30(1), 43. <https://doi.org/jfff>
- Taylor, R. (1980). *The computer in the school: Tutor, tool, tutee*. Teachers College.
- Tedre, M. (2022). Computational Thinking 2.0. En M. Grillenberg, & M. Berges (Eds.), *Proceedings of the 17th Workshop in Primary and Secondary Computing Education* (pp. 1–2). Association for Computing Machinery. <https://doi.org/10.1145/3556787.3556788>
- Teigens, V., Skalfist, P., & Mikelsten, D. (2020). *Inteligencia artificial: la cuarta revolución industrial*. Cambridge Stanford Books.
- Trejo Martínez, M., Ferrari Escolá, M., & Martínez Sierra, G. (2021). Covariación logarítmico-exponencial en futuros profesores de matemáticas. Un estudio de caso. *Educación Matemática*, 33(1), 41–70. <https://doi.org/10.24844/em3301.02>
- Van Vaerenbergh, S., & Pérez-Suay, A. (2022). A Classification of Artificial Intelligence Systems for Mathematics Education. En P. R. Richard, M. P. Vélez, & Van Vaerenbergh (Eds.), *Mathematics Education in the Age of Artificial Intelligence* (pp. 89–106). https://doi.org/10.1007/978-3-030-86909-0_5
- Vargas-Alejo, V., Valenzuela-García, C., & Aguiar-Barrera, M. E. (2024). La resolución de un problema verbal mediante sistemas de ecuaciones lineales y la hoja de cálculo. En E. Juárez Ruiz, & L. Hernández Rebollar (Eds.), *Tendencias en la Educación Matemática 2024*. Editorial SOMIDEM. <https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S3/2024/02-08>
- Verástegui Gutiérrez, M., López-Flores, J., & García-García, J. (2024). El razonamiento estadístico en el currículo de formación inicial del profesor de matemáticas de educación secundaria en México. *Educación Matemática*, 36(3), 116–142. <https://doi.org/10.24844/em3603.05>
- Wu, Y., Albornoz-De Luise, R. S., & Arevalillo-Herráez, M. (2025). On improving conversational interfaces in educational systems. *Computer Speech & Language*, 89, 101693. <https://doi.org/10.1016/j.csl.2024.101693>

Investigaciones sobre el profesorado de matemáticas en México y España

Research on mathematics teachers in Mexico and Spain

Lilia P. Aké ¹ 

Juan Francisco Ruiz-Hidalgo ² 

Nuria Joglar-Prieto ³ 

Resumen

El profesorado de matemáticas, su formación y sus prácticas profesionales son temas de relevancia y actualidad internacional, tanto políticos como de investigación. Los casos de México y España no son una excepción, sino que se alinean con este interés que se manifiesta explícitamente en el trabajo de sus grupos de investigación FDPE y CDPP. A pesar de las diferencias manifestadas entre los grupos como, por ejemplo, su antigüedad y las diferencias sociodemográficas de los países, detectamos que comparten intereses y preocupaciones similares, expresadas en los temas prioritarios y los marcos interpretativos. A lo largo de este capítulo detallamos cómo es y cómo se desarrolla esta investigación en cada uno de los grupos y reflexionamos sobre las posibilidades de colaboración.

¹ lake86@gmail.com

Universidad Autónoma de Querétaro (SOMIDEM)

² jfrui@ugr.es

Universidad de Granada (SEIEM)

³ njoglar@ucm.es

Universidad Complutense de Madrid (SEIEM)

Aké, L. P., Ruiz-Hidalgo, J. F., & Joglar-Prieto, N. (2025). Investigaciones sobre el profesorado de matemáticas en México y España. En E. Flores-Medrano, M. Molina, I. Sandoval, & I. Polo-Blanco (Eds.), *Educación Matemática en México y España: Investigaciones y líneas de trabajo compartidas* (pp. 373–395). Editorial SOMIDEM - SEIEM. <https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S2/2025/03-14>

Palabras clave

Conocimiento del docente, didáctica, formación profesorado, matemáticas, práctica educativa.

Abstract

Mathematics teachers, their training, and their professional practices are topics of international relevance, both for policymakers and researchers. The cases of Mexico and Spain are no exception as they align with this interest, which is explicitly expressed in the work of their research groups FDPE and CDPP. Despite the obvious differences between these groups, such as their age or the sociodemographic differences between the countries, they share similar interests and concerns, expressed in priority research themes and interpretative frameworks. Throughout this chapter, we detail the nature and development of the research in each of the groups as well as reflect on the possibilities for collaboration.

Keywords

Didactics, educational practice, mathematics, teacher knowledge, teacher training.

Introducción

La investigación sobre docentes de matemáticas se ha consolidado internacionalmente en los últimos años. Revistas como el *Journal of Mathematics Teacher Education*, libros monográficos como el *International Handbook of Mathematics Teacher Education* (Jaworski & Wood, 2008) y sus ediciones más recientes (Llinares & Chapman, 2020; Lloyd & Chapman, 2020; Potari & Chapman, 2020) o la existencia de grupos especializados en las reuniones internacionales más conocidas como el CERME, ICMI o PME (p. ej., Borki & Potari, 2024), configuran un panorama internacional organizado y rico en historia, producción y perspectivas de desarrollo.

En este contexto internacional de la investigación sobre el profesorado de matemáticas, en México y España han surgido grupos de trabajo interesados en el tema de la formación docente acogidos por la Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación en Educación Matemática (SOMIDEM) y la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), respectivamente.

Desde su creación en 1996, la SEIEM ha tenido presente que la formación del profesorado debe ser uno de los pilares sobre los que desarrollar su actividad. Así, el grupo “Formación del profesorado” fue uno de los seis constituidos en aquel momento para organizar las investigaciones que se realizaban en educación matemática. Un año después, durante el primer simposio de la SEIEM, se dedicó un seminario plenario al profesorado de matemáticas y los contextos de investigación. En esta primera conferencia se expresó el interés en revisar el conocido constructo *Pedagogical Content Knowledge* (Shulman, 1986). Para ello se sugirieron tres líneas de investigación:

la primera, centrada en la caracterización de lo que se denominó conocimiento pedagógico del contenido y los factores que influyen en su generación y desarrollo; la segunda, enfocada en señalar los aspectos influyentes en el proceso de razonamiento pedagógico y; la tercera línea, orientada a la caracterización de los procesos de socialización. En ese mismo evento, se eligió el nombre actual del grupo que pasó a denominarse “Conocimiento y Desarrollo Profesional del Profesor” (CDPP). Además, se propusieron los descriptores del mismo: actitudes, creencias, conocimiento y comprensión, cambio y desarrollo profesional y formación de profesores.

Veintiocho años después, el grupo CDPP es uno de los grupos más activos y productivos de la SEIEM. La reciente revisión publicada por Bosch et al. (2024) sitúa el desarrollo profesional y el conocimiento docente como uno de los seis focos en los que se organiza la investigación en educación matemática en España. Las personas y colectivos colaboradores con el grupo CDPP aportan tanto investigaciones sobre el desarrollo profesional y conocimiento del profesorado de matemáticas (en diferentes niveles educativos y sobre variados tópicos matemáticos) como modelos teóricos que ayudan a interpretar las prácticas profesionales y caracterizar el conocimiento del docente de matemáticas.

Por su parte, el Grupo de Trabajo Temático sobre Formación Docente y Políticas Educativas (FDPE) es un grupo mucho más joven que surgió en 2022 en el seno de la Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación en Educación Matemática (SOMIDEM). Este grupo de trabajo nació de la preocupación por comprender la naturaleza de la formación del profesorado de matemáticas, la cual, en México presenta diferentes matices. El profesorado de preescolar, primaria y de secundaria se forma en Escuelas Normales y su currículo de formación es homogénea en todo el territorio mexicano con una duración, en los tres casos, de cuatro años. En el caso de la educación preescolar y primaria el profesorado tiene una formación generalista y está a cargo del desarrollo de diversas áreas de conocimiento, no solo el matemático.

El profesorado de secundaria tiene una formación especializada en matemáticas. Particularmente, la educación media superior o bachillerato es atendida por profesionales de otras áreas afines a las matemáticas formados en Instituciones de Educación Superior (IES), pero que no necesariamente tienen un conocimiento suficiente para ejercer la docencia. Esta realidad ha motivado el surgimiento del grupo y el llamado a reunir a investigadores que puedan contribuir a dar soluciones a las problemáticas relacionadas con el conocimiento, formación de docentes de matemáticas y apoyar el proceso de profesionalización en el contexto mexicano.

Desde sus respectivas asociaciones, los grupos de trabajo responden a objetivos establecidos y acordes a los contextos en donde se desarrollan las

investigaciones. En el caso del grupo CDPP, sus objetivos, recogidos en la web de la SEIEM, se agrupan en tres grandes conglomerados:

- Desarrollar, comunicar y abordar cuestiones y esquemas de índole conceptual en varias agendas de investigación sobre profesorado de matemáticas,
- Explorar metodologías de investigación innovativas en los estudios sobre el profesorado de matemáticas y clarificar las bases teóricas de estas metodologías, y
- Desarrollar estándares de calidad de la investigación.

Por otro lado, el grupo FDPE se planteó como principal objetivo generar conocimiento desde la investigación que permitiera una mejor comprensión de la formación inicial y continua de los docentes considerando su realidad en el aula y las políticas educativas que rigen su práctica.

Ambos grupos de trabajo, CDPP y FDPE, tienen temas prioritarios que atienden a través de las investigaciones que desarrollan. Así, el grupo FDPE plantea sus temas prioritarios considerando el contexto de formación docente en México, sus matices y desafíos. En ese sentido, la comunidad de investigadores en Educación Matemática pertenecientes al grupo se planteó como temas prioritarios iniciales: (a) el currículum y su papel en la formación de los docentes, (b) la incidencia de las políticas educativas en la formación de profesores de matemáticas, (c) los conocimientos y saberes de docentes en áreas específicas de las matemáticas, (d) los estudios sobre virtualidad y, (e) el uso de la tecnología en el aula de matemáticas. Como grupo de trabajo pretende avanzar en dar respuesta a los siguientes interrogantes: ¿qué formación sería la más adecuada para el profesional que se dedica a enseñar matemáticas en las escuelas?, ¿qué conocimientos permean la práctica del profesor?, ¿cómo desde la política educativa se puede lograr una mejor formación del profesor?, ¿cómo atender el desarrollo profesional de los docentes ante escenarios virtuales y el uso de tecnología?; aunque se han desarrollado diversos estudios empíricos y teóricos para darles respuesta, estas preguntas siguen vigentes. Por su parte, los temas prioritarios sobre los que han centrado su investigación los miembros del grupo CDPP incluyen el análisis de prácticas de aula del profesorado, la caracterización del conocimiento docente, su conceptualización y su relación con la competencia docente, el aprendizaje del docente y el desarrollo de competencias docentes y el desarrollo profesional y el dominio afectivo.

Estado actual del grupo en la SOMIDEM

Actualmente, el sistema educativo mexicano atraviesa una nueva reforma denominada Nueva Escuela Mexicana. Esta reforma representa un enfoque transformador en el sistema educativo en México al proponer la transversalidad de contenidos y articular la educación preescolar, primaria, secundaria y

bachillerato en cuatro campos formativos: (a) lenguajes, (b) saberes y pensamiento científico, (c) ética, naturaleza y sociedades y, (d) lo humano y lo comunitario. En el marco de este nuevo modelo educativo también se realiza una propuesta de libros de texto diseñados para cada nivel escolar, los cuales tienen una presencia nacional. Asimismo, en el 2024 se planteó la implementación de un nuevo plan de estudios para la formación inicial de profesores del nivel básico (primaria y secundaria) por lo que se reinterpreta y transforma la formación de los docentes en México (Secretaría de Educación Pública, 2024). La entrada en vigor de la Nueva Escuela Mexicana representa un escenario en el que las investigaciones del grupo FDPE juegan un papel crucial para su implementación y mejora y en el que los estudios sobre el profesor tienen un rol transformador.

La naturaleza de la formación tanto inicial como continua del profesor de matemáticas en México es el principal interés del grupo debido a sus matices y la diversidad de contextos en los que se desarrolla la docencia. En ese sentido, Strutchens et al. (2017) indican que no hay un acuerdo sobre los aspectos del conocimiento matemático y didáctico que se deben desarrollar durante su formación inicial, y tampoco hay claridad sobre cómo llevar a cabo los procesos de desarrollo profesional de los docentes. Aunque existen programas de formación, Wu (2018) sostiene que estos programas estarán incompletos hasta que se desarrolle un marco teórico-metodológico que permita a los profesores construir el conocimiento del contenido necesario para alcanzar un nivel de competencia en la enseñanza de las matemáticas. Por esta razón, algunos estudios realizados en México (p. ej., Aké & Larios, 2021; Aké & Mojica, 2020) señalan la importancia de realizar investigaciones sobre los conocimientos y competencias docentes, no solo para visibilizar las áreas de oportunidad, sino también para establecer rutas de atención y desarrollo que permitan considerar las nuevas demandas en las aulas de matemáticas, como es el caso de la inclusión (p. ej., Aké, 2016) y, recientemente, el uso de la inteligencia artificial (Pochulu, 2024).

Existen desafíos adicionales vinculados a la necesidad de transformar la educación a nivel global. Por un lado, la OCDE, en su Agenda 2030 subraya la importancia de incluir en los programas educativos un enfoque inclusivo, basado en principios fundamentales como el respeto mutuo, la colaboración y la sostenibilidad (Howells, 2018). Estos principios exigen que los docentes adquieran nuevas competencias. Los puntos anteriores establecen grandes desafíos para la formación inicial y continua de profesores en nuestro país que han despertado la necesidad de plantearse nuevos temas prioritarios como: (a) el uso de la inteligencia artificial por profesores de matemáticas, (b) el desarrollo de la inclusión en las aulas de matemáticas, (c) la transversalidad de las matemáticas como conocimiento del profesor, (d) el análisis de libros de texto como competencia docente, de manera que se pueda dar

respuesta a: ¿cómo atender la formación continua de los docentes ante escenarios de inclusión y el uso de la inteligencia artificial?, ¿qué características debe tener la formación inicial y continua de los docentes para identificar y promover la transversalidad de contenidos matemáticos?, ¿cómo debe interpretar, analizar y utilizar los libros de texto el profesor de matemáticas en el marco de la Nueva Escuela Mexicana?

En este contexto, estudios como el de López et al. (2020) señalan la importancia de expandir las investigaciones sobre la naturaleza del conocimiento inclusivo de los profesores de matemáticas y su desarrollo desde su formación inicial y con mayor énfasis en el desarrollo profesional. Esto concuerda con las opiniones de Adler et al. (2005), quienes enfatizan la necesidad de que la investigación en educación se concentre más en el desarrollo profesional de los docentes de matemáticas. Por otro lado, la inteligencia artificial es un dominio relativamente reciente en el campo de la investigación en Educación Matemática, aspectos como la desigualdad digital y la exigencia de una formación docente apropiada son temas que resultan de interés en la comunidad de profesores e investigadores. Aunque el análisis de libros de texto es una línea de investigación en la disciplina (Fan, 2013) y en México se han desarrollado estudios sobre este tema (Ávila et al., 2013; Ávila, 2019), se reconoce que es necesario profundizar en las investigaciones dado el papel que representa el libro de texto en el ámbito mexicano como referente para orientar la actividad matemática.

De igual manera, como grupo, compartimos la opinión de autores como Grau et al. (2017) en cuanto a la importancia de llevar a cabo estudios enfocados en la reflexión profesional sobre la práctica docente con el objetivo de contribuir a la formación del profesorado. Además, destacamos que la reflexión profesional facilita la recopilación de información sobre los temas considerados prioritarios dentro del grupo de trabajo. Este tema busca responder a la pregunta ¿cómo la reflexión profesional contribuye a la formación y desarrollo profesional de los docentes de matemáticas?

La investigación en el grupo FDPE

Es difícil proporcionar una radiografía sobre las investigaciones en Educación Matemática sobre la formación de docentes en México. Este hecho motivó el desarrollo de una de las primeras actividades que se tuvo como grupo. En el primer congreso de la SOMIDEM llevado a cabo en marzo de 2023, se desarrolló un foro donde el grupo de FDPE reunió a investigadores que presentaron y discutieron sus estudios empíricos y teóricos enfocados en dilucidar, principalmente, cuatro temáticas que se propusieron *a priori*, las cuales fueron:

Temática 1: El Currículum y su papel en la formación de profesores de matemáticas, con énfasis en el Docente y la Nueva Escuela Mexicana, el

Nuevo Marco Curricular Común en Educación Media Superior, los Planes de Estudio de Nivel Superior y los Posgrados de Orientación Profesional Docente y de Investigación.

Temática 2: Políticas Educativas de Profesores de Matemáticas en las Escuelas Normales y Universidades; específicamente el Profesor y la Reforma en el Plan de Estudios 2022, los Posgrados de Orientación Profesional Docente y de Investigación.

Temática 3: Formación y desarrollo profesional del profesor de matemáticas, relacionado con los conocimientos y saberes docentes para la diversidad, uso de tecnología, didácticas específicas, entre otros.

Temática 4: Prácticas del profesor de matemáticas postpandemia por COVID-19.

Es importante mencionar que los investigadores que se dedican a la formación de profesores de matemáticas en México y que estuvieron presentes en el Congreso de la SOMIDEM atienden la problemática desde diferentes aristas y matices. Aunque el enfoque metodológico que se utiliza prioritariamente es el enfoque cualitativo, ya sea desde un nivel exploratorio o descriptivo, el foco matemático de estudio y los marcos teóricos utilizados suelen ser diversos como se puede apreciar en la siguiente tabla 1.

Tabla 1

Componente matemático y enfoques teóricos

Aspecto matemático	Frecuencia de trabajos	Enfoque teórico	Frecuencia de trabajos
Función	1	EOS	2
Proporcionalidad	1	MTSK	5
Sucesión y patrones	2	MKT	1
Variable	1	Saberes	1
Número entero	1	Mirada profesional	1
Pendiente de una recta	1	Reflexión	1
Diferencial de una función	1	Interacciones	1
Estructura multiplicativa	1	Otros enfoques	2
Sin especificar	5		

La línea de investigación sobre formación de profesores de matemáticas, al ser amplia, no siempre se centra en atender contenidos matemáticos específicos, sino que suele centrarse en aspectos más didácticos como el uso de recursos educativos o el análisis de videos de clase que suelen asociarse a sus competencias docentes. Por otro lado, en los intereses de investigación, tal como se muestra en la tabla 2, también se encuentran matices que permiten vislumbrar los temas en los que se centran los integrantes del grupo

y los participantes con los que se desarrollan sus investigaciones. Esto marca las direcciones de los estudios actuales y futuros.

Tabla 2
Temas y participantes

Temas	Frecuencia de trabajos	Participantes	Frecuencia de trabajos
Conocimientos y saberes	7	Bachillerato en servicio	3
Práctica profesional	2	Secundaria en servicio	4
Competencias	2	Primaria en servicio	2
Escuelas Multigrado	2	Primaria en formación	1
Políticas Educativas	1	Multigrado	1
		Teórico	3

La mayoría de las líneas de investigación del grupo suelen centrarse en la formación y desarrollo profesional del profesor de matemáticas, relacionados con los conocimientos, competencias, saberes y prácticas. Este interés es coherente con lo señalado por Scheiner et al. (2019), quienes destacan la importancia de comenzar por comprender cómo se desarrolla el conocimiento y la competencia matemática en el profesorado. La mayoría de las investigaciones son realizadas con docentes en servicio, pero llama la atención el surgimiento del estudio de la formación de profesorado para escuelas Multigrado. En México, las escuelas multigrado están atendidas por profesores y profesoras que imparten clases en un mismo salón a niños de más de un grado escolar. Hay escuelas multigrado de preescolar, primaria y secundaria.

Los resultados de esta reunión en el seno del primer congreso de la SOMIDEM se publicaron en el libro “Perspectivas actuales de la Educación Matemática” (Sánchez et al., 2024). Una segunda reunión se desarrolló en marzo de 2025; las investigaciones presentadas se publicarán en un libro temático con el que se busca reflejar las implementaciones de las investigaciones en educación matemática en la formación del profesorado. Lo anterior, con la finalidad de acortar la distancia entre la investigación y la docencia ya que, como indican Dolores et al. (2013), a pesar de que hay estudios sobre la formación del profesorado de matemáticas, estas propuestas generalmente no se tienen en cuenta al elaborar los planes de estudio de las licenciaturas y posgrados dedicados a la formación de docentes.

Líneas futuras del grupo en la SOMIDEM

El grupo de trabajo dentro de la SOMIDEM tiene como visión convertirse en un referente en la investigación y en la comunidad de profesores, sobre

formación docente y políticas públicas para generar incidencia en la realidad educativa de las aulas. De esta manera, sin dejar de considerar las líneas de interés de los investigadores del grupo de la SOMIDEM, retomamos los temas prioritarios: (a) el currículum y su papel en la formación de los docentes, (b) la incidencia de las políticas educativas en la formación de profesores de matemáticas, (c) los conocimientos y saberes de docentes en áreas específicas de las matemáticas, (d) los estudios sobre virtualidad, (e) el uso de la tecnología en el aula de matemáticas, (f) el uso de la inteligencia artificial por profesores de matemáticas, (g) el desarrollo de la inclusión en las aulas de matemáticas, (h) la transversalidad de las matemáticas como conocimiento del profesor, (i) el análisis de libros de texto como competencia docente y, (j) la reflexión profesional para la formación y profesionalización docente. En este contexto, se busca que los investigadores también consideren estos temas como parte de sus respectivas líneas de investigación.

Asimismo, se plantea a largo plazo discutir algunos de los siguientes temas:

- La formación y el desarrollo profesional de profesores de matemáticas en el contexto de la Nueva Escuela Mexicana.
- El papel de la matemática y su didáctica en los nuevos programas formativos de profesores en general y de matemáticas en particular, en el marco de la Nueva Escuela Mexicana
- La formación y el desarrollo profesional de profesores de matemáticas con base en las propuestas de la Agenda 2030 de la OCDE.
- La formación del profesor como componente principal para lograr una enseñanza de calidad de las matemáticas.

Las reformas educativas actuales requieren centrarse en los docentes de matemáticas, por lo que resulta crucial que los programas de formación y desarrollo profesional estén estructurados de manera coherente e integrada, permitiendo a los profesores fusionar conocimientos de distintas disciplinas.

Estado actual del grupo en la SEIEM

El sistema educativo español está viviendo un momento de evolución en torno a la formación docente, en gran parte motivado por los cambios de los currículos en las etapas no universitarias en 2022. Desde diferentes estamentos se están promoviendo grupos de reflexión para modificar planes de estudio de formación de docentes en Educación Infantil, Primaria y Secundaria y, así, actualizar la normativa vigente. Desde 2022 se han abierto foros para proponer mejoras a documentos como las “24 propuestas de reforma para la mejora de la profesión docente”¹ y, más recientemente, desde el Ministerio de Educación, Formación Profesional y Deportes se trabaja en

¹ <https://bit.ly/49miKTh>

un marco de competencias profesionales docentes que, previsiblemente, será la base para la organización de la formación docente de los próximos años. La SEIEM no es ajena a esta transformación de la formación de las y los docentes y elabora réplicas y aportaciones² para que esta formación sea de la mayor calidad. Estas propuestas están vinculadas a la formación docente de la sociedad están vinculadas al trabajo de investigación sobre la formación del profesorado que se produce en el seno del grupo CDPP (p. ej., Llinares et al., 2023).

Además del posible impacto que pueda tener el grupo en la regulación normativa en la formación de docentes, se trata de un grupo avalado por la producción investigadora. Un reciente monográfico editado por Bosch, Gutiérrez y Llinares en *ZDM-Mathematics Education*³ expone la amplitud, la profundidad y el impacto de la reciente investigación en educación matemática realizada en España. Incluye artículos que abordan focos de investigación de interés y de repercusión internacional como la noción del conocimiento del docente de matemáticas, las prácticas de aula o el desarrollo de competencias profesionales (Lin & Rowland, 2016; Ponte, 2011; Schack et al., 2017).

La investigación en el grupo CDPP

Las temáticas de investigación del grupo abarcan el conocimiento del docente de matemáticas, las competencias profesionales, las prácticas docentes, los marcos teóricos, las creencias y un largo etcétera, que se han ido consolidando como focos de investigación en los últimos años a través de grupos, proyectos y redes de investigación. En todos los temas destaca una visión de la formación del profesorado característica de la investigación en educación matemática en España. Se trata de una perspectiva que sitúa las prácticas profesionales como foco de atención de los programas de formación docente y enfatiza el papel de los marcos teóricos en la toma de decisiones de las personas que investigan (Bosch et al., 2024).

Las personas y grupos de investigación vinculados al grupo CDPP son realmente fructíferos en publicaciones. Es difícil hacer una selección exhaustiva y equitativa que abarque todos los aspectos que se investigan en este grupo y, al hacerlo, debemos remitirnos a diferentes tipos de documentos: recopilaciones o revisiones, monográficos, tesis defendidas, actas de los simposios de la SEIEM, artículos publicados en revistas, etc.

Entre los documentos recopilatorios o revisiones recientes, destacamos el libro editado por Badillo et al. (2019) en el que se subraya el compromiso y el interés de las y los miembros del grupo por mejorar el conocimiento y el

² Las diversas respuestas y aportaciones se pueden encontrar en la web de SEIEM <https://www.seiem.es>

³ <https://link.springer.com/journal/11858/volumes-and-issues/56-6>

aprendizaje del profesorado y su desarrollo profesional. A lo largo de 19 capítulos, no solo aportan una panorámica de la investigación matemática hasta el año de publicación, sino que también proponen una organización de esta investigación en cuatro grandes temas:

- El análisis de prácticas de aula del profesorado.
- La caracterización del conocimiento docente, su conceptualización y su relación con la competencia docente.
- El aprendizaje del docente y el desarrollo de competencias docentes.
- El desarrollo profesional y el dominio afectivo.

Un segundo tipo de documentos a destacar son los monográficos surgidos de las investigaciones del grupo. Tanto por su impacto en la investigación en los temas del grupo, como por su uso como marco teórico para el análisis de las prácticas y la caracterización del conocimiento, subrayamos la influencia del modelo del “Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas” (MTSK, por sus siglas en inglés). La reciente publicación en forma monográfica (Carrillo et al., 2022) persiste en la idea original del modelo de desvelar el proceso de construcción del conocimiento del profesorado de matemáticas a través de la delimitación de dominios y subdominios de conocimiento descritos por sistemas detallados de categorías e indicadores, que incluyen aspectos socio-afectivos junto con las creencias y concepciones.

Destacamos, por otra parte, la celebración del trigésimo cumpleaños del “Enfoque Ontosemiótico en Educación Matemática” (EOS) con la publicación de Godino (2024), en la que se repasa la trayectoria del EOS como marco teórico y que se resalta su faceta como teoría para el desarrollo profesional del profesorado, proporcionando un modelo de conocimiento y competencias que considera facetas, componentes y subcomponentes de los procesos educativos que tienen que ver con la fundamentación, el diseño, la planificación y la evaluación, así como criterios de eficiencia de los programas de formación docente.

Por último, aunque un poco más antiguo, Rico et al. (2013) recopilaron investigaciones sobre “Análisis Didáctico”, un modelo de fundamentación curricular para formación de profesorado y la innovación curricular, que actualmente tiene menos presencia en las publicaciones del grupo CDDP, pero que estuvo presente desde sus inicios.

Las tesis publicadas en el seno del grupo reflejan la actualidad y productividad en la investigación sobre la formación y el conocimiento profesional del docente. Durante los últimos cinco años encontramos más de 20 tesis directamente relacionadas con nuestro grupo, donde destaca la preocupación por la caracterización del conocimiento docente. También se abordan otros temas como las prácticas de evaluación, el desarrollo de las competencias docentes, el desarrollo profesional, o las emociones. Los marcos teóricos son variados y, aunque predomina la utilización del modelo MTSK, también

son frecuentes el EOS y la Mirada Profesional o *Noticing* (Fernández et al., 2018). Con menos frecuencia se utilizan otros marcos como el Análisis Didáctico, la Teoría Antropológica de lo Didáctico o enfoques asociados a la Etnomatemática. El trabajo de los integrantes del grupo en Facultades de Educación, donde se forman docentes de Educación Infantil y Primaria, favorece el predominio de investigaciones con futuros docentes en estos niveles educativos, aunque también se han completado estudios con docentes en ejercicio y con docentes de Educación Secundaria, Bachillerato y niveles universitarios (Tabla 3).

Tabla 3
Síntesis de tesis y comunicaciones del grupo CDPP

		N. de tesis (2020-2024)	Comunicaciones SEIEM (2024)
Tema	Análisis de las prácticas	3	5
	Conocimiento docente	10	8*
	Competencia profesional	3	4
	Desarrollo profesional y dominio afectivo	4	1
Aspecto matemático	Sentido algebraico	2	2
	Sentido espacial	2	0
	Sentido estocástico	6	3
	Sentido de la medida	0	1
	Sentido numérico	2	2
	Otros	3	5
Enfoque teórico	EOS	4	2
	MTSK	8	8
	Mirada profesional	3	3
	Otro	5	7
Nivel educativo del docente	Infantil y primaria	15	11
	Secundaria	5	5
	Universidad	1	0

Nota. * Incluyen aquellas referidas al conocimiento de formador/a de docentes de matemáticas

Si hay publicaciones que son fieles testigos de la producción del grupo, estas son las actas de los simposios de la SEIEM, que sirven de termómetro del estado de producción de las personas que lo conforman, de sus intereses investigadores y de la proyección que sus propuestas tienen. Las actas registran y proyectan anualmente los trabajos relacionados con el conocimiento profesional y desarrollo del profesorado de matemáticas en todos los

niveles educativos. Durante el simposio del año 2024 (Adamuz-Povedano et al., 2024), se presentaron 20 comunicaciones asociadas al grupo CDPP (37 % del total de las comunicaciones).

Como se puede ver en la tabla 3, los temas, aspectos matemáticos, enfoques teóricos y niveles educativos que se abordaron en el último simposio, celebrado en Córdoba, son muy similares a los descritos para las tesis en campo temático, aspectos matemáticos, enfoques teóricos y niveles educativos. Sin embargo, se aprecian variaciones sutiles que podrían servir para identificar nuevas tendencias en la investigación del grupo. Así, como ejemplo de estas novedades, destacamos las investigaciones sobre la caracterización del conocimiento docente incluyendo varias que abordan la caracterización del conocimiento del formador del docente de matemáticas (p. ej., Pérez-Montilla et al., 2024) o la caracterización del perfil del docente de matemáticas (Garrido-Rojas et al., 2024). Asimismo, destaca la aparición de estudios de naturaleza cuantitativa (p. ej., Giadas, Muñiz-Rodríguez et al., 2024) o la consideración de aspectos didácticos de especial actualidad como las situaciones de aprendizaje (p. ej., Moreno et al., 2024).

Estas tendencias que hemos comentado también se observan en las publicaciones en revistas periódicas. En 2024, destaca el número de aportaciones (40 % del total) realizadas por las y los miembros del grupo CDPP y con temática cercana a los temas de investigación del grupo en el monográfico de la revista *ZDM-Mathematics Education*, dedicado a la investigación en educación matemática. Estos estudios incluyen: 1) el análisis de las prácticas profesionales (Alsina et al., 2024; Lupiáñez et al., 2024); 2) la caracterización del conocimiento docente (Álvarez-Arroyo et al., 2024; Climent et al., 2024); 3) el desarrollo de competencias docentes (Fernández et al., 2024; Planas et al., 2024); y 4) aspectos de desarrollo profesional (Barquero & Ferrando, 2024; Font et al., 2024; García et al., 2024) y el dominio afectivo (Gómez-Chacón & Marbán, 2024).

También en 2024, la revista PNA⁴ publicó un número monográfico dedicado a los formadores de docentes de matemáticas. En este número se aprecia cómo el modelo MTSK, en solitario o en combinación con la Mirada profesional, está siendo utilizado para caracterizar prácticas (Pinto et al., 2024), perfiles (Giadas et al., 2024), el conocimiento (Reyes-Bravo et al., 2024) y el desarrollo profesional del formador (Sosa, 2024).

Transferencia de la investigación

Por último, no podemos concluir esta visión del grupo CDPP de la SEIEM sin subrayar la relevancia de la transferencia de los resultados de su investigación. Un ejemplo destacado de esta transferencia lo constituye la edición

⁴ <https://revistaseug.ugr.es/index.php/pna/index>

de manuales dirigidos a la formación del profesorado en las distintas etapas educativas, elaborados por miembros de la SEIEM a partir de una reflexión profunda y fundamentada en la investigación. Estos manuales se han convertido en referentes tanto para quienes se dedican a la formación inicial del profesorado como para docentes en ejercicio comprometidos con su desarrollo profesional. Entre otros, por su amplia difusión e implementación, cabe mencionar algunos genéricos (Duval et al., 2004) y otros dirigidos a etapas educativas específicas, como los destinados a Educación Infantil (Arteaga & Macías, 2016; Castro & Castro, 2016; Chamorro, 2005; Fernández, 2004; Muñoz-Catalán & Carrillo, 2018), Educación Primaria (Castro, 2001; Chamorro, 2003; Carrillo et al., 2016; Flores & Rico, 2015; Godino et al., 2004a, 2004b; Segovia & Rico, 2011) y Educación Secundaria (Arce et al., 2019; Rico, 1997; Rico & Moreno, 2016).

Líneas futuras del grupo en la SEIEM

La revisión de investigaciones realizada nos permite prever un futuro en el que se sigan trabajando los temas consolidados, esto es, las prácticas profesionales, el conocimiento docente, el desarrollo de las competencias y el desarrollo profesional, sin olvidar los aspectos actitudinales de los docentes. Aquí el reto será seguir profundizando en la sinergia entre las prácticas profesionales docentes y conocimiento profesional y en las posibles coordinaciones que se puedan establecer entre diferentes marcos teóricos para obtener descripciones más precisas y ricas.

Además, hemos detectado dos temas emergentes. Uno casi establecido, como es el del formador/a de docentes de matemáticas: las ya mencionadas publicaciones en las últimas actas de la SEIEM, los monográficos de la revista PNA, de *Journal of Mathematics Teacher Education* en 2018 o *ZDM–Mathematics Education* (en 2014) y libros como *International Handbook of Mathematics Teacher Education* (2020) ponen de manifiesto que es importante poner el foco de atención en las personas que forman al profesorado de matemáticas y determinar las diferencias y semejanzas entre formadores y docentes (Goss & Beswick, 2021). Por otra parte, la determinación de perfiles de profesorado (o de formadores de profesorado), ha surgido como un tema emergente que permite abordar las diversas formas en que el profesorado combina creencias, actitudes y prácticas, lo que influye directamente en la calidad de la enseñanza (Holzberger et al., 2019).

Existen otros focos, marcos o modelos que, aunque no se han mencionado, han estado presentes en las reuniones del grupo y son importantes para entender el desarrollo. Así, mencionamos, entre otros, que se está comenzando a prestar atención a cuestiones como la relación con las agendas internacionales y el desarrollo sostenible (p. ej., Alsina, 2023), la incorporación de la perspectiva de las comunidades de práctica a la investigación en el

desarrollo profesional o la utilización de marcos teóricos clásicos, como la Teoría Antropológica de lo Didáctico que actualmente no se reflejan en las actas pero que han tenido y, casi con toda seguridad, tendrán relevancia en el grupo. En el ámbito aplicado, la determinación de competencias docentes, en constante evolución, y la creación de programas formativos de profesorado sigue siendo un tema candente en la política educativa.

No debemos olvidar que la investigación tiene mucho que aportar a la formación de profesorado: “Las propuestas de entornos de aprendizaje, ciclos formativos y propuestas de tipologías de tareas en los programas de formación, nos permiten asumir que se están proporcionando los mimbres para poder urdir propuestas de programas de formación docente (inicial y continua) tanto para maestros como para profesores de Educación Secundaria que pueden permitir formar a los docentes que nuestra sociedad necesita en estos momentos” (Llinares et al., 2023, p. 525).

Conclusiones

A lo largo de este capítulo queda de manifiesto que los trabajos desarrollados en cada grupo responden a realidades diferentes en cuanto a la investigación desarrollada, los sistemas educativos y los escenarios formativos para los docentes. Así, por ejemplo, en México no hay investigación suficiente sobre la formación inicial y continua de los docentes, una de las razones es la variedad de contextos formativos (Ávila, 2016; Ávila et al., 2013). Además, dichos contextos formativos están influenciados por políticas y reformas educativas específicas que no siempre están alineadas con los resultados de las investigaciones, pero que sí afectan el desarrollo de los conocimientos matemáticos y didácticos de los docentes debido a las características organizativas y académicas de las instituciones donde se imparte esta formación (Camarena, 2015). Por su parte, en España, aunque existen diversas administraciones regionales con responsabilidades educativas, hay una normativa general sobre la educación obligatoria y sobre la formación de docentes, lo que proporciona unas bases curriculares comunes y consistentes para apoyar la investigación.

En México, la formación inicial de profesorado de Educación Básica (preescolar, primaria y secundaria) no se lleva a cabo en facultades de educación sino en escuelas normales que, aunque son consideradas instituciones de educación superior, no tienen un reconocimiento como instituciones que cultivan la investigación en educación matemática. Esta situación es muy diferente en España, ya que desde 1984 la Didáctica de la Matemática se reconoce como área de conocimiento de estudios universitarios (Ministerio de Educación y Ciencia, 1984) y desde 1991 los estudios universitarios conducentes al título de maestro/a se regulan a nivel nacional (Ministerio de Educación y Ciencia, 1991).

México cuenta con una formación inicial para profesores de Educación Preescolar o Infantil, Educación Primaria y Educación Secundaria (3 a 6 años, de 6 a 12 años y de 12 a 15 años, respectivamente), pero como se ha mencionado antes, no se desarrollan en Instituciones de Educación Superior, sino en Escuelas Normales. La Educación Media Superior (15 a 18 años) es atendida principalmente por ingenieros y el estudio de un posgrado orientado a la enseñanza de las matemáticas no es un requisito para ejercer la docencia en ese nivel educativo. De esta manera, los alcances y las limitaciones de la investigación están fuertemente influenciados por el contexto. Sin embargo, en España, desde el curso 2009-2010, para ejercer como docente de matemáticas en las etapas de Educación Secundaria Obligatoria (12 a 16 años) y Bachillerato (16 a 18 años) es necesario contar con una titulación universitaria con una sólida formación matemática y haber cursado el Máster Universitario en Formación del Profesorado. Este posgrado profesionalizante aborda tanto los complementos disciplinares necesarios para la enseñanza de las matemáticas en estas etapas como el desarrollo de competencias profesionales docentes, sustentadas en un conocimiento didáctico del contenido matemático.

Las diferencias en los contextos sociopolíticos de ambas sociedades tienen un reflejo evidente en el funcionamiento de los grupos. Mientras que el grupo CDPP está consolidado y mantiene unas dinámicas estables de funcionamiento, el grupo FDPE espera a corto plazo una mayor colaboración entre sus integrantes que permita el desarrollo de investigaciones más articuladas y con una incidencia social, así como mantener la presencia continua en el congreso de la SOMIDEM.

Otra diferencia evidente la refleja la cantidad de publicaciones que se desarrollan en cada grupo y la implicación que ha tenido la investigación en sus respectivos contextos. Por un lado, el grupo FDPE es relativamente joven, busca la consolidación como grupo y una mayor incidencia de sus investigaciones en las aulas de matemáticas, mientras que el grupo CDPP tiene una trayectoria ya consolidada.

También se manifiestan estas diferencias sociopolíticas en los trabajos de investigación sobre el conocimiento y desarrollo profesional docente que se realizan en cada país. Así, la mayoría de las investigaciones del grupo CDPP ponen su atención en docentes de primaria, mientras que en el grupo FDPE la mayor presencia está en el nivel secundaria y bachillerato. En el caso de este último grupo, hay poca presencia de investigaciones en la formación inicial de docentes, en comparación con el grupo CDPP, debido a la configuración del sistema de formación de docentes y a la organización de las instituciones donde se forman estos sujetos.

A pesar de estas diferencias, también hemos detectado similitudes en las investigaciones realizadas en España y México. En los trabajos desarrollados

en ambos grupos encontramos elementos comunes como son los enfoques teóricos y los marcos interpretativos con los que se estudia la formación del profesorado. En ese sentido, en las investigaciones de ambos grupos están presentes modelos como el MTSK, el EOS o la Mirada profesional.

Otras semejanzas entre los grupos se observan en los temas prioritarios que se comparten: la preocupación por el conocimiento del docente de matemáticas, la prácticas y experiencias profesionales, la formación inicial y continua o el deseo de influir en las políticas educativas son algunos de los puntos de encuentro que los grupos, a través de las sociedades en las que se circunscriben, pueden y deben aprovechar para desarrollar proyectos de colaboración futura.

Por último, destacamos la aparición de temas transversales que, por su relevancia o por su actualidad, podrían ser de especial interés para los grupos FDPE y CDPP. Así, por ejemplo, la inclusión, la IA, o el enfoque STEAM integrado o transdisciplinar, son temas no específicos de la formación docente pero que se deben tener en cuenta en nuestras investigaciones para no perder la especificidad y el alcance de nuestra didáctica. Se trata de cuestiones que emergen desde los currículos con la intención de dar respuesta al mundo en el que vivimos.

Referencias

- Adamuz-Povedano, N., Fernández-Ahumada, E., Climent, N., & Jiménez-Gestal, C. (Eds.) (2024). *XXVII Investigación en Educación Matemática*. SEIEM.
- Adler, J., Ball, D., Krainer, K., Lin, F. L., & Novotna, J. (2005). Reflections on an emerging field: Researching mathematics teacher education. *Educational Studies in Mathematics*, 60(3), 359–381. <https://doi.org/bq5ftd>
- Aguilar, M. S., González, M. D. S. G., & Castañeda, A. (2024). *Perspectivas actuales de la Educación Matemática*. SOMIDEM. <https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S3/2024/01>
- Aké, L. P., & Larios, V. (2021). Competencia algebraica de futuros profesores de matemáticas. *Educação Matemática Pesquisa*, 22(1), 512–531. <http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2020v22i1p512-531>
- Aké, L. P., & López-Mojica, J. M. (2020). Naturaleza de las tareas profesionales en la formación de profesores de matemáticas. *Páginas de Educación*, 13(1), 58–81. <https://doi.org/10.22235/pe.v13i1.1919>
- Aké, L. P. (2016). Matemática Educativa y Educación Especial: realidades y desafíos en la formación de profesores. En M. López-Mojica, & J. Cuevas (Coords.), *Educación Especial y Matemática Educativa. Una aproximación desde la formación docente y procesos de enseñanza* (pp. 15–32). CENEJUS.

- Alsina, Á., Pincheira, N., & Delgado-Rebolledo, R. (2024). The professional practice of designing tasks: how do pre-service early childhood teachers promote mathematical processes in early algebra? *ZDM–Mathematics Education*, 56(6), 1197–1210. <https://doi.org/10.1007/s11858-024-01636-1>
- Álvarez-Arroyo, R., Batanero, C., & Gea, M. (2024). Probabilistic literacy and reasoning of prospective secondary school teachers when interpreting media news. *ZDM–Mathematics Education*, 56(6), 1045–1058. <https://doi.org/10.1007/s11858-024-01586-8>
- Arce, M., Conejo, L., & Muñoz-Escolano, J. M. (2019). *Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas*. Síntesis.
- Arteaga, B., & Macías, J. (2016). *Didáctica de las matemáticas en Educación Infantil: aprender para enseñar*. UNIR Editorial.
- Ávila, A., Carrasco, A., Gómez, A., Guerra, M., López, G., & Ramírez, J. (2013). *Una década de investigación educativa en conocimientos disciplinares en México: matemáticas, ciencias naturales, lenguaje y lenguas extranjeras: 2002–2011*. Consejo Mexicano de Investigación Educativa
- Ávila, A. (2016). La investigación en educación matemática en México: una mirada a 40 años de trabajo. *Educación Matemática*, 28(3), 31–59. <https://doi.org/10.24844/EM2803.02>
- Ávila, A. (2019). Significados, representaciones y lenguaje: las fracciones en tres generaciones de libros de texto para primaria. *Educación Matemática*, 31(2), 22–60. <https://doi.org/10.24844/EM3102.02>
- Badillo, E., Climent, N., Fernández, C., & González, M.T. (Eds.) (2019). *Investigación sobre el profesor de Matemáticas: Prácticas de aula, conocimiento, competencia y desarrollo profesional*. Ediciones universidad de Salamanca.
- Barquero, B., & Ferrando, I. (2024). Teacher education for mathematical modelling: exploring the experiences of secondary school teachers in two courses. *ZDM–Mathematics Education*, 56(6), 1109–1122. <https://doi.org/qjw9>
- Bosch, M., Gutiérrez, A., & Llinares, S. (2024). A survey of Spanish research in mathematics education. *ZDM–Mathematics Education*, 56(6), 1029–1044. <https://doi.org/10.1007/s11858-024-01638-z>
- Borki, H., & Potari, D. (Eds.). (2024). *Teachers of Mathematics Working and Learning in Collaborative Groups The 25th ICMI Study*. Springer.
- Camarena, P. (2015). Educación matemática en México: investigación y práctica docente. En X. Martínez, & P. Camarena (Eds.), *Educación Matemática en el Siglo XXI* (pp. 191–216). Instituto Politécnico Nacional.
- Carrillo, J., Contreras, L. C., Climent, N., Montes, M. A., Escudero-Ávila, D. I., & Flores-Medrano, E. (Coords.). (2016). *Didáctica de las Matemáticas para maestros de Educación Primaria*. Paraninfo.
- Carrillo, J., Montes, M., & Climent, N. (Coords.). (2022). *Investigación sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK)*. Dykinson.

- Castro, E. (Coord.). (2001). *Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria*. Síntesis
- Castro, E., & Castro, E. (Coords.). (2016). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Infantil*. Ediciones Pirámide.
- Chamorro, M. C. (Coord.). (2003). *Didáctica de la Matemática para Primaria*. Pearson-Prentice Hall.
- Chamorro, M. C. (coord.) (2005). *Didáctica de las matemáticas para Educación Infantil*. Pearson Educación.
- Climint, N., Contreras, L. C., Montes, M., & Ribeiro, M. (2024). The MTSK model as a tool for designing tasks for teacher education. *ZDM–Mathematics Education*, 56(6), 1123–1135. <https://doi.org/10.1007/s11858-024-01605-8>
- Dolores, C., García, M., Hernández, J., & Sosa, L. (2013). *Matemática Educativa: la formación de profesores*. Díaz de Santos Ediciones.
- Duval, R., Vergnaud, G., Vecino Rubio, F., Vérin, A., Schneeberger, P., Belmonte, J. M., Garbayo, M. M., Fernández, E., & Chamorro, M. C. (2004). *Los lenguajes de las ciencias*. Instituto Superior de Formación del Profesorado.
- Fan, L., Zhu, Y., & Miao, Z. (2013). Textbook research in mathematics education: development status and directions. *ZDM Mathematics Education*, 45(5), 633–646. <https://doi.org/10.1007/s11858-013-0539-x>
- Fernández, C. (2004). *Pensamiento numérico y su didáctica (3-6 años)*. Dykinson.
- Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G., Valls, J., & Callejo, M. L. (2018). Noticing students' mathematical thinking: Characterization, development and contexts. *Avances De Investigación en Educación Matemática*, 13, 39–61. <https://doi.org/10.35763/aiem.v0i13.229>
- Fernández, C., Moreno, M., & Sánchez-Matamoros, G. (2024). Prospective secondary teachers' noticing of students' thinking about the limit concept: pathways of development. *ZDM–Mathematics Education*, 56(6), 1137–1151. <https://doi.org/10.1007/s11858-024-01573-z>
- Flores, P., & Rico, L. (Coords.). (2015). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria*. Ediciones Pirámide.
- Font, V., Breda, A., Sala-Sebastià, G., & Pino-Fan, L. R. (2024). Future teachers' reflections on mathematical errors made in their teaching practice. *ZDM–Mathematics Education*, 56(6), 1169–1181. <https://doi.org/qjxd>
- García, F. J., Lendínez, E. M., Lerma, A. M., & Abril, A. M. (2024). Mechanisms and evidence of prospective teachers' learning through enquiry-oriented practices: the case of a lesson study intervention. *ZDM–Mathematics Education*, 56(6), 1183–1196. <https://doi.org/10.1007/s11858-024-01620-9>

- Garrido-Rojas, J., Moreno, A., & Ruiz-Hidalgo, J.F. (2024). Tendencias en Educación Matemática: explorando la relación entre el perfil del profesorado y la percepción de la formación en Enseñanza Secundaria. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent, & C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 273–280). SEIEM.
- Giadas, P., Muñiz-Rodríguez, L., Pascual, M. I., Contreras, L. C., & Rodríguez-Muñiz, L. J. (2024). ¿Cómo enfocan el aprendizaje de las matemáticas los formadores de profesores? El papel del perfil y de la formación continua. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent, & C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 289–296). SEIEM.
- Giadas, P., Pascual, M. I., Muñiz-Rodríguez, L., Rodríguez-Muñiz, L. J., & Contreras, L. C. (2024). Perfiles de formadores de profesorado de matemáticas en el contexto universitario español. *PNA*, 18(5), 439–466. <https://doi.org/qjxf>
- Godino, J. D. (2024). *Ontosemiotic Approach in Mathematics Education*. <https://digibug.ugr.es/handle/10481/93738>
- Godino, J. D., Batanero, C., Cid, E., Font, V., Ruiz, F., & Roa, R. (2004). *Matemáticas para maestros*. Universidad de Granada. <https://digibug.ugr.es/handle/10481/95571>
- Godino, J. D., Batanero, C., Cid, E., Font, V., Ruiz, F., & Roa, R. (2004). *Didáctica de la matemática para maestros*. Universidad de Granada. <https://digibug.ugr.es/handle/10481/95586>
- Gómez-Chacón, I. M., & Marbán, J. M. (2024). Epistemic emotions and pre-service mathematics teachers' knowledge for teaching. *ZDM—Mathematics Education*, 56(6), 1223–1237. <https://doi.org/10.1007/s11858-024-01624-5>
- Goos, M., & Beswick, K. (Eds.). (2021). *The Learning and Development of Mathematics Teacher Educators International Perspectives and Challenges*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-62408-8>
- Grau, V., Calcagni, E., Preiss, D., & Ortiz, D. (2017). Teacher's professional development through university-school partnerships: Theoretical standpoints and evidence from two pilot studies in Chile. *Cambridge Journal of Education*, 47(1), 19–36. <https://doi.org/10.1080/0305764X.2015.1102867>
- Howells, K. (2018). *The future of education and skills: education 2030: the future we want*. OECD. <https://bit.ly/3N6dEmj>
- Holzberger, D., Praetorius, A. K., Seidel, T., & Kunter, M. (2019). Identifying effective teachers: The relation between teaching profiles and students' development in achievement and enjoyment. *European Journal of Psychology of Education*, 34(4), 801–823. <https://doi.org/10.1007/s10212-018-00410-8>
- Jaworski, B., & Wood, T. (Eds.). (2008). *International handbook of mathematics teacher education: Vol. 4. The mathematics teacher educator as a developing professional*. Sense Publishers.

- Lin, F.-L., & Rowland, T. (2016). Pre-service and in-service mathematics teachers' knowledge and professional development. En A. Gutierrez, G. C. Leder, & P. Boero (eds.), *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 483–520). Sense Publishers.
- Llinares, S. (coord.), Breda, A. Climent, N. Fernández, C., Font, V., Lupiáñez, J. L. Moreno, M., Perez-Tyteca, P., Ruiz-Hidalgo, J. F., & Sánchez, A. (2023). Formación y desarrollo profesional de profesorado de matemáticas. En L. J. Blanco, N. Climent, M. T. González, A. Moreno, G. Sánchez-Matamoros, C. de Castro, & C. Jiménez (Eds.), *Aportaciones al desarrollo del currículo desde la investigación en educación matemática* (pp. 481–530). Editorial Universidad de Granada - Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM).
- Llinares, S., & Chapman, O. (2020). *International Handbook of Mathematics Teacher Education: Volumen 2*. Brill.
- Lloyd, G. M., & Chapman, O. (2020). *International Handbook of Mathematics Teacher Education: Volumen 3*. Brill.
- López, M., Hernández, J., Aké, L., & Ordáz, G. (2020). Formación inicial docente en México: hacia una caracterización del conocimiento matemático inclusivo. *Ecomatemático*, 11(2), 6–18. <https://doi.org/10.22463/17948231.3013>
- Lupiáñez, J. L., Olivares, D., & Segovia, I. (2024). Examining the role played by resources, goals and orientations in primary teachers' decision-making for problem-solving lesson plans. *ZDM—Mathematics Education*, 56(6), 1153–1167. <https://doi.org/10.1007/s11858-024-01614-7>
- Ministerio de Educación y Ciencia. (1984). Real Decreto 1888/1984, de 26 de septiembre, por el que le regulan los concursos para la provisión de plazas de los cuerpos docentes universitarios. [BOE, n. 257], 26 de octubre.
- Ministerio de Educación y Ciencia. (1991). Real Decreto 1440/1991, de 30 de agosto, por el que se establece el título universitario oficial de Maestro, en sus diversas especialidades y las directrices propias de los planes de estudios conducentes a su obtención. [BOE n. 244], 11 de octubre (p. 33003–33018).
- Moreno, M., Santonja, P., & Llinares, S. (2024). Mirada profesional de los estudiantes para profesor de educación secundaria sobre situaciones de enseñanza de matemáticas. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent, & C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 353–360). SEIEM.
- Muñoz-Catalán, C., & Carrillo, J. (Eds.). (2018). *Didáctica de la matemática para maestros de Educación Infantil*. Paraninfo.
- Pérez-Montilla, A., Cardeñoso, J. M., & Climent, N. (2024). Caracterizando el conocimiento didáctico del formador de docentes de matemáticas. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent, & C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 433–440). SEIEM.

- Pinto, E., Piñeiro, J. L., Cortés, C., & Martínez-Videla, M. V. (2024). ¿Cómo atienden, interpretan y deciden futuras maestras al interactuar con el pensamiento algebraico de niñas? El caso de las igualdades numéricas. *PNA*, 18(5), 495–521. <https://doi.org/10.30827/pna.v18i5.29823>
- Planas, N., Alfonso, J. M., Arnal-Bailera, A., & Martín-Molina, V. (2024). Mathematical naming and explaining in teaching talk: Noticing work with two groups of mathematics teachers. *ZDM—Mathematics Education*, 56(6), 1211–1222. <https://doi.org/10.1007/s11858-024-01576-w>
- Pochulu, M. (2024). Diseño y reformulación de tareas matemáticas con inteligencia artificial generativa. En S. Valbuena, & J. Berrio (Eds.), *Séptimo Encuentro Internacional en Educación Matemática* (pp. 30–32). Ediciones Universidad del Atlántico.
- Ponte, J. P. (2011). Teachers' knowledge, practice, and identity: essential aspects of teachers' learning. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 14(6), 413–417.
- Potari, D., & Chapman, O. (2020). *International Handbook of Mathematics Teacher Education: Volumen 1*. Brill.
- Reyes-Bravo, M., Pascual, M. I., Contreras, L. C., & Estrella, S. (2024). Doble mirada del formador de profesorado de matemáticas: oportunidad para identificar su conocimiento. *PNA*, 18(5), 467–493. <https://doi.org/qjxg>
- Rico, L. (Coord.). (1997). *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. Horsori.
- Rico, L., & Moreno, M. (Eds.). (2016). *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria*. Ediciones Pirámide.
- Sánchez Aguilar, M., García González, M. S., & Castañeda, A. (Eds.) (2024). *Perspectivas actuales de la Educación Matemática*. Editorial SOMIDEM. <https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S3/2024/01>
- Schack, E. O., Fisher, M. H., & Wilhelm, J. A. (2017). *Teacher noticing: Bridging and broadening perspectives, contexts, and frameworks*. Springer.
- Secretaría de Educación Pública (2024). *Programa de Estudio para la Educación Secundaria: Programas de estudio*. SEP
- Scheiner, T., Montes, M. A., Godino, J. D., Carrillo J., & Pino-Fan, L. (2019). What makes mathematics teacher knowledge specialized? Offering alternative views. *International Journal of Science and Mathematics Education* 17, 153–172. <https://doi.org/10.1007/s10763-017-9859-6>
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4–14.
- Segovia, I., & Rico, L. (Coords.). (2011). *Matemáticas para maestros de Educación Primaria*. Ediciones Pirámide.
- Sosa, L. (2024). El modelo MTSK como soporte de crecimiento profesional del formador. *PNA*, 18(5), 523–549. <https://doi.org/10.30827/pna.v18i5.29828>

- Strutchens, M., Huang, R., Losano, L., Potari, D., Cyrino, M., Da Ponte, J. P., & Zbiek, R. M. (2017). *The mathematics education of prospective secondary teachers around the world*. Springer. <https://doi.org/qjxh>
- Wu, H. (2018). The Content Knowledge Mathematics Teachers Need. En Li, Y., Lewis, W., & Madden, J. (Eds.), *Mathematics Matters in Education. Advances in STEM Education*. Springer. <https://doi.org/qjxj>

La investigación sobre afectos en educación matemática como reto compartido

Research on affects in Mathematics Education as a shared challenge

José María Marbán ¹ 

María S. García-González ² 

Resumen

La relevancia del dominio afectivo en todo aquello que concierne a la enseñanza y al aprendizaje de las matemáticas lleva más de medio siglo recibiendo atención por parte de la comunidad científica internacional en el ámbito de la Educación Matemática. En este sentido, no han permanecido ajenas sociedades como la SEIEM y la SOMIDEM, las cuales no solo han reconocido la importancia de esta línea de trabajo e investigación, sino que también han prestado espacios y apoyos para su desarrollo. En este capítulo se describe brevemente la situación actual en ambas sociedades de la investigación en el ámbito del dominio afectivo desde la perspectiva de su integración explícita en grupos de trabajo, describiendo las principales aportaciones, teorías y líneas de investigación abiertas de estos, proyectando algunas de las líneas futuras hacia las que están dirigiendo sus esfuerzos y, sobre todo, identificando oportunidades para el trabajo conjunto.

¹ josemaria.marban@uva.es

Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM

² msgarcia@uagro.mx

Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática, SOMIDEM

Marbán, J. M., & García-González, M.S. (2025). La investigación sobre afectos en educación matemática como reto compartido. En E. Flores-Medrano, M. Molina, I. Sandoval, & I. Polo-Blanco (Eds.), *Educación Matemática en México y España: Investigaciones y líneas de trabajo compartidas* (pp. 397–425). Editorial SOMIDEM - SEIEM. <https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S2/2025/03-15>

Palabras clave

Dominio afectivo, Educación Matemática, matemáticas.

Abstract

The relevance of the affective domain in everything that concerns the teaching and learning of mathematics has been receiving attention from the international scientific community in the field of Mathematics Education for more than half a century. In this sense, societies such as the SEIEM and SOMIDEM have not been unaware of the importance of this line of work and research but have also provided space and support for its development. This chapter briefly describes the current situation in both societies of research in the affective domain from the perspective of their explicit integration in working groups, describing their main contributions, theories and open lines of research, showing some of the future lines towards which they are directing their efforts and, above all, identifying opportunities for joint work.

Keywords

Affective domain, Mathematics Education, mathematics.

Introducción

La educación es un valor social, es patrimonio de la humanidad, es una de las herramientas más eficientes para el progreso humano y, sobre todo, es un derecho universal. La educación matemática, como elemento nuclear de la acción educativa, comparte todas estas características y debe, por tanto, no solo ser protegida, reconocida y apoyada sino también presentarse como accesible para contribuir al desarrollo de sociedades matemáticamente competentes. Esto solo es posible si su mirada es capaz de captar y sentir la diversidad que caracteriza el mundo a cuyo desarrollo pretende contribuir y, especialmente, la diversidad presente en las aulas o, con carácter más general, en cualquier contexto en el que se lleven a cabo procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Esta diversidad, además, lejos de ser una amenaza, es una oportunidad para el enriquecimiento mutuo, pero, al mismo tiempo, un reto permanentemente abierto en la búsqueda de entornos realmente inclusivos al que se suma la necesidad de otorgar valor a la educación matemática como forma de empoderar a personas, comunidades y naciones en las sociedades modernas, muchas de ellas altamente tecnologizadas, para evitar procesos de exclusión. Las respuestas a estos desafíos pueden y deben venir apoyadas por procesos rigurosos de investigación en el ámbito de la Educación Matemática, sin menoscabo de su desarrollo desde perspectivas tanto multidisciplinares como interdisciplinares.

Teniendo todo esto presente, nace en la SEIEM el grupo de trabajo IDIEM (Investigación en Diversidad e Inclusión en Educación Matemática), y lo hace con la idea de aportar evidencias desde la investigación que permitan avanzar hacia una educación matemática inclusiva que se preocupe por atender a la diversidad en todas sus formas. Así, el nuevo grupo se interesa,

en particular, por la diversidad funcional, cognitiva, cultural, lingüística, afectiva, conductual y neurológica, así como por todas aquellas formas de diversidad ante las que la investigación en Educación Matemática pueda aportar resultados que contribuyan a su adecuada consideración y protección. Como se ve, no es un grupo especializado solo en el ámbito del dominio afectivo, pero sí incorpora entre sus líneas de trabajo de forma específica la que se ocupa del sentido socioafectivo y la diversidad en Educación Matemática, sobre la que centraremos nuestra atención dada la temática de este capítulo.

En cuanto a SOMIDEM, se trata de una propuesta creada en 2023 en la que 18 Grupos de Trabajo Temático (GTT) se reúnen cada dos años con el objetivo de difundir la investigación que se realiza en la comunidad de educadores matemáticos, tanto asociados como externos. Dentro de estos grupos, el número 8 está dedicado al afecto en el estudio de las matemáticas (GTT8). La primera versión de este grupo contó con el liderazgo de 4 asociados, Cristian Nava Guzmán, Yesenia Esmeralda Basaldú Gutiérrez, Angelina González Peralta, y María del Socorro García González; en su segunda versión de 2025, Angelina ya no forma parte del equipo.

Desde sus inicios el GTT8 se pensó como un foro para la difusión y discusión de estudios teóricos y empíricos con la finalidad de conocer y comprender los factores que desencadenan el afecto en el estudio de las matemáticas, entendido desde la conceptualización de McLeod (1989). La pregunta de discusión del grupo, y que aún sigue vigente es: ¿cómo podemos aplicar el conocimiento acumulado por la investigación sobre el afecto en la práctica en el aula de matemáticas? Para responderla se convocó a la recepción de investigaciones desarrolladas, o en desarrollo, se esperaba la participación de estudiantes de posgrado, quienes suelen recurrir a este tipo de foros. Sin embargo, solo llegó una propuesta, y el resto, cuatro más, fueron investigaciones concluidas por los líderes de grupo. Ante este panorama, se hizo mayor difusión para la segunda versión del congreso SOMIDEM en 2025, y como resultado se obtuvieron cinco propuestas, cuatro de México y una de Costa Rica.

Tras esta breve presentación de los grupos de trabajo de ambas sociedades que se ocupan, parcialmente, en el primer caso, o en su totalidad, en el segundo, de la investigación relacionada con el dominio afectivo en matemáticas, se procede a continuación a mostrar de forma sintética el estado actual de ambos grupos, así como las líneas futuras o retos percibidos desde cada uno de ellos pero que se desea afrontar conjuntamente. Esto nos permite, entre otras cosas, identificar preocupaciones comunes, marcos teóricos de referencia y, sobre todo, potenciales líneas de colaboración. Es esto último, sin duda, el propósito principal de este capítulo, motivo por el que el apartado de conclusiones con el que se cierra quiere servir como una

declaración de intenciones para el inicio de un trabajo conjunto entre ambas sociedades en relación con los afectos en matemáticas, algo que no solo enriquecería a ambos grupos sino que también permitiría disponer de más y mejores recursos, sobre todo humanos, para enfrentar los retos que en el ámbito del dominio afectivo en matemáticas se abren ante nuestros ojos y nuestra mirada como investigadoras e investigadores.

Estado actual de los grupos

El grupo IDIEM

El grupo IDIEM nace en septiembre de 2024 tras ser aprobada formalmente su creación en la Asamblea Ordinaria de la SEIEM celebrada en el marco de su XXVII Simposio, el cual tuvo lugar en la ciudad de Córdoba. El nacimiento en sí fue fruto de un sentimiento compartido de su oportunidad y necesidad en el seno de la sociedad, habiéndose gestado de forma altamente participativa, asamblearia y consensuada en cuanto a su finalidad y líneas de trabajo. Siguiendo esta filosofía, la definición del estado actual del grupo, cuya primera reunión intermedia de trabajo tuvo lugar en Madrid los días 21 y 22 de febrero de 2025, ha vuelto a surgir de la participación abierta de sus integrantes. De esta forma, lo que ahora se refleja es aquello que miembros del propio grupo han querido destacar o aportar, siendo conscientes de que el capítulo no será capaz de reflejar todo su potencial y trayectoria en relación con el dominio afectivo en matemáticas. En todo caso, se puede afirmar, sin ningún género de dudas, que, aunque no estén todos “los que son”, sí son “todos los que están”.

En este punto, antes de presentar el estado actual del grupo a partir de los trabajos de sus miembros sobre la temática del capítulo, consideramos relevante y justo destacar que la SEIEM ha mostrado siempre una elevada sensibilidad hacia las cuestiones vinculadas con los afectos en Educación Matemática, con socias y socios que han jugado y, en muchos casos, siguen jugando un papel destacado en los avances aportados tanto al conocimiento científico como a su transferencia en esta línea de investigación. Así, aportaciones, entre otras, como las de Inés Gómez-Chacón desde la Universidad Complutense de Madrid, Lorenzo Blanco y colaboradores en la Universidad de Extremadura o Santiago Hidalgo y su equipo de trabajo en la Universidad de Valladolid han sido referentes para quienes, tras ellos, nos hemos incorporado a este apasionante reto afectivo. Sirvan también como ejemplos de la atención prestada por la SEIEM al dominio afectivo en matemáticas la presencia de un seminario de investigación específico sobre este campo en el programa del XX Simposio de la SEIEM celebrado en Málaga (Marbán, 2016) o las referencias a las aportaciones recientes a la investigación de la SEIEM presentadas en uno de los seminarios de investigación del XXVII Simposio de la SEIEM (Bosch et al., 2024)

Comenzamos, ahora sí, a describir algunas de las aportaciones más destacadas que miembros del grupo IDIEM han realizado en el marco de la línea de investigación centrada en el dominio afectivo matemático, así como las líneas de trabajo en curso actualmente, todo ello señalando en algunos casos marcos teóricos de referencia y principios metodológicos a los que se recurre.

Encontramos, en primer lugar, los trabajos de Inés María Gómez-Chacón, cuya destacada trayectoria profesional ha dirigido su atención hacia el objetivo de afinar un marco teórico y metodológico para la investigación, sobre todo en las dimensiones de interacción entre cognición y afecto, tanto en aprendizaje como en enseñanza, lo que ha requerido el uso y contraste de distintas aproximaciones teóricas y la triangulación de datos desde diversas perspectivas teóricas y metodológicas. Así, desde que en 1997 publicase su estudio sobre afecto y cognición (Gómez-Chacón, 1997), su trabajo se ha interesado o preocupado especialmente por aspectos metodológicos que permitan establecer un modelo analítico. En este sentido, la principal pretensión no ha sido otra que la de comprender la interacción cognitivo-afectiva en la persona, para lo cual resulta necesario alcanzar un conocimiento de esa persona desde diferentes niveles: individual, grupal, social y holístico. Este conocimiento captaría aspectos que permitirían modelar la dinámica cognitivo-afectiva mediante constructos como las estructuras de afecto (local y global), la dimensión cognitiva (procesos de valoración y procesos matemáticos) y el meta-afecto.

A su vez, los trabajos de Inés Gómez-Chacón han dirigido su mirada a diferentes descriptores del dominio afectivo como las creencias personales y sociales (Mello-Román y Gómez-Chacón, 2022), las emociones, entre ellas las emociones epistémicas (Gómez-Chacón & Marbán, 2024), valores, afecto e identidad (Pompeu & Gómez-Chacón, 2019) y meta-afecto y aspectos metacognitivos en relación con el afecto (Gómez-Chacón, 2015). Destacadas son también sus aportaciones al estudio de la dimensión afectiva en la formación inicial y permanente del profesorado (Gómez-Chacón, 2018a; Gómez-Chacón & De La Fuente, 2019; Gómez-Chacón & Marbán, 2019).

En síntesis, sus trabajos han contribuido a comprender los vínculos, las interacciones y las relaciones entre los elementos que componen holísticamente la interacción cognición-afecto, identificando tipologías de estructuras cognitivas y afectivas. Al describir estas estructuras en sus estudios empíricos, ha podido encontrar caracterizaciones del afecto que dependen de la naturaleza del contexto (local-global) y del sistema dinámico de los procesos matemáticos implicados (estático-dinámico), así como del movimiento dinámico de la naturaleza del fenómeno a nivel individual o de grupo. Esto es de gran relevancia, pues algunos sistemas afectivos dinámicos pueden

tener propiedades que solo pueden estudiarse en el nivel de un grupo, por lo que es necesario observar los patrones de interacción que caracterizan los sistemas afectivos de individuos y colectivos (Gómez-Chacón, 2018b). Siendo más explícitos, y según lo expresado por la propia autora en Gómez-Chacón (2017 y 2018b), sus estudios han contribuido a la conceptualización de las estructuras de esta interacción, al establecimiento de un sistema de referencia afectivo-cognitivo dado por el conocimiento matemático específico, que incluye la distinción entre conocimiento matemático y procesos de valoración y, finalmente, a abordar la complejidad de la explicitación de los sistemas dinámicos implicados en esta interacción, desde la unicidad de los patrones individuales de razonamiento hasta la caracterización de la tendencia de un grupo. Hacemos notar finalmente que, respondiendo a esta necesidad de caracterizar tales interconexiones, los trabajos de Gómez-Chacón se han centrado en el conocimiento matemático específico. En particular, en diferentes publicaciones (Gómez-Chacón, 2018b; Gómez-Chacón et al., 2016; Gómez-Chacón & Marbán, 2024), se destacan algunos aspectos precisos de la dimensión epistemológica y ontológica que conlleva este análisis de la interacción cognición-afecto. Consideramos que el significado epistémico de las emociones debe estudiarse de acuerdo con las características específicas de la epistemología del conocimiento matemático y bajo un enfoque de interrelación dinámica, entendido como un sistema dinámico de afecto.

Como ejemplos más explícitos, se pueden tomar los estudios sobre procesos de visualización en matemáticas en relación con el pensamiento visual en la resolución de problemas de lugares geométricos con estudiantes universitarios del grado en matemáticas. Para lograr un establecimiento posible de patrones se analizaron para cada estudiante sus creencias expresadas y creencias en acción sobre el pensamiento visual y reacción emocional que se deriva, las coincidencias en tipologías de uso de visualización y emoción asociada y la valoración realizada sobre los sucesos que le causan emociones, con especial atención a procesos relacionados con la visualización y con el uso tecnológico. Estas categorías de niveles de valoración establecidas han sido útiles para un análisis global, mientras que el análisis micro de visualización matemática ha posibilitado una mirada local sobre cómo se producen las representaciones e imágenes. Este marco (Gómez-Chacón, 2018b) aplicado al estudio de la visualización matemática ha permitido caracterizar las dialécticas que se llevan a cabo al transitar (de modo no lineal) por la interacción cognición y afecto al resolver los problemas mediante la descripción de los patrones de uso de la visualización y la emoción asociada, así como de la meta-emoción y las creencias de los individuos. Así, se ha demostrado que los procesos cognitivos del razonamiento visual y la interacción de las emociones negativas ocurren en la identificación de estra-

tegias de representación interactiva y procesamiento de ciertas representaciones, donde el estudiante tiene que poner en juego la identificación de variaciones paramétricas en los problemas de lugares geométricos. Por otra parte, se ha hecho una distinción entre las imágenes por computadora y las imágenes de objetos matemáticos, y, a través de conceptos de deconstrucción instrumental y dimensional, se ha demostrado la existencia de mecanismos cognitivos separados para el procesamiento de objetos y relaciones entre objetos, donde están involucrados procesos de génesis figurativa e instrumental.

Resumimos ahora las aportaciones de otros dos miembros del nuevo grupo IDIEM, Verónica Quintanilla Batallanos y Jesús Gallardo Romero. Tal y como ambos destacan en sus propias palabras, en las últimas dos décadas han trabajado intensamente en el desarrollo de un modelo operativo e integrador sobre la comprensión en matemáticas, con el propósito principal de esclarecer en la práctica la complejidad de los procesos involucrados en su interpretación (*An Operative Model for Interpreting Understanding in Mathematics* [OMIUM]). Su configuración actual exhibe cuatro dimensiones relacionadas (Figura 1), que aportan un sistema específico de cuestiones, nociones y supuestos teórico-metodológicos sobre la comprensión y su interpretación en matemáticas.

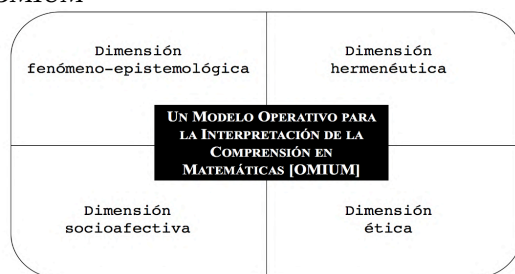
En la dimensión fenómeno-epistemológica, estos investigadores sugieren registrar e interpretar la actividad matemática en el aula tomando como referencia el análisis fenómeno-epistemológico del conocimiento matemático (Gallardo & González, 2006; Gallardo et al., 2013). A través de la dimensión hermenéutica, también otorgan un rol principal a los estudiantes, haciéndolos intervenir en la interpretación de su propia comprensión a través de diversos planos semiótico, fenómeno-epistemológico y dialógico (Gallardo & Quintanilla, 2019). Asimismo, en estudios previos centrados en la dimensión ética, promueven en el aula transformaciones progresivas en la actividad interpretativa de los estudiantes, dando lugar a prácticas matemáticas más justas, inclusivas y democráticas (Gallardo & Quintanilla, 2016; Quintanilla & Gallardo, 2021).

Finalmente, el objetivo principal de esta línea de trabajo es avanzar en una propuesta que permita relacionar operativamente la experiencia emocional del alumnado con una visión funcional de su comprensión, basada en los usos dados al conocimiento matemático. Con ello, se pretende contribuir al marco conceptual de las emociones en matemáticas, a nivel tanto teórico como metodológico. A través del OMIUM ambos investigadores proponen un enfoque dialéctico que permite dar un carácter sistémico a la experiencia emocional, con el fin de incorporar algunos aspectos de los principales conocimientos consolidados sobre las emociones dentro de un mismo marco teórico común. También proponen una caracterización

particular de la relación entre emoción y comprensión a partir de los usos que el alumnado hace del conocimiento matemático durante su actividad en el aula. Desde el punto de vista metodológico, esta propuesta incorpora un método cualitativo, al que denominan círculo hermenéutico de la comprensión en matemáticas, el cual incluye diversos instrumentos y estrategias de interpretación y con el que logran integrar diversos aspectos cognitivos, expresivos y fisiológicos del componente emocional de la comprensión matemática dentro de un mismo proceso interpretativo.

Figura 1

Dimensiones del OMIUM



Nota. Fuente: Quintanilla y Gallardo (2025)

El desarrollo de la dimensión socioafectiva de su modelo puede encontrarse en la Tesis Doctoral de Quintanilla (2019). En trabajos publicados recientemente (Quintanilla & Gallardo, 2022a, 2022b) ambos muestran su operatividad interpretando la comprensión en episodios empíricos cualitativos en los que intervienen maestros en formación de Educación Primaria involucrados en la resolución de problemas de medida. Estos estudios aportan resultados positivos sobre la influencia de la comprensión de los estudiantes en la generación de sus diferentes emociones durante la actividad matemática realizada. Del mismo modo, evidencian cómo las emociones proporcionan razones plausibles que ayudan a explicar la comprensión matemática de los estudiantes, al intervenir estas en los procesos de toma de decisiones sobre el uso compartido del conocimiento matemático durante la resolución de problemas en el aula.

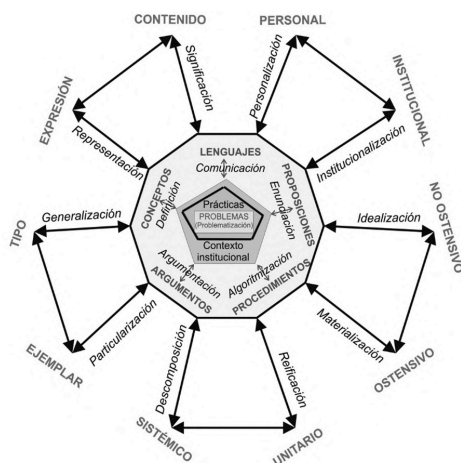
En ocasiones encontramos aportaciones de miembros del grupo que no parecen situar los afectos en matemáticas en el centro de atención, pero en las que, sin embargo, la componente afectiva sí termina jugando un papel relevante. Ejemplificamos esta situación con algunos de los trabajos de Nuria Planas, quien ha colaborado en distintas iniciativas y publicaciones con una perspectiva sociocultural de la investigación en Educación Matemática, donde los afectos se conceptualizan como aspectos de la identidad. Así, el libro que editó junto con diversos colaboradores en 2018

(Hunter et al., 2018), es una buena muestra de esta comprensión social y cultural de la dimensión afectiva. A su vez, en un artículo anterior, y con una perspectiva también sociocultural, Planas (2011) examinó el desarrollo de la ‘agency’ en la construcción de identidades ‘positivas’ y, más recientemente, en un capítulo de un volumen editado por SOMIDEM (Planas & Boukafri, 2018), la identidad y la experiencia de obstáculos y oportunidades constituyen de nuevo una mirada a los afectos. Todas estas aportaciones nos permiten señalar cómo, desde las teorías socioculturales en Educación Matemática, se apunta hacia una visión de los afectos también como una construcción social y cultural, cercana al estudio de las nociones de identidad y ‘agency’. Así, como reconoce la propia autora, a veces se enfatiza la dimensión cognitiva de los afectos, pero hay otras dimensiones igualmente relevantes cuyo estudio tiene mucho peso en las teorías vygotskianas, destacando también cómo en la Teoría de las Representaciones Sociales los afectos tienen una base social (Gorgorió y Planas, 2005). De esta forma, aunque ninguno de los trabajos mencionados está centrado en el estudio de los afectos, en todos ellos la construcción de la identidad es un elemento esencial para comprender el fenómeno que se estudia.

Interesante resulta también la perspectiva de trabajo de Teresa Fernández Blanco y colaboradores, cuyos esfuerzos se dirigen hacia el estudio del dominio afectivo en alumnado en riesgo de exclusión social por motivos familiares (Blanco et al., 2022a; Fernández-Blanco et al., 2024), así como de las emociones en el caso de maestras y maestros en formación inicial (Blanco et al., 2022b; Blanco et al., 2022c; Fernández-López et al., 2024). En todas sus investigaciones siguen el marco teórico del EOS (Figura 2).

Figura 2

Modelo ontosemiótico de los conocimientos matemáticos



Nota. Fuente: Godino et al. (2007)

Encontramos una línea de investigación muy pertinente para este capítulo que queda vinculada con la enseñanza de las matemáticas para la justicia social, destacando los trabajos de Natalia Ruiz López quien, junto a sus colaboradores, ha abordado la problemática relacionada con cómo el dominio afectivo influye en el abandono de la materia, abordándolo desde un enfoque sociopolítico-cultural (Ruiz-López et al., 2024; Suavita & Ruiz-López, 2017). Como resultado de su trabajo, se han defendido varias tesis doctorales como: “Imaginaros del profesorado en formación sobre las matemáticas. Hacia una cultura matemática para la justicia social” de María Angélica Suavita Ramírez (defendida en 2017 en la UAM) o “Educación matemática y justicia social: Una experiencia de aprendizaje y servicio solidario” de Gustavo Nicolás Bruno (defendida en 2020 en la UAM). Actualmente, tienen en marcha otras dos tesis doctorales que también ahondan en el dominio afectivo desde un enfoque crítico: “El acompañamiento educativo en matemáticas a través de una experiencia de Aprendizaje-servicio” de Paloma Guillém González-Blanch y “Narrativas de trayectorias educativas de jóvenes de la Comunidad de Madrid” de Aarón Álvarez Araujo. Es importante en este punto destacar cómo una de las metodologías que han incorporado en dos de las tesis dirigidas está estrechamente relacionada con los enfoques propios del Aprendizaje servicio (ApS) y cómo también se están explorando actualmente las contranarrativas como herramienta de investigación cualitativa participativa y empoderadora de poblaciones en los márgenes del sistema educativo.

Entre los trabajos del grupo hay también algunos de corte esencialmente cuantitativo como los que llevan a cabo Fernández-Cézar y colaboradores en relación, sobre todo, con cuestiones actitudinales o emocionales hacia las matemáticas del alumnado pre-universitario (Fernández-Cézar et al., 2021), de docentes de infantil y primaria en formación inicial (de la Peña et al., 2021) y de profesorado de matemáticas en ejercicio (Fernández-Cézar et al., 2018), orientando su trabajo en estos momentos hacia el estudio de la ansiedad matemática en edades tempranas. Sus trabajos centran la atención en medir la influencia o el impacto de intervenciones educativas basadas en plantear la enseñanza desde la experimentación y la vivencia, inspirándose en los planteamientos de McLeod y sus tres componentes principales del dominio afectivo, y recurriendo, para la medición a nivel operacional, a instrumentos de tipo cuestionario de respuesta cerrada o escalas y a diseños cuasiexperimentales con mediciones de diagnóstico o pre-post, según los casos.

Desde un enfoque también dominante cuantitativo encontramos trabajos que, mediante estudios multivariados, atienden la complejidad del constructo *dominio afectivo* en contextos de formación inicial de profesorado de matemáticas. Así, Marbán y colaboradores (Marbán et al., 2020), a través de un

modelo de ecuaciones estructurales en el que creencias, emociones y actitudes hacia las matemáticas se entrelazan como explicación del gusto por su enseñanza, muestran cómo la ansiedad es un factor con una notable influencia sobre el gusto por las matemáticas y que es a través de esta influencia como actuaría sobre el gusto por la docencia de las matemáticas y sobre las actitudes positivas hacia el estudio de su didáctica. De igual forma, y en contra de lo que en principio cabría pensar, se han detectado también niveles de ansiedad matemática superiores a los esperados en estudiantes de matemáticas, mostrándose, a su vez, las mismas diferencias de género que en los casos mencionados previamente, así como, en algún caso, diferencias entre quienes plantean su futuro profesional alejado de la docencia y quienes aspiran a ser docentes en secundaria y bachillerato, siendo más alta en este último caso (Nortes & Nortes, 2014).

Otros miembros del grupo IDIEM están aún iniciando o consolidando sus líneas de trabajo en relación con los afectos en matemáticas, lo que contribuye también a augurar un futuro prometedor en el seno del propio grupo en relación con esta temática. Es el caso del área de Didáctica de la Matemática del departamento de Educación y Didácticas Específicas de la Universitat Jaume I de Castellón de la Plana, donde se está trabajando la motivación y la ansiedad hacia las matemáticas de alumnado de Educación Secundaria y de Bachillerato, además de la ansiedad hacia las matemáticas y hacia la enseñanza de las matemáticas de los docentes en formación. Para ello, están siguiendo los trabajos de Patricia Perez Tyteca y M^a Dorinda Mato Vázquez.

En esta trayectoria iniciática encontramos también a Francisco Javier Ibáñez López y a Belén García-Manrubia, con trabajos de su autoría o bajo su supervisión y tutela que abordan cuestiones como las concernientes al dominio afectivo matemático en diferentes grados universitarios (Montalban, 2024), fortalezas y dificultades emocionales en adolescentes italianos (Corvasce et al., 2022), la relación entre afecto y rendimiento en matemáticas o actitudes ante las matemáticas y percepción de su utilidad, entre otros.

Finalmente, encontramos los trabajos también incipientes, pero en proceso de consolidación, de Mónica Marbán y colaboradores, quienes, después de estudiar y analizar los diferentes modelos que ofrece la literatura, se posicionaron con estudios que se decantan por estudiar el afecto como una estructura, enfocándose en una única dimensión, que en su caso correspondió a las emociones. Así, se situaron inicialmente en un enfoque metodológico cualitativo e interpretativo de estudio de caso que les permitiera estudiar las emociones experimentadas en profundidad. En ese sentido, su marco teórico principal fue el aportado por la Teoría de la Estructura Cognitiva de las Emociones (Ortony et al., 1996), lo que permitió clasificar y caracterizar las emociones que se van identificando durante los corres-

pondientes procesos de toma de datos (Marbán de Frutos et al., 2023). Además, en el análisis de estos datos, incorporaron la Teoría de la Disonancia Cognitiva (Festinger, 1957), ya que esta favorece el análisis y la comprensión de los procesos emocionales que se producen en el sujeto de análisis. En concreto, algunas de las emociones con valencia negativa requerían muchos recursos y aparecían una y otra vez en el análisis. Aquí es donde la disonancia facilitó la comprensión del proceso y la búsqueda del equilibrio y reducción del malestar a través de cogniciones en forma de excusa o justificación, propias de la disonancia. A partir de esta investigación surgió una nueva línea que trata de aportar luz a los procesos de disonancia cognitiva que son frecuentes en la vida diaria y, más aún en los procesos de enseñanza y ante las continuas interacciones con el alumnado. Esto ha dado pie a una nueva investigación centrada en la disonancia cognitiva en el profesorado que enseña matemáticas. De esta forma, buscando posibles inconsistencias en dicho profesorado la investigación en curso se apoya en POEMat.es (Joglar et al., 2021), una pauta de observación validada para crear un cuestionario que sirva como instrumento de reflexión en la búsqueda de disonancia cognitiva en el profesorado participante en el estudio. En esta investigación se opta por un estudio de casos cruzados que presenta dos fases, la primera con un enfoque cuantitativo que proporcione información sobre las discrepancias encontradas en cada caso y la segunda con un enfoque cualitativo que permita identificar y clasificar las disonancias expresadas por cada uno de los casos considerados (Marbán de Frutos et al., 2024). Esto ha permitido relacionar dichas reacciones emocionales con contenidos matemáticos, didácticos y de gestión del aula. Además, se ha constatado la cantidad de trabajo emocional presente en el día a día del profesorado, así como el malestar que se genera y la importancia de gestionarlo para favorecer el bienestar del profesorado.

El grupo GT8 de SOMIDEM

Los temas discutidos en la primera versión del Congreso SOMIDEM del grupo de Afecto fueron referentes a emociones, autoeficacia y redención matemática, centradas en estudiantes de distintos niveles educativos, entre ellos bachillerato (15-18 años), universidad (18-22 años) y posgrado (22 años en adelante), y docentes de educación básica, quienes atienden a estudiantes de 3 a 15 años. Enseguida se describen los hallazgos presentados en el grupo.

Nava-Guzmán et al. (2023) estudiaron la relación del razonamiento covariacional en las emociones de logro de una estudiante de bachillerato, Valeria, desde un networking de teorías entre los niveles de razonamiento covariacional y la teoría del control-valor (Pekrun, 2006). Valeria resolvió dos tareas, la primera centrada en calcular la altura y la distancia recorrida

por una pasajera en una rueda de la fortuna en diferentes momentos de vueltas. Como resultado se encontró que la habilidad para coordinar las dos variables y la importancia percibida de la tarea desencadenaron en Valeria el disfrute, ya que tuvo el conocimiento covariacional para hacer frente a la tarea y valoró de manera positiva a la actividad en términos de su calificación. La segunda tarea consistía en construir cajas de papel de distinto tamaño con una hoja de papel, para ello debía manipular dos variables, la longitud del papel y el volumen de la caja, además se le pedía dibujar una gráfica de los cambios en las variables, Valeria tuvo dificultades para elaborar la gráfica, y como seguía reconociendo la importancia de la tarea en términos de la calificación, experimentó frustración.

Basaldú-Gutiérrez y García-González (2022) llevaron a cabo una investigación que se planteó como una replicación del trabajo original de Martínez-Sierra y García-González (2014). La hipótesis de replicación propuesta era que la modalidad del bachillerato y el contexto podrían influir en las emociones de los estudiantes, ya que el estudio original se desarrolló en un bachillerato físico-matemático en un contexto urbano de la Ciudad de México, mientras que la replicación tuvo lugar en un bachillerato general en un contexto rural en el estado de Oaxaca, al sur de México. El marco conceptual adoptado fue la Teoría de la Estructura Cognitiva de las emociones, llamada también teoría OCC (Ortony et al., 1996), y el diseño de investigación se rigió por el paradigma cualitativo. Los resultados arrojaron 12 tipos de emociones, agrado, satisfacción, júbilo, esperanza y orgullo, desagrado, miedo, congoja, decepción, ira, reproche y autorreproche. Estas emociones y sus situaciones desencadenantes coincidieron en su mayoría con las del estudio original. Respecto a la hipótesis planteada, se concluyó que ni el contexto ni la modalidad del bachillerato influyen en las emociones de los estudiantes, ya que las emociones positivas surgieron al alcanzar logros académicos, mientras que, en caso contrario, se manifestaron emociones negativas.

González y Aguilar (2023) analizaron las emociones que experimentaron 78 estudiantes universitarios antes, durante y después de exámenes de práctica orales en álgebra lineal. Al día siguiente del examen de práctica, los estudiantes respondieron un cuestionario que incluía preguntas abiertas, tipo Likert y una pregunta de opción múltiple. En las preguntas abiertas, los estudiantes expresaban cómo se habían sentido antes, durante y después del examen; para clasificar y analizar las respuestas, se estableció un código que permitiera identificar la valencia e intensidad de las emociones reportadas. En el caso de las preguntas tipo Likert, se determinó la frecuencia y la mediana de los datos. Como resultado se identificó que antes del examen de práctica, el nerviosismo era predominante, sin embargo, disminuyó conforme avanzaba la actividad y aumentaba la confianza en los conoci-

mientos. También se encontró que la dinámica de la aplicación del examen de práctica, motivó a los estudiantes a mantenerse atentos durante toda la sesión.

Pérez-Torres y García (2024) presentaron un avance de investigación sobre la redención matemática, entendida como el deseo de enfrentar el desafío de enseñar matemáticas a partir de una reconstrucción personal de la relación con las matemáticas. La investigación tuvo por objetivo conocer los factores que desencadenaron la redención matemática en 249 docentes de educación básica del Estado de Puebla, México. Se había encontrado que 117 docentes experimentaron redención matemática, y se esperaba conocer aquellos factores que estaban detrás de este resultado.

Las investigaciones presentadas, fueron alentadoras para el grupo, pues se respondía parcialmente la pregunta ¿cómo podemos aplicar el conocimiento acumulado por la investigación sobre el afecto en la práctica en el aula de matemáticas?, ya que los estudios habían sido diseñados con el fin de influir en un ambiente positivo para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Sin embargo, también señalaron tres desafíos rumbo a la consolidación del grupo:

- Incrementar el número de participantes mediante una estrategia de difusión dirigida a programas de posgrado en Educación Matemática de México y América Latina, investigadores y docentes interesados en el tema que aún no estuvieran vinculados a SOMIDEM.
- Definir una meta compartida que integrara los intereses de los integrantes y orientara las investigaciones hacia un impacto tangible en la práctica educativa.
- Diseñar proyectos conjuntos que puedan realizarse en el periodo de dos años entre ediciones del congreso.

El Segundo Congreso SOMIDEM tuvo lugar en marzo de 2025. En cuanto a los desafíos planteados, el primero de ellos se ha cumplido parcialmente, ya que el número de trabajos distintos a la autoría de los líderes aumentó de 1 a 3, y además, se recibieron dos trabajos en coautoría con dos de los tres líderes. No obstante, el segundo y el tercero no fueron alcanzados. A partir de un análisis retrospectivo, durante la realización del segundo encuentro, se compartieron estos desafíos con las y los asistentes y se asumió el compromiso de alcanzarlos.

A pesar de haber recibido solo cinco trabajos de investigación en el grupo, este número se valora positivamente, pues muestra una diversidad en la adscripción de sus autorías. En el caso de México, se recibieron contribuciones de cuatro posgrados en Educación Matemática ubicados en distintos estados (Zacatecas, Hidalgo, Guerrero y Yucatán), además de un trabajo de grado proveniente de la Universidad de Costa Rica. En su conjunto, estos estudios contribuyen a disminuir algunas brechas en el dominio afectivo,

abordando temas sobre resiliencia, creencias, emociones y actitudes, como se describe enseguida.

Pinto y Gómez (2025) identifican dos vacíos en la literatura sobre el Dominio Afectivo. En primer lugar, señalan que, aunque se ha investigado la relación entre emociones y aprendizaje, creencias y aprendizaje, así como actitudes y aprendizaje, ello se ha realizado de manera aislada, no se ha explorado su influencia conjunta en el rendimiento matemático. En segundo lugar, identifican que existe poca investigación sobre la relación entre el Dominio Afectivo del docente y el del estudiante, es decir, cómo las emociones, creencias y actitudes de los docentes impactan en sus estudiantes.

Ante estos vacíos proponen un estudio que busca analizar la influencia conjunta de los tres descriptores básicos del Dominio Afectivo—emociones, creencias y actitudes—en el rendimiento en matemáticas de secundaria (estudiantes de 12-15 años), así como examinar la relación entre el Dominio Afectivo del docente y el del estudiante. Este objetivo se fundamenta en estudios previos que han demostrado que el Dominio Afectivo del docente influye en sus prácticas pedagógicas, favoreciendo u obstaculizando el aprendizaje de las matemáticas (por ejemplo, Fernández-César et al., 2018). Asimismo, se ha evidenciado que el Dominio Afectivo del alumnado impacta significativamente en el aprendizaje y rendimiento (por ejemplo, Martínez-Padrón, 2021; Mejía et al., 2023). Respecto a la recolección de datos se propone una batería de instrumentos, sin embargo, hasta el momento, solo se han elaborado dos cuestionarios de autoinforme para indagar las emociones y actitudes del docente hacia las matemáticas, y se trabaja en la construcción de los instrumentos para medir emociones, actitudes y creencias en estudiantes, así como creencias en docentes.

Alarcón-Salinas et al. (2025) identifican como brecha de investigación la falta de estrategias docentes para afrontar la ansiedad matemática. Para abordar este vacío, realizan un estudio de replicación basado en la investigación de Para y Johnston-Wilder (2023), con el que proponen un taller orientado a desarrollar habilidades y destrezas asociadas a la resiliencia matemática en un colegio de Costa Rica dirigido a estudiantes de entre 12 y 15 años. El estudio aún está en desarrollo, pero las fases de implementación han sido delimitadas de la siguiente manera. En primer lugar, se lleva a cabo un diagnóstico de la ansiedad matemática utilizando una versión traducida de la Escala de Ansiedad Matemática Revisada (MAS-R) (Bai et al., 2009). Posteriormente, se implementa el taller “Construyendo espacios seguros”, compuesto por cinco sesiones de ochenta minutos cada una, impartidas semanalmente en las instalaciones del colegio a lo largo del primer trimestre de 2025. Durante estas sesiones, se busca dotar a los participantes de herramientas para fortalecer la resiliencia matemática y el control emocional, promoviendo su aplicación en situaciones de ansiedad matemática. En tercer

lugar, para fomentar el desarrollo simultáneo de la resiliencia matemática y el aprendizaje de contenidos matemáticos, se asignarán roles dentro del equipo de investigación. Algunas personas asumirán la función de docentes y guías resilientes, mientras que otras se encargarán de observar y registrar las reacciones o intervenciones de los participantes, con el fin de analizar los cambios en los niveles de ansiedad matemática. Finalmente, la evaluación del taller se llevará a cabo mediante la triangulación de diversos instrumentos: notas de campo, bitácoras, diarios y entrevistas.

Jiménez et al. (2025) analizan el sistema de creencias de un grupo de 108 estudiantes de secundaria al utilizar la intuición y el pensamiento analítico en la resolución de problemas con números racionales. Dicho sistema contempla cinco tipos de creencias, sobre la matemática, sobre el aprendizaje, sobre la enseñanza, autoeficacia y sobre la resolución de problemas. Se emplea una escala tipo Likert para caracterizar el sistema de creencias, misma que se compone de 17 ítems y para identificar el empleo del razonamiento intuitivo y analítico, se diseñó un cuestionario de problemas de números racionales. Los resultados indican que el sistema de creencias influye significativamente en el tipo de razonamiento utilizado al resolver problemas con números racionales. Se destacaron, en particular, las creencias de autoeficacia y las creencias sobre la matemática. Cuando estas creencias se encuentran en niveles bajos, se observa una tendencia a recurrir predominantemente al razonamiento intuitivo, lo que lleva a cometer errores en problemas que requieren un análisis más reflexivo y un mayor tiempo de procesamiento. Por otro lado, más de la mitad de los participantes demostraron un alto sentido de autoeficacia. En presencia de estas creencias favorables, se registró una mayor aplicación del pensamiento analítico, lo que se reflejó en los porcentajes más altos de respuestas correctas en el cuestionario.

Nava et al. (2025) presentan un modelo hipotético (ver Tabla 1) que conecta los niveles de razonamiento covariacional propuestos por Thompson y Carlson (2018) y las emociones de logro de la Teoría Control Valor (Pekrun, 2006). Este es producto de 2 estudios de caso en el nivel bachillerato (15-18 años) cuando los estudiantes son enfrentados a tareas covariacionales. Este modelo resulta relevante y responde a una brecha identificada en la literatura que apunta a la necesidad de estudiar las emociones y el razonamiento matemático de manera simultánea (Middleton et al., 2018).

El modelo presentado en la tabla establece que la emoción de logro se desencadena por las valoraciones de control y valor ante una tarea covariacional. La valoración de control se refiere a la capacidad y habilidades de un estudiante para resolver la tarea; en este caso, se enfoca en el razonamiento covariacional, de ahí su relación con los niveles. Por otro lado, la valoración de valor hace referencia a la importancia otorgada a la tarea, comúnmente en términos de adquisición de conocimientos o de la calificación obtenida

al realizarla. De esta manera, la emoción positiva denominada disfrute se experimentará siempre que se alcancen niveles altos de razonamiento covariacional, lo que implica un alto control de la actividad debido al conocimiento matemático que se posee. Sin embargo, para que esta emoción se manifieste, es necesario que la tarea sea percibida desde una valoración positiva; de lo contrario, aparece una emoción negativa, denominada ira.

Tabla 1
Modelo hipotético de emociones de logro y razonamiento covariacional

Nivel de razonamiento covariacional	Valoraciones		Emoción de logro
	Control	Valor	
6. Covariación continua suave	Alto	Positivo	Disfrute
5. Covariación continua en intervalos		Negativo	Ira
4. Coordinación de valores			
3. Coordinación gruesa de valores	Bajo	Positivo Negativo	Frustración
2. Precoordinación de valores			
1. Sin coordinación de valores			
Todos los niveles	Alto Bajo	Ninguno	Aburrimiento

Nota. Fuente: Nava et al. (2025)

El resto de las emociones consideradas en el modelo son negativas y están asociadas a niveles bajos de razonamiento covariacional. Esto implica un bajo control de la actividad debido a la falta de razonamiento covariacional, como en el caso de no ser capaz de identificar un cambio simultáneo en las variables. Independientemente de si la tarea recibe una valoración positiva o negativa, la emoción resultante será negativa, específicamente la frustración. Es interesante notar cómo la frustración parece depender de la valoración de control, a diferencia del aburrimiento, que recae en la valoración de valor. Si el estudiante no asigna un valor a la tarea, sin importar si su valoración de control es alta o baja, se desencadenará el aburrimiento.

Ramírez et al. (2025) proponen un estudio que surge ante la influencia reportada de la ansiedad matemática en docentes en formación, ya que se ha documentado que un alto nivel de ésta disminuye el disfrute tanto del aprendizaje como de la futura enseñanza de las matemáticas (Marbán et al., 2020). Con el fin de ampliar el conocimiento sobre las emociones de docentes en formación, se centra la atención en la educación básica mexicana, que abarca tres niveles escolares distintos, preescolar (3-6 años), primaria (6-12 años) y secundaria (12-15 años). En ellos los contenidos matemáticos

que se enseñan a los docentes en formación varían según el grado en el que se impartirá clases. En preescolar, los contenidos se enfocan en forma, espacio y medida; en primaria, en aritmética, álgebra, geometría, probabilidad y estadística; y en secundaria, además de los contenidos de primaria, se incorporan trigonometría, cálculo diferencial e integral.

Los autores se proponen identificar las emociones y situaciones desencadenantes en 65 docentes en formación: 35 de preescolar, 23 de primaria y 7 de secundaria, quienes fueron seleccionados por disponibilidad para participar. La investigación se fundamenta en la teoría OCC y adopta un diseño metodológico cualitativo, mediante un cuestionario compuesto por cinco preguntas para identificar tanto emociones positivas como negativas en relación con las matemáticas y su futura enseñanza, así como las situaciones que las desencadenan. Los hallazgos del estudio evidencian emociones comunes en el colectivo, tanto en relación con su propio aprendizaje como con su futura enseñanza. El agrado, el júbilo y la congoja, se desencadenan por la comprensión de los temas, la resolución de problemas y el logro de las actividades matemáticas. Y la esperanza y el miedo ante previsiones de la enseñanza, la primera surge por la idea de lograr que los estudiantes comprendan, y la segunda por la posibilidad de cometer errores en la enseñanza y no lograr que los alumnos aprendan.

Líneas futuras

El diálogo entre las coordinaciones de ambos grupos y, en particular, de las personas autoras de este capítulo, ha permitido constatar que, en líneas generales, se comparten preocupaciones, retos y líneas de trabajo identificadas como futuras líneas de actuación. Esta visión, a su vez, no es muy diferente de la que se observa en el panorama internacional más allá de las fronteras de los propios grupos de trabajo, visión que se traslada de forma explícita y muy marcada en los programas de los grandes eventos científicos vinculados a la Educación Matemática. Este hecho quedó constatado también por el propio GTT8 de la SOMIDEM cuando, en un esfuerzo por identificar temas de interés en la investigación sobre el dominio afectivo en Educación Matemática, llevó a cabo una revisión de la literatura tomando como referencia libros de compilación o artículos de revisión y reflexión sobre investigaciones en este ámbito (Grootenberg & Marshman, 2016; Hannula et al., 2019; Pepin & Roesken-Winter, 2015), así como la entrada sobre *Afecto* en la Encyclopedia of Mathematics Education de 2020 y el número especial *Affect in Mathematical Problem Posing* del volumen 105, número 3, de la revista *Educational Studies in Mathematics*, también de 2020.

Sintetizando los puntos de consenso a los que se acaba de hacer referencia, estos pueden ser agrupados por temáticas muy definidas. Así, en primer lugar encontramos trabajos, retos y necesidades que tienen que ver con la

complejidad del propio constructo en sí. En particular, se hace precisa una llamada a la colaboración para desarrollar modelos y marcos integradores que ayuden a conceptualizar más y mejor lo que se entiende por dominio afectivo en matemáticas, de forma que sea más sencillo operacionalizar su medida o su observación, comprender su complejidad integrando sus diferentes dimensiones, permitir la incorporación de lentes socioculturales diversas, dotarlo de un sentido inclusivo, entre otros aspectos. De hecho, en el número especial publicado en enero de 2023 por el *British Journal of Educational Psychology* (Pekrun, 2023), en el que los países que presentan resultados son Finlandia, Noruega, Países Bajos, Italia, Alemania, Reino Unido y Estados Unidos se indica que es necesario ampliar la muestra con más contextos culturales (véase también Pekrun & Marsh, 2022). En este sentido cabe decir que ya han surgido nuevas rutas de investigación como la de Schindler y Bakker (2020), quienes proponen el constructo *campo afectivo* para describir los diversos factores afectivos (emociones, creencias, etc.) que inciden en la resolución de problemas matemáticos. Su estudio representa una novedad al considerar múltiples factores de manera simultánea, en contraste con la tendencia predominante de centrarse en un solo constructo afectivo. Además, se observa una ampliación en la diversidad de constructos estudiados, incluyendo identidad, regulación emocional, motivación y creatividad.

Una segunda línea de trabajo común identificada por ambos grupos es aquella que centra su atención en el par cognición-afecto. Los expertos han hecho múltiples llamamientos para investigar conjuntamente los procesos afectivos y cognitivos, con el fin de lograr una mejor comprensión del aprendizaje de las matemáticas de los estudiantes (Barnes, 2021). En este sentido, uno de los focos de interés se refiere a las emociones relacionadas con la adquisición de conocimientos (Gómez-Chacón, 2017, Pekrun et al., 2017), las denominadas emociones epistémicas. Las emociones epistémicas, como la sorpresa, la confusión, la frustración y la curiosidad, se consideran de importancia para el pensamiento matemático de los estudiantes (Hannula, 2012; Schukajlow et al., 2017), en los procesos de demostración (Schubert et al., 2023), en procesos de visualización (Gómez-Chacón, 2015) y en el uso de heurísticos en la resolución de problemas (Gómez-Chacón, 2017; Gómez-Chacón & De La Fuente, 2019). Sin embargo, el rol de las emociones epistémicas en ciertos procesos como, por ejemplo, aquellos que tienen que ver con pensamiento computacional y pensamiento algorítmico en disciplinas STEM como son la Matemática y la Informática requieren de más investigación. Identificar los factores que conforman la aparición de las emociones epistémicas de los individuos e investigar su papel en la construcción de esta tipología de pensamientos es importante para favorecer el compromiso de los estudiantes en los primeros cursos de

universidad, donde se produce un alto índice de ansiedad y de fracaso académico. A su vez, y de forma complementaria, es importante potenciar esta línea de trabajo con el objetivo de distinguir y conectar el afecto y la comprensión con fines observacionales y prácticos, dado que el afecto y la comprensión están entrelazados e interactúan entre sí.

Una tercera línea futura que ambos grupos comparten tiene que ver con la atención a la dimensión emocional del dominio afectivo, siendo conscientes de que esta dimensión ha recibido menos atención que las correspondientes a actitudes o creencias, por ejemplo. Cabe decir, en relación con esta cuestión que es creciente el interés por la ansiedad matemática, la cual ha cobrado un especial protagonismo tras la publicación del último informe PISA 2022 (OECD, 2023). En relación con la ansiedad matemática, se han generado importantes trabajos que han contribuido a una mayor comprensión de esta al tiempo que se han estudiado diversas estrategias didácticas para reducirla, incorporando nuevos constructos como el de resiliencia, si bien siguen siendo insuficientes las aportaciones de impacto o la evidencia de validez de estas propuestas. Por otra parte, encontramos cada vez más estudios que intentan indagar en los procesos cerebrales implicados en situaciones de ansiedad matemática (e.g. Klados et al., 2019; Liu et al., 2019), aunque sigue siendo un reto cómo dar cuenta de ello en relación con los procesos de aprendizaje de las matemáticas al estar estos influidos por múltiples variables que son difíciles de reproducir en el laboratorio.

Una cuarta línea de trabajo futura es la que da cuenta de los aspectos metodológicos propios de la investigación en dominio afectivo en matemáticas, destacando una llamada compartida a proponer enfoques que permitan una mayor participación de los propios participantes en la investigación. En relación con esta línea surgen retos estrechamente vinculados con la instrumentación, no solo en términos de mayor fiabilidad, validez, alcance, sino también en términos de su transferencia a las aulas para su uso por docentes, familias y otros profesionales involucrados en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas (o de su didáctica), facilitando mecanismos de detección temprana de problemáticas, de identificación de perfiles afectivos y de formación inicial y permanente del profesorado que incorporen la dimensión afectiva y, finalmente, contribuyendo a una correcta educación afectiva en el aula de matemáticas. Por otro lado, y en relación con este apartado metodológico, hay que indicar que la investigación asociada a la temática ha descuidado en cierta medida los fundamentos fisiológicos de la motivación, la emoción o el compromiso en el aprendizaje. Estudios recientes no solo destacan la importancia de estos aspectos, sino también la necesidad de más investigación (Pekrun, 2023; Strehli et al., 2021).

Siguiendo con esta línea, las investigaciones realizadas muestran cómo los indicadores fisiológicos pueden integrarse en la investigación educativa

en matemáticas, documentando con evidencias los vínculos entre los parámetros cardiovasculares, electrotérmicos y hormonales con diferentes procesos mentales y conductuales en entornos educativos. En conjunto, cada vez son más las investigaciones que muestran el papel fundamental de los procesos fisiológicos en el compromiso de alumnado y profesorado. Sin embargo, la mayoría de los estudios utilizaron muestras pequeñas y correlacionales, y no todos los resultados fueron coherentes. Por tanto, se requiere profundizar en las relaciones apuntadas y en la influencia de variables contextuales y diferencias entre niveles educativos. Para fundamentar la teoría y la práctica basadas en pruebas, debemos seguir avanzando en la construcción de una base de conocimientos acumulativa y coherente. Para ello, puede resultar útil especificar indicadores fisiológicos, garantizar la simetría de constructo de los aspectos fisiológicos, mentales y conductuales, utilizar diseños causales y análisis intrapersonales, emplear múltiples indicadores y evaluaciones para aumentar la fiabilidad y la especificidad, definir ventanas temporales y desfases en las evaluaciones para captar los procesos fisiológicos y sus funciones y, finalmente, tener en cuenta, como ya se ha comentado previamente, el papel de los contextos socioculturales.

Junto con estas cuatro líneas de trabajo futuras se han identificado otras con una trayectoria dilatada y sobre las que se lleva trabajando más tiempo o bien algunas que han sido señaladas de forma más puntual pero que apuntan también hacia retos muy interesantes. Entre las primeras encontramos la que aborda preguntas recurrentes, como aquellas relacionadas con la influencia de los descriptores básicos -creencias, actitudes y emociones- en docentes y estudiantes, su impacto en el rendimiento o en el propio desarrollo profesional docente, el carácter mediador o modulador de determinadas variables afectivas sobre otras de corte más cognitivo, así como la integración de dimensiones afectivas en los modelos y marcos que definen el conocimiento especializado del profesorado de matemáticas (e.g., Marbán et al., 2022).

De igual manera, el fenómeno de la redención matemática en docentes en servicio emerge como un tema de gran relevancia, al igual que el estudio de las emociones de docentes en formación, con el propósito de mejorar la mala relación con las matemáticas durante los años de estudio. Asimismo, destaca la investigación de Pinto y Gómez (2025), que busca analizar más de un constructo a la vez, contribuyendo a la propuesta de Schindler y Bakker (2020).

Entre las líneas del segundo grupo mencionado se encuentra la que sugiere atender, de manera explícita, el estudio del componente ético de las matemáticas escolares, explorando cuestiones vinculadas con la ética en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y planteando, como objetivo fundamental, desarrollar una ética que pueda aplicarse en la práctica y

transmitirse en el aula de matemáticas a través de la actividad de sus protagonistas, todo ello desde las evidencias que pueda aportar la investigación.

Conclusiones

El trabajo conjunto realizado entre los dos grupos a través de los dos representantes que han colaborado en la redacción de este capítulo permite obtener como primera conclusión global que se abre un camino prometedor de colaboración. Las evidencias en este sentido son claras, y se han puesto de manifiesto a lo largo del capítulo. Así, ambos grupos son noveles, estructuralmente hablando, pero la trayectoria en investigación sobre domino afectivo en matemáticas de muchos de sus miembros es dilatada y exitosa, al tiempo que en su seno acogen jóvenes investigadoras e investigadores que pueden dar continuidad a esta línea de trabajo durante muchos años.

Por otra parte, ambos grupos comparten intereses, preocupaciones y retos comunes, todos ellos con enfoques que, aun siendo en algunos casos propios de realidades locales, regionales o nacionales, parten de una mirada internacional a la problemática asociada e integran el valor de la diversidad, en particular la sociocultural, en su trabajo.

Con estos antecedentes es necesario, pertinente e ilusionante poder establecer estrategias que permitan una sinergia positiva entre los dos grupos, manteniendo y reforzando la propia dinámica de colaboración que ya establecen sus respectivas sociedades científicas. Con esta idea en mente, se fija como objetivo definir un mecanismo de coordinación mutua que recorra un camino bien definido de avance progresivo en este sentido y que quedaría conformado por los siguientes pasos o etapas:

1. Conocimiento: generar entornos y espacios que permitan poner en común todo aquello que en este capítulo solo ha podido ser sintetizado, así como aquello que cada grupo está realizando y que no ha tenido cabida en el capítulo.
2. Consulta: establecer una cultura de contacto y colaboración que permita, a partir del conocimiento mutuo de la etapa previa, realizar consultas entre miembros de sendos grupos sobre cuestiones de interés común sobre las cuáles haya quién pueda aportar experiencias, resultados, etc. a quien quiera iniciar acciones en la misma dirección o en una semejante.
3. Compartición de recursos: poner en común instrumentos, documentos, técnicas, etc., generados en el seno de cada uno de los grupos y que puedan ser transferidos al otro, como ya se hace desde el enfoque propio de la ciencia abierta.
4. Generación de recursos: trabajar conjuntamente en la generación de recursos, como los mencionados previamente, con la idea de ponerlos

- a disposición de ambos grupos y, por extensión, de toda la comunidad científica interesada por la temática.
5. Presentación de proyectos conjuntos: identificar oportunidades para la presentación y desarrollo de proyectos de investigación a desarrollar por integrantes de ambos grupos, en los contextos propios de ambos países.
 6. Formación de equipos de trabajo: consolidar el trabajo de las etapas previas a través del nacimiento de equipos de trabajo asociados a alguna de las temáticas de interés de ambos grupos y que queden conformados por integrantes de ambas sociedades y grupos.

Referencias

- Alarcón-Salinas, G. J., Fallas-Monge, K. V., Garro-Cisneros, V., León-Corella, J. M., Masís-Calvo, J. J., & López-Acosta, L. A. (2025). *Afrontar la ansiedad matemática: estudio de caso en el marco de la resiliencia matemática*. En Segundo Congreso SOMIDEM. <https://somidem.org.mx/?view=viewpdf&id=149>
- Bai, H., Wang, L., Pan, W., & Frey, M. (2009). Measuring mathematics anxiety: Psychometric analysis of a bidimensional affective scale. *Journal of Instructional Psychology*, 36(3), 185–193. <https://psycnet.apa.org/record/2009-20155-001>
- Barnes, A. (2021). Enjoyment in learning mathematics: Its role as a potential barrier to children's perseverance in mathematical reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 106(1), 45–63. <https://doi.org/qjxk>
- Basaldú-Gutiérrez, Y., & García-González, M. D. S. (2022). Emociones de estudiantes de bachillerato en la clase de matemáticas: Un estudio de replicación. *Feglining*, 22(3), 16–23. <https://federacionglobal.com/FEGLININ/No22/sep2022/vol-3/access.html>
- Blanco, T. F., Gorgal-Romarís, A., Núñez-García, C., & Sequeiros, P. G. (2022a). Prospective Primary Teachers' Didactic-Mathematical Knowledge in a Service-Learning Project for Inclusion. *Mathematics*, 10(4), 652. <https://doi.org/10.3390/math10040652>
- Blanco, T. F., Gorgal-Romarís, A., Fernández-López, A., Núñez-García, C., & Sequeiros, P. G. (2022b). Idoneidad cognitiva en prácticas matemáticas inclusivas con tecnología educativa. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas, & J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (p. 596). SEIEM.
- Blanco, T. F., Fernández-López, A., Martínez-Albella, J., & Rodríguez-Raposo, A. (2022c). Explorando las emociones de futuros docentes frente al uso de tecnologías emergentes en el aprendizaje de la geometría. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas, & J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (p. 595). SEIEM.

- Bosch, M., Gutiérrez, A., & Llinares, S. (2024). Mapeando la investigación española en educación matemática. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent, & C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 51–94). SEIEM.
- Corvasce, C., Martínez-Ramón, J. P., Méndez, I., Ruiz-Esteban, C., Morales-Rodríguez, F. M., & García-Manrubia, M. B. (2022). Emotional strengths and difficulties in Italian adolescents: analysis of adaptation through the SDQ. *Sustainability*, 14(10), 6167. <https://doi.org/10.3390/su14106167>
- De la Peña, C., Fernández-César, R., & Solano-Pinto, N. (2021). Attitude toward mathematics of future teachers: how important are creativity and cognitive flexibility? *Frontiers in Psychology*, 12, 713941. <https://doi.org/gmm7kf>
- Fernández-López, A., Blanco, T. F., & Sequeiros, P. G. (2024). Exploring pre-service primary teachers' emotions in a geometry project with 3D design. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 20(6), em2451. <https://doi.org/10.29333/ejmste/14589>
- Fernandez-Blanco, T., Gorgal-Romaris, A., Núñez-García, C., & Conde-Lago, J. (2024). A mathematical stimulus program for an educational intervention with students at risk of social exclusion. *International Journal of Innovative Research and Scientific Studies*, 7(3), 1062–1074. <https://doi.org/qjxm>
- Fernández-César, R., Hernández Suárez, C., Prada Nuñez, R., & Ramírez Leal, P. (2018). Dominio afectivo y prácticas pedagógicas de docentes de Matemáticas: Un estudio de revisión. *Espacio*, 39(23), 25–35.
- Fernández-César, R., Solano-Pinto, N., & Garrido, D. (2021). Can mathematics achievement be predicted? The role of cognitive–behavioral–emotional variables. *Mathematics*, 9(14), 1591. <https://doi.org/10.3390/math9141591>
- Festinger, L. (1957). *A theory of cognitive dissonance*. Stanford University Press.
- Gallardo, J., & González, J. L. (2006). Assessing understanding in mathematics: steps towards an operative model. *For the Learning of Mathematics*, 26(2), 10–15.
- Gallardo, J., & Quintanilla, V. A. (2016). El consentimiento con el otro en la interpretación de la comprensión en matemáticas. *BOLEMA: Boletim de Educação Matemática*, 30(55), 625–648. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n55a16>
- Gallardo, J., & Quintanilla, V. A. (2019). El círculo hermenéutico de la comprensión en matemáticas: una propuesta integradora para la evaluación en el aula. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 22(1), 97–122. <https://doi.org/10.12802/relime.19.2214>
- Gallardo, J., González, J. L., & Quintanilla, V. A. (2013). Tareas, textos y usos del conocimiento matemático: aportes a la interpretación de la comprensión desde el cálculo aritmético elemental. *Educación Matemática*, 25(2), 61–88.
- Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. *ZDM - Mathematics Education*, 39(1-2), 127–135.

- Gómez-Chacón, I. M. (1997). *Procesos de aprendizaje en matemáticas con poblaciones de fracaso escolar en contextos de exclusión social. Las influencias afectivas en el conocimiento de las matemáticas* [Tesis Doctoral]. Universidad Complutense de Madrid.
- Gómez-Chacón, I. M. (2015). Meta-emotion and mathematical modeling processes in computerized environments. En B. Pepin, & B. Rösken-Winter (Eds.), *From beliefs and affect to dynamic systems in mathematics education. Exploring a mosaic of relationships and interactions* (pp. 201–226). Springer.
- Gómez-Chacón, I. M.^a, Romero, I. M.^a, & Garcia, M.^a M. (2016) Zig-zagging in geometrical reasoning in technological collaborative environments: a Mathematical Working Space-framed study concerning cognition and affect. *ZDM-Mathematics Education*, 48(6), 909–924.
<https://doi.org/10.1007/s11858-016-0755-2>
- Gómez-Chacón, I. M. (2017). Emotions and heuristics: The state of perplexity in mathematics. *ZDM-Mathematics Education*, 49(3), 323–338.
<https://doi.org/10.1007/s11858-017-0854-8>
- Gómez-Chacón, I. M. (2018a). Promoting the mathematics teacher self-identity. Design heuristics for didactical materials, *Journal of Educational Sciences and Psychology*, 3, 15–27.
- Gómez-Chacón, I. M. (2018b). Hidden Connections and Double Meanings: A Mathematical Viewpoint of Affective and Cognitive Interactions in Learning, En G. Kaiser, H. Forgasz, M. Graven, A. Kuzniak, E. Simmt, & B. Xu (Eds.) *Invited Lectures from the 13th International Congress on Mathematical Education. ICME-13 Monographs* (pp155–174). Springer.
https://doi.org/10.1007/978-3-319-72170-5_10
- Gómez Chacón, I. M., & De La Fuente, C. (2019). Exploring teacher's epistemic beliefs and emotions in inquiry-based teaching of mathematics, En S. Chamberlin, & B. Sriraman (Eds.) *Affect and mathematical modeling. Advances in Mathematics Education* (pp. 131–157). Springer. <https://doi.org/qjxn>
- Gómez-Chacón, I.M., & Marbán, J.M. (2019). Afecto y conocimiento profesional docente en matemáticas. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández, & M. T. González (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: formación, práctica de aula, conocimiento y competencia profesional* (pp. 397–416). Ediciones Universidad Salamanca.
- Gómez-Chacón, I. M., & Marbán, J. M. (2024). Epistemic emotions and pre-service mathematics teachers' knowledge for teaching. *ZDM-Mathematics Education*, 56(6), 1223–1237. <https://doi.org/10.1007/s11858-024-01624-5>
- González Peralta, A. G., & Aguilar, M. S. (2023). Undergraduate students' emotions around a linear algebra oral practice test. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 18(2), em0735. <https://doi.org/qjxp>
- Grootenboer, P., & Marshman, M. (2016). Mathematics, Affect and Learning. Springer. https://doi.org/10.1007/978-981-287-679-9_2

- Hannula, M. S. (2012). Exploring new dimensions of mathematics-related affect: Embodied and social theories. *Research in Mathematics Education*, 14(2), 137–161. <https://doi.org/10.1080/14794802.2012.694281>
- Hannula, M. S., Leder, G. C., Morselli, F., Vollstedt, M., & Zhang, Q. (2019). Affect and mathematics education: *Fresh perspectives on motivation, engagement, and identity* (p. 437). Springer.
- Gorgorió, N., & Planas, N. (2005). Social representations as mediators of mathematics learning in multiethnic classrooms. *European Journal of Psychology of Education*, 20(1), 91–104. <https://doi.org/10.1007/BF03173213>
- Hunter, R., Civil, M., Herbel-Eisenmann, B., Planas, N., & Wagner, D. (2018). *Mathematical discourse that breaks barriers and creates space for marginalized learners*. Sense Publisher.
- Jiménez, L., Ochoa, D. G., & Montelongo, O. (2025). *Creencias y pensamiento intuitivo y analítico en estudiantes de secundaria*. En Segundo Congreso SOMIDEM. <https://somidem.org.mx/?view=viewpdf&id=92>
- Joglar, N., Ferrando, I., Abánades, M. Ángel, Arteaga, B. P., Barrera, V., Belmonte, J. M., Crespo, R., Fernández, I. A., Fraile, A., Hernández, E., Liñán, M., Macías, J., Muñoz-Catalán, M. C., Pla-Castells, M., Ramírez, M., Segura, C., Tolmos, P., & Star, J. (2021). POEMat.ES: Pauta de observación de la enseñanza de matemáticas en educación secundaria en España. *Avances De Investigación En Educación Matemática*, (20), 89–103. <https://doi.org/qjxq>
- Klados, M. A., Paraskevopoulos, E., Pandria, N., & Bamidis, P. D. (2019). The impact of math anxiety on working memory: A cortical activations and cortical functional connectivity EEG study. *IEEE Access*, 7, 15027–15039.
- Liu, J., Li, J., Peng, W., Feng, M., & Luo, Y. (2019). EEG correlates of math anxiety during arithmetic problem solving: Implication for attention deficits. *Neuroscience letters*, 703, 191–197. <https://doi.org/10.1016/j.neulet.2019.03.047>
- Marbán, J. M. (2016). Matemáticas y dominio afectivo. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández, & A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 69–74). SEIEM.
- Marbán, J. M., Palacios, A., & Maroto, A. (2020). Enjoyment of teaching mathematics among preservice teachers. *Mathematics Education Research Journal*, 33, 613–629. <https://doi.org/10.1007/s13394-020-00341-y>
- Marbán, J. M., Fernández-Gago, J., & García, M. S. (2022). Dominio afectivo para la enseñanza: ¿qué lo hace especial? En J. Carrillo, M. Á. Montes, & N. Climent (Eds). *Conocimiento especializado del profesor de matemáticas, desde la perspectiva del MTSK* (pp.193-206). Dykinson.
- Marbán de Frutos, M., Montes, M., & Tolmos, P. (2023). Emociones de un formador de maestros enseñando Didáctica de las Matemáticas en un contexto online. *Avances De Investigación En Educación Matemática*, 24, 75–91. <https://doi.org/10.35763/aiem24.4387>

- Marbán de Frutos, M., Marbán, J. M., & Maroto Sáez, A. I. (2024). Cognitive dissonances in mathematics teachers: A cross-case study. *LUMAT-B: International Journal on Math, Science and Technology Education*, 9(2), 19.
- Martínez-Padrón, O. (2021). El afecto en la resolución de problemas de matemática. *Revista Caribeña de Investigación Educativa*, 5(1), 86–100. <https://doi.org/10.32541/recie.2021.v5i1.pp86-100>
- Martínez-Sierra, G., & García González, M. D. S. (2014). High school students' emotional experiences in mathematics classes. *Research in Mathematics Education*, 16(3), 234–250. <https://doi.org/10.1080/14794802.2014.895676>
- McLeod, D.B., & Adams, V.M. (Eds.). (1989). *Affect and mathematical problem solving: A new perspective*. Springer.
- Mejía, J., Vivas, G., & Ramírez, J. (2023). Estado situacional del dominio afectivo en el aprendizaje de las matemáticas. *Revista Electrónica de Conocimientos, Saberes y Prácticas*, 6(1), 50–62. <https://doi.org/10.5377/recsp.v6i1.16511>
- Mello-Román, J. D., & Gómez-Chacón, I. M. (2022). Creencias y rendimiento académico en matemáticas en el ingreso a carreras de ingeniería. *Aula Abierta*, 51(4), 407–415. <https://doi.org/10.17811/rifie.51.4.2022.407-415>
- Middleton, J., Jansen, A., & Goldin, G. A. (2018). The complexities of mathematical engagement: Motivation, affect, and social interactions. En J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 680–712). National Council of Teachers of Mathematics.
- Montalbán, J. G. (2024). *Dominio afectivo de las matemáticas en grados en ingeniería y en grados en educación* [Tesis Doctoral], Universidad de Murcia.
- Nava-Guzmán, C., García-González, M. D. S., & Aguilar, M. S. (2023). Connections between achievement emotions and covariational reasoning: The case of Valeria. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 18(3), em0740. <https://doi.org/10.29333/iejme/13180>
- Nava-Guzmán, C., García-González, M. D. S., & Aguilar, M. S. (2025). *Modelo hipotético de las emociones de logro en tareas matemáticas que requieren razonamiento covariacional*. En Segundo Congreso SOMIDEM. <https://somidem.org.mx/?view=viewpdf&id=93>
- Nortes, R., & Nortes, A. (2014). ¿Tienen ansiedad hacia las matemáticas los futuros matemáticos? *Profesorado. Revista de currículo y formación del profesorado*, 18(2), 153–170.
- Organisation for Economic Co-operation and Development (2023). *PISA 2022 Results (Volume I): The State of Learning and Equity in Education*. OECD Publishing. <https://doi.org/10.1787/53f23881-en>
- Ortony, A., Clore, G. L., & Collins, A. (1996). *The cognitive structure of emotions*. (J. Martínez & R. Mayoral, traductores). Siglo XXI (Trabajo original publicado en 1988).

- Para, T., & Johnston-Wilder, S. (2023). Addressing Mathematics Anxiety: A Case Study in a High School in Brazil. *Creative Education*, 14, 377–399. <https://doi.org/10.4236/ce.2023.142025>
- Pekrun, R. (2006). The control-value theory of achievement emotions: Assumptions, corollaries, and implications for educational research and practice. *Educational Psychology Review*, 18(4), 315–341. <https://doi.org/d6rrq9>
- Pekrun, R., Vogl, E., Muis, K. R., & Sinatra, G. M. (2017). Measuring emotions during epistemic activities: the Epistemically-Related Emotion Scales. *Cognition and Emotion*, 31(6), 1268–1276. <https://doi.org/ghphct>
- Pekrun, R., & Marsh, H. W. (2022). Research on situated motivation and emotion: Progress and open problems. *Learning and Instruction*, 81, 101664. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2022.101664>
- Pekrun, R. (2023). Mind and body in students' and teachers' engagement: New evidence, challenges, and guidelines for future research. *British Journal of Educational Psychology*, 93, 227–238. <https://doi.org/10.1111/bjep.12575>
- Pepin, B., & Roesken-Winter, B. (Eds.). (2015). *From beliefs to dynamic affect systems in mathematics education*. Springer.
- Pérez-Torres, B. Y., & García-González, M. del S. (2024). Factores que desencadenan la redención matemática en docentes de educación básica. En M. Sánchez Aguilar, M. del S. García González, & A. Castañeda (Eds.), *Perspectivas actuales de la Educación Matemática* (pp. 321–326). Editorial SOMIDEM. <https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S3/2024/01-36>
- Pinto, J., & Gómez, O. I. (2025). *Diagnóstico del dominio afectivo de estudiantes y docentes de matemáticas en secundarias de Yucatán*. En Segundo Congreso SOMIDEM. <https://somidem.org.mx/?view=viewpdf&id=95>
- Planas, N. (2011). Language identities in students' writings about group work in their mathematics classroom. *Language and Education*, 25(2), 129–146. <https://doi.org/10.1080/09500782.2011.552725>
- Planas, N., & Boukafri, K. (2018). Construcción de normas generadoras de oportunidades para el aprendizaje matemático. En A. Ávila (Ed.), *Rutas de la educación matemática* (pp. 37–51). SOMIDEM.
- Pompeu, C., & Gómez-Chacón, I. M. (2019). Mathematical Learning and Identity Strategies. A Case of Adult Education in Brazil. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 22(3), 191–210. <https://doi.org/qjxr>
- Quintanilla, V. A. (2019). *Vislumbrando la dimensión socioafectiva de la comprensión en matemáticas. Un estudio sobre la medida con maestros en formación*. Publicaciones y Divulgación Científica. Universidad de Málaga. <https://hdl.handle.net/10630/18963>
- Quintanilla, V. A., & Gallardo, J. (2021). Contribución del círculo hermenéutico de la comprensión al desarrollo de una interpretación ética en el aula de matemáticas. *BOLEMA: Boletim de Educação Matemática*, 35(69), 289–313. <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n69a14>

- Quintanilla, V. A., & Gallardo, J. (2022a). Integrating the affective domain when interpreting understanding in mathematics: An operational approach. In C. Fernández, S. Llinares, A. Gutiérrez, & N. Planas (Eds.), *Proceedings of the 45th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 339–346). PME.
- Quintanilla, V. A., & Gallardo, J. (2022b). Interpreting the relationship between emotions and understanding in mathematics: An operational approach applied to measurement with preservice elementary teachers. *Journal of Mathematical Behavior*, 68, 101012. <https://doi.org/qjxs>
- Quintanilla, V. A., & Gallardo, J. (2025). *Avances de un modelo operativo para la interpretación de la comprensión en matemáticas (OMIUM)*. Documento no publicado.
- Ramírez, B., García, M. D. S., Real, C. R., Cruz, P., & Reyes, A. M. (2025). *Emociones en el aprendizaje de las matemáticas de docentes en formación*. En Segundo Congreso SOMIDEM. <https://somidem.org.mx/?view=viewpdf&id=94>
- Ruiz-López, N., Bruno, G., & Suavita Martínez, M. A. (2024). *Understanding the Lived Mathematics Experiences of Marginalized Youth in the Education System*. En 15th International Congress on Mathematics Education, ICME-15 (Sydney, Australia 7 - 14 July 2024).
- Schindler, M., & Bakker, A. (2020). Affective field during collaborative problem posing and problem solving: a case study. *Educational Studies in Mathematics*, 105(3), 303–324. <https://doi.org/10.1007/s10649-020-09973-0>
- Schubert, S., Pekrun, R., & Ufer, S. (2023). The role of epistemic emotions in undergraduate students' proof construction. *ZDM—Mathematics Education*, 55(2), 299–314. <https://doi.org/10.1007/s11858-022-01413-y>
- Schukajlow, S., Rakoczy, K., & Pekrun, R. (2017). Emotions and motivation in mathematics education: Theoretical considerations and empirical contributions. *ZDM—Mathematics Education*, 49(3), 307–322. <https://doi.org/mrnt>
- Strehli, I., Burns, R. D., Bai, Y., Ziegenfuss, D. H., Block, M. E., & Brusseau, T. A. (2021). Mind–body physical activity interventions and stress-related physiological markers in educational settings: A systematic review and meta-analysis. *International journal of environmental research and public health*, 18(1), 224. <https://doi.org/10.3390/ijerph18010224>
- Suavita Ramírez, M., & Ruiz-López, N. (2017). *Imaginaris sobre la función social de las matemáticas y algunas cuestiones de género en futuros profesores*. En VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática. Libro de actas comunicaciones breves (pp. 202–209). <https://files.core.ac.uk/download/328837647.pdf>
- Thompson, P. W., & Carlson, P. M. (2018). Variation, covariation and functions: Foundational ways of thinking mathematically. En J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 421–456). National Council of Teachers of Mathematics.

“Educación Matemática en México y España: Investigaciones y líneas de trabajo compartidas”, con la edición a cargo de Eric Flores-Medrano de la Universidad Complutense de Madrid, Marta Molina de la Universidad de Salamanca, Ivonne Sandoval de la Universidad Pedagógica Nacional, Ajusco CDMX e Irene Polo-Blanco de la Universidad de Cantabria, fue publicado en formato digital PDF por la Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática A. C. y la Sociedad Española de Educación Matemática. La publicación tuvo lugar en la Ciudad de México en el año 2025.



SOMIDEM

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN Y
DIVERSIDAD DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA S. C.



Este libro nace del convenio entre la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM) y la Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática (SOMIDEM), para visibilizar colaboraciones entre las comunidades de educación matemática de México y España y proyectar nuevas iniciativas conjuntas. La primera parte reúne experiencias de investigación compartidas, sus logros y los retos que se vislumbran. La segunda parte ofrece un panorama actualizado de diversos grupos temáticos y sus líneas de trabajo, construidas de manera colaborativa. La obra invita a fortalecer redes, reconocer problemáticas emergentes y consolidar un espacio común de intercambio y desarrollo en educación matemática.



Eric Flores-Medrano

Es licenciado en Física y Matemáticas y se doctoró en 2015 por la Universidad de Huelva (España). Desde 2021 está adscrito al área de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid (España).



Marta Molina

Es licenciada en Matemáticas y se doctoró en 2007 por la Universidad de Granada donde trabajó como docente e investigadora en Didáctica de la Matemática hasta 2018. Desde entonces continúa su labor profesional en dicha área en la Universidad de Salamanca.



Ivonne Sandoval

Es licenciada en Matemáticas y Computación por la Universidad de Pamplona (Colombia) y se doctoró en 2005 por el Cinvestav (México). Desde 2008 está adscrita a la Universidad Pedagógica Nacional, Unidad Ajusco, Ciudad de México.



Irene Polo-Blanco

Es licenciada en Matemáticas y se doctoró en 2007 por la Universidad de Groningen (Países Bajos). Desde 2009 está adscrita al área de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Cantabria (España).

ISBN: 978-607-59819-8-7

Primera Edición, 2025 / Editorial SOMIDEM



Sociedad Española
de Investigación en
Educación Matemática