



Programa Grupo APRENGEOM

SEIEM2026, Madrid

Viernes, 4 de septiembre, de 12:00h – 13:30h



PROGRAMA

12:00-12:15 Comunicación (10 minutos presentación, 5 minutos preguntas)

Experimento de enseñanza sobre los triángulos según sus lados en estudiantes de final de la etapa de Educación Infantil y primer ciclo de Educación Primaria

Melania Bernabeu, Alberto Zapatera y Àngela Buforn
Universidad de Alicante

melania.bernabeu@ua.es, alberto.zapatera@ua.es, angela.buforn@ua.es

Resumen:

Un experimento de enseñanza (o *teaching experiment*) es una metodología de investigación cualitativa utilizada en didáctica de las matemáticas. Su objetivo principal es experimentar de primera mano el aprendizaje y el razonamiento de los estudiantes mientras este ocurre en el aula (Steffe y Thompson, 2000). A diferencia de una clase tradicional, aquí el investigador actúa como maestro (o trabaja en estrecha colaboración con el maestro) para intervenir activamente en las situaciones de enseñanza-aprendizaje, proponer y modificar tareas diseñadas bajo una teoría y observar cómo evoluciona el pensamiento matemático de los alumnos en tiempo real (Bernabeu et al., 2019; Steffe y Thompson, 2000). Un experimento de enseñanza presenta ciclos de investigación en tres fases (Cobb et al., 2003): diseño, implementación y análisis. En la fase de diseño se fijan los objetivos de aprendizaje que se quieren conseguir y se diseñan las tareas que faciliten la consecución de los objetivos; en la fase de implementación se ponen en práctica las tareas propuestas en la fase de diseño; y, en la fase de análisis se revisa la experiencia a partir de los referentes teóricos que sirvieron para proponer el objetivo y diseñar las tareas. Tras este ciclo de investigación, se rediseñan las tareas para solventar las limitaciones detectadas y se vuelven a implementar y analizar los datos en un nuevo ciclo, con el fin de desarrollar teoría sobre la enseñanza y el aprendizaje del concepto matemático.

En el presente trabajo se describen tres ciclos de investigación del experimento de enseñanza sobre los triángulos según la longitud de sus lados y las diferentes fases de estos ciclos. En el primer ciclo de investigación (curso 2023-2024), en el que los

participantes cursaban Educación Infantil de 5 años, se diseñó una secuencia de tareas formada por 5 tareas para trabajar los triángulos según el número de lados. Esta secuencia sigue la estructura de Bufo y Bernabeu (2023) para trabajar el concepto de polígono, pero adaptada para los triángulos según la longitud de sus lados: reconocer diferencias entre diferentes tipos de triángulos, identificar el atributo común de un conjunto de triángulos (formación de los conceptos: equilátero, isósceles y escaleno), construir triángulos según la longitud de sus lados y transformar unos triángulos en otros cambiando entre equiláteros, isósceles y escalenos. Los materiales usados fueron flashcards con variedad de triángulos equiláteros, isósceles y escalenos, alternando las formas, posiciones y tamaños (para las tres primeras tareas); y los geosticks para las dos tareas restantes. Tras la implementación y su análisis, nos dimos cuenta de que las tareas con flashcard eran puramente perceptivas, las cuales no podían manipularlas, y podían surgir dudas en la longitud de algunos lados de los triángulos; y en cuanto a las tareas con geosticks, los estudiantes se fijaban en el color del geostick en lugar de comparar la longitud de estos, por lo que construyeron y transformaron atendiendo al color de los sticks. Para el segundo ciclo de investigación (curso 2024-2025), en el que los mismos estudiantes cursaban 1º de Educación Primaria, se decidió pintar los geosticks de color negro para evitar que los estudiantes se fijaran en el color, y se centraran en su tamaño, obligándolos a comparar de forma directa los tamaños de los geosticks. Las tareas con flashcards continuaron siendo perceptivas y con los geosticks en color negro sí que conseguimos que hicieran comparaciones directas para confirmar si eran equiláteros, isósceles o escalenos. Tras su implementación y análisis, la problemática en este ciclo surge con los geosticks pintados de negro, que al manipularlos perdían la pintura, a pesar de haber probado a pintarlos con diferentes materiales. De este modo, conforme los estudiantes los manipulaban, la pintura negra desaparecía y los colores iban apareciendo y, por tanto, siguieron clasificando acorde al color y no a la comparación de las longitudes de los lados. Finalmente, en el último ciclo de investigación (curso 2025-2026), en el que los estudiantes ya cursaban 2º de Educación Primaria, se optó por medir con una cuerda los lados de los triángulos para poder hacer las comparaciones entre estos y clasificarlos. Para ello, en un extremo de la cuerda había un nudo que los estudiantes situaban en uno de los vértices del triángulo y la cuerda la estiraban por encima del lado que querían medir y para indicar la medida realizaban una pinza con los dedos sobre la cuerda, referenciando el final de la longitud del lado. Tras su implementación y análisis, se ha podido comprobar que los estudiantes han hecho un buen uso de este instrumento de medida para las tareas con flashcards, dejando de un lado lo perceptivo y centrándose en las comparaciones directas e indirectas para justificar cómo eran los triángulos.

Palabras clave: educación infantil, educación primaria, experimento de enseñanza, geometría, triángulos según sus lados

Referencias

- Bernabeu, M., Moreno, M. y Llinares, S. (2019). Experimento de enseñanza como una aproximación metodológica a la investigación en Educación Matemática. *Unipluriversidad*, 19(2), 103-123. <https://doi.org/10.17533/udea.unipluri.19.2.07>
- Bufo, À. y Bernabeu, M. (2023). Tareas para la formación del concepto de polígono en educación infantil. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 102, 47-51.

Steffe, L. y Thompson, P. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. En A. Edward y R. Lesh (Eds.), Handbook of research design in mathematics and science education (pp. 267-306). Routledge.

12:15-12:45 Taller (25 minutos + 5 minutos preguntas)

¿Es complejo este teorema geométrico? Comparando intuición humana, razonamiento automático e inteligencia artificial

Belén Ariño-Morera¹, Angélica Martínez-Zarzuelo², Sulma Farfan Sossa³ Tomás Recio⁴

¹Universidad Rey Juan Carlos, ^{2,3}Universidad Complutense de Madrid, ⁴Universidad Antonio de Nebrija.

¹belen.arino@urjc.es; ²angelica.martinez@ucm.es; ³sfarfan@ucm.es; ⁴trecio@nebrija.es

Resumen: Recientemente se han desarrollado y popularizado herramientas tecnológicas (programas de IA generativa como ChatGPT, o programas de IA simbólica como GeoGebra o GeoGebra Discovery) capaces de realizar diversas tareas de razonamiento automático en geometría Euclídea, tales como comprobar la corrección de un enunciado, proponer una demostración o descubrir propiedades (tal vez nuevas o poco conocidas) que se verifican sobre una figura geométrica dada. Diversos trabajos han analizado ya estas posibilidades desde perspectivas tanto educativas como tecnológicas (Botana et al., 2024; Martínez-Zarzuelo et al., 2026; Recio y Martínez-Zarzuelo, 2025; Recio et al., 2020).

Este contexto ha propiciado el inicio de diversas investigaciones que tratan de proponer medidas automáticas de la dificultad, el interés, la novedad o la sorpresa asociadas a los teoremas de geometría elemental, como una forma de filtrar y adecuar a las características del usuario los resultados automáticamente obtenidos. Asimismo, estas medidas podrían contribuir a alertar sobre la mayor o menor posibilidad de que la IA generativa cometa errores cuando argumenta sobre una determinada proposición, en función de la dificultad estimada de la misma. Entre estas propuestas se encuentra la desarrollada por Kovács et al. (2024), implementada en GeoGebra Discovery mediante la herramienta *ShowProof*, así como la basada en constantes geometrográficas propuesta por Quaresma y Graziani (2026).

A pesar de estos avances, se trata todavía de una línea de investigación en sus primeras etapas de desarrollo. En este contexto, un objetivo particularmente relevante consiste en analizar en qué medida las propuestas algorítmicas de estimación de la complejidad de teoremas geométricos se ajustan a otras formas de valoración de dicha complejidad, como la intuición humana o el comportamiento de herramientas de IA generativa como ChatGPT. Ya existen algunos trabajos que recogen experiencias en esta dirección, tales como Abar et al. (2026), Ariño-Morera et al. (2024) o Bartha et al. (2025), aunque todavía son estudios incipientes y parciales.

Con el fin de explorar estas cuestiones, se propone el desarrollo de un taller en el que los asistentes:

- Reciban una breve formación sobre el uso del comando ShowProof en GeoGebra Discovery y la obtención de una medida de complejidad de un teorema;
- Reciban una selección de teoremas de geometría elemental, con distintos niveles

de complejidad, y realicen una valoración personal e inmediata de la dificultad, interés, novedad o carácter sorprendente de cada uno de ellos;

- Divididos en grupos, se encarguen de analizar algunos de estos teoremas (en función del número de participantes) y calculen, con la ayuda de los autores de esta propuesta, la complejidad obtenida mediante ShowProof;
- Soliciten a ChatGPT (versión libre) una demostración de los teoremas asignados y valoren el grado de corrección y adecuación matemática de las respuestas proporcionadas;
- Pongan en común los resultados obtenidos y participen en un debate sobre el significado y las relaciones entre nociones como complejidad, dificultad, interés o novedad en geometría elemental, así como sobre las similitudes y diferencias entre las valoraciones realizadas por las personas y las proporcionadas por herramientas de razonamiento automático e inteligencia artificial.

Palabras clave: Geometría Euclídea, Razonamiento automático, Inteligencia artificial, Complejidad, GeoGebra Discovery, ChatGPT.

Referencias

- Abar, C. A. P., Almeida, M. V., Recio, T. (2026). Estimating the Complexity Levels of a Geometric Statement. *Boletín de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas*, (121), 76-97.
- Ariño-Morera, B., Kovács, Z., Recio, T., & Tolmos, P. (2024). Solving with GeoGebra Discovery an Austrian Mathematics Olympiad problem: Lessons Learned. In: P. Quaresma & Z. Kovács (Eds.), *Proceedings 14th International Conference on Automated Deduction in Geometry* (pp. 101-109). *Electronic Proceedings in Theoretical Computer Science* 398, Open Publishing Association. <https://doi.org/10.4204/EPTCS.398.13>
- Bartha, S., Kerekes, A., Kovács, Z., & Recio, T. (2025). Automated analysis of the difficulty of secondary school geometry theorems. *Annals of Mathematics Artificial Intelligence*, 93, 1011-1033. <https://doi.org/10.1007/s10472-025-09983-9>
- Botana, F., Recio, T., & Vélez, M.P. (2024). On Using GeoGebra and ChatGPT for Geometric Discovery. *Computers*, 13(8), 187. <https://doi.org/10.3390/computers13080187>
- Kovács, Z., Parisse, B., Recio, T., Vélez, M. P., & Yu, J. H. (2024). The ShowProof command in GeoGebra Discovery: Towards the automated ranking of elementary geometry theorems. *ACM Communications in Computer Algebra*, 58(2), 27-30. <https://doi.org/10.1145/3712023.3712026>
- Martínez-Zarzuelo, A., Nolla, A., Recio, T., Tolmos, P., & Vélez, M. P. (2026). Razonamiento automático con GeoGebra Discovery en contextos reales de enseñanza de las matemáticas: El proyecto IAxEM. *UNIÓN: Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 22(76). <https://www.revistaunion.org/index.php/UNION/article/view/1833>
- Quaresma, P., & Graziani, P. (2026). Towards a Structural Analysis of Interesting Geometric Theorems: Analysis of a Survey. (Abstract) https://www.uc.pt/site/assets/files/2337703/abstract_paper_127.pdf
- Recio, T., & Martínez-Zarzuelo, A. (2025). Herramientas de razonamiento automático en GeoGebra Discovery: Recursos para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. *Boletín de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas*, (120), 19-32. <https://www.ucm.es/sociedadpuigadam/todos-los-boletines>
- Recio, T., Vélez, M. P., & Van Vaerenbergh, S. (2020). Herramientas de Razonamiento Automático en GeoGebra: qué son y para qué sirven. *UNIÓN: Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 16(59), 8-15. <https://revistaunion.org/index.php/UNION/article/view/202>

12:45-13:15 Taller (25 minutos + 5 minutos preguntas)

Explorar para comprender: ¿cómo validar la eficacia cognitiva de recursos geométricos en 3D sin visión?

Teresa F. Blanco, Antía Fernández López y Cristina Lois Prados

Universidade de Santiago de Compostela

teref.blanco@usc.es, antia.fernandezlopez@usc.es, cristina.lois.prados@usc.es

Resumen: El objetivo del taller es analizar y contrastar, mediante una experiencia práctica de exploración sin visión, la adecuación de distintos recursos geométricos impresos en 3D para alumnado con discapacidad visual. Para ello, se propondrá a los participantes testar tres materiales diseñados previamente, con el fin de recoger su feedback sobre su utilidad, comprensión y eficacia a nivel cognitivo, así como identificar posibles mejoras en su diseño.

Palabras clave: Diseño 3D, discapacidad visual, recursos

Referencias:

- Fortuna, J., & Vandermolen, J. (2021). 3D Printing as a Teaching Tool for People Who Are Blind and Visually Impaired. *American Journal Of Occupational Therapy*, 75. <https://doi.org/10.5014/ajot.2021.75s2-rp211>
- Lois-Prados, C., Blanco, T.F., Fernández-López, A. y Gorgal-Romarís, A. (2025). Faceta cognitive de futuros maestros a través del modelado de maquetas 3D inclusivas. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. 509). SEIEM.
- Vázquez-Feijoo, V., Blanco, T.F., Fernández-López, A., Albella-Martínez, J. y Gorgal-Romarís A. (2026). Geometry with soul: promoting inclusion through art in elementary school. *Proceedings of INTED2026, Article 0649*. <https://doi.org/10.21125/inted.2026.0649>

13:15-13:30 Informe y propuestas (15 minutos)

Con el fin de mejorar la cohesión, difusión y colaboración entre los miembros del grupo de investigación, se proponen las siguientes acciones:

1. Lista de distribución.
2. Redes sociales: Blog, Instagram, LinkedIn, X (Twitter), otros.
3. Desarrollo de identidad visual. Logo identificativo que refuerce la imagen y visibilidad del grupo en publicaciones, congresos y materiales institucionales.
4. Reuniones online. Objetivos: Compartir resultados de investigación, Intercambiar ideas sobre Trabajos Fin de Grado (TFG), Trabajos Fin de Máster (TFM) y tesis doctorales o Identificar posibles colaboraciones internas.
5. Sugerencias.