SOCIEDAD ESPAÑOLA DE
INVESTIGACIÓN
EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Investigación en Educación Matemática XXIX

Madrid · 2-4 de septiembre de 2026



Edición:

Berta Barquero Farràs
Carlos de Castro Hernández
Ariadna Gómezescobar Camino
Antonio M. Oller-Marcén
María D. Torres González

Universidad Autónoma de Madrid / Facultad de Formación de Profesorado y Educación

Investigación en Educación Matemática XXIX

Berta Barquero Farràs, Carlos de Castro Hernández,
Ariadna Gómezescobar Camino, Antonio M. Oller-Marcén y
María D. Torres González (Eds.)

Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática
Madrid, 2-4 de septiembre de 2026

Investigación en Educación Matemática XXIX

EDICIÓN CIENTÍFICA

Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM). Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Granada. Campus de Cartuja, s/n 18071 Granada (España)

Editores:

Berta Barquero Farràs
Carlos de Castro Hernández
Ariadna Gómezescobar Camino
Antonio M. Oller-Marcén
María D. Torres González

Comité Científico

Coordinadores:

Dra. Berta Barquero Farràs (Universitat de Barcelona)
Dr. Antonio M. Oller-Marcén (Universidad de Zaragoza)
Dra. María Dolores Torres González (Universidad de Granada)

Vocales:

Dr. Carlos de Castro Hernández (Universidad Autónoma de Madrid)
Dr. Israel García Alonso (Universidad de La Laguna)
Dra. Rocío Garrido Martos (Universidad Autónoma de Madrid)
Dra. Ariadna Gómezescobar Camino (Universidad de Castilla-La Mancha)
Dr. Javier del Olmo Muñoz (Universidad de Castilla-La Mancha)
Dra. Núria Planas Raig (Universitat Autònoma de Barcelona)

© de los textos: autores

ISBN: 978-84-09-92779-1
ISSN: 2952-0045

Cítese como: Barquero, B., de Castro, C., Gómezescobar, A., Oller-Marcén, A. M. y Torres, M. D. (Eds.). (2026). *Investigación en Educación Matemática XXIX*. SEIEM.

Las comunicaciones y los resúmenes de póster aquí publicados han sido sometidos a evaluación y selección por parte de investigadores e investigadoras miembros de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM).

UAM | FACULTAD DE FORMACIÓN DE PROFESORADO Y EDUCACIÓN

SEIEM

Colaboran:

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE MADRID

GIECMES

Patrocinadores:

Smartick

Innovamat

DIXERMATES

AQUÍ HAY JUEGOS

duendeduca

PicaMates

Presentación del XXIX Simposio de la SEIEM

Madrid, 2-4 de septiembre de 2026

Rocío Garrido Martos
Universidad Autónoma de Madrid

Belén Palop del Río
Universidad Complutense de Madrid

La Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM) celebró su XXIX Simposio los días 2, 3 y 4 de septiembre de 2026 en la Facultad de Formación de Profesorado y Educación de la Universidad Autónoma de Madrid. Durante tres días, el campus de Cantoblanco reunió a investigadoras e investigadores procedentes de distintas universidades y etapas de formación, en un encuentro que volvió a poner de manifiesto la diversidad de preguntas, enfoques y líneas de trabajo que conviven hoy en la investigación en Educación Matemática.

Acoger el Simposio suponía para el comité local algo más que resolver su organización académica y logística. Desde el comienzo tuvimos muy claro que queríamos que quienes vinieran a Madrid se sintieran cómodos, acogidos y parte del encuentro. Quisimos cuidar, por supuesto, las condiciones necesarias para discutir investigación y facilitar el intercambio entre personas con trayectorias distintas, pero también esos otros detalles, grandes y pequeños, que hacen que un congreso se disfrute y que sea posible estar realmente en él. En este sentido, la conciliación familiar se planteó explícitamente como uno de los principios de esta edición. Las características del campus de Cantoblanco nos permitieron poner en marcha la PequeSEIEM, habilitando espacios y actividades para niñas y niños y favoreciendo así una participación más abierta de quienes acudían al Simposio con sus familias. Fue una pequeña apuesta organizativa, pero también una forma de expresar qué tipo de comunidad queremos seguir construyendo.

El programa comenzó el miércoles por la mañana con dos espacios que sitúan en primer plano la formación y la continuidad de nuestra comunidad investigadora. La Sesión de Jóvenes Investigadoras e Investigadores coordinada por Miguel R. Wilhelmi, dedicada a las metodologías basadas en el diseño, propuso trabajar sobre la relación entre lo previsto y lo contingente en investigación y sobre las decisiones metodológicas que se toman a lo largo de un proceso de diseño.

A continuación, la Sesión de Formación y Docencia Universitaria abordó la transferencia de la investigación a la formación docente a través de tres ejes: el pensamiento matemático, la dimensión socioafectiva y la conexión con los centros educativos. Para el comité local, esta sesión suponía además un reto muy especial. Queríamos aprovechar el Simposio para abrir una ventana a algo que forma parte de nuestro trabajo cotidiano: mostrar qué hacemos con nuestros estudiantes en la formación inicial del profesorado y cómo intentamos llevar al aula universitaria aquello que investigamos. Nelo Maestre y Angélica Benito asumieron el reto de convertir esa idea en una sesión en la que no solo se hablara de formación inicial, sino que pudiéramos verla y vivirla. Queremos agradecerles especialmente el trabajo, la generosidad y la disposición para compartirlo con toda la comunidad de la SEIEM. Y, precisamente porque queríamos mostrar y no solo contar, aquella sesión necesitó de muchas personas que aceptaron participar, exponerse, jugar, pensar y compartir escenario. Nuestro agradecimiento a todas ellas y, muy especialmente, a nuestros cuatro pequeños grandes actores, Abril, Luca, Vega y Pablo, que se prestaron a formar parte de la propuesta y nos ayudaron a mostrar, de una manera difícil de conseguir solo con palabras, algunas de las cosas que nos importan cuando pensamos en la formación inicial.

Ambas sesiones de la mañana compartían, en definitiva, una preocupación que consideramos especialmente relevante: cómo formamos a quienes empiezan a investigar y a quienes se preparan

para enseñar matemáticas, y de qué manera el conocimiento que producimos se incorpora a esos procesos formativos.

Tras la inauguración oficial, el primer Seminario de Investigación, coordinado por Irene Polo Blanco y José María Marbán Prieto, se centró en la investigación sobre diversidad e inclusión en Educación Matemática. Las intervenciones y el debate permitieron abordar la inclusión no como una cuestión periférica, sino como un problema que interpela a la investigación, a la formación del profesorado y al diseño de las situaciones de enseñanza. El segundo seminario, coordinado por Laura Muñiz-Rodríguez, estuvo dedicado a los retos de la formación inicial para la profesión docente. Las aportaciones de ambos seminarios, desde perspectivas diferentes, situaron en el centro una pregunta común: qué conocimiento necesitamos producir para comprender mejor la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y para contribuir a mejorar las condiciones en las que estos tienen lugar.

Como es habitual en los simposios de la SEIEM, una parte sustancial del programa estuvo dedicada a las comunicaciones y a los pósteres. Las tres sesiones de comunicaciones permitieron presentar y discutir investigaciones en curso o recientemente finalizadas, mientras que los pósteres se integraron en distintos momentos de pausa del programa. Esta organización buscaba que la presentación de trabajos no quedara reducida a su exposición, sino que generara conversación: preguntas, objeciones, conexiones entre investigaciones y, en no pocas ocasiones, ideas que continúan después del propio Simposio. La variedad de instituciones, grupos de investigación, temas y etapas educativas representadas volvió a mostrar una comunidad amplia y crecientemente interconectada.

El viernes estuvo dedicado en buena medida a las reuniones de los grupos de trabajo de la SEIEM. Estos grupos constituyen una de las estructuras que dan continuidad al trabajo científico entre simposios y permiten sostener discusiones especializadas, compartir proyectos y resultados y abrir espacios de colaboración. Las sesiones celebradas en Madrid reunieron a los grupos de Aprendizaje de la Geometría; Conocimiento y Desarrollo Profesional del Profesor; Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria; Didáctica de la Matemática como Disciplina Científica; Entornos Tecnológicos en Educación Matemática; Didáctica del Análisis Matemático; Historia de las Matemáticas y Educación Matemática; Investigación en Diversidad e Inclusión en Educación Matemática; Investigación en Educación Matemática Infantil; Jóvenes Investigadoras e Investigadores; y Pensamiento Numérico y Algebraico.

También quisimos que algunos momentos del Simposio permitieran mirar las matemáticas fuera de las aulas en las que estábamos reunidos. El jueves, antes de la cena de gala, realizamos una ruta matemática por Arroyo de la Vega, en Alcobendas; y el viernes, después de la clausura, una segunda ruta recorrió el campus de la Universidad Autónoma de Madrid. Las dos actividades ofrecieron una manera distinta de compartir matemáticas y conversación y de relacionar el encuentro científico con los espacios que lo acogían.

Organizar un Simposio de estas características es necesariamente un trabajo colectivo. Queremos agradecer a la Junta Directiva de la SEIEM y a la coordinación y miembros del Comité Científico su trabajo y su disponibilidad durante todo el proceso. Nuestro agradecimiento se dirige también a la Facultad de Formación de Profesorado y Educación y a la Universidad Autónoma de Madrid por acoger el encuentro y facilitar su desarrollo, así como a las instituciones y personas que colaboraron en las distintas actividades. De manera muy especial, agradecemos el trabajo del comité local, formado por Angélica Benito Sualdea, Carlos de Castro Hernández, Andrea de la Fuente Silva, Juan Fraile González, Melody García Moya, Leyre Gilardi Olarrea, Ariadna Gómezescobar Camino, Nelo Maestre Blanco, Álvaro Nolla de Celis, Javier Rodríguez Miravalles, Natalia Ruíz López y Juan José Santa Engracia de Pedro. Una parte importante de lo que funciona en un congreso ocurre sin hacerse visible, y este Simposio no habría sido posible sin su implicación antes, durante y después de los tres días de encuentro.

Y si hubo personas que hicieron posible que durante esos tres días pudiéramos estar pendientes de tantas cosas a la vez fueron nuestras voluntarias y voluntarios. Estuvieron en las aulas, las inscripciones, los pasillos, los cambios de sesión, la PequeSEIEM y allí donde hacía falta una mano. Gracias a Bailla Sadik, Elisa Fuentes, Enar Alonso, Gabriela Sánchez-Herrera, Irene Cuadrado, José Antonio Cava, Marta Martínez, Nicole Llufriu, Patricia Rey, Rafael Gómez, Raquel Jiménez, Rocío Ramírez, Rocío Rubio, Sofía González, Trinidad Rodríguez y Víctor Carrillo. Su disposición, su trabajo y, sobre todo, la manera en la que acogieron y ayudaron a quienes participaron en el Simposio fueron también parte esencial de ese ambiente cómodo y cercano que quisimos construir.

El XXIX Simposio terminó el viernes por la tarde, pero el trabajo que recoge no termina con su clausura. Las actas dejan constancia de las investigaciones presentadas; las conversaciones, preguntas y colaboraciones que surgieron en Madrid continúan de otras maneras. Quizá sea esa una de las funciones más valiosas de estos encuentros: permitirnos detener durante unos días el ritmo cotidiano para mostrar lo que estamos haciendo, someterlo a discusión y volver a nuestros grupos y universidades con preguntas algo distintas de aquellas con las que llegamos.

Además de todo eso, nos gustaría pensar que quienes estuvieron en Madrid se llevaron también la sensación de haber estado a gusto. Porque ese fue, desde el primer momento, uno de nuestros principales propósitos: que hubiera buena investigación, discusión y trabajo, pero también conversación, encuentros, risas, cafés, didáctica de las matemáticas fuera de las aulas y tiempo para compartir. Si conseguimos que durante esos tres días os sintierais un poco como la casa de la SEIEM, entonces una parte importante de aquello que nos propusimos cuando empezamos a organizar Madrid 2026 se habrá cumplido.

MUCHAS GRACIAS.

ÍNDICE

SEMINARIO DE INVESTIGACIÓN I: INVESTIGACIÓN SOBRE DIVERSIDAD E INCLUSIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

INVESTIGACIÓN SOBRE DIVERSIDAD E INCLUSIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Marbán, J. M. y Polo, I. 3

ENTRE VOZES E SILÊNCIOS: PERCURSOS DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM PORTUGAL
Martinho, M. H. 9

PROYECTO INCLUCIENCIA: COMUNICANDO CIENCIA PARA CONSTRUIR UNA SOCIEDAD INCLUSIVA. UNA MIRADA HACIA LAS ACCIONES DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA INCLUSIVA
Gómez-Hurtado, I. y Chico Gómez, A. 21

DEL RECURSO A LA TAREA: QUÉ PUEDE APORTAR LA INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA A LA EQUIDAD DE PROA+
Moreno, A. 34

SEMINARIO DE INVESTIGACIÓN II: FORMACIÓN PARA LA PROFESIÓN DOCENTE DESDE LA DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA: RETOS DE LA FORMACIÓN INICIAL

FORMACIÓN PARA LA PROFESIÓN DOCENTE DESDE LA DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA: RETOS DE LA FORMACIÓN INICIAL
Muñiz-Rodríguez, L. 47

REFLEXIÓN SOBRE LA FORMACIÓN INICIAL EN EDUCACIÓN INFANTIL DESDE LA INVESTIGACIÓN EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA: RETOS Y PROPUESTAS
Muñoz-Catalán, M. C. 52

DOCENTES SIN IDENTIDAD MATEMÁTICA: RETOS DE LA FORMACIÓN INICIAL DEL PROFESORADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA
Beltrán-Pellicer, P. 67

¿BASTA CON SABER MATEMÁTICAS? DEL DOMINIO DISCIPLINAR A LA MIRADA PROFESIONAL EN LA FORMACIÓN INICIAL DEL PROFESORADO DE SECUNDARIA
Segura, C. 82

COMUNICACIONES

CUESTIONARIO PARA CARACTERIZAR EL FENÓMENO DE FUGA STEM EN EDUCACIÓN SECUNDARIA
Abaurrea, J., Lasa, A. y Rincón, Y. R. 99

DUALIDAD EJEMPLAR-TIPO EN EL ANÁLISIS Y EN LA EVALUACIÓN DE ARGUMENTOS
Abaurrea, J., Lasa, A. y Wilhelmi, M. R. 107

EL CONOCIMIENTO SOBRE PROBLEMAS ARITMÉTICOS MULTIPLICATIVOS EN LA PLANIFICACIÓN ASISTIDA POR INTELIGENCIA ARTIFICIAL GENERATIVA: UN ESTUDIO DE CASO CON FUTUROS MAESTROS DE EDUCACIÓN PRIMARIA
Aguilar, J. J. y Lupiáñez, J. L. 115

FLEXIBILIDAD Y COMPRENSIÓN DEL ÁREA: UNA TRAYECTORIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAJE PARA LOS PRIMEROS CURSOS DE SECUNDARIA
Areny, M., Caviedes, S. y Rojas, F. 122

SENTIDOS SOBRE PENSAMIENTO FUNCIONAL EN LA FORMACIÓN DE UN GRUPO DE PROFESORAS DE EDUCACIÓN PRIMARIA
Bastías, K., Moreno, A. y Cruz, M. F. 130

ESTRATEGIAS DE ESTUDIANTES DE SECUNDARIA EN LA ESTIMACIÓN Y USO DE LA PROPORCIÓN MUESTRAL
Begué, N., Ramos-Pérez, H., Gea, M. M. y Stuardo-Aguayo, A. 138

INTERDISCIPLINARIEDAD ENTRE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS: UN ANÁLISIS DE PROGRAMACIONES DIDÁCTICAS
Carvajal, S., Barquero, B. y Martínez de Albéniz, V. 146

EXPLORACIÓN DEL CURRÍCULUM PROBABILÍSTICO EN LA NUEVA ESCUELA MEXICANA
Castro, E. S. 154

CONEXIONES INTRAMATEMÁTICAS EN TAREAS QUE INVOLUCRAN LA CONSERVACIÓN DE ÁREA
Caviedes, S., De Gamboa, G., Ribot-Llobet, E. y Badillo, E. 162

¿CÓMO SE ARTICULA EL CONOCIMIENTO DE LA PRÁCTICA MATEMÁTICA DE GENERALIZAR EN LA GESTIÓN DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS?
Chico, A., Pinto, E., Piñeiro, J. L., Climent, N., Montes, M. y Gómez, I. 170

IMPACTO DE UN CICLO FORMATIVO DE GAMIFICACIÓN EN FUTUROS DOCENTES DE MATEMÁTICAS DE SECUNDARIA
Cortés, A., Breda, A., Sánchez, A. y Giacomone, B. 178

FENÓMENOS DIDÁCTICOS VINCULADOS AL ÁLGEBRA ESCOLAR EN LA TRANSICIÓN DE LA EDUCACIÓN PRIMARIA A LA SECUNDARIA: EL CASO DE INNOVAMAT
Cortés Roca, C., Bosch Casabó, M. y Florensa Ferrando, I. 186

LA LÓGICA AUSENTE: EVOLUCIÓN DE LOS CONTENIDOS LÓGICOS EN EL CURRÍCULO DE MATEMÁTICAS DE EDUCACIÓN PRIMARIA EN ESPAÑA (SIGLO XXI)
Dolz, A., Sánchez-Pascuala, L., Sáez-Maestro, E. y Rubio-Sánchez, A. 194

ESTUDIO DE CASO SOBRE LA EVOLUCIÓN DEL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DE UNA MAESTRA EN FORMACIÓN INICIAL SOBRE EL ALGORITMO DE LA RESTA
Duarte-Tosso, I., Sánchez-Compaña, M. T. y Sánchez-Cruzado, C. 202

FUNCIONES EN LIBROS DE TEXTO DE PRIMARIA ESPAÑOLES TRAS LA INCLUSIÓN DEL SENTIDO ALGEBRAICO EN EL CURRÍCULO
Durán-Rubio, A., Cañadas, M. C. y Torres, M. D. 210

DIFERENCIAS DE GÉNERO EN LA REPRESENTACIÓN DE LAS PROPIEDADES ARITMÉTICAS EN EDUCACIÓN PRIMARIA
Flores-Lamolda, L., Ramírez, R. y Ramírez-Uclés, I. 218

CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DE FUTURAS MAESTRAS AL ANALIZAR LA DEFINICIÓN DE PROPORCIONALIDAD DIRECTA
Flores-Medrano, E., Martín-Portugués, S. G., Duro-Caballero, I. y Escudero-Ávila, D. 226

AMBIGÜEDADES Y CONFLICTOS SEMIÓTICOS
Font, V., Breda, A., Verón, A. y Vanegas, Y. 234

EL CICLO DE INVESTIGACIÓN ESTADÍSTICA EN EDUCACIÓN PRIMARIA: DECISIONES Y TENSIONES AL TRABAJAR CON UNA VARIABLE CUALITATIVA CONTEXTUALIZADA
Fraile-González, J., Palop, B., Garrido-Martos, R. y Blázquez, R. 242

LA RELACIÓN CON EL OTRO EN LA COMPRENSIÓN MATEMÁTICA: EXTENDIENDO SU INTERPRETACIÓN FUNCIONAL
Gallardo, J. y Quintanilla, V. A. 250

CANTIDAD DE INFORMACIÓN Y CALIBRACIÓN CONFIANZA–RENDIMIENTO EN ESTUDIANTES DE SECUNDARIA Y FUTUROS MAESTROS
García-Cerdá, C., Ferrando, I. y Segura, C. 258

HERRAMIENTAS TECNOLÓGICAS PARA LA ENSEÑANZA DEL SENTIDO ESTOCÁSTICO EN EDUCACIÓN SECUNDARIA
García-Cuétara, I. y Muñiz-Rodríguez, L. 266

CONOCIMIENTO INTERPRETATIVO DE FUTUROS DOCENTES DE PRIMARIA SOBRE EL PENSAMIENTO FUNCIONAL
García-Moya, M., Montoro, A. B. y Moreno, A. 274

POTENCIALIDAD DE UNA TAREA FORMATIVA PARA EL DESARROLLO DE CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO SOBRE PROPORCIONALIDAD
García-Viso, P., Climent, N. y Martín-Díaz, J. P. 282

EMERGENCIA DE CONFLICTOS SEMIÓTICOS ASOCIADOS A LA DIFERENCIAL EN UNA TAREA DE MODELIZACIÓN MATEMÁTICA CON ESTUDIANTES DE INGENIERÍA
Giacomone, B. y Verón, M. A. 290

APROXIMACIÓN A UN MODELO DE CONOCIMIENTO DE FORMADORES DE PROFESORADO DE MATEMÁTICAS DESDE LA PRÁCTICA
Giadas, P., Muñiz-Rodríguez, L. y Rodríguez-Muñiz, L. J. 298

DOMINIO AFECTIVO DOCENTE Y EXCLUSIÓN EN EL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR EN SECUNDARIA
Gómez-Pérez, O. y Pinto-Sosa, J. 306

ANÁLISIS DE ARGUMENTOS Y LÉXICO ASOCIADOS A LA ALEATORIEDAD EN FUTUROS DOCENTES DE EDUCACIÓN PRIMARIA
Izagirre, A. y Rodríguez-Alveal, F. 314

PENSAMIENTO FUNCIONAL EN FUTUROS MAESTROS DE EDUCACIÓN PRIMARIA
Jiménez-Fernández, A. I., Torres, M. D. y Castro-Rodríguez, E. 322

UN ANÁLISIS DE LAS COMPONENTES DE CONEXIÓN Y RAZONAMIENTO DE SENTIDO NUMÉRICO
Jiménez-Rubiano, L., Piñeiro, J. L. y Ruiz-Hidalgo, J. F. 330

MIRAR PROFESIONALMENTE OPORTUNIDADES DE ARGUMENTACIÓN EN LA INTERACCIÓN EN CLASE DE MATEMÁTICAS. UN ESTUDIO EMPÍRICO BASADO EN VIÑETAS
Kuntze, S., Ivars, P. y Fernández, C. 338

LA PERSISTENCIA DEL MODELO PARTE-TODO FRENTE AL SIGNIFICADO DE MEDIDA: UN ESTUDIO SOBRE EL RAZONAMIENTO DE MAESTROS EN FORMACIÓN ANTE TAREAS DE MULTIPLICACIÓN DE FRACCIONES
López, A., Arias, M., Lascorz-Lozano, L., Mengual, E. y Rodríguez-Crespo, M. 346

MANIFESTACIÓN DEL TALENTO MATEMÁTICO EN UNA TAREA DE GENERALIZACIÓN
López-Moreno, M., Torrente-Imbernon, L. y Montejo-Gámez, J. 354

LESSON STUDY COMO METODOLOGÍA DE DESARROLLO PROFESIONAL DEL PROFESORADO DE MATEMÁTICAS PARA LA SOSTENIBILIDAD
López-Serentill, P. y Alsina, A. 362

FUNDAMENTACIÓN Y PLANIFICACIÓN DE UNA PROPUESTA DE FORMACIÓN DEL PROFESORADO DE MATEMÁTICAS CON EL ENFOQUE STEAM: UN ANÁLISIS DESDE LA FACETA ECOLÓGICA DEL GAID-FORMADOR
Martins, A. C., Tinti, D. S., Burgos, M. y Sette, P. F. 369

PERCEPCIÓN DEL PROFESORADO SOBRE SU CONOCIMIENTO Y FORMACIÓN EN DISCALCULIA
Meaños-Asensi, R., Casas-Mirás, J. M. y Pérez-Rodríguez, M. 377

ESTRATEGIAS Y ERRORES DE FUTUROS MAESTROS EN LA RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA DE MEDIDA INDIRECTA
Mengual, E., Arias, M., Lascorz-Lozano, L., López, A. A. y Rodríguez-Crespo, M. 385

ESTRATEGIAS ARGUMENTATIVAS DE ESTUDIANTES DE TERCER CURSO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA
Milanesio, B., Burgos, M. y Rosso, F. 393

PERFILES DE ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN SECUNDARIA EN RELACIÓN CON LAS MATEMÁTICAS Y EL USO DE INTELIGENCIA ARTIFICIAL
Mohamed-Chemlali, N., Hossein-Mohand, H. y Hossein-Mohand, H. 401

USOS DE NEOTRIE VR Y SU EFECTO EN LA EXPLICITACIÓN DE SIGNIFICADOS: UNA COMPARACIÓN CON GEOGEBRA 3D
Molina, O. y Mendoza, A. 409

DISEÑO, CONSTRUCCIÓN Y USO DE LA "NEUROAULA": HACIA UNA CARACTERIZACIÓN DEL ESPACIO EDUCATIVO MATEMÁTICO EN SECUNDARIA
Molina-Doblas, B., Sánchez-Cruzado, C. y Sánchez-Compaña, M. T. 417

JUSTIFICACIONES DE ALUMNOS DE PRIMERO DE PRIMARIA AL RESOLVER TAREAS DE DESIGUALDADES
Narváez, R., Anglada, L., Fuentes, S. y Cañadas, M. C. 425

ESTRUCTURAS ORGANIZATIVAS Y DESDOBLES EN LA DOCENCIA DE DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS EN LA FORMACIÓN INICIAL DEL PROFESORADO EN ESPAÑA
Navarro-Clemente, I., O'Connor-Jiménez, P., del Olmo-Muñoz, J., González-Calero, J. A. y Sotos, M. A. 433

CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DE UN PROFESOR QUE INTEGRA TECNOLOGÍAS DIGITALES EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS: EL CASO DE LUIS
Padilla-Escorcia, I. A., Aguilar-González, Á. y García-Rodríguez, M. L. 441

APRENDER FUNCIONES MEDIANTE LA SONIFICACIÓN: COLABORACIÓN ENTRE UN ESTUDIANTE CIEGO Y UN ESTUDIANTE CON DIFICULTADES DE APRENDIZAJE
Palaj, L., Manolino, C. y Piñeiro, J. L. 449

CONFLICTOS SEMIÓTICOS EN LA CONSTRUCCIÓN DE TABLAS DE FRECUENCIAS CON INTERVALOS DE CLASE
Pallauta, J. D., Estrada, A., Barbero, I. y Ricart, M. 457

ECONOMÍA Y FINANZAS CON JUSTICIA SOCIAL DESDE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA: CREENCIAS DOCENTES
Parada-Rico, S. E., Conde, L. A., Suavita-Ramírez, M. A. y Figueroa-Suárez, L. 465

DISPOSITIVO FORMATIVO Y CONSTRUCCIÓN DE LA AUTOEFICACIA DOCENTE: UN ESTUDIO DE CASO EN LA FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS
Peña-Acuña, F. 473

FORMADORES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS EN LA UNIVERSIDAD: PERFILES PROFESIONALES Y VISIÓN DE LA FORMACIÓN
Pérez-Martín, P. y Contreras, L. C. 481

SITUACIONES MATEMÁTICAS EN PREGUNTAS DEL PROFESORADO EN FORMACIÓN DE EDUCACIÓN INFANTIL
Plazas, R., Chico, A. y Codes, M. 489

DIFICULTADES EN EL APRENDIZAJE DE PATRONES IDENTIFICADAS POR PROFESORES DE PRIMARIA
Reyes-Escobar, M. E. y Moreno, A. 497

CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL PROFESORADO DE MATEMÁTICA SOBRE EL HISTOGRAMA Y EL GRÁFICO DE CAJA
Rodríguez-Alveal, F., Aguayo-Arriagada, C. G. y Díaz-Levicoy, D. 505

DOMINIOS Y SUBDOMINIOS DOMINANTES, DEPENDIENTES Y ARTICULADORES EN EL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO: UNA MIRADA DESDE LAS RELACIONES DIRECCIONALES
Rojas-Celis, C., Cáceres-García, M. J. y Sánchez-Barbero, B. 513

POSICIONAMIENTOS INICIALES DE FUTUROS MAESTROS DE EDUCACIÓN INFANTIL SOBRE LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LA SIMETRÍA
Rosell, C., Vanegas, Y. y Prat, M. 521

DISEÑO DE NUEVAS PIEZAS EN COLOUR CODE PARA CREAR RETOS DE MAYOR DEMANDA VISUAL: ANÁLISIS DE PIEZAS DISEÑADAS CON ALUMNADO CON TALENTO MATEMÁTICO
Rotger-García, L., Ribera-Puchades, J. M. y Petro-Balaguer, A. B. 529

EMERGENCIA DEL PENSAMIENTO COMPUTACIONAL: PROPUESTA DE UN PROTOCOLO DE OBSERVACIÓN CUALITATIVA
Santaengracia, J. J., Palop, B. y Rodríguez-Muñiz, L. J. 537

CARACTERÍSTICAS DE LA PRÁCTICA PROFESIONAL "ANALIZAR TAREAS" DE ESTUDIANTES PARA MAESTRO DE EDUCACIÓN INFANTIL
Saorín, A., Buforn, À., Bernabeu, M. y Moreno, M. 545

APRENDER MATEMÁTICAS FUERA DEL AULA: ANÁLISIS EXPLORATORIO DE LA EXPERIENCIA DEL ALUMNADO EN UN PROGRAMA DE ENRIQUECIMIENTO
Serrano, J. Á., Martínez-Juste, S. y Oller-Marcén, A. M. 553

RELACIONES ENTRE EL CONOCIMIENTO DEL TEMA DE PATRONES Y SU ENSEÑANZA: UN ANÁLISIS DESDE EL MODELO MTSK
Tarisfeño-Vásquez, S., Zakaryan, D. y Escudero-Ávila, D. 561

EXPLORANDO RELACIONES ENTRE ACTIVIDADES MATEMÁTICAS Y MARCAS GRÁFICAS EN REPRESENTACIONES INFANTILES
Torregrosa, A., Edo, M. y Fábrega, J. 569

EL LENGUAJE PROBABILÍSTICO EN LAS NORMATIVAS CURRICULARES ESPAÑOLAS
Torres-Escoriza, V., Díaz-Levicoy, D. y López-Martín, M. M. 577

EXPLORANDO LA NO UNICIDAD DE LA GENERALIZACIÓN RECURSIVA EN SUCESIONES NUMÉRICAS
Trigueros, E. y Montejo-Gámez, J. 585

DISEÑO INCLUSIVO DE UN REI EN INFERENCIA ESTADÍSTICA EN SECUNDARIA: ADAPTACIONES DESDE EL DUA
Vásquez, S., Moreno, O., López-Serentill, P. y Barquero, B. 593

NIVELES DE LECTURA DE GRÁFICOS QUE MOVILIZAN DOCENTES AL FORMULAR PREGUNTAS A PARTIR DE UNA ACTIVIDAD DE LIBRO DE TEXTO
Verón, M. A., Cruz, M. F., Nacimento, G. F., Giacomone, B. y Benitez, M. C. 601

ESTUDIO EXPLORATORIO DE ALGUNAS MANIFESTACIONES DE PENSAMIENTO COMPUTACIONAL EN LA RESOLUCIÓN DE SEIS TAREAS BEBRAS EN EDUCACIÓN PRIMARIA
Vila-López, R. y Zapatera-Llinares, A. 609

PÓSTERES

COMPRENSIÓN ESTRUCTURAL EN PATRONES DE REPETICIÓN: EL CONTEXTO DE ENSEÑANZA
Acosta, Y., Alsina, Á. y Pincheira, N. 619

TIPOLOGÍA DE ERRORES EN LA IDENTIFICACIÓN DE DEMOSTRACIONES FORMALES BASADAS EN ARGUMENTOS INFORMALES
Acosta-Hernández, C., Marrero, I. y Camacho-Machín, M. 620

CREENCIAS EN MAESTROS EN FORMACIÓN DESDE EL KFML
Alegre, M. P. y Costado, M. T. 621

CONNECT THE DOTS: CONECTANDO CON EL CONOCIMIENTO LÓGICO-MATEMÁTICO
Antequera-Barroso, J. A., Cáceres-García, M. J. y Sánchez-Barbero, B. 622

ROL DE EJEMPLOS Y CONTRAEJEMPLOS AL ANALIZAR LA VALIDEZ DE ENUNCIADO POR DOCENTES EN FORMACIÓN
Arce, M. y Conejo, L. 623

FORMULACIÓN DE PROBLEMAS DE ABSTRACCIÓN EN EL MARCO DEL PENSAMIENTO COMPUTACIONAL DESENCHUFADO
Arencibia Cabrera, J. M., Perdomo-Díaz, J. y Quevedo Gutiérrez, E. G. 624

SIGNIFICADOS DEL PORCENTAJE: UNA REVISIÓN SISTEMÁTICA DE LA LITERATURA
Arias, J. R. y Arce, M. 625

ANÁLISIS EXPLORATORIO DE LA DIFICULTAD DEL PORCENTAJE SEGÚN SUS SIGNIFICADOS
Arias, J. R., Sanz-Herranz, H., Arce, M. y Cuida, M. A. 626

MIRADA PROFESIONAL DE ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN ESPECIAL DURANTE UN CURSO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA PARA LA DIVERSIDAD
Arriagada, V., Vargas, J. y Astudillo, S. 627

LA COMPETENCIA MATEMÁTICA EN PROYECTOS STEAM: UNA EXPERIENCIA EN EDUCACIÓN PRIMARIA
Arrieta, N., Sagarduy, A., Zamalloa, T. y Villarroel, J. D. 628

PROCESOS MATEMÁTICOS EN UN PROYECTO STEAM: PERCEPCIÓN DEL PROFESORADO VS. REALIDAD
Arrieta, I., Baro, I. e Izagirre, A. 629

INTEGRACIÓN DE LA COMPETENCIA MATEMÁTICA EN EL ENFOQUE STEAM: ANÁLISIS DE PROPUESTAS EN LA FORMACIÓN INICIAL DOCENTE
Arrieta, N., Sagarduy, A., Zamalloa, T. y Villarroel, J. D. 630

EL ESCAPE ROOM DIGITAL COMO RECURSO PARA EL APRENDIZAJE DE LAS MEDIDAS DE CENTRALIZACIÓN EN DOCENTES EN FORMACIÓN DE EDUCACIÓN PRIMARIA
Arrieta, I. 631

ENSEÑANZA DE LA PROBABILIDAD DESDE UNA PERSPECTIVA ETNOMATEMÁTICA
Barrientos, A., Benavides, J., Concha, R. y Pallauta, J. D. 632

ANÁLISIS DE PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN ESTADÍSTICA EN FORMACIÓN INICIAL DE DOCENTES
Bizet-Leyton, V. C., Fraile-González, J., Méndez-Coca, M. y Cid-Cid, A. I. 633

ANÁLISIS DIDÁCTICO DE MATERIALES TÁCTILES PARA GEOMETRÍA: ESTUDIO DE CASO
Blanco, T. F., Fernández-López, A., Lois-Prados, C. y Mariño-Fernández, S. 634

REDISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UNA SITUACIÓN DE APRENDIZAJE CON MATATALAB EN EDUCACIÓN PRIMARIA
Breda, A., Sala-Sebastià, G., Font, V., Seckel, M. J., Cortés, A., Verón, M. A. y Inglada, N. 635

REVISIÓN SISTEMÁTICA ACERCA DEL PAPEL DE LAS REDES SOCIALES EN LA FORMACIÓN DEL PROFESORADO DE MATEMÁTICAS
Calavia, I. G., Beltrán-Pellicer, P. y Martínez-Juste, S. 636

EXPLORANDO LA RELACIÓN ENTRE EL DOMINIO AFECTIVO Y LAS PRÁCTICAS DE RETROALIMENTACIÓN EN MATEMÁTICAS
Calderón-Tena, P. y Beltrán-Pellicer, P. 637

ERRORES Y CONSTRUCCIÓN DE SIGNIFICADO EN LA TRANSICIÓN AL PENSAMIENTO MATEMÁTICO AVANZADO
Castillo-González, N. y Ruiz-Hidalgo, J-F. 638

DIFICULTADES DE ESTUDIANTES DE LOS GRADOS EN EDUCACIÓN INFANTIL Y PRIMARIA EN LA RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA QUE REQUIERE EL USO DEL MÁXIMO COMÚN DIVISOR
Cillero, B., Jiménez-Gestal, C., Magreñán, Á. A. y Orcos, L. 639

TRANSFORMACIÓN DE PROBLEMAS POR FUTUROS DOCENTES DE EDUCACIÓN PRIMARIA
Collado-Soler, R. y Reyes-Escobar, M. E. 640

LAS REFORMAS DE LOS ESTUDIOS DE MAGISTERIO EN 1931 Y 1967: LA FORMACIÓN MATEMÁTICA
Colmena, S. y Sánchez-Jiménez, E. 641

CONOCIMIENTO PREVIO Y CREATIVIDAD EN PROBLEMAS DE MEDIDA Y ESTIMACIÓN: DISEÑO METODOLÓGICO DE UN ESTUDIO
Contreras-Codorniú, D. A., Gallart, C. y Segura, C. 642

FOTOGRAFÍAS DECROLYANAS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MAGNITUDES. UNA EXPERIENCIA CON DOCENTES DE EDUCACIÓN INFANTIL EN FORMACIÓN
Dólera-Almaida, J. y Carrillo-Gallego, D. 643

REFLEXIÓN COGNITIVA, RAZONAMIENTO CONDICIONAL Y LENGUAJE LÓGICO-MATEMÁTICO EN ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS DE MATEMÁTICAS
Dolz, A. y Gómez-Chacón I. M. 644

ANÁLISIS DE LOS CAMPOS DE PROBLEMAS DE PROBABILIDAD EN LIBROS DE TEXTO DE SECUNDARIA
Elgueda-Ibarra M., Batanero C. y Gea M. M. 645

TABLAS Y GRÁFICAS PARA LA ENSEÑANZA DE LA PROBABILIDAD EN LIBROS DE TEXTO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA EN ESPAÑA Y PORTUGAL
Elgueda-Ibarra M., Nascimento, M. M. y Gea M. M. 646

GÉNESIS INSTRUMENTAL EN LA FORMULACIÓN DE PROBLEMAS SOBRE ÁREA Y PERÍMETRO ASISTIDA POR IA
Embid, S. 647

FLUIDEZ EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS REALISTAS ASISTIDA POR INTELIGENCIA ARTIFICIAL GENERATIVA
Embid, S., Sánchez-Barbero, B. y Cáceres-García, M. J. 648

GEOMETRÍA PATRIMONIAL EN EL AULA: LA TESELACIÓN COMO NEXO ENTRE LAS MATEMÁTICAS Y LA EXPRESIÓN ARTÍSTICA
Escudero-Domínguez, A. 649

LA DISCALCULIA Y LA ANSIEDAD MATEMÁTICA EN LA LITERATURA CIENTÍFICA
Espina, E., Marbán, J. M. y Maroto, A. I. 650

LA CONVERGENCIA COMO BASE PARA FAVORECER LA COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE INTEGRAL
Esteve-Blasco, M., González-Astudillo, M. T., Fuertes-Prieto, M. A., Chamoso Sánchez, J. M. y Rodríguez Sánchez, M. M. 651

CARACTERIZACIÓN DE LA COMPETENCIA INTEGRAL DE INDAGACIÓN Y MODELIZACIÓN MATEMÁTICA
Falcó-Solsona, P. J., Sala-Sebastià, G. y Breda, A. 652

DESEMPEÑO Y SEGURIDAD DE ALUMNADO DE 1º DE EDUCACIÓN SECUNDARIA AL VALORAR LA RAZONABILIDAD NUMÉRICA
Fariña, M. y Bruno, A. 653

APROVECHAMIENTO DEL DISFRUTE Y LA AUTOCONFIANZA PARA REESTRUCTURAR LA ANSIEDAD MATEMÁTICA EN LA EDUCACIÓN SECUNDARIA: UNA PERSPECTIVA DE SISTEMAS
Gallego-Juan, M., Santágueda-Villanueva, M. y Sanz, M. T. 654

INFLUENCIA DEL TAMAÑO DEL GRUPO EN LA RESOLUCIÓN COLABORATIVA DE PROBLEMAS VERBALES EN CUARTO CURSO DE EDUCACIÓN PRIMARIA
Garcia-Marques, M., Arnau, D., González-Calero, J. A., Solera-Monforte, S., Tibau-Flores, A. y Arevalillo-Herráez, M. ... 655

EXPLORANDO LA RELACIÓN ENTRE EL PENSAMIENTO COMPUTACIONAL Y EL PENSAMIENTO MATEMÁTICO
Garcia-Marques, M., Garcia-Bayona, I. y Campos-Gonzalez, C. ... 656

HOJA DE TRABAJO FÍSICA VS VIRTUAL EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ARITMÉTICOS EN ESTUDIANTES AUTISTAS
García-Moya, M. y Blanco, R. ... 657

DESARROLLO DE LA MIRADA PROFESIONAL EN FUTUROS MAESTROS
García-Moya, M., Montoro, A. B. y Moreno, A. ... 658

EVOLUCIÓN DE LAS IDEAS DE DESCOMPOSICIÓN NUMÉRICA: IDENTIFICACIÓN DE PERFILES REPRESENTACIONALES EN EDUCACIÓN INFANTIL
García-Triana, B., Edo, M., Torregrosa, A. y Albarracín, L. ... 659

CARACTERIZACIÓN DEL USO DE MEDIADORES VISUALES TECNOLÓGICOS EN GEOMETRÍA 3D
Gavilán-Izquierdo, J. M., Martín-Molina, V., Toscano, R. y Fernández-León, A. ... 660

IMAGEN DE LA DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DE ROLLE Y ACCIONES EPISTÉMICAS EN LA TRANSICIÓN SECUNDARIO-TERCIARIA
Gómez-Chacón, I. M., Sánchez, G., González de Rábago, M. ... 661

RAZONAMIENTO PROBABILÍSTICO E INTELIGENCIA ARTIFICIAL GENERATIVA: UNA EXPERIENCIA FORMATIVA CON CARRERA A 20
Gómez-Rey, P., Embid, S. y Parra, V. ... 662

REKENREK COMO FACILITADOR DE LA ADQUISICIÓN DE LA CARDINALIDAD EN UNA ADOLESCENTE CON AUTISMO
Goñi-Cervera, J., Polo-Blanco, I. y Bruno, A. ... 663

PERFILES DE CONCEPCIONES DE LA RECTA TANGENTE ENTRE ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS DE CIENCIAS: UN ANÁLISIS DE CLASES LATENTES
González-López, G. J., Marrero, I. y Camacho-Machín, M. ... 664

LA REPRESENTACIÓN DE LA FRACCIÓN COMO OPERADOR MÁS ALLÁ DE LA RESOLUCIÓN ARITMÉTICA
Herreros-Torres, D., Sanz, M. T. y Gómez-Ferragud, C. B. ... 665

IDENTIFICANDO CONFLICTOS SEMIÓTICOS EN RESOLUCIONES DE UN PROBLEMA SOBRE INTEGRAL IMPROPIA
Igolnikov, N. y Rivas, M. ... 666

ANÁLISIS DE LOS GRÁFICOS DE LÍNEAS CONSTRUIDOS POR EL FUTURO PROFESORADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA EN UN PROYECTO STEM
Izagirre, A., Caño, L. y Zabaleta, A. ... 667

DIFICULTADES CONCEPTUALES EN EL RAZONAMIENTO ESTADÍSTICO DE FUTUROS MAESTROS DE PRIMARIA
Jiménez-Fanjul, N., León-Mantero, C., Casas-Rosal, J. C. ... 668

GENERALIZACIÓN A PARTIR DE LA REPRESENTACIÓN GRÁFICA. EXPERIENCIA DE AULA EN EDUCACIÓN PRIMARIA
Jiménez-Fernández, A. I., Torres, M. D. y Castro-Rodríguez, E. ... 669

IDENTIFICACIÓN DE ANSIEDAD Y OTRAS EMOCIONES EN RELACIÓN CON LAS MATEMÁTICAS DE LOS MAESTROS EN FORMACIÓN CON UN SISTEMA AUTOMÁTICO BASADO EN INTELIGENCIA ARTIFICIAL
Labajos, L. y Fuertes, M. A. ... 670

ADAPTACIÓN DE UNA ESCALA DE ANSIEDAD MATEMÁTICA PARA ALUMNADO CON TRASTORNO DEL ESPECTRO AUTISTA
Laborda-Sánchez, F., Polo-Blanco, I., Marbán, J. M. y Fernández-Sánchez, B. I. ... 671

SENTIDO ESTOCÁSTICO EN UN PROYECTO STEAM EN EDUCACIÓN SECUNDARIA: UN ESTUDIO DE CASO
Landa, J., Berciano, A. y Anasagasti, J. ... 672

COMPETENCIA MATEMÁTICA DEL PROFESORADO DE PRIMARIA EN FORMACIÓN INICIAL EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS EN CONTEXTOS DE APRENDIZAJE COOPERATIVO
Landa, J., Berciano, A. y Marbán, J. M. 673

TAREAS DE MODELIZACIÓN DISEÑADAS POR FUTUROS MAESTROS DE EDUCACIÓN PRIMARIA
Ledezma, C., Sánchez, A. y Font, V. 674

ESTUDIANTES PARA MAESTRO DE EDUCACIÓN PRIMARIA RESOLVIENDO UNA TAREA PROFESIONAL SOBRE PENSAMIENTO ALGEBRAICO
López-Iglesias, G., García-Honrado, I. y Muñiz-Rodríguez, L. 675

APRENDIZAJES DEL ALUMNADO SOBRE LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS TRAS UNA EXPERIENCIA DIDÁCTICA CON ENFOQUE HISTÓRICO
Madrid-Martín, M. J., Ruiz-Catalán, J. y Maz-Machado, A. 676

CARENCIAS EN CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL AL ACCEDER AL MÁSTER DE FORMACIÓN DE PROFESORADO DE SECUNDARIA
Mallart-Solaz, A. y Deulofeu, J. 677

LA IDENTIDAD PROFESIONAL DOCENTE MATEMÁTICA: ANÁLISIS BIBLIOMÉTRICO
María-Bartolomé, Á., Espina, E. y Maroto, A. I. 678

AVANCES HACIA LA TRIANGULACIÓN DE ANSIEDAD MATEMÁTICA: UN ENFOQUE NEUROFISIOLÓGICO
Martín-Colomo, I., Marbán J. M. y García-Monge, A. 679

JUICIOS DIAGNÓSTICOS DE FUTUROS DOCENTES SOBRE LA INFORMACIÓN EN LOS PROBLEMAS MATEMÁTICOS Y SUS IMPLICACIONES MOTIVACIONALES
Martínez-Marcos, M., Pla-Castells, M. y Segura, C. 680

DIFERENCIAS DE GÉNERO Y ACTITUD HACIA LAS MATEMÁTICAS EN TAREAS GAMIFICADAS
Martínez-Ocaña, I., Gutiérrez-Dorta, L. y García-Alonso, I. 681

RESOLUCIÓN Y FORMULACIÓN DE PROBLEMAS CON IA
Martín-Ferraz, A., Hernández, A. y Camacho-Machín, M. 682

DESARROLLO DE LA FLEXIBILIDAD MATEMÁTICA EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ARITMÉTICO-VERBALES: UN EXPERIMENTO DE ENSEÑANZA EN 4.º DE EDUCACIÓN PRIMARIA
Martín-Portugués S. G., Joglar-Prieto, N., Belmonte J. M. 683

ANÁLISIS Y REFORMULACIÓN DE PROBLEMAS DEL CAMPO ADITIVO CON INTELIGENCIA ARTIFICIAL GENERATIVA EN LA FORMACIÓN INICIAL DOCENTE
Martín-Reyes, G. M., Sánchez-Cruzado, C. y Sánchez-Compaña, M. T. 684

MAPEANDO LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA EUROPEA: TENDENCIAS, TÓPICOS Y CONEXIONES
Maz-Machado, A., Rodríguez-Baiget, D., Gutiérrez-Rubio, D., Rodríguez-Baiget, M. J. y Villarraga-Rico, M. E. 685

CARACTERIZACIÓN DE LOS MOVIMIENTOS DE HABLA QUE PROMUEVEN LA ACTIVIDAD MATEMÁTICA SOBRE DIVISIBILIDAD EN UN AULA TRILINGÜE
Morell, M. 686

PENSAMIENTO COMPUTACIONAL EN LA VALIDACIÓN, EJECUCIÓN Y GENERACIÓN DE REGLAS MEDIANTE UNA TAREA DESCONECTADA
Moreno, N., Silva, A. y Gea, M. M. 687

DISCURSO MATEMÁTICO EN UNA CLASE SOBRE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES MEDIADA POR GEOGEBRA
Múnera-Escobar, N. y Rave-Agudelo, J. G. 688

INFLUENCIA DE LA OBSERVACIÓN GUIADA EN LA PRÁCTICA DOCENTE Y LAS ACTITUDES DEL PROFESORADO
Muñoz Sirera, M. J. y Ferrando, I. 689

CAPACITACIÓN DOCENTE PARA LA INTEGRACIÓN DEL PENSAMIENTO COMPUTACIONAL EN LAS PRIMERAS EDADES
Navarro-Clemente, I., González-Calero, J. A. y del Olmo-Muñoz, J. 690

VALIDACIÓN DE UN DIAGNÓSTICO MTSK PARA EL DISEÑO DE TAREAS FORMATIVAS SOBRE DIVISIÓN CON NÚMEROS DECIMALES
Novoa-Andrades, M., Ramos-Rodríguez, E. y Fernández-Ahumada, E. y Adamuz-Povedano, N. 691

IDEAS ESTOCÁSTICAS EN EL RECURSO VIRTUAL DE EDUCACIÓN SECUNDARIA PARA ADULTOS EN ANDALUCÍA
Ortiz-Flores, D., Gea, M. M. y Garzón-Guerrero, J. A. 692

EXPLORANDO LA ESPERANZA MATEMÁTICA EN JUEGOS EQUITATIVOS CON JUGADORES NO EQUIPROBABLES
Oval, Z. y García-Alonso, I. 693

INVESTIGACIONES EN EL CONTEXTO EDUCATIVO COMO ESTRATEGIA PARA DESARROLLAR LA ALFABETIZACIÓN ESTADÍSTICA EN FUTUROS MAESTROS DE EDUCACIÓN PRIMARIA
Pallauta, J. D., Barbero, I. y Ricart, M. 694

PAUTA INTERACCIONAL PARA ACTIVIDADES CON ROBÓTICA EN EDUCACIÓN PRIMARIA
Pérez-Arias, D., Lois-Prados, C. y Sequeiros, P. G. 695

JUSTIFICACIÓN, REPRESENTACIÓN Y PROCESO DE GENERALIZACIÓN EN 3º, 4º, 5º Y 6º DE PRIMARIA
Pérez-Martos, M. C., Moreno, A. y Torres, M. D. 696

MIRAR PROFESIONALMENTE EL PENSAMIENTO FUNCIONAL EN EDUCACIÓN INFANTIL: UNA EXPERIENCIA CON FUTUROS MAESTROS
Pincheira, N., Montoro, A., Acosta, Y. y Alsina, Á. 697

CONOCIMIENTO E IDENTIDAD PROFESIONAL EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA: HACIA UN MODELO INTERDEPENDIENTE PARA LA FORMACIÓN DEL PROFESORADO
Piñero Charlo, J. C. 698

APRENDIENDO A PROYECTAR FIGURAS: UN ESTUDIO DE CASO VEHICULADO MEDIANTE NEOTRIE VR
Piñero Charlo, J. C., Costado Dios, M. T. y Alegre Salguero, M. P. 699

ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS PARA TODOS: PERSPECTIVAS DESDE LA EDUCACIÓN ESPECIAL
Pinto, E. y Piñeiro, J. L. 700

LA COMPRENSIÓN LECTORA EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
Polo-Blanco, I., Villalón, R. y Goñi-Cervera, J. 701

EVALUACIÓN DEL SENTIDO NUMÉRICO EN ESTUDIANTES DE AGRONOMÍA DE UNA UNIVERSIDAD CHILENA
Quezada-Aguayo, R. A. y Bruno, A. 702

USO CRÍTICO DE LA INTELIGENCIA ARTIFICIAL EN LA FORMACIÓN INICIAL DEL PROFESORADO PARA EL DISEÑO Y ANÁLISIS DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS
Rabelo Procópio, M. V. y Soto-Varela, R. 703

PRÁCTICAS DISCURSIVAS DE PROFESORES DE SECUNDARIA EN UN TALLER SOBRE EL DISCURSO MATEMÁTICO EN LA ENSEÑANZA DEL CONCEPTO DE ÁNGULO
Rave-Agudelo, J. G. y Rojas, F. 704

EVALUACIÓN EN COMPETENCIAS DE FORMULACIÓN DE PROBLEMAS DE ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA
Roca, P., Climent, N., Chico, M. J., Montes, M. A. y Álvarez, E. 705

DESIGNACIÓN ESPONTÁNEA DE INVARIANTES TOPOLÓGICOS EN EDUCACIÓN INFANTIL Y PRIMARIA
Rodríguez, M., Monteagudo, C., Reja, S. y Codes, M. 706

EVALUACIÓN DE LA COMPETENCIA MATEMÁTICA: CONCEPCIONES Y PRÁCTICA DOCENTE EN COLOMBIA
Rodríguez-Baiget, D., Mirquez, C. A., Maz-Machado, A., Villarraga-Rico, M. E. y Rodríguez-Baiget, M. J. 707

EXPERIMENTANDO CON ENFOQUE CPA: UNA PROPUESTA DE TRAYECTORIA PARA DESARROLLAR LOS SIGNIFICADOS DE LA PROBABILIDAD EN 1º ESO
Rodríguez-Miravalles, J., De la Fuente, A., Santaengracia, J. J. y Garrido Martos, R. 708

ANSIEDAD MATEMÁTICA EN LA FORMACIÓN INICIAL DEL PROFESORADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA: DIFERENCIAS SEGÚN CURSO Y GÉNERO
Sagarduy, A., Arrieta, N. y Soto, I. 709

IMPACTO DE LA GAMIFICACIÓN EN EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS EN EDUCACIÓN PRIMARIA: UN ESTUDIO MEDIANTE ESCAPE ROOM
Sagarduy, A., Arrieta, N. y Doukkare, F. Z. 710

REDISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UNA SITUACIÓN DE APRENDIZAJE CON BLUEBOTS EN EDUCACIÓN INFANTIL
Sala-Sebastià, G., Breda, A., Seckel, M. J., Cortés, A., Falcó-Solsona, P., Vanegas, Y. y Esteve, S. 711

LESSON STUDY EN LA INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Saló, M., Chico, J., López-Serentill, P. y Badillo, E. 712

INTERACCIÓN Y METACOGNICIÓN EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS REALISTAS CON ALUMNADO DEL PROGRAMA DE DIVERSIDAD CURRICULAR
Sánchez-Barbero, B., Cáceres-García, M. J. y Antequera-Barroso, J. A. 713

VALIDACIÓN DEL TEST SAB-IA: MEDICIÓN DE LA COMPRENSIÓN DE LAS IDEAS FUNDAMENTALES DE LA IA EN EL CONTEXTO DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Seckel, M. J., Chandía, E., Breda, A., Sala-Sebastià, G., Font, V., Verón, A. y De Abreu Silva, R. 714

PENSAMIENTO COMPUTACIONAL EN PRIMARIA: DISEÑO DE UN ESTUDIO COMPARATIVO ENTRE ACTIVIDADES DESCONECTADAS Y ROBÓTICA
Solís-Ortega, R. y Rotger-García, L. 715

CARACTERÍSTICAS DE LA REFORMULACIÓN DE PROBLEMAS DE ÁREAS POR FUTUROS DOCENTES
Sosa-Martín, D., Bruno, A. y García-Alonso, I. 716

EXPLORANDO LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA A TRAVÉS DE FUENTES HISTÓRICAS
Suárez-Ruiz F., Martínez-Juste S. y Oller-Marcén A. M. 717

PLANTEAMIENTO DE PROBLEMAS EN EDUCACIÓN PRIMARIA: DISEÑO DE UNA INVESTIGACIÓN DOCTORAL
Tévar-López, B., Ferrando, I. y Pla-Castells, M. 718

SENTIDO SOCIOAFECTIVO EN PRIMARIA: PERCEPCIONES DOCENTES ANTE LA AUSENCIA DE MARCOS PRESCRIPTIVOS
Toledo, N., Pincheira, N. y Alsina, Á. 719

HACIA UNA INVESTIGACIÓN BASADA EN EL DISEÑO PARA LA ENSEÑANZA DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES: EL PUNTO DE VISTA DEL PROFESORADO
Torrejón-Ramírez, K. y Montejo-Gámez, J. 720

ORIGAMI Y PENSAMIENTO COMPUTACIONAL EN LA FORMACIÓN INICIAL DOCENTE: ANÁLISIS MEDIANTE CRITERIOS DE IDONEIDAD DIDÁCTICA
Tramuns, E. y Hummes, V. 721

CÍRCULOS REFLEXIVOS DE MATEMÁTICAS EN LA FORMACIÓN DE FUTUROS PROFESORES
Uicab-Campos, Y. y Díez-Palomar, J. 722

BRECHAS DE GÉNERO EN EL DOMINIO AFECTIVO HACIA LAS MATEMÁTICAS EN LA FORMACIÓN DOCENTE INICIAL: UN ESTUDIO EXPLORATORIO
Usó-Abella, N., Santágueda-Villanueva, M., Sanz, M. T., López-Iñesta, E. y Grimaldo, F. 723

DE "SE PARECEN" A "TIENEN TRES LADOS": EVOLUCIÓN DEL LENGUAJE GEOMÉTRICO EN TAREAS DE CLASIFICACIÓN ENTRE LOS 5 Y 7 AÑOS
Velázquez-Ortigas, I. y Ribera-Puchades, J. M. 724

REPRESENTACIONES DE PROBLEMAS ARITMÉTICOS VERBALES EN 6º DE PRIMARIA
Zayas-De la Fuente, G. y Conejo, L. 725

Seminario de investigación I

INVESTIGACIÓN SOBRE DIVERSIDAD E INCLUSIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Coordinan:

José María Marbán Prieto
Universidad de Valladolid

Irene Polo Blanco
Universidad de Cantabria

Ponentes:

Maria Helena Martinho
Universidade do Minho
Entre vozes e silêncios: percursos de investigação em Educação Matemática em Portugal.

Inmaculada Gómez-Hurtado y Ángeles Chico Gómez
Universidad de Huelva
Proyecto INCLUCIENCIA: comunicando ciencia para construir una sociedad inclusiva. Una mirada hacia las acciones de educación matemática inclusiva.

Antonio Moreno Verdejo
Universidad de Granada
Del recurso a la tarea: qué puede aportar la investigación en educación matemática a la equidad de PROA+.

INVESTIGACIÓN SOBRE DIVERSIDAD E INCLUSIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Research in diversity and inclusion in Mathematics Education

Marbán, J. M.[a] y Polo, I.[b]

[a]Universidad de Valladolid, [b]Universidad de Cantabria

Resumen

El seminario de investigación que se describe en este documento presenta en primer lugar brevemente el grupo de trabajo IDIEM de la SEIEM, creado en 2024 para impulsar la investigación sobre diversidad e inclusión en Educación Matemática, a través de referencias a la actividad científica desarrollada por el grupo desde su creación, señalando líneas de investigación entre las que destacan la diversidad funcional, el sentido socioafectivo, las interacciones socioculturales y las altas capacidades en educación matemática. A su vez, el seminario reúne tres ponencias dedicadas a la investigación sobre educación matemática inclusiva en Portugal, a la transferencia de la investigación sobre inclusión educativa mediante el proyecto INCLUCIENCIA, con especial atención a sus aportaciones a la educación matemática inclusiva y, finalmente, al papel de la investigación para promover la equidad en programas educativos como PROA+.

Palabras clave: *diversidad, educación matemática, inclusión*

Abstract

The research seminar described in this document begins with a brief overview of the IDIEM working group of SEIEM, created in 2024 to promote research on diversity and inclusion in mathematics education, through references to the scientific work carried out by the group since its inception, highlighting research areas such as functional diversity, the socio-affective dimension, sociocultural interactions, and giftedness in mathematics education. In addition, the seminar features three presentations focused on research into inclusive mathematics education in Portugal; the transfer of research on educational inclusion through the INCLUCIENCIA project, with special attention to its contributions to inclusive mathematics education; and, finally, the role of research in promoting equity in educational programs such as PROA+.

Keywords: *diversity, inclusion, mathematics education*

INTRODUCCIÓN

La atención a la diversidad en Didáctica de la Matemática se ha convertido en una línea de interés creciente en la investigación que refleja la necesidad de avanzar hacia una educación matemática más inclusiva, equitativa y sensible a la heterogeneidad del alumnado. La diversidad en matemáticas no se limita, ni debe limitarse, únicamente a las dificultades específicas en el aprendizaje, pues comprende dimensiones cognitivas, funcionales, culturales, lingüísticas, afectivas, sociales, de género y socioeconómicas que condicionan las oportunidades de participación y aprendizaje matemático.

En el plano internacional, esta preocupación se viene reflejando en la presencia de grupos de trabajo específicos en los principales foros internacionales de investigación en Educación Matemática. Así, un primer ejemplo lo encontramos en el Congreso Europeo de Investigación en Educación Matemática (CERME) en el que se abordan grupalmente cuestiones relacionadas con la diversidad

Marbán, J. M. y Polo, I. (2026). Investigación sobre diversidad e inclusión en Educación Matemática. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (pp. 3-8). SEIEM.

desde perspectivas complementarias. Así, el TWG10 (Diversity and Mathematics Education: Social, Cultural and Political Challenge) analiza cómo los factores sociales, culturales y políticos influyen en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, prestando especial atención a cuestiones de equidad, justicia social, participación e inclusión. Por su parte, el TWG09 (Interaction, Communication and Language in Mathematics Education) estudia el papel de la comunicación, el lenguaje y la interacción en contextos diversos, mientras que el TWG08 (Affect and the Teaching and Learning of Mathematics) aborda la dimensión afectiva del aprendizaje matemático, incluyendo emociones, creencias, motivación e identidad.

En una línea similar, el Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME) incorpora grupos centrados en la diversidad y en la inclusión. En particular, durante la celebración del ICME-15, los grupos TSG 2.1 (Mathematics Education for Students with Special Learning Needs), TSG 2.4 (Culture, Language and Ethnicity in Mathematics Education) y TSG 2.6 (Mathematics Education in Under-Resourced Contexts) evidenciaron la relevancia internacional de cuestiones vinculadas a las necesidades específicas de aprendizaje, a la diversidad cultural y lingüística y a las desigualdades derivadas de los contextos sociales y educativos.

El grupo IDIEM

Siguiendo la tendencia internacional descrita previamente, en España se constituyó el grupo de trabajo Investigación en Diversidad e Inclusión en Educación Matemática (IDIEM) en el marco de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), siendo formalmente aprobado en la asamblea celebrada durante el XXVII Simposio de la SEIEM en 2024. El grupo nació con el propósito de consolidar un espacio estable de encuentro, colaboración e intercambio científico en torno a la diversidad, la inclusión y la equidad en educación matemática. José M. Marbán (Universidad de Valladolid) e Irene Polo Blanco (Universidad de Cantabria), coordinadores de este seminario, impulsaron su creación y coordinan actualmente el grupo, que pretende favorecer el desarrollo de redes de investigación y dar visibilidad a la investigación en el ámbito de la diversidad en educación matemática.

Desde su creación, el grupo ha articulado su actividad científica en torno a varias líneas de interés que reflejan la diversidad de enfoques existentes en la investigación sobre la temática que ocupa este seminario. Entre ellas, destacan las investigaciones sobre alumnado con dificultades de aprendizaje en matemáticas, educación matemática dirigida a alumnado con diversidad funcional, prácticas basadas en evidencias para favorecer el aprendizaje matemático, alumnado con altas capacidades y talento matemático, educación matemática en contextos multilingües y socioeconómicamente desfavorecidos, sentido socioafectivo, interacciones entre los aspectos sociales, culturales y afectivos, teorías socioculturales aplicadas a la educación matemática, perspectivas internacionales sobre diversidad e inclusión, prácticas de aula inclusivas y equidad en educación matemática, entre otras (pueden verse los detalles de las distintas líneas en https://www.seiem.es/grupos-de-trabajo/investigacion-en-diversidad-e-inclusion-en-educacion-matematica/).

A partir de las contribuciones presentadas en las distintas reuniones celebradas desde la creación del grupo, estas líneas generales han podido ser compartidas más de cerca en forma de líneas de trabajo más específicas que actualmente articulan, en parte, la actividad científica del grupo. Estas líneas no constituyen categorías cerradas, sino ámbitos de investigación emergentes que reflejan los intereses compartidos de sus investigadoras e investigadores participantes y que previsiblemente continuarán evolucionando en futuras reuniones.

Una de estas líneas corresponde a la educación matemática y el alumnado con diversidad funcional e incluye investigaciones sobre el aprendizaje matemático de alumnado con TEA, discapacidad intelectual, síndrome de Down y otras necesidades específicas de apoyo educativo, así como sobre el diseño de materiales manipulativos accesibles, metodologías basadas en la evidencia —como la instrucción basada en esquemas o la secuencia Concreta-Representacional-Abstracta— y la

enseñanza de contenidos como la resolución de problemas, el sentido numérico y la geometría. También aborda cuestiones como la ansiedad matemática en alumnado con TEA y el aprendizaje matemático en personas adultas con discapacidad intelectual.

Una segunda línea claramente consolidada de entre las que se han dado a conocer en las sesiones de trabajo del grupo es la relativa al sentido socioafectivo y a la diversidad en educación matemática. Esta temática integra investigaciones centradas en temas tan diversos como ansiedad matemática, emociones, dominio afectivo, actitudes, creencias, autoconcepto, identidad profesional docente, regulación emocional, diferencias de género, comprensión matemática desde perspectivas afectivas, biomarcadores asociados a la ansiedad matemática, frustración productiva y el papel del profesorado en la construcción de entornos inclusivos desde una perspectiva socioafectiva.

Una tercera línea emergente aborda las interacciones y conexiones socioculturales en educación matemática. Bajo esta temática se agrupan investigaciones que analizan el papel de los contextos culturales en el aprendizaje matemático, las conexiones entre matemáticas y prácticas socioculturales, las perspectivas etnomatemáticas, la educación STEAM vinculada al desarrollo sostenible, el acompañamiento educativo inclusivo, así como el uso de contextos culturales específicos —como el malabarismo— para el diseño de tareas matemáticas inclusivas.

La cuarta línea corresponde a altas capacidades y talento matemático. Aunque presenta un menor número de contribuciones en el marco de las sesiones celebradas por el grupo hasta la fecha, constituye una línea de investigación claramente identificable y muy consolidada dentro del grupo. En ella se incluyen estudios sobre la caracterización del talento matemático, el compromiso con la tarea, las diferencias de género en alumnado con talento matemático, el desarrollo del razonamiento y la resolución de problemas mediante juegos de estrategia, así como trabajos que analizan la alta capacidad matemática como un ámbito específico de investigación dentro de la educación matemática inclusiva.

De cara a cuantificar lo dicho anteriormente, es preciso indicar que, desde su constitución, el grupo ha celebrado dos reuniones intermedias y una reunión anual en el marco del simposio anual de la SEIEM, además de tener ya programada la correspondiente reunión para el XXIX Simposio en Madrid en septiembre 2026. La I Reunión Intermedia del grupo IDIEM tuvo lugar los días 21 y 22 de febrero de 2025 en la Universidad Autónoma de Madrid. En ella se desarrollaron dos talleres y se presentaron 11 comunicaciones científicas, que permitieron realizar un primer diagnóstico de las principales líneas de investigación presentes en el grupo. La reunión del grupo IDIEM celebrada en el XXVIII Simposio de la SEIEM que tuvo lugar en Melilla en septiembre de 2025 permitió continuar consolidando el espacio de intercambio científico del grupo. La sesión incluyó cuatro comunicaciones científicas que ampliaron las líneas de trabajo abordadas, incorporando contribuciones relacionadas con el sentido socioafectivo, el talento matemático, las conexiones socioculturales y la formación docente. La II Reunión Intermedia, celebrada en la Universidad de Cantabria los días 26 y 27 de marzo de 2026, mantuvo este formato de trabajo y contó con ocho comunicaciones científicas, sin talleres, consolidando la presencia de varias de las líneas emergentes identificadas durante la reunión anterior. Por su parte, la reunión anual del grupo que forma parte del programa del XXIX Simposio de la SEIEM contiene 13 comunicaciones, lo que sirve de indicador claro de que el grupo goza de buena salud y se muestra enormemente activo, habiendo tenido en esta ocasión que plantear una dinámica de trabajo diferente y, en cierto modo, original, para dar cabida a tan significativa participación.

En resumen, considerando las tres reuniones científicas celebradas y el simposio de septiembre de 2026, el grupo ha reunido un total de 36 comunicaciones científicas y 2 talleres.

El análisis de estas contribuciones pone de manifiesto la presencia de las cuatro grandes líneas de investigación descritas previamente y que vertebran actualmente parte de la actividad científica de IDIEM, confiando en que la dinámica de trabajo del grupo vaya acogiendo en futuros encuentros

otras muchas líneas de las que definen su propósito y razón de ser y sobre las que nos consta que se están llevando a cabo ya investigaciones muy relevantes y de alto impacto científico y social. Es más, estas líneas presentan múltiples puntos de conexión y reflejan la diversidad de enfoques desde los que actualmente se investiga la inclusión en educación matemática, constituyendo la base sobre la que previsiblemente continuará desarrollándose el grupo en los próximos años.

La tabla que se muestra a continuación (Tabla 1) resume la distribución de todas las comunicaciones presentadas hasta la fecha según las líneas temáticas señaladas.

Tabla 1

Contribuciones de IDIEM agrupadas por líneas

	I Reunión Intermedia (Madrid, febrero 2025)	Reunión SEIEM (septiembre 2025)	II Reunión Intermedia (Santander, marzo 2026)	Reunión SEIEM (septiembre 2026)	Total
Educación matemática y alumnado con diversidad funcional. (TEA, discapacidad intelectual y síndrome de Down; enseñanza en centros de educación especial; materiales manipulativos adaptados; resolución de problemas y ansiedad matemática en alumnado con TEA).	5	0	3	4	12
Sentido socioafectivo y diversidad en Educación Matemática. (Ansiedad matemática, emociones y afectividad; actitudes y autoconcepto; identidad profesional docente; género y matemáticas; agrupamientos, inclusión y toma de decisiones docentes).	5	2	4	5	16
Interacciones y conexiones socioculturales en Educación Matemática. (Cultura y matemáticas; etnomatemáticas; conexiones socioculturales; sostenibilidad y STEAM; acompañamiento educativo y diseño de tareas contextualizadas).	0	1	0	4	5
Altas capacidades y talento matemático. (Resolución de problemas en alumnado con talento matemático; razonamiento matemático avanzado; pensamiento espacial y propuestas de enriquecimiento educativo).	1	1	1	0	3
Total	11	4	8	13	36

PRESENTACIÓN DEL SEMINARIO

Centrando la atención ahora en el seminario de investigación que motiva este texto es preciso comenzar señalando que este se plantea desde la convicción de que la investigación en diversidad e

inclusión en educación matemática exige hoy una mirada internacional, capaz de poner en relación distintas tradiciones, marcos normativos y realidades educativas; en este sentido, cuenta con la participación de la presidenta de la Sociedad Portuguesa de Investigación en Educación Matemática, cuya aportación permite acercar la situación de Portugal, identificar sus avances y sus desafíos pendientes, y ponerla en diálogo directo con la experiencia española, enriqueciendo el debate con una perspectiva comparada que trasciende las fronteras nacionales. El encuentro se sustenta, además, en la necesidad de una interdisciplinariedad que conecte la innovación docente, la investigación científica y la transferencia de conocimiento a la práctica educativa, tendiendo puentes entre quienes generan evidencia desde la universidad y quienes la aplican cotidianamente en las aulas, de modo que el conocimiento producido no quede confinado al ámbito académico, sino que se traduzca en recursos, formación y cambios reales en la enseñanza. Por último, este seminario reivindica el papel insustituible de la investigación en el seguimiento y la evaluación de programas o proyectos a gran escala, como es el caso en este seminario de PROA+, aportando criterios de calidad didáctica, indicadores de equidad matemática y marcos conceptuales que permitan valorar su impacto real en el aula más allá de los indicadores puramente organizativos o administrativos. Estas tres ideas -la visión internacional, la interdisciplinariedad orientada a la transferencia y la vinculación con la evaluación de la política educativa- justifican conjuntamente el planteamiento de este seminario, concebido como un espacio de encuentro entre investigación, innovación y práctica docente y, finalmente, toma de decisiones.

Entrando ya en las comunicaciones que conforman el seminario, encontramos en primer lugar la correspondiente a Maria Helena Martinho (Universidade do Minho, CIEd), quien analiza cómo la investigación portuguesa en Educación Matemática ha abordado la diversidad a lo largo de las últimas décadas, mostrando que la heterogeneidad del alumnado, si bien tiene presencia en buena parte de los estudios sobre resolución de problemas, comunicación, razonamiento matemático y prácticas docentes, rara vez constituye su objeto central de análisis; frente a ello, la autora revisa un conjunto creciente de investigaciones que sitúan explícitamente la accesibilidad, la participación y la equidad en el centro de la indagación, con ejemplos centrados en alumnado ciego, sordo o con discapacidad, y defiende un desplazamiento conceptual desde la adaptación de recursos hacia el diseño inclusivo desde la propia planificación de las tareas, apoyado en el Diseño Universal para el Aprendizaje y en marcos normativos como el Decreto-Ley n.º 54/2018 portugués; la ponencia concluye señalando cuatro direcciones para una agenda de investigación futura -dar visibilidad a grupos poco representados, diseñar entornos accesibles desde el inicio, profundizar en el conocimiento profesional docente necesario para enseñar en contextos inclusivos y articular las líneas de investigación hoy dispersas-, defendiendo que la accesibilidad, la participación y la equidad deben convertirse en dimensiones estructurantes, y no periféricas, de la Educación Matemática.

La segunda de las comunicaciones está a cargo de Inmaculada Gómez-Hurtado y de Ángela Chico Gómez (Universidad de Huelva), quienes presentan el Proyecto INCLUCIENCIA, una iniciativa de comunicación y divulgación científica que traslada a la sociedad los resultados de varios proyectos de investigación sobre inclusión educativa, centrando su análisis en las acciones dirigidas a la Educación Matemática inclusiva; partiendo de la idea de que la inclusión es un proceso sistémico que, en el caso de las matemáticas, exige pasar de un enfoque centrado en el déficit del alumnado a otro orientado a eliminar las barreras de aprendizaje, el proyecto ha diseñado y donado a centros educativos 22 recursos didácticos inclusivos (conteo, operaciones, cálculo, geometría y resolución de problemas), valorados positivamente por el 100 % del profesorado que los solicitó, además de impartir talleres de formación para docentes y futuro profesorado y desarrollar actividades específicas con alumnado con discapacidad intelectual y trastorno del espectro autista, que mostraron una clara preferencia por los apoyos manipulativos y visuales; en paralelo, el proyecto ha producido 23 vídeos divulgativos y numerosas acciones de comunicación científica (pódcast, redes sociales, jornadas, talleres y visitas) que han acercado esta investigación a docentes, familias y ciudadanía, evidenciando

que la divulgación no es una fase final de la investigación sino un mecanismo bidireccional de transferencia del conocimiento; en conjunto, los resultados obtenidos permiten concluir que investigar, comunicar y formar son procesos inseparables para transformar la práctica educativa hacia una enseñanza de las matemáticas más accesible, equitativa e inclusiva.

La tercera y última de las comunicaciones, que tiene por autor a Antonio Moreno (Universidad de Granada), escrita desde su doble condición de miembro del comité científico de PROA+ e investigador en Didáctica de la Matemática, sostiene que la inclusión en el aula de matemáticas es ante todo un problema didáctico y no meramente organizativo, y que las medidas mejor valoradas del programa -codocencia, refuerzo, tutorías, acompañamiento socioemocional- resultan necesarias pero insuficientes y, en matemáticas, potencialmente contraproducentes al reproducir un modelo remedial y deficitario; frente a ello, propone desplazar el foco del recurso a la tarea -qué matemáticas se enseñan, con qué actividades y para quién- y examina tres ámbitos de aportación de la investigación: el diseño de tareas ricas de suelo bajo y techo alto, el pensamiento algebraico temprano como barrera crítica de exclusión, especialmente en la transición a la Educación Secundaria, y la codocencia como recurso que solo resulta inclusivo cuando se sostiene en conocimiento didáctico compartido; concluye el autor señalando que el reto organizativo y el didáctico son en realidad un mismo problema y plantea una agenda de investigación compartida entre la política de equidad educativa y la comunidad investigadora en educación matemática.

Cerramos esta presentación del seminario agradeciendo a la Junta Directiva de la SEIEM, así como a los comités científico y organizador del XXIX Simposio de la SEIEM su confianza, su apoyo a este seminario y, sobre todo, su sensibilidad hacia las temáticas que aborda. Esperamos haber diseñado una propuesta que esté a la altura de la confianza recibida.

ENTRE VOZES E SILÊNCIOS: PERCURSOS DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM PORTUGAL

Between voices and silences: Research trajectories in Mathematics Education in Portugal

Martinho, M. H.

Centro de Investigação em Educação (CIEd), Universidade do Minho

Resumo

Esta intervenção reflete sobre a forma como a diversidade tem sido abordada na investigação em Educação Matemática em Portugal. Apresenta um panorama da investigação realizada, evidenciando que as questões da heterogeneidade, da participação e do acesso às aprendizagens têm estado presentes, embora raramente como foco central. Em seguida, são discutidos estudos desenvolvidos, sobretudo no âmbito da educação especial, centrados na acessibilidade às matemáticas. A partir destes exemplos, problematiza-se a construção de ambientes de aprendizagem que valorizem diferentes formas de comunicar, representar e pensar matematicamente. A intervenção identifica ainda desafios pouco explorados, defendendo uma agenda de investigação que torne mais visíveis grupos sub-representados, aprofunde práticas pedagógicas promotoras de participação e aprendizagem e assuma a acessibilidade e a equidade como dimensões estruturantes da Educação Matemática.

Palavras-chave: *educação matemática, didática, diversidade, inclusão, acessibilidade*

Resumen

Esta intervención reflexiona sobre la forma en que se ha abordado la diversidad en la investigación sobre la enseñanza de las matemáticas en Portugal. Presenta una visión general de la investigación realizada, poniendo de manifiesto que las cuestiones de la heterogeneidad, la participación y el acceso al aprendizaje han estado presentes, aunque rara vez como tema central. A continuación, se analizan los estudios llevados a cabo, sobre todo en el ámbito de la educación especial, centrados en la accesibilidad a las matemáticas. A partir de estos ejemplos, se plantea la cuestión de la creación de entornos de aprendizaje que valoren las diferentes formas de comunicarse, representar y pensar matemáticamente. La ponencia identifica además retos poco explorados y aboga por una agenda de investigación que dé mayor visibilidad a los grupos infrarrepresentados, profundice en las prácticas pedagógicas que promuevan la participación y el aprendizaje, y asuma la accesibilidad y la equidad como dimensiones estructurales de la Educación Matemática.

Palabras clave: *educación matemática, didáctica, diversidad, inclusión, accesibilidad*

Abstract

This paper reflects on how diversity has been addressed in research into mathematics education in Portugal. It provides an overview of the research carried out, highlighting that issues of heterogeneity, participation and access to learning have been present, although rarely as a central focus. It then discusses studies, particularly within the field of special education, which focus on accessibility to mathematics. Drawing on these examples, the paper raises questions regarding the

Martinho, M. H. (2026). Entre vozes e silêncios: percursos de investigação em Educação Matemática em Portugal. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (pp. 9-20). SEIEM.

creation of learning environments that value different ways of communicating, representing and thinking mathematically. The paper also identifies under-explored challenges, advocating a research agenda that raises the profile of under-represented groups, explores pedagogical practices that promote participation and learning in greater depth, and treats accessibility and equity as fundamental dimensions of mathematics education.

Keywords: *mathematics education, teaching methodology, diversity, inclusion, accessibility*

INTRODUÇÃO

As salas de aula de Matemática caracterizam-se hoje por uma crescente diversidade de alunos, que se manifesta ao nível dos percursos escolares, contextos socioculturais e linguísticos, capacidades, experiências, interesses, ritmos de aprendizagem e formas de comunicar, participar e construir conhecimento matemático. Esta variabilidade constitui uma característica inerente aos contextos educativos contemporâneos e coloca novos desafios ao ensino, à aprendizagem e à própria investigação em Educação Matemática.

Neste contexto, as questões da equidade, da inclusão e da acessibilidade têm vindo a assumir um lugar cada vez mais relevante nas políticas educativas e na investigação internacional. Como argumenta Skovsmose (2024), a Educação Matemática não é neutra relativamente às desigualdades sociais; pelo contrário, deve interrogar as condições que favorecem ou limitam a participação dos alunos e assumir a justiça social como uma dimensão constitutiva da investigação e da prática educativa. Na mesma linha, o recente posicionamento conjunto do National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) e do Council for Exceptional Children (CEC) defende que a inclusão não deve ser entendida como uma resposta dirigida apenas a determinados alunos, mas como um princípio orientador de um ensino da Matemática de elevada qualidade, capaz de assegurar oportunidades de aprendizagem matematicamente significativas para todos (NCTM & CEC, 2024).

Também a investigação em Educação Matemática tem vindo a reconhecer esta diversidade como uma característica intrínseca dos contextos educativos. Estudos sobre ensino e aprendizagem, comunicação, resolução de problemas, raciocínio matemático, desenho de tarefas ou práticas dos professores consideram, de forma mais ou menos explícita, a heterogeneidade dos alunos e procuram compreender como promover a sua participação nas aprendizagens. Neste sentido, a diversidade atravessa um conjunto alargado de investigações e constitui frequentemente uma condição inerente aos contextos em que estas se desenvolvem.

Contudo, este reconhecimento nem sempre se traduz na sua problematização como objeto de investigação. A diversidade tende, muitas vezes, a permanecer como pano de fundo dos estudos, sendo menos frequentes as investigações que colocam no centro da análise as barreiras à aprendizagem e à participação, a acessibilidade do ensino da Matemática, as formas de comunicação e representação que tornam o conhecimento matemático mais ou menos acessível ou as experiências de grupos de alunos cujas vozes continuam relativamente pouco representadas na produção científica. Deste modo, embora a investigação em Educação Matemática tenha produzido conhecimento relevante sobre o ensino e a aprendizagem em contextos diversos, permanece o desafio de compreender de que forma a acessibilidade, a participação e a equidade podem constituir princípios estruturantes da produção de conhecimento nesta área.

É neste enquadramento que este artigo propõe uma reflexão sobre a forma como a diversidade tem sido perspetivada na investigação portuguesa em Educação Matemática. O resto do artigo estrutura-se em cinco secções. Na primeira, apresenta-se uma leitura interpretativa da investigação desenvolvida em Portugal, procurando evidenciar de que modo as questões da diversidade atravessam diferentes linhas de investigação e identificar as dimensões que permanecem menos visíveis. Na segunda secção, discutem-se algumas linhas de investigação desenvolvidas pela autora e por outros investigadores que colocam explicitamente a acessibilidade, a participação e a equidade no centro da

análise, ilustrando diferentes formas de problematizar a diversidade enquanto objeto de investigação. A partir desta análise, identificam-se desafios, na terceira secção, e apontam-se possíveis linhas de investigação futura na secção seguinte, defendendo que a acessibilidade, a participação e a equidade não constituem apenas preocupações associadas à educação inclusiva, mas dimensões fundamentais para compreender e desenvolver o ensino e a aprendizagem da Matemática. Na quinta secção sumaria-se e conclui-se o artigo.

A DIVERSIDADE COMO PREOCUPAÇÃO TRANSVERSAL DA INVESTIGAÇÃO EM PORTUGAL

A investigação em Educação Matemática desenvolvida em Portugal ao longo das últimas décadas evidencia uma crescente atenção à complexidade dos processos de ensino e aprendizagem, procurando compreender como os alunos aprendem Matemática em diferentes contextos e como os professores podem promover aprendizagens significativas. Embora as questões da diversidade nem sempre sejam explicitamente assumidas como foco da investigação, elas encontram-se presentes em muitos estudos, refletindo a heterogeneidade dos alunos, das salas de aula e dos contextos educativos.

Paralelamente, têm vindo a afirmar-se linhas de investigação que colocam explicitamente no centro da análise questões relacionadas com a inclusão, a acessibilidade, a participação, a diversidade cultural e a equidade. Este movimento acompanha a evolução das discussões internacionais em Educação Matemática, mas também transformações ocorridas nas políticas educativas portuguesas, em particular após a publicação do Decreto-Lei n.º 54/2018, que veio reforçar uma perspetiva centrada na remoção de barreiras à aprendizagem e à participação. Estudos recentes evidenciam igualmente uma preocupação crescente em compreender de que forma os princípios da educação inclusiva se traduzem nas práticas de ensino da Matemática e nas oportunidades de aprendizagem dos alunos (Ponte, 2025; Vicente & Lima, 2025).

Nesta secção propõe-se uma leitura interpretativa da investigação portuguesa organizada em torno de três eixos: a diversidade como característica das salas de aula; a participação, equidade e aprendizagem; e aquilo que permanece pouco visível.

A diversidade como característica das salas de aula

Grande parte da investigação portuguesa em Educação Matemática parte do reconhecimento de que as salas de aula constituem contextos naturalmente heterogéneos. Os alunos diferem nos seus conhecimentos prévios, experiências, interesses, ritmos de aprendizagem, formas de comunicação e modos de construir significado matemático. Esta diversidade surge frequentemente como condição de partida das investigações, ainda que raramente seja problematizada enquanto objeto específico de estudo.

Esta perspetiva pode ser identificada em estudos sobre resolução de problemas, que analisam a diversidade de estratégias, processos de resolução e formas de justificar matematicamente (por exemplo, Barbosa & Vale, 2022; Fernandes et al., 2025; Jacinto et al., 2018). Também a investigação sobre comunicação matemática evidencia a importância do diálogo, da argumentação e da negociação de significados em salas de aula onde coexistem diferentes formas de participação e expressão (por exemplo, Duarte et al., 2025). De igual modo, os estudos sobre raciocínio matemático valorizam a diversidade de processos de pensamento e de estratégias de resolução (por exemplo, Barbosa, 2009; Brocardo et al., 2022; Martins & Martinho, 2021).

Também a investigação sobre práticas profissionais dos professores evidencia a necessidade de organizar ambientes de aprendizagem capazes de responder à diversidade existente nas turmas, nomeadamente através da seleção de tarefas, da condução das discussões matemáticas, da gestão das interações na sala de aula ou da diferenciação pedagógica. Estes aspetos são visíveis, por exemplo, nos diferentes capítulos do livro do projeto Práticas Profissionais do Professor de Matemática (Ponte, 2014).

Em conjunto, estes estudos reconhecem uma conceção da diversidade como característica inerente às salas de aula e condição normal do ensino e da aprendizagem da Matemática. Contudo, a diversidade tende a assumir sobretudo o papel de contexto da investigação, mais do que de objeto específico de análise.

Participação, equidade e aprendizagem

Um segundo conjunto de investigações desloca o foco para as condições que favorecem a participação e a aprendizagem dos alunos. Esta preocupação tem uma expressão significativa na investigação portuguesa e pode ser reconhecida desde os trabalhos que defenderam uma perspetiva de "Matemática para todos". Nesta linha, Paulo Abrantes sublinha a necessidade de proporcionar a todos os alunos oportunidades de aprendizagem matematicamente ricas e desafiantes, valorizando o papel das tarefas, das interações e da ação do professor na construção de ambientes promotores de aprendizagem (Abrantes, 2001; Abrantes et al., 1999).

Embora muitos estudos posteriores não recorram explicitamente às noções de inclusão ou acessibilidade, analisam questões intimamente relacionadas com a equidade educativa, procurando compreender de que forma diferentes práticas de ensino podem criar oportunidades de participação e aprendizagem para todos os alunos. Nesta linha, a investigação portuguesa tem vindo a evidenciar o papel das tarefas matemáticas, da comunicação na sala de aula, das discussões coletivas e das ações do professor na construção de ambientes de aprendizagem que favorecem a participação ativa dos alunos e a construção de conhecimento matemático (Abrantes, 2001; Guerreiro et al., 2016; Mascarenhas et al., 2020; Oliveira et al., 2013; Vale & Barbosa, 2020).

Importa reconhecer que esta linha integra igualmente estudos que colocam explicitamente a diversidade no centro da análise. Destacam-se investigações sobre aprendizagem matemática em contextos multiculturais, identidades dialógicas, comunidades ciganas, inclusão escolar e acessibilidade às aprendizagens matemáticas, que analisam de forma direta as relações entre Educação Matemática, participação, diversidade e justiça social (por exemplo, César, 2009; César & Machado, 2024). Embora desenvolvidos a partir de referenciais distintos, estes trabalhos têm contribuído para ampliar a compreensão das condições que favorecem a participação de grupos tradicionalmente menos representados na investigação.

Em conjunto, estas investigações mostram uma evolução da própria noção de "Matemática para todos". Se os trabalhos pioneiros enfatizavam sobretudo a criação de oportunidades de aprendizagem para todos os alunos, a investigação mais recente procura compreender quem participa nas atividades matemáticas, em que condições essa participação ocorre e que barreiras persistem para alguns grupos de alunos. Deste modo, a investigação portuguesa aproxima-se progressivamente das atuais discussões internacionais sobre equidade, inclusão e justiça social em Educação Matemática.

O que permanece pouco visível

Apesar destes desenvolvimentos, alguns domínios continuam relativamente pouco explorados no panorama da investigação portuguesa em Educação Matemática.

Nos últimos anos tem vindo a crescer o número de estudos que colocam a acessibilidade às aprendizagens matemáticas no centro da investigação, abordando questões relacionadas com a comunicação matemática, a utilização de tecnologias de apoio, o desenho de tarefas acessíveis, a educação de alunos surdos ou cegos, o desenvolvimento profissional de professores e a concretização dos princípios da educação inclusiva (por exemplo, Tinoco et al., 2020; Vicente & Lima, 2025).

Todavia, estas investigações permanecem frequentemente concentradas em determinados projetos, equipas ou programas de investigação, não estando ainda suficientemente disseminados no conjunto da produção científica em Educação Matemática. Paralelamente, outras dimensões da diversidade —

como o neurodesenvolvimento, o multilinguismo, a sobredotação ou diferentes formas de vulnerabilidade social — continuam relativamente pouco representadas.

Esta constatação é particularmente relevante para compreender a evolução desta área. A diversidade encontra-se hoje amplamente reconhecida como uma característica das salas de aula e como uma preocupação educativa. O desafio consiste agora em consolidar uma agenda de investigação que articule contributos provenientes da Educação Matemática, da Educação Especial, da educação intercultural, da formação de professores e dos estudos sobre práticas de ensino, tomando a acessibilidade, a participação e a equidade como dimensões estruturantes da produção de conhecimento.

Nesta leitura interpretativa identificamos diferentes formas como a diversidade tem sido perspetivada na investigação portuguesa em Educação Matemática. Como sintetiza o Quadro 1, a diversidade surge predominantemente como uma característica dos contextos de ensino e aprendizagem ou como uma preocupação educativa transversal, sendo menos frequentes os estudos que a assumem explicitamente como objeto central de investigação.

Quadro 1

Uma leitura interpretativa da investigação portuguesa em Educação Matemática

Eixo	A diversidade assume sobretudo o papel de...	Exemplos de temas	Desafios para o desenvolvimento do campo
Diversidade como contexto	Característica das salas de aula	Resolução de problemas; comunicação; raciocínio; práticas docentes	Problematizar a diversidade como objeto de investigação
Participação, equidade e aprendizagem	Preocupação educativa	Equidade; sucesso; participação; inclusão; diversidade cultural	Articular diferentes referenciais e linhas de investigação
Diversidade como objeto de investigação	Foco explícito da investigação	Educação especial; acessibilidade; comunidades ciganas; formação de professores	Consolidar uma agenda transversal em Educação Matemática

É precisamente sobre este terceiro eixo — a diversidade como objeto de investigação — que incide a secção seguinte, através da análise de estudos que colocam a acessibilidade às aprendizagens matemáticas no centro da investigação.

QUANDO A DIVERSIDADE SE TORNA OBJETO DE INVESTIGAÇÃO

A leitura apresentada na secção anterior evidência que a diversidade atravessa grande parte da investigação portuguesa em Educação Matemática, embora raramente constitua o seu foco central. Progressivamente, contudo, têm vindo a afirmar-se linhas de investigação que colocam explicitamente a acessibilidade, a participação e a equidade no centro da análise. Desenvolvidas em contextos, projetos e referenciais teóricos distintos, estas investigações têm contribuído para aprofundar a compreensão das condições que tornam possível a aprendizagem matemática de alunos com diferentes características, percursos e formas de participação.

Entre estas linhas destacam-se estudos centrados na acessibilidade às aprendizagens matemáticas, na comunicação e participação de grupos de alunos tradicionalmente menos representados e na conceção de ambientes de aprendizagem orientados por princípios de inclusão desde a fase de planificação. Embora incidam sobre problemáticas específicas, estes trabalhos convergem na ideia de que as dificuldades de aprendizagem não podem ser compreendidas apenas a partir das características dos

alunos, exigindo igualmente uma análise das condições de ensino e das barreiras criadas pelos próprios contextos educativos.

Esta evolução acompanha transformações mais amplas nas políticas educativas e nos referenciais conceptuais da educação inclusiva. Em Portugal, o Decreto-Lei n.º 54/2018 constitui um marco relevante ao valorizar a antecipação da diversidade dos alunos através de abordagens como o Desenho Universal para a Aprendizagem (DUA) e a abordagem multinível. Neste enquadramento, a investigação em Educação Matemática tem vindo a incorporar novas questões de investigação, procurando compreender de que forma a acessibilidade, a participação e a equidade podem constituir princípios estruturantes do ensino e da aprendizagem da Matemática.

Acessibilidade e construção do conhecimento matemático

Um primeiro eixo de investigação procura compreender de que modo as formas de representação, comunicação e interação condicionam a construção do conhecimento matemático (Brazileiro, 2018; Ribeiro, 2012). Desenvolvidos em contextos diversos, incluindo estudos com alunos na condição de cegueira ou surdez, estes trabalhos evidenciam que o ensino da Matemática continua frequentemente assente em convenções de representação e de comunicação que nem sempre respondem à diversidade de formas de aceder ao conhecimento matemático, colocando desafios à compreensão dos conceitos, das tarefas e dos recursos utilizados.

Os resultados obtidos mostram que a utilização de representações tácteis, materiais manipuláveis, tecnologias digitais acessíveis e diferentes formas de mediação não constituem apenas uma resposta a necessidades específicas. Pelo contrário, estas investigações sugerem que a construção de significado matemático pode apoiar-se em múltiplas formas de representação, questionando a centralidade de determinadas convenções tradicionalmente privilegiadas no ensino da Matemática (Cruz-Santos & Martinho, 2019; Saraiva et al., 2021).

Mais do que promover o desenvolvimento de recursos específicos, estes estudos deslocam a atenção para a própria natureza do conhecimento matemático escolar e para as formas como este é representado, comunicado e apropriado pelos alunos. Nesta perspetiva, a acessibilidade deixa de ser entendida como uma propriedade dos recursos e passa a constituir uma característica do próprio processo de construção do conhecimento matemático.

Comunicação e acessibilidade às aprendizagens matemáticas

Um segundo eixo de investigação evidencia que a comunicação constitui uma dimensão estruturante da acessibilidade às aprendizagens matemáticas. Aprender Matemática implica participar em processos de negociação de significados, interpretar diferentes sistemas de representação e construir conhecimento em interação com os outros (César, 2009; César & Machado, 2024).

Neste domínio, a investigação desenvolvida com alunos surdos mostra que a construção de significados matemáticos depende não apenas do acesso à Língua Gestual Portuguesa, mas também das possibilidades de traduzir, interpretar e negociar conceitos cuja terminologia nem sempre encontra correspondência direta entre diferentes sistemas linguísticos. Questões relacionadas com o vocabulário matemático, a criação ou adaptação de gestos específicos e a articulação entre diferentes formas de representação revelam-se determinantes para a participação dos alunos nas atividades matemáticas (Tinoco et al., 2020).

Estes estudos mostram igualmente que muitas dificuldades frequentemente atribuídas aos alunos decorrem das formas de comunicação privilegiadas nos ambientes educativos. A ampliação das possibilidades de comunicar matematicamente — através da oralidade, da língua gestual, da escrita, de representações gráficas, tácteis ou digitais — favorece não apenas o acesso aos conteúdos, mas também a participação nas discussões matemáticas e a construção coletiva de conhecimento.

Deste modo, a comunicação deixa de ser concebida apenas como um meio de transmitir conhecimento, para assumir um papel constitutivo da própria aprendizagem matemática e da construção de ambientes de aprendizagem mais inclusivos (César et al., 2015).

Da adaptação ao desenho inclusivo

Um terceiro eixo traduz uma mudança conceptual na forma de perspetivar a inclusão em Educação Matemática. Em vez de centrar a atenção na adaptação de recursos ou de tarefas para responder às necessidades de determinados alunos, estas investigações procuram compreender como conceber, desde o início, ambientes de aprendizagem capazes de responder à diversidade presente nas salas de aula.

Esta perspetiva aproxima-se dos princípios que enquadram a educação inclusiva em Portugal. Partindo do reconhecimento da variabilidade dos alunos como condição inerente aos contextos educativos, estes referenciais defendem que o ensino deve ser concebido desde a planificação de modo a oferecer múltiplas formas de envolvimento, de representação e de expressão das aprendizagens (Meyer et al., 2014).

Na investigação em Educação Matemática, esta orientação encontra expressão em estudos sobre o desenho de tarefas matemáticas, a organização de ambientes de aprendizagem e o desenvolvimento profissional de professores comprometidos com práticas inclusivas (Menezes et al., 2014; Oliveira et al., 2013). Particularmente relevante é a investigação que integra metodologias colaborativas, como o Lesson Study, na formação inicial de professores. Ao planificarem, observarem e analisarem coletivamente aulas concebidas para responder à diversidade dos alunos, os futuros professores desenvolvem uma compreensão mais profunda das barreiras à aprendizagem e das possibilidades de construir ambientes matemáticos acessíveis desde a fase de planificação (Cardoso et al., 2025; Quaresma et al., 2022).

Em conjunto, estas investigações traduzem uma mudança significativa na forma de compreender a inclusão. A acessibilidade deixa de ser concebida como um conjunto de adaptações dirigidas a alguns alunos para passar a constituir um princípio orientador da planificação curricular, da seleção de tarefas, da organização das interações e da gestão da aprendizagem.

O QUE APRENDEMOS COM ESTES ESTUDOS?

Apesar de incidirem sobre contextos, grupos de alunos e referenciais distintos, as investigações apresentadas nas duas subsecções anteriores convergem num conjunto de ideias fundamentais. Em primeiro lugar, mostram que as dificuldades de aprendizagem não podem ser compreendidas exclusivamente a partir das características dos alunos, exigindo igualmente uma análise das oportunidades e das barreiras criadas pelos ambientes de aprendizagem. Em segundo lugar, evidenciam que a acessibilidade constitui uma dimensão pedagógica e didática que atravessa o desenho das tarefas, as formas de representação, a comunicação matemática, a organização das interações e o desenvolvimento profissional dos professores. Finalmente, sugerem que investigar a aprendizagem matemática em contextos de maior diversidade permite produzir conhecimento que ultrapassa esses contextos específicos, contribuindo para repensar princípios, práticas e modelos de ensino relevantes para todos os alunos.

Nesta perspetiva, a diversidade deixa de ser entendida apenas como uma característica dos alunos ou das salas de aula para se afirmar como uma categoria de análise capaz de ampliar a compreensão dos processos de ensino e aprendizagem da Matemática. Mais do que responder a necessidades particulares, estas investigações mostram que a acessibilidade, a participação e a equidade constituem dimensões estruturantes da produção de conhecimento em Educação Matemática.

A investigação desenvolvida em contextos de diversidade não contribui apenas para responder às necessidades de grupos específicos de alunos. Os estudos apresentados ao longo deste artigo mostram

que colocar a acessibilidade, a participação e a equidade no centro da investigação permite revisitar questões fundamentais da Educação Matemática e produzir conhecimento que ultrapassa os contextos em que foi gerado. Nesta perspetiva, a diversidade deixa de constituir apenas um desafio pedagógico para se afirmar como uma oportunidade de aprofundar a compreensão dos processos de ensino e aprendizagem da Matemática. Detalhemos alguns destes caminhos.

O desafio da acessibilidade na aprendizagem

Uma primeira ideia que emerge destas investigações diz respeito à evolução da própria noção de acessibilidade. Durante muito tempo, esta foi entendida sobretudo como um conjunto de adaptações destinadas a responder às necessidades de determinados alunos. Os estudos analisados sugerem, porém, que esta perspetiva é insuficiente.

Pensar a acessibilidade implica considerar, desde a planificação do ensino, a variabilidade dos alunos e antecipar diferentes formas de representação, comunicação, envolvimento e participação. Nesta perspetiva, a conceção das tarefas, a organização das interações, a seleção dos recursos e as decisões do professor deixam de constituir aspetos neutros do ensino para assumirem um papel central na construção de ambientes de aprendizagem matematicamente exigentes e acessíveis.

Esta evolução aproxima-se dos princípios do Desenho Universal para a Aprendizagem e da abordagem multinível, ao defender que a diversidade deve ser considerada desde o desenho dos ambientes de aprendizagem e não apenas através da introdução posterior de adaptações dirigidas a alguns alunos.

A diversidade como lente para compreender a aprendizagem matemática

Um segundo contributo destas investigações consiste em mostrar que o estudo da aprendizagem matemática em contextos marcados por diferentes formas de participação, comunicação ou acesso ao conhecimento produz resultados que ultrapassam esses contextos específicos.

Ao analisar como diferentes alunos interpretam representações matemáticas, comunicam ideias, constroem significados ou participam nas atividades da sala de aula, estas investigações tornam visíveis processos que frequentemente permanecem implícitos em contextos mais homogéneos. A diversidade funciona, assim, como uma lente que permite compreender de forma mais profunda a natureza do conhecimento matemático escolar e as condições que favorecem a sua aprendizagem.

Neste quadro, a comunicação e a participação assumem um papel estruturante. A aprendizagem matemática não depende apenas da compreensão individual de conceitos, mas também da possibilidade de comunicar, argumentar, representar, justificar e construir conhecimento em interação com os outros. A diversificação das formas de representação, das linguagens e dos modos de participação revela-se, por isso, não apenas uma condição de acessibilidade para alguns alunos, mas uma oportunidade para enriquecer as aprendizagens de toda a turma.

A inclusão amplia a agenda da investigação em Educação Matemática

Talvez o principal contributo destas investigações seja mostrar que a inclusão não constitui apenas uma finalidade educativa, mas também um campo de produção de conhecimento em Educação Matemática. Ao colocar no centro da análise questões relacionadas com a acessibilidade, a participação e a equidade, estes estudos alargam a agenda tradicional da investigação e introduzem novas questões, entre as quais se destacam:

- Como se constrói significado matemático através de diferentes formas de representação e de comunicação?
- Que características tornam uma tarefa matematicamente acessível sem comprometer a sua exigência conceptual?

- Como conceber ambientes de aprendizagem que promovam a participação de todos os alunos?
- Que conhecimento profissional necessita o professor para ensinar Matemática em contextos inclusivos?

Estas questões não dizem respeito apenas a contextos específicos de inclusão. Pelo contrário, interrogam aspetos centrais do ensino e da aprendizagem da Matemática e contribuem para ampliar os referenciais teóricos e metodológicos da investigação neste domínio.

UMA AGENDA PARA INVESTIGAÇÃO FUTURA

Em síntese, os estudos revisitados acima sugerem que a diversidade não constitui apenas um contexto particular da investigação em Educação Matemática, mas uma perspetiva que permite produzir novo conhecimento sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática. Ao colocar em evidência diferentes formas de representar, comunicar, participar e construir significado matemático, estas investigações desafiam conceções tradicionais do ensino e reforçam a necessidade de conceber ambientes de aprendizagem acessíveis desde a sua planificação.

Mais do que responder às necessidades de grupos específicos de alunos, estes estudos mostram que a acessibilidade, a participação e a equidade constituem dimensões fundamentais para compreender a aprendizagem matemática e para produzir conhecimento relevante para a Educação Matemática no seu conjunto.

De facto, a diversidade tem vindo a assumir uma presença crescente na investigação portuguesa em Educação Matemática. Contudo, a análise que apresentamos evidencia igualmente que a acessibilidade, a participação e a equidade permanecem, em muitos casos, circunscritas a projetos ou linhas de investigação específicas, não constituindo ainda dimensões plenamente integradas na agenda do campo.

Neste contexto, identificam-se quatro direções que poderão contribuir para consolidar uma agenda de investigação capaz de aprofundar o conhecimento sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática em contextos de diversidade.

Tornar mais visíveis grupos ainda pouco representados

Continuam a existir grupos de alunos cujas experiências de aprendizagem permanecem relativamente pouco estudadas. Entre eles incluem-se alunos com deficiência, perturbações do neurodesenvolvimento, alunos bilingues, pertencentes a minorias culturais ou em contextos de maior vulnerabilidade social.

Mais do que aumentar o número de estudos centrados nestes grupos, importa compreender como diferentes condições de participação influenciam a aprendizagem matemática e quais os fatores que contribuem para reduzir barreiras e ampliar oportunidades de aprendizagem. Dar maior visibilidade a estes contextos permitirá não apenas conhecer melhor as experiências destes alunos, mas também aprofundar a compreensão das condições que favorecem a aprendizagem matemática em contextos diversos.

Conceber ambientes de aprendizagem acessíveis desde a planificação

Os estudos discutidos ao longo deste artigo sugerem uma mudança importante na forma de perspetivar a inclusão em Educação Matemática. Em vez de centrar a atenção na adaptação de recursos ou de tarefas para responder às necessidades de determinados alunos, torna-se necessário compreender como conceber, desde a planificação, ambientes de aprendizagem capazes de responder à diversidade presente nas salas de aula. Esta mudança implica deslocar o foco da resposta às dificuldades para a antecipação das diferentes formas de aprender, comunicar e participar dos alunos.

Neste sentido, importa aprofundar a investigação sobre a forma como tarefas, recursos, modalidades de comunicação, formas de representação, tecnologias digitais e processos de avaliação podem integrar, desde o início, múltiplas possibilidades de acesso ao conhecimento matemático. Particularmente relevante será compreender que características tornam uma tarefa simultaneamente acessível, intelectualmente desafiante e promotora da participação de todos os alunos.

Compreender o conhecimento profissional necessário para ensinar Matemática em contextos inclusivos

Se a acessibilidade depende das decisões que os professores tomam relativamente às tarefas, às representações, à comunicação e às interações, importa compreender que conhecimento profissional sustenta essas decisões.

Neste domínio, torna-se particularmente relevante aprofundar a investigação sobre o desenvolvimento profissional e a formação inicial de professores, analisando de que forma estes desenvolvem competências para antecipar a diversidade dos alunos, interpretar as barreiras à aprendizagem e conceber ambientes matemáticos inclusivos.

Articular diferentes perspetivas sobre a diversidade

A consolidação deste campo de investigação passa igualmente por promover um maior diálogo entre linhas de investigação que, embora desenvolvidas a partir de referenciais distintos, partilham preocupações comuns em torno da aprendizagem, da participação e da equidade.

Investigação sobre ensino exploratório, comunicação matemática, formação de professores, educação intercultural, educação especial, tecnologias digitais ou desenho de tarefas tem produzido contributos relevantes que permanecem frequentemente dispersos. A construção de referenciais teóricos e metodológicos mais integradores poderá favorecer uma compreensão mais abrangente da acessibilidade às aprendizagens matemáticas e potenciar uma maior articulação entre projetos, equipas e comunidades de investigação.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo deste artigo procurou-se analisar de que forma a diversidade tem sido perspetivada na investigação portuguesa em Educação Matemática. A leitura realizada evidencia que a heterogeneidade dos alunos atravessa grande parte da investigação desenvolvida nas últimas décadas, ainda que, na maioria dos casos, constitua sobretudo uma característica dos contextos de ensino e aprendizagem e não o objeto central da análise. Paralelamente, foi possível identificar um conjunto crescente de investigações que colocam explicitamente a acessibilidade, a participação, a inclusão e a equidade no centro da produção de conhecimento, contribuindo para ampliar as questões tradicionalmente investigadas no campo.

Os estudos analisados sugerem que investigar a aprendizagem matemática em contextos marcados pela diversidade não significa apenas compreender melhor as experiências de determinados grupos de alunos. Significa, sobretudo, produzir conhecimento sobre questões fundamentais da própria Educação Matemática, como a natureza das representações, o papel da comunicação, a conceção das tarefas, a organização das interações e as condições que tornam possível a participação dos alunos na construção do conhecimento matemático. Nesta perspetiva, a acessibilidade deixa de ser entendida apenas como uma resposta a necessidades específicas para passar a constituir um princípio de conceção do ensino e um objeto legítimo de investigação.

A análise realizada permite igualmente reconhecer uma evolução na forma de compreender a diversidade. Se, numa fase inicial, esta surgia sobretudo associada ao ideal de uma «Matemática para todos», a investigação mais recente procura compreender de que forma diferentes formas de participação, comunicação e acesso ao conhecimento desafiam conceções estabelecidas sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática. Deste modo, a diversidade deixa de representar apenas uma

realidade das salas de aula para se afirmar como uma perspetiva conceptual capaz de produzir novos conhecimentos sobre a Educação Matemática.

Neste quadro, o principal desafio para o desenvolvimento futuro desta área não consiste apenas em ampliar o número de estudos sobre grupos tradicionalmente menos representados. Consiste, sobretudo, em integrar a acessibilidade, a participação e a equidade como dimensões transversais da investigação em Educação Matemática, capazes de informar estudos sobre ensino, aprendizagem, formação de professores, desenvolvimento curricular ou avaliação. Mais do que uma nova linha temática, trata-se de uma forma de repensar as próprias questões de investigação.

A metáfora que dá título a este artigo traduz precisamente este desafio. Entre as vozes que já se fazem ouvir e os silêncios que persistem, existe um espaço fértil para novas perguntas, novos diálogos e novas formas de compreender a aprendizagem matemática. O futuro da investigação em Educação Matemática dependerá, em parte, da sua capacidade para transformar a diversidade de uma característica dos contextos educativos numa lente através da qual se produz conhecimento mais rico, mais abrangente e mais relevante sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática.

Referencias

Abrantes, P. (2001). Mathematical competence for all. *Educational Studies in Mathematics, 47*(2), 125–143.

Abrantes, P., Serrazina, L. y Oliveira, I. (1999). *A Matemática na Educação Básica*. Ministério da Educação, Departamento da Educação Básica.

Barbosa, A. y Vale, I. (2022). As representações: escolhas eficazes na resolução de problemas. *Educação e Matemática*, *166*, 19-24.

Barbosa, A. C. C. (2009). *A resolução de problemas que envolvem a generalização de padrões em contextos visuais: um estudo longitudinal com alunos do 2. º ciclo do ensino básico*, Tese de Doutoramento, Universidade do Minho, Portugal.

Brazileiro, C. (2018). A inclusão da cegueira na aula de Matemática: O que necessitam os professores de saber? *Educação e Matemática*, *146*, 33-36.

Brocardo, J., Delgado, C., Mendes, F. y Ponte, J. P. D. (2022). Ações do professor e desenvolvimento do raciocínio matemático durante a discussão coletiva de uma tarefa. *Educación matemática, 34*(2), 101-133. https://doi.org/10.24844/em3402.04

Cardoso, L., Ponte, J. P. y Quaresma, M. (2025). Estudo de aula na formação inicial de professores: O que pode correr mal? *PNA: Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática, 20*(1), 25–48. https://doi.org/10.30827/pna.v20i1.30972

César, M. (2009). Listening to different voices: collaborative work in multicultural maths classes. In *Social interactions in multicultural settings* (pp. 203-233). Brill. https://doi.org/10.1163/9789087907174_010

César, M. y Machado, R. (2024). Respecting cultural diversity in mathematics classes. *GAS Journal of Education and Literature, 1*(4), 96–114. https://doi.org/10.5281/zenodo.14131090

Cruz-Santos, A. y Martinho, M. H. (2019). Desafios à inclusão dos alunos com deficiência auditiva numa aula de matemática. *Linhas Críticas, 25*, 472-488. https://doi.org/10.26512/lc.v25i0.23252

Duarte, N. G., da Ponte, J. P. y Faria, F. (2025). Discussão coletiva num estudo de aula: práticas e ações de uma futura professora. *PNA. Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática, 19*(4), 393-418. https://doi.org/10.30827/pna.v19i4.30168

Fernandes, H., Jacinto, H. y Oliveira, H. (2025). Bridging problem-solving and problem-posing: third graders learning to formulate mathematical problems in geometry and measurement. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *28*, 31-53. https://doi.org/10.35763/aiem28.7553

Guerreiro, A., Tomás Ferreira, R. A., Menezes, L. y Martinho, M. H. (2016). Comunicação na sala de aula: A perspetiva do ensino exploratório da matemática. *Zetetiké, 23*(44), 279–295. https://doi.org/10.20396/zet.v23i44.8646539

Jacinto, H., Carreira, S. y Amado, N. (2018). "Não te esqueças de explicar o teu processo de resolução!": Expressões do pensamento matemático na resolução de problemas com tecnologias. *Educação e Matemática, 149,* 76-80.

Martins, L. G. y Martinho, M. H. (2021). Strategies, difficulties, and written communication in solving a mathematical problem. *Bolema, 35*(70), 903-936. https://doi.org/10.1590/1980-4415v35n70a16

Mascarenhas, D., Sousa, F., Martinho, M. H. y Maia, J. S. (2020). Desenvolver o sentido de número no 1º ano através de uma gallery walk. *Sensos-e, 7*(2), 31-39. https://doi.org/10.34630/sensose.v7i2.3553

Menezes, L., Tomás Ferreira, R., Martinho, M. H. y Guerreiro, A. (2014). Comunicação nas práticas letivas dos professores de Matemática. In J. P. Ponte (Org.), *Práticas profissionais dos professores de Matemática* (pp. 135–161). Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Meyer, A., Rose, D. H. y Gordon, D. (2014). *Universal Design for Learning: Theory and practice*. CAST Professional Publishing.

NCTM y CEC. (2024). *NCTM and CEC position statement on teaching mathematics to students with disabilities.* National Council of Teachers of Mathematics y Council for Exceptional Children. https://www.nctm.org/uploadedFiles/Standards_and_Positions/Position_Statements/NCTM-CEC-Disabilities-Position-Statement-December2024.pdf

Oliveira, H., Menezes, L. y Canavarro, A. P. (2013). Conceptualizando o ensino exploratório da Matemática: Contributos da prática de uma professora do 3.º ciclo para a construção de um quadro de referência. *Quadrante, 22*(2), 29–53. https://doi.org/10.48489/quadrante.22895

Ponte, J. P. (2014). *Práticas profissionais dos profesores de matemática*. UIDEF.

Ponte, J. P. (2025). Educação inclusiva no ensino da Matemática: O que diz a investigação? *Educação e Matemática, 175*, 9–12. https://em.apm.pt/index.php/em/article/view/3038

Quaresma, M., Pina, R. y Macedo, A. D. R. (2022). Prática profissional e o estágio curricular supervisionado: Experiências com Lesson Study na formação inicial de professores de Matemática. *Educação Matemática em Revista – RS, 1*(23), 135–148. https://doi.org/10.37001/EMR-RS.v.2.n.23.2022.p.135-148

Ribeiro, V. R. P. S. (2012). *Inclusão de uma aluna com deficiência visual na aula de matemática: Um desafio para o docente.* Dissertação de mestrado, Universidade do Minho.

Saraiva, J. P., Almendra, I., Cruz Santos, A. y Martinho, M. H. (2021). Mathematics for portuguese students with hearing impairment: An exploratory study of mathematical terms/concepts used in inclusive schools. *International Journal of Arts and Social Science, 4*(4), 114-126.

Skovsmose, O. (2024). *Advances in mathematics education*. Springer.

Tinoco, J., Martinho, M. H. y Cruz-Santos, A. (2020). Challenges faced by students with hearing impairment: Who use Portuguese Sign Language in mathematics classes. In L. Leite, E. Oldham, A. S. Afonso, F. Vise, L. Dourado y M. H. Martinho (Eds.), *Science and mathematics education for 21st century citizens: Challenges and ways forward* (pp. 337-356). Nova, Science Publishers.

Vale, I. y Barbosa, A. V. (2020). Gallery Walk: Uma estratégia ativa para resolver problemas com múltiplas soluções. *Revista de Educação Matemática, 17*, e020018. https://doi.org/10.37001/remat25269062v17id260

Vicente, R. y Lima, L. (2025). The application of the inclusive education's legal guidelines within the teaching-learning-assessment of mathematics: A case study. In Pixel (Ed.), *New perspectives in science education conference proceedings* (pp. 71–77). Filodiritto Editore.

Decreto-Lei n.º 54/2018, de 6 de julho. (2018). Diário da República, 1.ª série (129), 2918–2928

PROYECTO INCLUCIENCIA: COMUNICANDO CIENCIA PARA CONSTRUIR UNA SOCIEDAD INCLUSIVA. UNA MIRADA HACIA LAS ACCIONES DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA INCLUSIVA

The INCLUCIENCIA Project: Communicating science to build an inclusive society. A look at initiatives in inclusive mathematics education

Gómez-Hurtado, I. y Chico Gómez, A.

Universidad de Huelva

Resumen

La inclusión social y educativa constituye un reto prioritario en el ámbito internacional, al que responde el proyecto INCLUCIENCIA mediante acciones de divulgación, comunicación y transferencia de resultados de investigación sobre inclusión. Esta aportación presenta el análisis de las acciones vinculadas específicamente con la educación matemática, centradas en el diseño y evaluación de recursos inclusivos para la resolución de problemas matemáticos. Se estudia su potencial para favorecer la comprensión, accesibilidad y participación del alumnado con necesidades específicas de apoyo educativo. Asimismo, se analizan los efectos de las acciones de divulgación en la sensibilización y conocimiento de la población participante sobre una educación matemática inclusiva. También se aborda el impacto de los talleres de elaboración de recursos en la formación del profesorado y en el desarrollo de competencias para diseñar propuestas didácticas inclusivas. Los resultados obtenidos muestran la contribución de estos recursos y acciones formativas a la mejora de la accesibilidad, equidad y calidad en la enseñanza de las matemáticas. Finalmente, se destacan los retos y oportunidades que emergen para futuras investigaciones y prácticas educativas inclusivas.

Palabras clave: *Educación matemática inclusiva, Recursos didácticos inclusivos, Resolución de problemas matemáticos, Formación del profesorado y Transferencia de resultados de investigación*

Abstract

Social and educational inclusion is a key priority at international level, and the INCLUCIENCIA project addresses this through outreach, communication and the dissemination of research findings on inclusion. This paper presents an analysis of initiatives specifically linked to mathematics education, focusing on the design and evaluation of inclusive resources for mathematical problem-solving. It examines their potential to promote understanding, accessibility and participation among pupils with specific educational support needs. Furthermore, it analyses the effects of outreach activities on raising awareness and knowledge amongst the participating population regarding inclusive mathematics education. It also addresses the impact of resource-development workshops on teacher training and on the development of skills for designing inclusive teaching approaches. The results obtained demonstrate the contribution of these resources and training initiatives to improving accessibility, equity and quality in the teaching of mathematics. Finally, the challenges and opportunities that arise for future research and inclusive educational practices are highlighted.

Keywords: *Inclusive mathematics education, Inclusive teaching resources, Mathematical problem-solving, Teacher training and Transfer of research findings*

Gómez-Hurtado, I. y Chico Gómez, A. (2026). Proyecto INCLUCIENCIA: comunicando ciencia para construir una sociedad inclusiva. Una mirada hacia las acciones de educación matemática inclusiva. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (pp. 21-33). SEIEM.

INTRODUCCIÓN

La inclusión social y educativa es un objetivo prioritario de todos los países del mundo. La investigación internacional coincide en la necesidad de promover una educación que respete la diversidad y garantice una participación equitativa de todo el alumnado. Sin embargo, el principal reto reside en trasladar estos principios a la práctica educativa mediante marcos que permitan orientar y evaluar los procesos de inclusión. En este sentido, se han propuesto diferentes modelos para analizar el carácter inclusivo de los sistemas educativos, como el modelo multinivel de Kyriazopoulou y Weber (2009), que distingue los niveles micro (aula y alumnado), meso (centros educativos) y macro (políticas y sistemas educativos); o el modelo Input–Process–Outcomes de Loreman et al. (2014), que incorpora factores como las políticas, los recursos, la financiación y las infraestructuras necesarios para favorecer prácticas inclusivas y resultados positivos para todo el alumnado. Desde esta perspectiva, la inclusión educativa debe entenderse como un proceso sistémico, impulsado por las transformaciones sociales y por el desarrollo de políticas educativas orientadas a garantizar una educación de calidad para todas las personas. Atendiendo a los simposios de la Sociedad Española en Educación matemática, desde 2010 han emergido distintas aportaciones específicas sobre diversidad, temática que se ha ido ampliando durante la última década incluyendo perspectivas desde la atención a la diversidad y la educación matemática accesible hasta las prácticas inclusivas en el aula de matemáticas, la inclusión del Diseño Universal de Aprendizaje en la investigación y la formación docente en estos ámbitos (Arce et al., 2017; Cauich e Hidalgo, 2012; Planas, 2017; Gómez-Casanueva et al., 2022; González-López et al., 2025; entre otros) hasta la formación del grupo de trabajo IDIEM (Investigación en Diversidad e Inclusión en Educación Matemática).

El proyecto que presentamos se construye como una iniciativa nueva que surge para comunicar resultados de diferentes proyectos de investigación de distintas áreas de conocimiento (Proyecto FEDER "Estudio de casos múltiples a través de las voces de los estudiantes de ESO. ¿Cómo influyen los entornos en los aprendizajes y en la inclusión en las aulas?" UHU-1256187, "Educación Patrimonial para la Inteligencia Territorial y Emocional de la Ciudadanía" (EDU2015-67953-P financiado por MINECO y su continuación, Proyecto I+D+i "Las narrativas sobre la controversia en torno al patrimonio. Hacia la educación de una ciudadanía transformadora, democrática y comprometida con los valores éticos y los Derechos Humanos (EPITEC3)", PID2024-157079NB-I00, financiado por MICIU/AEI/10.13039/501100011033 y cofinanciado por la Unión Europea y Conocimiento especializado en la formación del profesorado de matemáticas: Tareas y conocimiento del formador (MTSK-T&MTEK) PID2021-122180OB-I00 financiado por MINECO) y Proyecto I+D+i "Desarrollo de Conocimiento y Competencias para la enseñanza de la resolución y formulación de problemas matemáticos en formación inicial de profesorado (MTSK&C-RFPM)", PID2024-158877NB-I00, financiado por MICIU/ AEI / 10.13039/501100011033/ FEDER. En ellos la inclusión ha tenido o tiene un papel más o menos protagonista. Y también, a un proyecto de innovación docente e investigación educativa llamado INCLUREC: recursos para la inclusión. Este último es el gancho que une todos los proyectos a través de los recursos que se elaboran en él, convirtiéndose en un medio para comunicar los resultados obtenidos en relación a la inclusión a través de este nuevo proyecto de comunicación y divulgación del conocimiento.

El objetivo que persigue INCLUCIENCIA de Inclusión y Accesibilidad es promover cambios en las actitudes y comportamientos en cuestiones relacionadas con la ciencia y tecnología relacionada con el ámbito de la educación inclusiva. Para ello, en este proyecto se han realizado actividades, que han aumentado el interés por la ciencia y tecnología divulgando ciencia que mejora la inclusión, generando aprendizaje y actitudes positivas ante la ciencia, viendo su utilidad para construir una sociedad más inclusiva. De una forma cercana y sencilla se ha llegado a todos los públicos, consiguiendo una meta esencial en este proyecto: la sensibilización ante la necesidad de construir una sociedad inclusiva que sea más justa y equitativa haciendo visible una realidad que muchas personas ni siquiera conocen. Hemos pretendido influir en la opinión pública y cambiar actitudes ante la

importancia de la ciencia en el ámbito de la educación, específicamente, en el tópico de la educación inclusiva, haciendo especial hincapié en un cambio de actitudes, concepciones y comportamientos ante las personas con algún tipo de diversidad funcional, sensorial o cognitiva y sus familias, concienciando así sobre la atención a la diversidad y la importancia de asegurar una educación para todos y todas a lo largo de toda la vida (Objetivo 4 de la Agenda 2030).

En esta contribución, se presenta un recorrido por las principales acciones desarrolladas en el marco del proyecto INCLUCIENCIA, poniendo el foco en su contribución a la promoción de una educación matemática más inclusiva. Se describen las iniciativas implementadas, los recursos y actividades diseñados, así como las estrategias de colaboración establecidas con centros educativos, profesorado y otros agentes implicados. Asimismo, se analiza la acogida que estas acciones han tenido entre los diferentes participantes, considerando tanto su grado de participación como las valoraciones recogidas durante el desarrollo del proyecto. Se profundiza en cómo estas acciones han impactado y han arrojado resultados en la investigación de la educación matemática poniendo su foco en cómo los recursos y materiales inclusivos son un medio para dar respuesta a las necesidades en la educación matemática. Finalmente, se exponen los principales resultados obtenidos, destacando los avances logrados en términos de accesibilidad, participación y equidad en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, así como las oportunidades y retos identificados para futuras actuaciones.

Educación Inclusiva

La educación inclusiva constituye actualmente uno de los pilares sobre los que se sustenta la construcción de sistemas educativos de calidad, equitativos y comprometidos con el derecho de todas las personas a aprender y participar en igualdad de oportunidades. Aunque en las últimas décadas se han producido importantes avances normativos y conceptuales, la inclusión continúa siendo un desafío para los sistemas educativos, que todavía mantienen prácticas y estructuras que generan barreras para el aprendizaje y la participación de parte del alumnado (Ainscow, 2020; Echeita, 2019).

El desarrollo del concepto de educación inclusiva encuentra uno de sus principales hitos en la Declaración de Salamanca (UNESCO, 1994), documento que supuso un cambio de paradigma al defender que las escuelas ordinarias debían educar a todo el alumnado, independientemente de sus características personales, sociales o culturales. Desde entonces, la inclusión ha dejado de entenderse exclusivamente como la escolarización del alumnado con discapacidad para convertirse en un principio orientador de todo el sistema educativo, centrado en garantizar la presencia, la participación y el aprendizaje de todos los estudiantes.

En esta línea, la UNESCO (2020) define la educación inclusiva como un proceso continuo destinado a identificar y eliminar las barreras que limitan el acceso, la participación y el éxito educativo del alumnado, prestando especial atención a aquellos colectivos en situación de mayor vulnerabilidad. Esta perspectiva implica reconocer que la diversidad constituye una característica inherente a cualquier grupo humano y, por tanto, un recurso para el aprendizaje y el enriquecimiento colectivo, más que un problema que deba corregirse.

Autores como Ainscow (2020), Booth y Ainscow (2015) o Echeita (2019) coinciden en señalar que la inclusión no puede reducirse a un conjunto de estrategias metodológicas ni a una respuesta específica para determinados estudiantes. Se trata de una forma de comprender la educación basada en valores como la justicia social, la equidad, la participación, el reconocimiento de la diversidad y el respeto por los derechos humanos. Desde esta perspectiva, las dificultades para aprender no se sitúan únicamente en las características individuales del alumnado, sino también en las barreras presentes en los contextos educativos, las culturas escolares, las políticas institucionales y las prácticas docentes.

El Index for Inclusion (Booth y Ainscow, 2015) sintetiza esta visión al proponer que avanzar hacia una educación inclusiva implica transformar las culturas, las políticas y las prácticas de los centros

educativos para incrementar la participación de todo el alumnado y reducir cualquier forma de exclusión. La inclusión supone, por tanto, fortalecer el sentido de pertenencia, valorar las diferencias como oportunidades de aprendizaje y promover comunidades educativas capaces de responder a la diversidad desde la colaboración y el compromiso compartido.

En los últimos años, los organismos internacionales han reforzado esta concepción. El Informe de Seguimiento de la Educación en el Mundo de la UNESCO (2020) recuerda que todos los sistemas educativos generan algún tipo de exclusión y que el verdadero reto consiste en identificar y eliminar las barreras que la producen. Asimismo, la Agenda 2030 sitúa la educación inclusiva en el centro del Objetivo de Desarrollo Sostenible 4, que propone garantizar una educación inclusiva, equitativa y de calidad y promover oportunidades de aprendizaje durante toda la vida para todas las personas (Naciones Unidas, 2015).

Más recientemente, la Agencia Europea para las Necesidades Educativas Especiales y la Educación Inclusiva (EASNIE, 2022) insiste en que los sistemas educativos inclusivos requieren políticas coherentes, liderazgo compartido, formación docente y procesos permanentes de reflexión sobre las prácticas educativas. Del mismo modo, el Consejo de la Unión Europea (2021) subraya que la inclusión constituye un elemento imprescindible para garantizar la cohesión social y combatir las desigualdades educativas que persisten en numerosos contextos.

Educación Matemática Inclusiva

Este marco adquiere una relevancia especial en el ámbito de la educación matemática. Tradicionalmente, las matemáticas han sido percibidas como un área especialmente selectiva, donde determinadas metodologías, formas de evaluación o creencias sobre la capacidad matemática pueden contribuir, de forma consciente o inconsciente, a generar procesos de exclusión. Numerosas investigaciones han puesto de manifiesto que variables como el género, el origen sociocultural, la discapacidad, la situación socioeconómica o las expectativas del profesorado condicionan las oportunidades de aprendizaje matemático del alumnado (Deruaz et al. 2020; Scherer y Bertram, 2024; Roos, 2019)

La educación matemática inclusiva ha experimentado un importante desarrollo durante las dos últimas décadas, desplazando el foco desde el déficit del alumnado hacia la identificación y eliminación de las barreras que dificultan su aprendizaje y participación. Desde esta perspectiva, el objetivo ya no consiste únicamente en facilitar el acceso a los contenidos matemáticos al alumnado con necesidades específicas de apoyo educativo (NEAE), sino en diseñar entornos de aprendizaje donde todas las personas puedan participar, aprender y desarrollar el pensamiento matemático en igualdad de oportunidades.

Diversos autores señalan que la investigación en educación matemática inclusiva ha evolucionado desde estudios centrados en adaptaciones individuales hacia enfoques que promueven prácticas universales de enseñanza, donde la diversidad constituye un elemento inherente al aula y no una excepción (Lambert, 2018; Lambert y Tan, 2020). Esta visión se encuentra alineada con los principios de la educación inclusiva defendidos por la UNESCO (2020), que entiende la inclusión como un proceso continuo de identificación y eliminación de las barreras para el aprendizaje y la participación de todo el alumnado.

No obstante, una parte importante de la investigación continúa centrándose en colectivos que tradicionalmente han experimentado mayores dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, como el alumnado con discapacidad intelectual (Polo-Blanco et al., 2024), trastorno del espectro autista (TEA) (Bruno et al., 2024; Goñi-Cervera et al., 2024), dificultades específicas de aprendizaje (Polo-Blanco y González-López, 2021) o discapacidad múltiple. Estos estudios no pretenden establecer metodologías exclusivas para determinados perfiles, sino identificar estrategias de enseñanza que permitan aumentar las oportunidades de aprendizaje y participación.

En relación con el alumnado con discapacidad intelectual, la evidencia reciente pone de manifiesto que puede desarrollar aprendizajes matemáticos significativos cuando la enseñanza se basa en una instrucción explícita, el uso de representaciones múltiples, la resolución de problemas contextualizados y el empleo sistemático de apoyos visuales y manipulativos. La revisión realizada por Bouck y Long (2023), que actualiza más de dos décadas de investigaciones sobre intervención matemática con alumnado con discapacidad intelectual leve, concluye que las estrategias con mayor respaldo empírico son la enseñanza explícita, la secuenciación de tareas, el modelado, la práctica guiada y la utilización de materiales concretos para favorecer la comprensión de conceptos abstractos. Asimismo, los autores destacan la necesidad de ampliar la investigación hacia metodologías que promuevan una participación más activa del alumnado en contextos inclusivos.

En una línea similar, la revisión de Wåger y Bagger (2024) sobre la enseñanza de contenidos académicos al alumnado con discapacidad intelectual subraya que la investigación actual apuesta por enfoques didácticos centrados en la comprensión conceptual y no únicamente en la adquisición de habilidades funcionales. Los autores defienden que el alumnado con discapacidad intelectual debe tener acceso a un currículo matemático rico y desafiante, siempre acompañado de apoyos ajustados a sus necesidades, evitando prácticas basadas exclusivamente en la repetición mecánica o en la simplificación excesiva de los contenidos.

Por su parte, el alumnado con trastorno del espectro autista constituye uno de los colectivos que mayor atención ha recibido en los últimos años dentro de la investigación en educación matemática. La diversidad de perfiles cognitivos y comunicativos presentes en el TEA exige propuestas flexibles que permitan diferentes formas de acceder al conocimiento matemático. El reciente metaanálisis desarrollada por Karal y Riccomini (2024), que sintetiza treinta y tres investigaciones sobre intervenciones matemáticas con alumnado autista, concluye que este tipo de intervenciones producen efectos moderados y altos sobre el aprendizaje matemático. Entre las estrategias más eficaces destacan la enseñanza mediante múltiples representaciones, el modelado en vídeo, la instrucción basada en esquemas para la resolución de problemas y las intervenciones que combinan distintos apoyos visuales y manipulativos. Los autores señalan que la combinación de diferentes recursos facilita tanto la comprensión conceptual como la generalización de los aprendizajes a nuevas situaciones.

Los resultados de este metaanálisis coinciden con otras revisiones recientes que analizan específicamente la enseñanza de las matemáticas al alumnado con TEA. En ellas se observa una tendencia creciente hacia el empleo de tecnologías digitales, materiales manipulativos, recursos visuales y metodologías activas como elementos que favorecen la participación y reducen las barreras de acceso al aprendizaje matemático. Además, estas investigaciones destacan la importancia de adaptar los contextos de enseñanza a las características sensoriales, comunicativas y cognitivas del alumnado, más que modificar únicamente los contenidos curriculares.

La investigación también ha comenzado a analizar de forma específica las competencias matemáticas del alumnado que presenta simultáneamente trastorno del espectro autista y discapacidad intelectual. La revisión sistemática de Tomeny y colaboradores (2023) evidencia que este alumnado presenta perfiles de aprendizaje muy heterogéneos y que sus resultados académicos mejoran cuando las intervenciones combinan apoyos individualizados, materiales visuales, actividades funcionales y experiencias de aprendizaje altamente estructuradas. Los autores insisten en que las dificultades observadas no deben atribuirse exclusivamente a las características individuales del alumnado, sino también a la escasez de investigaciones y de propuestas didácticas adaptadas a este perfil.

De forma transversal, todas estas investigaciones coinciden en una idea fundamental: las dificultades para aprender matemáticas no dependen únicamente de las características del alumnado, sino también de las oportunidades de aprendizaje que ofrecen los contextos educativos. En consecuencia, la educación matemática inclusiva requiere transformar las prácticas docentes mediante propuestas

flexibles, accesibles y fundamentadas en la evidencia científica, donde el profesorado disponga de herramientas para responder a la diversidad presente en el aula.

En el contexto español, la investigación desarrollada durante los últimos años ha contribuido de manera significativa al avance de la educación matemática inclusiva. Los estudios realizados por Polo-Blanco, Goñi-Cervera, Bruno y colaboradores muestran que el alumnado con trastorno del espectro autista y con discapacidad intelectual puede desarrollar aprendizajes matemáticos significativos cuando la enseñanza incorpora apoyos ajustados a sus características y se fundamenta en metodologías basadas en la evidencia. En concreto, investigaciones centradas en la resolución de problemas aditivos y multiplicativos, el pensamiento algebraico temprano o el desarrollo de estrategias de cálculo ponen de manifiesto la eficacia de la instrucción explícita, el uso de múltiples representaciones, los modelos conceptuales de resolución de problemas y los apoyos visuales para favorecer tanto la comprensión matemática como la participación activa del alumnado (Bruno et al., 2024; Goñi-Cervera et al., 2024, 2025; Polo-Blanco et al., 2020, 2024).

En esta misma línea, las investigaciones desarrolladas por Chico Gómez, Climent y Gómez Hurtado evidencian que la incorporación de los principios del Diseño Universal para el Aprendizaje (DUA) en la enseñanza de las matemáticas facilita la participación del alumnado con trastorno del espectro autista desde el diseño inicial de las propuestas didácticas. Sus trabajos muestran que recursos como la estructuración visual de las tareas, las secuencias de apoyo, los materiales inspirados en el enfoque TEACCH y las múltiples formas de representación favorecen la comprensión de los problemas matemáticos y reducen barreras relacionadas con la planificación, la comunicación y la flexibilidad cognitiva (Chico Gómez et al., 2023, 2024).

La investigación española también ha comenzado a ampliar el foco hacia otros colectivos presentes en las aulas inclusivas. En relación con el alumnado con síndrome de Down, diferentes estudios destacan la importancia de emplear materiales manipulativos, apoyos visuales y tareas contextualizadas que favorezcan la comprensión conceptual y el razonamiento matemático, superando enfoques centrados exclusivamente en el aprendizaje mecánico de procedimientos (Bruno et al., 2022). Del mismo modo, la investigación sobre alumnado con altas capacidades matemáticas recuerda que la inclusión implica responder a las necesidades de todo el alumnado, también de quienes requieren oportunidades de enriquecimiento, profundización y flexibilización curricular para desarrollar plenamente su potencial (Bruno et al., 2022). Esta perspectiva permite entender la educación matemática inclusiva como un compromiso con la diversidad en sentido amplio y no únicamente como una respuesta dirigida al alumnado con discapacidad.

Estas aportaciones coinciden con la evidencia internacional, que señala que las dificultades de aprendizaje no dependen exclusivamente de las características individuales del alumnado, sino también de las oportunidades que ofrecen los contextos educativos (Bouck y Long, 2023; Karal y Riccomini, 2024; Lambert, 2018; Lambert y Tan, 2020; Wåger y Bagger, 2024). En consecuencia, la educación matemática inclusiva requiere transformar las prácticas docentes mediante propuestas flexibles, accesibles y fundamentadas en la evidencia científica.

En este sentido, el potencial inclusivo de los recursos didácticos no reside únicamente en sus características materiales, sino en las oportunidades de aprendizaje que generan cuando se integran en propuestas pedagógicas cuidadosamente diseñadas. Tal y como plantea el marco del Diseño Universal para el Aprendizaje (CAST, 2024), la planificación de la enseñanza debe anticipar la diversidad presente en las aulas ofreciendo múltiples formas de implicación, representación y acción y expresión para que todo el alumnado pueda acceder, participar y progresar en el aprendizaje. Así, los materiales manipulativos, los recursos digitales, los apoyos visuales, las representaciones múltiples o los juegos matemáticos dejan de concebirse como adaptaciones destinadas exclusivamente a determinados estudiantes para convertirse en herramientas que enriquecen el aprendizaje de toda la clase. En consecuencia, avanzar hacia una educación matemática inclusiva

implica diseñar y difundir recursos accesibles que eliminen barreras desde el inicio y favorezcan la construcción compartida del conocimiento matemático.

En este contexto, la creación, adaptación y difusión de recursos didácticos accesibles y fundamentados en los principios del Diseño Universal para el Aprendizaje constituye una estrategia clave para favorecer una educación matemática inclusiva. Esta perspectiva inspira las acciones desarrolladas en el Proyecto INCLUCIENCIA, que busca acercar a la comunidad educativa materiales y propuestas basadas en la evidencia científica capaces de reducir barreras para el aprendizaje y la participación, contribuyendo así a una enseñanza de las matemáticas más equitativa, accesible e inclusiva para todo el alumnado.

El impacto de la comunicación y divulgación científica de la investigación en educación matemática en la práctica educativa

En este contexto, la comunicación y divulgación científica adquieren un papel especialmente relevante como mecanismos de transferencia del conocimiento entre la investigación y la práctica educativa. Diversos autores han señalado que uno de los principales retos de la investigación en educación no reside únicamente en generar evidencia científica de calidad, sino también en conseguir que dicho conocimiento llegue de forma comprensible y útil a quienes toman decisiones en los contextos educativos (Levin, 2013; Cooper, 2014). Desde esta perspectiva, la divulgación científica deja de concebirse como una actividad complementaria al proceso investigador para convertirse en un elemento esencial que favorece la movilización del conocimiento (knowledge mobilisation), promoviendo el diálogo entre investigadores, profesorado, responsables educativos y ciudadanía.

En el ámbito de la educación matemática, esta necesidad resulta especialmente relevante. Aunque durante las últimas décadas se ha producido un importante avance en la investigación sobre enseñanza inclusiva de las matemáticas, muchas de las evidencias generadas permanecen restringidas al ámbito académico y tardan en incorporarse a la práctica docente. Como consecuencia, continúan reproduciéndose concepciones tradicionales acerca de las capacidades matemáticas del alumnado con necesidades específicas de apoyo educativo, a pesar de que la investigación demuestra que, mediante metodologías inclusivas y apoyos adecuados, todos los estudiantes pueden participar y progresar en el aprendizaje matemático.

En este sentido, la divulgación científica constituye una herramienta de transformación social que contribuye a acercar la investigación educativa a docentes, futuros maestros, familias y sociedad, favoreciendo la construcción de una cultura científica comprometida con la equidad y la inclusión. Tal y como señalan Burns et al., (2003), la comunicación científica eficaz no consiste únicamente en transmitir información, sino también en generar conciencia, interés y compromiso social con el conocimiento científico. Del mismo modo, Besley y Dudo (2022) destacan que las estrategias actuales de comunicación científica buscan promover relaciones bidireccionales entre ciencia y sociedad, fomentando la participación y el intercambio de conocimientos más allá de la difusión unidireccional de resultados.

Desde esta perspectiva se sitúa el Proyecto INCLUCIENCIA, que entiende la comunicación científica como una vía para acercar la investigación educativa a la ciudadanía y favorecer una comprensión más amplia de la educación inclusiva. En el ámbito específico de la educación matemática, las acciones desarrolladas por el proyecto pretenden visibilizar prácticas docentes que promueven la participación, el aprendizaje y el éxito de todo el alumnado, contribuyendo a consolidar una visión de las matemáticas como un conocimiento accesible, relevante y enriquecedor para todas las personas, independientemente de sus características o circunstancias.

Con este propósito, el proyecto desarrolla acciones de divulgación adaptadas a diferentes públicos, entre las que se incluyen materiales audiovisuales, recursos digitales, talleres, participación en eventos científicos y actividades dirigidas a la formación inicial y permanente del profesorado. Estas

iniciativas buscan traducir la evidencia científica a formatos accesibles, facilitando que los resultados de la investigación puedan incorporarse a la práctica educativa y favoreciendo espacios de intercambio entre universidad, escuela y sociedad. De este modo, la divulgación científica no solo amplía el impacto social de la investigación, sino que también fortalece la transferencia del conocimiento y contribuye a impulsar una educación matemática inclusiva basada en la evidencia científica.

ACCIONES DEL PROYECTO INCLUCIENCIA

El Proyecto INCLUCIENCIA articula un conjunto de acciones de comunicación y divulgación científica orientadas a acercar la investigación sobre educación inclusiva a la comunidad educativa y a la ciudadanía, promoviendo la accesibilidad del conocimiento científico y la participación activa de diferentes colectivos. Aunque las actuaciones abarcan diversos ámbitos de la inclusión, todas ellas comparten el objetivo de transferir la evidencia científica a contextos educativos y sociales mediante propuestas participativas, accesibles y fundamentadas en la investigación.

En primer lugar, el proyecto impulsa el diseño, elaboración y difusión de recursos didácticos inclusivos, desarrollados de manera colaborativa por alumnado universitario, profesorado y otros agentes educativos. Estos materiales, concebidos desde los principios de accesibilidad y diseño para todas las personas, son posteriormente implementados y donados a centros educativos y entidades sociales, favoreciendo la transferencia del conocimiento científico a la práctica educativa.

En segundo lugar, INCLUCIENCIA desarrolla numerosas acciones de divulgación dirigidas a públicos diversos mediante talleres, seminarios, jornadas, visitas, exposiciones, experiencias participativas y actividades de sensibilización. Estas iniciativas permiten acercar la investigación educativa a escolares, profesorado, familias, asociaciones y ciudadanía, favoreciendo espacios de reflexión sobre la inclusión, la accesibilidad y el derecho de todas las personas a participar plenamente en los procesos educativos.

El proyecto concede además un papel relevante a la comunicación científica digital mediante la producción de vídeos divulgativos, pódcast, programas de radio, contenidos para redes sociales y recursos audiovisuales que traducen los resultados de investigación a un lenguaje accesible y comprensible para públicos no especializados. Estas acciones contribuyen a ampliar el alcance social del conocimiento científico y favorecen la construcción de una cultura científica comprometida con la inclusión.

De forma específica, en el ámbito de la educación matemática se han diseñado actividades basadas en la resolución de retos, el uso de materiales manipulativos y recursos didácticos inclusivos dirigidas especialmente al alumnado con necesidades específicas de apoyo educativo, entre ellas personas con trastorno del espectro autista. Estas propuestas muestran cómo la investigación en educación matemática puede transformarse en experiencias de aprendizaje accesibles que favorecen la participación, la comprensión conceptual y el desarrollo del pensamiento matemático desde una perspectiva inclusiva.

Finalmente, el proyecto promueve la creación de redes de colaboración entre universidad, centros educativos, asociaciones, museos, entidades sociales y profesionales de diferentes disciplinas mediante jornadas científicas, seminarios y actividades de formación. Esta dimensión colaborativa fortalece la transferencia del conocimiento, facilita el intercambio de buenas prácticas y contribuye a consolidar una comunidad comprometida con el desarrollo de una educación inclusiva basada en la evidencia científica.

Aunque el proyecto aborda diferentes ámbitos de la educación inclusiva, la educación matemática constituye uno de sus ejes de desarrollo. Las acciones relacionadas con el diseño y validación de recursos manipulativos, la resolución de retos matemáticos inclusivos, la formación del profesorado y la divulgación de prácticas fundamentadas en la evidencia permiten acercar los resultados de la

investigación en educación matemática a contextos escolares reales. De este modo, INCLUCIENCIA se configura como un espacio de transferencia del conocimiento que conecta investigación, innovación docente y divulgación científica para promover una enseñanza de las matemáticas accesible y de calidad para todo el alumnado.

RESULTADOS

Los resultados obtenidos ponen de manifiesto que las acciones desarrolladas en el Proyecto INCLUCIENCIA han contribuido significativamente a la transferencia de la investigación en educación matemática inclusiva hacia diferentes contextos educativos y sociales, favoreciendo tanto la innovación docente como la sensibilización de la comunidad educativa.

Uno de los principales logros del proyecto ha sido el diseño, validación y difusión de recursos didácticos inclusivos para la enseñanza de las matemáticas. En total se elaboraron 22 materiales destinados a favorecer el aprendizaje de contenidos como el conteo, las operaciones, el cálculo, la geometría o la resolución de problemas. La valoración realizada por el profesorado que solicitó estos recursos fue unánime, indicando que el 100 % considera que los materiales han contribuido a mejorar el aprendizaje matemático del alumnado, especialmente de aquel que presenta necesidades específicas de apoyo educativo.

Otro resultado destacado ha sido la formación del profesorado y del futuro profesorado en el uso de recursos manipulativos y accesibles para la enseñanza de las matemáticas. Los talleres desarrollados con docentes en ejercicio y alumnado universitario evidenciaron que estos materiales no solo incrementan la motivación del alumnado, sino que también facilitan la comprensión de conceptos matemáticos abstractos y favorecen una enseñanza más inclusiva.

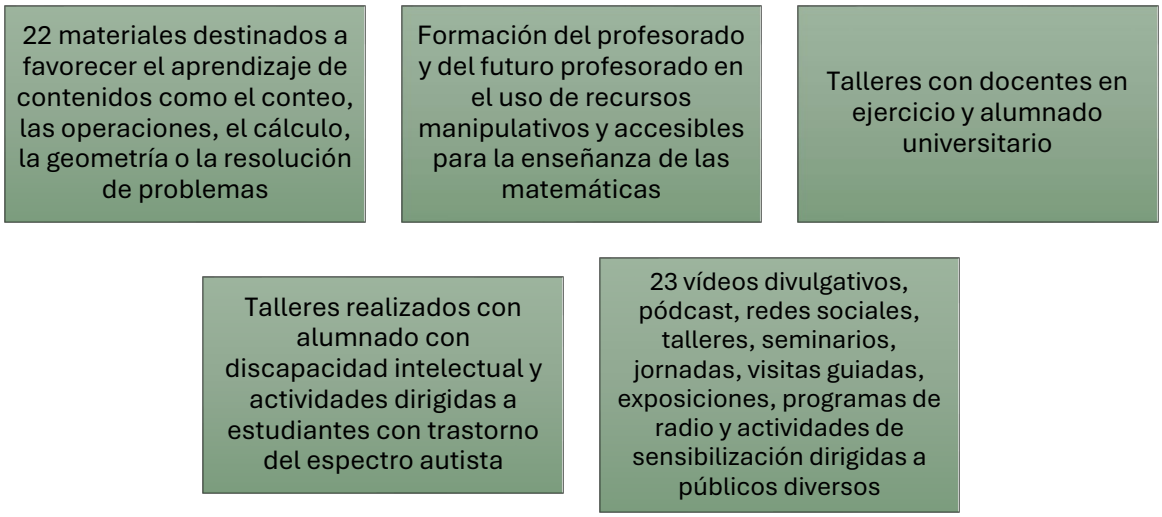
Las diferentes experiencias prácticas desarrolladas con alumnado de diversas etapas educativas permitieron constatar la utilidad de los recursos manipulativos como apoyo al razonamiento matemático. Tanto en los talleres realizados con alumnado con discapacidad intelectual como en las actividades dirigidas a estudiantes con trastorno del espectro autista, se observó que los participantes recurrían de forma espontánea a los materiales para resolver los retos planteados, mostrando una clara preferencia por este tipo de apoyos y evidenciando su contribución a la comprensión de los conceptos matemáticos y a la resolución de problemas.

En relación con la comunicación científica, el proyecto ha favorecido la divulgación de prácticas fundamentadas en la evidencia científica mediante la elaboración de 23 vídeos divulgativos, así como a través de pódcast, redes sociales, talleres, seminarios, jornadas, visitas guiadas, exposiciones, programas de radio y actividades de sensibilización dirigidas a públicos diversos. Estas acciones han permitido acercar la investigación sobre educación matemática inclusiva a docentes, estudiantes, familias y ciudadanía, favoreciendo una mayor comprensión del potencial de los recursos accesibles para garantizar el aprendizaje de todo el alumnado.

Asimismo, las diferentes actividades desarrolladas (Figura 1) han contribuido a visibilizar la importancia de los materiales manipulativos, los apoyos visuales, las tecnologías de apoyo y los recursos accesibles como elementos clave para eliminar barreras en el aprendizaje de las matemáticas. La interacción con profesorado, alumnado, asociaciones y otros agentes sociales ha permitido trasladar las evidencias científicas generadas por el proyecto a contextos reales de enseñanza, reforzando la conexión entre investigación, innovación y práctica educativa.

Figura 1

Actividades Resultantes del Proyecto



Finalmente, los resultados ponen de manifiesto que la comunicación y divulgación científica constituyen herramientas eficaces para favorecer la transferencia del conocimiento en educación matemática. Más allá de la difusión de resultados, las acciones desarrolladas han generado espacios de diálogo entre universidad, centros educativos y sociedad, contribuyendo a consolidar una cultura científica comprometida con la inclusión y promoviendo una enseñanza de las matemáticas basada en la evidencia, la accesibilidad y la participación de todo el alumnado.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos ponen de manifiesto que las acciones desarrolladas en el Proyecto INCLUCIENCIA constituyen una estrategia eficaz para favorecer la transferencia del conocimiento científico en educación matemática inclusiva hacia la práctica educativa. La valoración positiva realizada por el profesorado respecto al uso de los recursos didácticos elaborados y la observación de un mayor apoyo del alumnado en materiales manipulativos durante la resolución de tareas matemáticas coinciden con la evidencia científica disponible, que señala que la utilización de representaciones múltiples, apoyos visuales y materiales concretos facilita la comprensión de conceptos matemáticos y mejora el aprendizaje del alumnado con necesidades específicas de apoyo educativo (Bouck y Long, 2023; Karal y Riccomini, 2024; Wåger y Bagger, 2024).

En particular, los resultados obtenidos con alumnado con discapacidad intelectual y con trastorno del espectro autista respaldan las conclusiones de investigaciones recientes que defienden que las dificultades en matemáticas no dependen exclusivamente de las características individuales del alumnado, sino también de la calidad de las oportunidades de aprendizaje y de los apoyos proporcionados durante la enseñanza (Bouck y Long, 2023; Tomeny et al., 2023). La preferencia observada por el uso de materiales manipulativos durante la resolución de problemas y la percepción del profesorado acerca de la mejora de los aprendizajes refuerzan la importancia de diseñar situaciones didácticas accesibles que permitan construir el conocimiento matemático a partir de diferentes formas de representación y participación.

Los resultados relacionados con la formación del profesorado también adquieren especial relevancia. Tanto el profesorado en ejercicio como el alumnado universitario destacaron el valor de los recursos inclusivos para favorecer la comprensión de contenidos matemáticos complejos y aumentar la participación del alumnado. Estos hallazgos son coherentes con las propuestas actuales sobre desarrollo profesional docente, que señalan la necesidad de aproximar la investigación educativa a la práctica mediante experiencias formativas basadas en evidencias científicas y en el análisis de recursos transferibles a las aulas (Levin, 2013; Cooper, 2014).

Del mismo modo, las acciones de comunicación científica desarrolladas mediante vídeos, talleres, pódcast, redes sociales, jornadas y actividades de divulgación evidencian que la transferencia del conocimiento puede extender el impacto de la investigación más allá del ámbito académico. En este sentido, los resultados apoyan la concepción de la divulgación científica como un proceso bidireccional orientado no solo a difundir resultados, sino también a generar diálogo entre investigadores, profesorado y sociedad, favoreciendo la apropiación social del conocimiento científico (Burns et al., 2003; Besley y Dudo, 2022). Desde esta perspectiva, la divulgación deja de constituir una fase final del proceso investigador para convertirse en un elemento esencial que facilita la movilización del conocimiento (knowledge mobilisation) y contribuye a transformar las prácticas educativas.

En conjunto, los resultados obtenidos permiten concluir que el Proyecto INCLUCIENCIA ha favorecido la creación de espacios de encuentro entre investigación, práctica docente y sociedad mediante acciones de comunicación científica centradas en la educación inclusiva. La elaboración y difusión de recursos didácticos, la formación del profesorado, la participación activa de diferentes colectivos y la utilización de formatos divulgativos accesibles han contribuido a visibilizar que la investigación en educación matemática ofrece respuestas fundamentadas para mejorar el aprendizaje de todo el alumnado.

En conjunto, los resultados obtenidos permiten concluir que el Proyecto INCLUCIENCIA ha favorecido la creación de espacios de encuentro entre investigación, práctica docente y sociedad mediante acciones de comunicación y divulgación científica centradas en la educación inclusiva. La elaboración y difusión de recursos didácticos, la formación del profesorado, la participación activa de diferentes colectivos y el uso de formatos divulgativos accesibles han contribuido a visibilizar que la investigación en educación matemática ofrece respuestas fundamentadas para mejorar el aprendizaje de todo el alumnado. En este sentido, los resultados sugieren que la investigación en educación matemática alcanza un mayor impacto cuando sus evidencias se transforman en recursos, experiencias formativas y materiales divulgativos que pueden ser apropiados, adaptados y utilizados por el profesorado en su práctica cotidiana. La transferencia del conocimiento deja así de entenderse como una fase posterior a la investigación para convertirse en un proceso continuo de construcción compartida entre investigadores, docentes y sociedad, favoreciendo la movilización del conocimiento y su aplicación en contextos educativos reales (Cooper, 2014; Levin, 2013).

No obstante, este trabajo presenta algunas limitaciones que deben considerarse. Los resultados se sustentan principalmente en la valoración del profesorado participante y en evidencias derivadas de la observación realizada durante las diferentes acciones, por lo que futuras investigaciones deberían incorporar diseños de evaluación más sistemáticos que permitan analizar el impacto de las intervenciones sobre el aprendizaje matemático del alumnado, el desarrollo profesional docente y la sostenibilidad de las prácticas inclusivas a medio y largo plazo.

Como principal conclusión, este trabajo pone de manifiesto que la comunicación científica constituye una herramienta estratégica para favorecer la transferencia de la investigación en educación matemática inclusiva, acercando la evidencia científica a quienes diseñan, desarrollan y evalúan los procesos de enseñanza y aprendizaje. Más allá de la difusión de resultados, la divulgación posibilita la creación de redes de colaboración entre universidad, centros educativos, asociaciones y sociedad,

promoviendo una cultura científica basada en la accesibilidad, la participación y la equidad. Desde esta perspectiva, el Proyecto INCLUCIENCIA evidencia que investigar, comunicar y formar son procesos inseparables cuando el objetivo es transformar la práctica educativa, contribuyendo a consolidar una educación matemática inclusiva fundamentada en la evidencia científica y comprometida con el derecho de todo el alumnado a aprender matemáticas en igualdad de oportunidades. "Investigar, comunicar y formar son procesos inseparables cuando el objetivo es transformar la práctica educativa."

Referencias

Ainscow, M. (2020). Promoting inclusion and equity in education: Lessons from international experiences. *Nordic Journal of Studies in Educational Policy, 6*(1), 7–16. https://doi.org/10.1080/20020317.2020.1729587

Arce, M., Conejo, L., Pecharromán, C. y Ortega, T. (2017). Educación matemática atendiendo a la diversidad en el Grado en Educación Primaria. En J.M. Muñoz Escolano, A. Arnal, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo de la Vega y J. Carrillo (Eds.) *Actas del XXI Simposio en Investigación en Educación Matemática* (p. 497). SEIEM.

Besley, J. C. y Dudo, A. (2022). *Strategic Science Communication*. Johns Hopkins University Press.

Booth, T. y Ainscow, M. (2015). *Guía para la educación inclusiva. Desarrollando el aprendizaje y la participación en los centros escolares*. OEI/FUHEM.

Bouck, E. C. y Long, H. (2023). Academic Mathematics Instruction and Intervention for Students with Mild Intellectual Disability: An Updated Review. *Education and Training in Autism and Developmental Disabilities*, *58*(2), 144-161. https://doi.org/10.1177/215416472305800203

Consejo de la Unión Europea (2021). *Council Recommendation establishing a European Child Guarantee*, por la que se establece una Garantía Infantil Europea.

Bruno, A., Polo-Blanco, I., Van Vaerenbergh, S., Fernández-Cobos, R. y González-López, M. J. (2024). *Strategies for solving multiplicative problems using a conceptual model-based problem-solving approach: A case study with a student with autism spectrum disorder*. Roesquen-Winter, B. y Hoyles, C. ZDM – Mathematics Education (pp. 1239–1256). Springer.

Burns, T. W., O'Connor, D. J. y Stocklmayer, S. M. (2003). Science Communication: A Contemporary Definition. *Public Understanding of Science, 12*(2), 183–202.

Cauich, A. R., Hidalgo, S. (2012). Cognición, afectividad y diversidad. Una propuesta de determinación de perfiles matemáticos en los estudiantes. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 177 - 185). SEIEM.

Chico Gómez, Á., Gómez Hurtado, I. y Climent Rodríguez, N. (2024). Recursos didácticos inclusivos en la resolución de problemas matemáticos con alumnado con síndrome de Asperger. *Revista de Educación Inclusiva, 17*(1), 157–181.

Cooper, A. (2014). Knowledge mobilisation in education across Canada: A cross-case analysis of 44 research brokering organizations. *Evidence & Policy, 10*(1), 29–59.

Deruaz, M., Dias, T., Gardes, M. L., Gregorio, F., Ouvrier-Buffet, C., Peteers, F. y Robotti, E. (2020). Exploring MLD in mathematics education: Ten years of research. *Journal of Mathematical Behavior*, *60*, 1–17. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2020.100807

EASNIE (2022). *Inclusive Education in Action.* European Agency for Special Needs and Inclusive Education.

Echeita, G. (2019). *Educación inclusiva. El sueño de una noche de verano*. Octaedro.

Gómez Casanueva, C., Polo-Blanco, I., Lázaro, C., Recio, T. y Van Vaerenbergh, S. (2022). Adaptación de materiales del proyecto matesgg para alumnado con autismo. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (p. 606). SEIEM.

González-López, M. J., van Vaerenbergh, S., Fernández-Cobos, R. y Goñi-Cervera, J. (2025). Formación sobre necesidades específicas de apoyo educativo en matemáticas en el Grado en Educación Primaria en España. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. 506). SEIEM.

Goñi-Cervera, J., Polo-Blanco, I., Bruno, A. y Fernández-Cobos, R. (2024). Effects of modified schema-based instruction to teach students with autism to solve additive compare problems. *The Journal of Special Education, 58*(3), 171-182. https://doi.org/10.1177/00224669241252422

Goñi-Cervera, J., Bruno, A., Polo-Blanco, I. y Cañadas, M. C. (2025). Effect of multiple representations to promote early algebraic thinking in students with autism. *Exceptionality. A Special Education Journal, 33*(3), 196–216. https://doi.org/10.1080/09362835.2024.2409089

Karal, M. A. y Riccomini, P. J. (2024). Meta-Analysis of Mathematics Interventions for Learners with Autism Spectrum Disorder. *Education and Training in Autism and Developmental Disabilities, 59*(3), 257–273. https://doi.org/10.1177/215416472405900303

Kyriazopoulou, M. y Weber, H. (Eds.) (2009). *Development of a set of indicators for inclusive education in Europe*. European Agency for Development in Special Needs Education.

Lambert, R. (2018). Indefensible, Illogical, and Unsupported; Countering Deficit Mythologies About the Potential of Students with Learning Disabilities in Mathematics. *Education Sciences, 8*(2), https://doi.org/10.3390/educsci8020072

Lambert, R. y Tan, P. (2020). Disability and Mathematics Education: An Introduction. En Humanizing Disability in Mathematics Education. En P. Tan, A. Padilla, E. N. Mason y J. Sheldon (Eds.), *Humanizing disability in mathematics education: Forging new paths* (pp. 1–10). National Council of Teachers of Mathematics.

Levin, B. (2013). To know is not enough: Research knowledge and its use. *Review of Education, 1*(1), 2–31. https://doi.org/10.1002/rev3.3001

Loreman, T., Forlin, C., Chambers, D., Sharma, U. y Deppeler, J. (2014). Conceptualizing and measuring inclusive education. En T. Loreman, C. Forlin y U. Sharma (Eds.), *International Perspectives on Inclusive Education* (Vol. 3, pp. 165–187). Emerald Group Publishing Limited. https://doi.org/10.1108/S1479-363620140000003015

Planas, N. (2017). Dimensiones de la diversidad en Educación Matemática. En J.M. Muñoz Escolano, A. Arnal, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo de la Vega y J. Carrillo (Eds.), *Actas del XXI Simposio en Investigación en Educación Matemática* (p. 69). SEIEM.

Polo-Blanco, I., Martínez-Romillo, M. C. y Goñi-Cervera, J. (2020). Resolución de problemas de isomorfismo de medidas por estudiantes con trastorno del espectro autista. *Revista de Investigación en Educación*. *18*(3), 345-355.

Polo-Blanco, I., González-López, M. J., Bruno, A. y González-Sánchez, J. (2024). Teaching students with mild intellectual disability to solve word problems using schema-based instruction. *Learning Disability Quarterly, 47*(1), 3-15. https://doi.org/10.1177/07319487211061421

Scherer, P. y Bertram, J. (2024). Professionalisation for inclusive mathematics—teacher education programs and changes in pre-service teachers' beliefs and self-efficacy. *ZDM Mathematics Education 56*, 447–459. https://doi.org/10.1007/s11858-024-01580-0

UNESCO (2020). *Global Education Monitoring Report 2020: Inclusion and Education*. All Means All.

UNESCO (2024). *Global Education Monitoring Report 2024/25* (aporta datos actualizados sobre inclusión, equidad y transformación educativa).

Wåger, J. y Bagger, A. (2025). Didactic dimensions of teaching content for and with students with intellectual disabilities (ID): a scoping review. *International Journal of Inclusive Education, 40*(1). https://doi.org/10.1080/08856257.2024.2323250

DEL RECURSO A LA TAREA: QUÉ PUEDE APORTAR LA INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA A LA EQUIDAD DE PROA+

From resources to tasks: the contribution of research in mathematics education to equity in PROA+

Moreno, A.

Universidad de Granada

Resumen

Los grandes programas de equidad educativa, como PROA+, han desplegado en los centros de especial complejidad medidas muy valoradas (codocencia, refuerzo, tutorías individualizadas, acompañamiento socioemocional) centradas sobre todo en la dimensión organizativa de la inclusión: más tiempo, más adultos, más cercanía. El trabajo sostiene que esa mirada, aunque necesaria, resulta insuficiente y, en el caso de las matemáticas, potencialmente contraproducente, porque tiende a reproducir un modelo remedial y deficitario. Desde la voz de un miembro del comité científico de PROA+ y dirigiéndose a la comunidad investigadora, defiende la inclusión en el aula de matemáticas como un problema didáctico antes que organizativo, y propone desplazar el foco del recurso a la tarea: qué matemáticas se enseñan, con qué tareas y para quién. A partir de la evidencia del programa, examina tres ámbitos: el diseño de tareas ricas, la codocencia y el pensamiento algebraico como ejercicio crítico del conocimiento profesional docente, y concluye que el reto organizativo y el didáctico son, en realidad, el mismo problema, proponiendo una agenda compartida entre la política de equidad y la investigación.

Palabras clave*: educación matemática, equidad, inclusión, pensamiento algebraico, formación del profesorado, PROA+.*

Abstract

Large-scale educational equity programs, such as PROA+, have deployed a set of measures in highly complex schools that are widely valued—co-teaching, academic support, individualised tutoring, socio-emotional accompaniment—focused above all on the organisational dimension of inclusion: more time, more adults, more closeness. This work argues that such an approach, while necessary, is insufficient and, in the specific case of mathematics, potentially counterproductive, because it tends to reproduce a remedial, deficit-based model. Speaking from the perspective of a member of the PROA+ scientific committee and addressing the research community, it defends inclusion in the mathematics classroom as a didactic problem before an organisational one, and proposes shifting the focus from the resource to the task: what mathematics is taught, through which tasks, and for whom. Drawing on evidence from the program, it examines three areas—the design of rich tasks, co-teaching, and algebraic thinking as a critical exercise of teachers' professional knowledge—and concludes that the organisational challenge and the didactic one are, in fact, the same problem, proposing a shared agenda between equity policy and the research community.

Keywords: *Mathematics education, equity, inclusion, algebraic thinking, teacher education, PROA+*

Moreno, A. (2026). Del recurso a la tarea: qué puede aportar la investigación en educación matemática a la equidad de PROA+. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (pp. 34-44). SEIEM.

INTRODUCCIÓN

En la última década los sistemas educativos han apostado por programas de equidad a gran escala, orientados a compensar las desigualdades de origen y a reducir el abandono escolar temprano (Donlevy et al., 2019). En España, el Programa para la Orientación, Avance y Enriquecimiento Educativo (PROA+) es la iniciativa más ambiciosa en esta línea, dirigida a los centros de especial complejidad educativa. El debate sobre estos programas se ha centrado sobre todo en su diseño normativo, su financiación y su gobernanza. Mucho menos se ha discutido qué significa la inclusión cuando se observa dentro de un aula concreta, en una disciplina concreta: las matemáticas. De eso trata este trabajo.

La reflexión se formula desde una doble posición: la de quien participa en el comité científico del programa y la de quien investiga en didáctica de la matemática. Sostengo que la inclusión en el aula de matemáticas no depende, en lo fundamental, de los recursos disponibles. Es un problema didáctico, y su resolución depende del conocimiento que produce la investigación en educación matemática. A la inversa, PROA+ ofrece a esta comunidad un campo empírico de escala inusual para estudiar la equidad matemática en condiciones reales. El texto examina el marco del programa, los límites de su enfoque organizativo dominante, el desplazamiento conceptual hacia la tarea, tres contribuciones de la investigación, el caso crítico de la Educación Secundaria y cierra con una agenda de trabajo compartida.

PROA+: MARCO, FINALIDADES Y EVIDENCIA

PROA+ es un programa de cooperación territorial dirigido a centros que concentran un porcentaje elevado de alumnado en situación de vulnerabilidad socioeducativa, así como a centros rurales e insulares en zonas desfavorecidas. Su finalidad es ofrecer apoyo y orientación a este alumnado y reducir el fracaso y el abandono escolar temprano, adecuando el proyecto educativo del centro a las necesidades de todo el alumnado. El programa se articula mediante un contrato-programa por el que cada centro elabora un Plan Estratégico de Mejora y pone en juego un conjunto de actividades palanca, organizadas en cinco líneas que abarcan desde las condiciones de educabilidad hasta el refuerzo de las competencias clave, entre ellas la matemática, y la transformación organizativa del centro.

La trayectoria del programa se ha desarrollado en dos fases. La primera (2021-2024), enmarcada en el Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia, estableció como criterio de acceso la concentración de al menos un 30% de alumnado en situación de vulnerabilidad. La segunda (2024-2028), cofinanciada por el Fondo Social Europeo Plus, asume de manera explícita que PROA+ va más allá de un conjunto de actuaciones: se trata de un proceso de transformación institucional, y refuerza el acompañamiento territorial y la cogobernanza entre el Ministerio de Educación, Formación Profesional y Deportes (MEFPD) y las comunidades autónomas. El instrumento pedagógico central del programa es el catálogo de actividades palanca, cuya actualización más reciente reúne 67 actividades a disposición de los centros (MEFPD, 2025b). Dicho catálogo constituye el principal dispositivo mediante el cual el programa orienta lo que sucede en las aulas, y por ello será revisado en las secciones siguientes.

La revisión de informes internacionales y literatura sobre evaluaciones de programas internacionales de equidad aportan una lección que conviene retener: los recursos adicionales solo tienen impacto cuando transforman la experiencia de aula. En el caso de las *zones d'éducation prioritaire* francesas, Bénabou et al. (2009) documentaron efectos muy modestos sobre los resultados del alumnado: los recursos adicionales, diluidos entre numerosos centros y no traducidos en cambios sustantivos de la práctica de aula, apenas alteraron las trayectorias escolares. La literatura internacional converge en que la dotación de recursos es condición necesaria pero no suficiente, y en que el efecto de estos programas depende de manera crítica de que los recursos lleguen a modificar la experiencia de

aprendizaje del alumnado en el aula (OECD, 2012). Esta lección, obtenida a gran escala y con décadas de perspectiva, anticipa el argumento central de este trabajo.

La magnitud del programa es considerable: en su primera fase participaron más de 3.700 centros. La evaluación nacional de esa fase realizada en 2025 sobre 484 centros con diseño de diferencias en diferencias identificó mejoras en la tasa de titulación (+4,3%) y en la idoneidad (+3,2%), junto con una reducción del absentismo (-1,4%) (Ministerio de Educación, Formación Profesional y Deportes, 2025a). Estos resultados aportan evidencia favorable sobre el alcance general del programa. Sin embargo, este tipo de indicadores no permite conocer con suficiente detalle cómo se concretan sus efectos en las prácticas de aula. En el caso de las matemáticas, es precisamente en este nivel donde se generan las oportunidades de participación, razonamiento y desarrollo del pensamiento matemático, así como las experiencias que contribuyen a configurar la relación del alumnado con la disciplina. Por ello, el presente trabajo desplaza el foco desde los resultados agregados hacia el análisis de lo que ocurre en el aula de matemáticas.

LA INCLUSIÓN COMO PROBLEMA ORGANIZATIVO: ALCANCE Y LÍMITES

El examen de cómo se ha interpretado la inclusión dentro de PROA+ nos revela una concepción predominantemente organizativa. Según el Ministerio de Educación, Formación Profesional y Deportes (MEFPD, 2025a), las actividades palanca mejor valoradas por los agentes del programa son, de manera consistente, la codocencia, las tutorías individualizadas y afectivas, el refuerzo educativo y el acompañamiento socioemocional. Se trata de medidas potentes, que mejoran el clima escolar y la vinculación del alumnado con el centro, y cuya valoración positiva está bien documentada en el estudio cualitativo de implementación del programa.

El propio catálogo de actividades palanca ofrece indicios en la misma dirección. Un examen de su estructura (y conviene subrayar que se trata de una interpretación analítica de quien escribe, no de una conclusión de los documentos del programa) revela que las actividades se describen y clasifican fundamentalmente por su formato organizativo: qué agrupamiento requieren, qué agentes intervienen, en qué horario se desarrollan y qué documentación generan. Los criterios relativos a la calidad disciplinar de lo que ocurre dentro de la actividad, como las tareas matemáticas que se proponen, la demanda cognitiva que sostienen o las oportunidades de generalización y argumentación que abren, están, en cambio, prácticamente ausentes. El estudio de implementación apunta en un sentido convergente cuando señala la amplitud y fragmentación del catálogo, la falta de jerarquización que dificulta una selección estratégica y la elevada carga documental que resta tiempo a la reflexión pedagógica (MEFPD, 2025a).

Sin embargo, todas estas medidas comparten un rasgo: responden a las preguntas sobre el quién, el cuándo y el con quién del aprendizaje (más adultos, más tiempo, más cercanía) y apenas inciden sobre el qué: sobre qué matemáticas se enseñan, mediante qué tareas y para quién. Esta mirada organizativa es necesaria, pero insuficiente; y en el caso de las matemáticas resulta, además, potencialmente contraproducente. Cuando el refuerzo matemático se concibe únicamente como prolongación temporal y dotación de recursos humanos, tiende a derivar hacia un modelo remedial y deficitario: la misma matemática, impartida más despacio y al margen del aula ordinaria, dirigida a un alumnado que queda señalado como destinatario del refuerzo. Se sustituye así la pregunta sobre por qué una determinada tarea excluye por la pregunta sobre cómo ayudar a quien no la resuelve; dos formulaciones que orientan la intervención en direcciones opuestas, pues la primera interroga el diseño didáctico y la segunda sitúa el déficit en el estudiante. El propio estudio de implementación señala que las actividades palanca pierden su sentido cuando no se traducen en cambios visibles en la práctica de aula y pasan entonces a vivirse como una carga añadida.

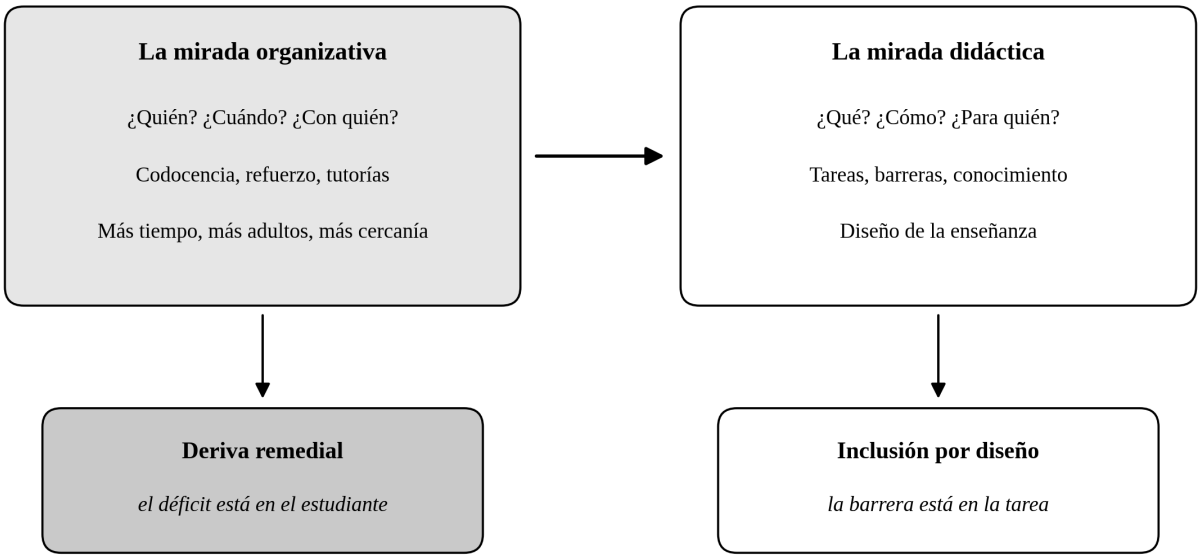
DEL RECURSO A LA TAREA: UN DESPLAZAMIENTO CONCEPTUAL

De lo anterior se sigue la necesidad de un desplazamiento conceptual sencillo de enunciar y exigente de implementar: trasladar el foco desde la cantidad de recursos hacia la calidad de la tarea matemática; es decir, dejar de contar cuántos medios se aportan para preguntar qué se enseña, mediante qué actividades y a quién van dirigidas. Este desplazamiento no resta valor a las medidas organizativas, pero las subordina a una condición: solo se convierten en inclusión efectiva cuando operan sobre tareas matemáticamente ricas y sostenidas por conocimiento didáctico. Las siguientes secciones concretan tres ámbitos en los que la investigación en educación matemática puede aportar ese conocimiento, pero no son los únicos posibles.

El desplazamiento puede formularse, de manera más sintética, como un cambio de pregunta: de las preguntas organizativas sobre el quién, el cuándo y el con quién a las preguntas didácticas sobre qué se enseña, cómo se enseña y a quién se dirige la enseñanza. Cada mirada, cuando se absolutiza, conduce a una deriva distinta: la organizativa, hacia el modelo remedial que localiza el déficit en el estudiante; la didáctica, hacia una inclusión por diseño que localiza la barrera en la tarea y la sitúa dentro del margen de actuación del profesorado. La Figura 1 sintetiza este desplazamiento, que estructura el resto del trabajo.

Figura 1

El desplazamiento conceptual: del recurso a la tarea



TRES CONTRIBUCIONES DE LA INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Del refuerzo remedial a la tarea rica

La noción de tarea rica ya tiene un largo recorrido en la investigación: su relevancia no es nueva (Grootenboer, 2009) y se remonta al menos a los trabajos de Ahmed (1987). Para el problema que aquí nos ocupa, interesa destacar tres rasgos de las tareas ricas. En primer lugar, deben permitir que el alumnado haga matemáticas, y no limitarse a reproducir procedimientos previamente enseñados. En segundo lugar, han de sostener una demanda cognitiva suficiente para promover la exploración, la generalización y la justificación. Finalmente, su diseño debe prever la diversidad del aula mediante distintos puntos de entrada, vías de resolución y formas de representación. Estos rasgos, presentes en distintas caracterizaciones de la literatura sobre tareas ricas (Ahmed, 1987; Good, 2013; Grootenboer, 2009; Stein et al., 2000), resultan especialmente relevantes desde una perspectiva de equidad, porque desplazan la inclusión desde la adaptación posterior hacia el propio diseño de la tarea. La cuestión

pendiente, como ya señalaron Stein et al. (2000), no es tanto identificar qué caracteriza a una tarea rica como comprender mejor cómo ayudar al profesorado a diseñarla y sostenerla en el aula.

El marco de la demanda cognitiva permite precisar esta caracterización. Stein et al. (2000) distinguen cuatro niveles de demanda en las tareas matemáticas: la memorización, los procedimientos sin conexiones, los procedimientos con conexiones y el hacer matemáticas propiamente dicho, que implica explorar, conjeturar, generalizar y justificar. Dos hallazgos de esta línea de investigación resultan especialmente pertinentes para un programa de equidad. El primero es que la demanda cognitiva de una tarea puede variar considerablemente durante la clase: tiende a degradarse durante su implementación cuando el docente, con la intención legítima de ayudar, descompone la tarea en pasos, anticipa la estrategia o valida prematuramente las respuestas, convirtiendo un problema en un ejercicio. El segundo es que las oportunidades de enfrentarse a tareas matemáticas exigentes se distribuyen socialmente de manera que, en lugar de ser neutra, tienden a ser menores para el alumnado de entornos desfavorecidos (OECD, 2012, 2018). El refuerzo remedial constituye el escenario perfecto para la confluencia de ambos fenómenos: la presión por resultados inmediatos, grupos señalados y expectativas rebajadas. Sostener la demanda cognitiva precisamente allí donde más tiende a caer es, en consecuencia, una definición operativa de equidad matemática tan exigente como precisa.

La inclusión comienza desde el diseño de la actividad no cuando un estudiante fracasa. La investigación ha caracterizado las llamadas tareas de suelo bajo y techo alto: actividades accesibles para todo el alumnado, con múltiples puntos de entrada y diversas vías de resolución, que a la vez admiten un elevado desarrollo matemático para quien puede avanzar más. El trabajo de Boaler (2020) sobre las mentalidades matemáticas y la tradición de las tareas ricas converge en esta idea. Una tarea concebida de este modo no requiere adaptación posterior para el alumnado vulnerable, pues es inclusiva por diseño (Bruno et al., 2022).

Esta orientación tiene, además, respaldo empírico. García-Alegre (García-Alegre, 2011) documenta la experiencia de diez centros que siguieron el Programa de Autonomía de Centros. Este trabajo recoge el caso de un centro que diseñó actividades matemáticas contextualizadas en los proyectos de aula (situaciones de numeración, cálculo, resolución de problemas y estadística surgidas del propio proyecto) resueltas en grupos heterogéneos formados explícitamente bajo una mirada inclusiva, con itinerarios ajustados al ritmo de cada estudiante y con énfasis en la resolución de problemas y en la comunicación y representación de los procesos. La adaptación de las estrategias de resolución de problemas para hacerlas accesibles al alumnado con necesidades educativas específicas constituye, de hecho, una línea de investigación consolidada (Fernández-Cobos et al., 2024). Se trata, realmente, de enseñanza matemática inclusiva desarrollada dentro del programa. La limitación es que tales prácticas emergen de la intuición y la voluntad de equipos concretos, sin que el programa disponga aún de marcos para nombrarlas, sistematizarlas y evaluarlas como tales. Es ahí donde la investigación resulta necesaria.

El pensamiento algebraico como caso crítico de inclusión

El álgebra ha operado históricamente como un filtro de la trayectoria matemática: un punto en el que se decide la continuidad o el descuelgue del alumnado, con una distribución social marcadamente desigual (Kaput, 2008; Gutierrez, 2002; Moses y Cobb, 2001; Stinson, 2004). Si existe un lugar en el que la exclusión matemática adquiere carácter estructural, ese es el tránsito de la aritmética al álgebra (Kieran, 2007; Filloy y Rojano, 1989).

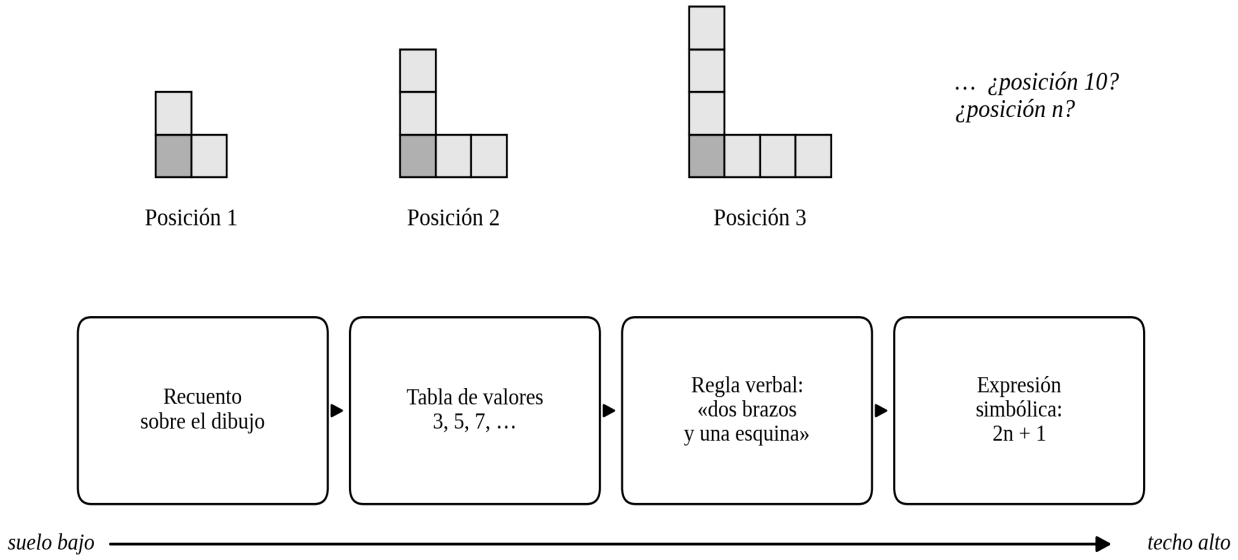
La investigación en early algebra ha mostrado que determinadas formas de pensamiento algebraico pueden desarrollarse desde la educación primaria, mucho antes de la introducción formal del álgebra simbólica. La generalización de patrones, el pensamiento relacional y el uso progresivo de representaciones simbólicas ofrecen vías de acceso al razonamiento algebraico que no dependen de dominar previamente los procedimientos tradicionales del álgebra escolar (Carraher y Schliemann,

2007; Kaput, 2008; Radford, 2010). En esta línea, distintos estudios han documentado que el alumnado de primaria puede identificar regularidades, expresar relaciones y avanzar hacia formas cada vez más generales de representación (Cañadas et al., 2024; Moreno, 2024; Torres et al., 2024). Desde una perspectiva de equidad, este resultado es especialmente relevante porque permite concebir el pensamiento algebraico como un contenido que puede construirse de forma gradual y temprana, y no como un filtro que aparece de manera abrupta al inicio de la Educación Secundaria.

Un ejemplo permite concretar qué significa, en este dominio, una tarea inclusiva por diseño. Considérese una secuencia de figuras en forma de L construidas con cuadrados, en la que cada posición añade un cuadrado a cada uno de los dos brazos (Figura 2). La pregunta «¿Cuántos cuadrados tendrá la figura que ocupe la posición 10?, ¿y una posición cualquiera?» admite vías de acceso de naturaleza muy distinta: el recuento directo sobre el dibujo, la construcción de una tabla de valores y la identificación del patrón recursivo, la formulación verbal de la estructura («dos brazos iguales y una esquina») y, finalmente, su expresión simbólica ($2n + 1$). Todo el alumnado puede entrar en la tarea, pues su suelo es bajo, pero esta no se agota en el recuento, sino que impulsa hacia la generalización, donde reside su riqueza algebraica y, por tanto, su techo alto. Los niveles de generalización que la investigación ha caracterizado, desde la generalización factual ligada a casos concretos hasta la generalización simbólica (Radford, 2010), ofrecen además al docente un mapa para leer las producciones de su alumnado y decidir cómo hacerlas avanzar, en la línea de la transición de la generalización aritmética a la algebraica documentada en estudiantes de primaria (Torres et al., 2024).

Figura 2

Secuencia de figuras en L: una tarea de suelo bajo y techo alto



El interés de este tipo de tareas para un programa como PROA+ es doble. En primer lugar, no requieren materiales ni agrupamientos extraordinarios: la inclusión reside en la arquitectura de la tarea, no en el dispositivo organizativo que la rodea. Además, sitúan el trabajo algebraico en la educación primaria, es decir, antes de que el filtro actúe, lo que lo convierte en una herramienta genuinamente preventiva y no remedial.

Esta evidencia permite reconceptualizar la noción de barrera. PROA+ incorpora, como actuación obligatoria, la evaluación de barreras al aprendizaje, concepto procedente del Diseño Universal para el Aprendizaje (CAST, 2018; Meyer et al., 2014; Rose et al., 2002) y de la tradición del *Index for Inclusion* (Booth y Ainscow, 2015). Dicha evaluación, sin embargo, suele aplicarse en clave genérica:

barreras de acceso, de motivación o de organización. Se propone aquí la pertinencia de identificar barreras matemáticas específicas, entre las cuales el tránsito a lo algebraico constituye una de las más críticas. Desde esta perspectiva, la barrera pasa de centrarse en el estudiante, a poner el foco en una secuencia didáctica que introduce lo simbólico de manera tardía y abrupta, sin un cultivo previo del pensamiento relacional. Reencuadrar la barrera como propiedad del diseño didáctico y no como déficit del alumnado, constituye una de las aportaciones más valiosas que la disciplina puede ofrecer a un programa de equidad.

Codocencia y formación: el recurso no basta sin conocimiento

La codocencia constituye un recurso organizativo, no una medida didáctica. Esta puede transformarse en didáctica o permanecer como mera presencia. La presencia de dos docentes en el aula de matemáticas habilita prácticas que un solo profesional difícilmente puede sostener: anticipar las respuestas previsibles del alumnado, seleccionar y secuenciar sus producciones para orquestar una discusión matemática productiva, atender simultáneamente a distintas representaciones y hacer visible el pensamiento de quienes habitualmente no participan. Estas prácticas han sido conceptualizadas con precisión por la investigación: las cinco prácticas para orquestar discusiones de Smith y Stein (2011), el conocimiento especializado para la enseñanza de las matemáticas propuesto por Ball et al. (2008) y en el contexto español la propuesta de Carrillo et al. (2018), o la mirada profesional, noticing, desarrollada en el contexto español por Llinares y su grupo (Llinares, 2013; Moreno et al., 2026).

Ahora bien, no toda configuración de codocencia habilita por igual esas prácticas. La literatura ha descrito distintos modelos de organización de dos docentes en el aula: uno enseña y otro apoya, enseñanza por estaciones, enseñanza paralela, enseñanza alternativa a un grupo reducido y enseñanza en equipo (Cook y Friend, 1995), que distan de ser didácticamente equivalentes. El modelo que tiende a instalarse por defecto en los contextos de refuerzo es el primero: un docente conduce la clase habitual mientras que el segundo asiste individualmente al alumnado señalado. Esta configuración reproduce, dentro del aula ordinaria, la misma lógica remedial que el desdoble externo: no modifica la tarea ni la participación y marca a sus destinatarios. Las configuraciones con mayor potencial inclusivo son precisamente las que exigen una planificación didáctica conjunta: qué tarea se propone, qué respuestas se anticipan, quién observa qué producciones y cómo se orquesta la puesta en común. Es decir, son aquellas que presuponen el conocimiento profesional compartido del que se ocupa este epígrafe.

El estudio de implementación del programa aporta, en este punto, un hallazgo decisivo: el factor limitante no está en el recurso disponible, sino en el conocimiento profesional para emplearlo bien (Ball y Cohen, 1999). La formación con impacto real es la formación situada, diseñada a partir de demandas concretas y vinculada a la práctica de aula, mientras que la formación genérica apenas produce efectos (MEFPD, 2025a). De ello se desprende que la dotación de codocencia, sin un conocimiento didáctico compartido sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, tiende a duplicar la docencia tradicional en lugar de transformarla. La variable crítica de la equidad matemática no es la dotación de recursos: es la formación del profesorado de matemáticas, ámbito que corresponde específicamente a la comunidad investigadora. A este conocimiento didáctico se añade una dimensión afectiva: la ansiedad matemática del propio profesorado puede operar como una barrera que se transmite al alumnado, de modo que su reducción desde la formación constituye también una cuestión de equidad (Fernández Cézar et al., 2022).

EL CASO CRÍTICO DE LA EDUCACIÓN SECUNDARIA

El estudio de implementación muestra de forma consistente que PROA+ produce mejores resultados en Educación Primaria que en Educación Secundaria, por razones en buena medida estructurales. La organización departamental de los institutos tiende a encapsular el programa: cuando se asigna un recurso de codocencia, este pertenece a un departamento concreto, con frecuencia el ámbito científico

o la propia materia de matemáticas, y no al centro en su conjunto. La codocencia se aplica entonces de manera circunscrita y separada del resto de la actividad del centro, de modo que el programa no llega a permear la cultura organizativa como sí ocurre en los centros de Primaria, y queda limitado a un número reducido de materias y docentes.

Este fenómeno presenta una doble naturaleza. Es un problema organizativo, en cuanto la estructura departamental fragmenta la intervención; pero es, simultáneamente, un problema profundamente didáctico, pues la Educación Secundaria es justamente la etapa en la que el álgebra ejerce su función de filtro y en la que el refuerzo de matemáticas corre el mayor riesgo de adoptar un formato remedial. El reto organizativo y el reto didáctico no son dos problemas distintos: son dos manifestaciones del mismo problema. Su resolución no puede confiarse únicamente a la flexibilidad horaria, sino que requiere un conocimiento didáctico compartido que otorgue sentido matemático a esa flexibilidad.

A la estructura departamental se añade un factor menos visible: la identidad profesional del profesorado de secundaria, formado prioritariamente en la disciplina y, en menor medida, en su didáctica. Desde la perspectiva de la cognición situada, el conocimiento profesional se construye y se transforma en los contextos de práctica en los que se utiliza (Putnam y Borko, 2000); un instituto organizado en departamentos estancos ofrece pocos contextos en los que el profesorado de matemáticas pueda examinar su práctica junto a otros, y el programa, encapsulado en un departamento, no los crea. De ahí que la formación situada que reclama este trabajo tenga en la Educación Secundaria su banco de pruebas más difícil y, a la vez, el más necesario.

UNA AGENDA DE INVESTIGACIÓN COMPARTIDA

El diagnóstico anterior conduce a una relación de reciprocidad entre el programa y la investigación en educación matemática. Por una parte, PROA+ ofrece a la comunidad investigadora un campo empírico sin precedentes: miles de centros, actuaciones documentadas, datos longitudinales sobre aprendizaje, absentismo y clima escolar, y un mandato explícito de equidad. Para una disciplina que con frecuencia investiga en contextos reducidos y controlados, este escenario representa la oportunidad para estudiar la inclusión matemática a escala real.

Por otra parte, el programa requiere de la investigación aportaciones concretas: criterios de calidad matemática para las actividades palanca cuyo catálogo prioriza hoy el formato organizativo y apenas atiende a la calidad matemática de lo que ocurre en el aula; instrumentos para detectar barreras matemáticas específicas, y no solo genéricas; modelos de formación situada del profesorado de matemáticas; y rúbricas y materiales con sentido didáctico, más allá de su función en la rendición de cuentas, necesidad que el propio estudio de implementación señala. En coherencia con lo anterior, se proponen cuatro preguntas de investigación abiertas:

- ¿Qué características hacen que una actividad palanca de matemáticas sea matemáticamente rica y no solamente correcta en su formato organizativo?
- ¿Es posible elaborar, a partir de la investigación, un mapa de barreras matemáticas específicas, como por ejemplo el tránsito a lo algebraico, que oriente la intervención de los centros?
- ¿Qué conocimiento didáctico deben compartir dos docentes para que una sesión de codocencia en matemáticas resulte inclusiva y no meramente duplicada?
- ¿Cómo evaluar la equidad matemática de un centro más allá de las tasas de titulación, mediante indicadores que capten que todo el alumnado desarrolla pensamiento matemático?

Estas cuatro preguntas no son meramente programáticas: admiten diseños de investigación concretos. La primera puede abordarse mediante el análisis didáctico sistemático de las actividades del catálogo, aplicando marcos como el de la demanda cognitiva a un corpus documental ya disponible. La segunda requiere estudios de diagnóstico a gran escala sobre el tránsito de la aritmética al álgebra en centros PROA+, para los que la disciplina dispone de instrumentos contrastados. La tercera invita a estudios

de caso y a ciclos de investigación de diseño sobre parejas de codocencia en matemáticas, en los que la unidad de análisis no sea el recurso, sino el conocimiento compartido que se moviliza. La cuarta, quizá la más ambiciosa, exige construir indicadores de equidad matemática: distribución de la demanda cognitiva de las tareas, participación en la discusión matemática y acceso a la generalización, que complementen los indicadores de resultados con los que el programa ya cuenta. En todos los casos, la infraestructura del programa (centros identificados, datos longitudinales, estructuras de acompañamiento territorial) reduce notablemente el coste de entrada para los equipos de investigación.

CONSIDERACIONES FINALES

Proveer recursos no basta para lograr la equidad en matemáticas. Esta se construye en el diseño de las tareas y se sostiene con el conocimiento didáctico del profesorado. Programas como PROA+ ponen sobre la mesa la oportunidad, la escala y el mandato de equidad; a la investigación en educación matemática le corresponde el conocimiento sobre cómo se enseña y se aprende esta disciplina para que nadie quede excluido por su diseño. Creo que ahí está la vía más prometedora: que la política de equidad y la comunidad investigadora trabajen juntas, para que la inclusión en el aula de matemáticas deje de ser solo un propósito organizativo y se convierta en una realidad didáctica.

Referencias

Ahmed, A. (1987). *Better Mathematics*. HMSO.

Ball, D. L. y Cohen, D. K. (1999). Developing practice, developing practitioners: Toward a practice-based theory of professional education. En L. Darling-Hammond y G. Sykes (Eds.), *Teaching as the learning profession* (pp. 3–32). Jossey-Bass.

Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389–407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Bénabou, R., Kramarz, F. y Prost, C. (2009). The French zones d'éducation prioritaire: Much ado about nothing? *Economics of Education Review, 28*(3), 345–356. https://doi.org/10.1016/j.econedurev.2008.04.005

Boaler, J. (2020). *Mentalidades matemáticas: cómo liberar el potencial de los estudiantes mediante las matemáticas creativas, mensajes inspiradores y una enseñanza innovadora*. Editorial Sirio Sa.

Booth, T. y Ainscow, M. (2015). *Guía para la educación inclusiva: Desarrollando el aprendizaje y la participación en los centros escolares* (G. Echeita, Y. Muñoz, C. Simón y M. Sandoval, trads. y adapt.). OEI/FUHEM.

Bruno, A., Gil-Clemente, E., Gutiérrez, A., Jaime, A. y Polo-Blanco, I. (2022). Pensemos en unas matemáticas para todo el alumnado. En L. J. Blanco, N. Climent, M. T. González, A. Moreno, G. Sánchez-Matamoros, C. de Castro y C. Jiménez (Eds.), *Aportaciones al desarrollo del currículo desde la investigación en educación matemática* (pp. 323–347). Editorial Universidad de Granada.

Cañadas, M.C., Moreno, A. y Torres, M.D. (2024). First encounter with constructing graphs in the functional thinking approach to school algebra in 3rd and 4th grades. *ZDM Mathematics Education* 56, 1059–1078. https://doi.org/10.1007/s11858-024-01627-2

Carraher, D. W. y Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (Vol. 2, pp. 669–705). Information Age Publishing.

Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, *20*(3), 236–253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Carrillo-Yáñez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236–253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

CAST. (2018). *Universal design for learning guidelines version 2.2*. https://udlguidelines.cast.org

Comisión Europea (2011). *Abordar el abandono escolar prematuro: una contribución clave a la agenda Europa 2020*. Comisión Europea.

Consejo de la Unión Europea (2011). Recomendación del Consejo, de 28 de junio de 2011, relativa a las políticas para reducir el abandono escolar prematuro (2011/C 191/01). *Diario Oficial de la Unión Europea, C 191*, 1–6.

Cook, L. y Friend, M. (1995). Co-teaching: Guidelines for creating effective practices. *Focus on Exceptional Children, 28*(3), 1-16.

Donlevy, V., Day, L. y Andriescu, M. (2019). *Assessment of the implementation of the 2011 Council Recommendation on policies to reduce early school leaving*. Oficina de Publicaciones de la Unión Europea.

Fernández Cézar, R., Marbán, J. M., García Monge, A. y Rabelo Procópio, M. V. (2022). Dominio afectivo y ansiedad matemática: Rompiendo barreras por la equidad en educación matemática. En T. Fernández Blanco, C. Núñez García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Coords.), *Investigación en educación matemática XXV* (p. 602). SEIEM.

Fernández-Cobos, R., Polo-Blanco, I. y Bruno, A. (2024). Adaptaciones metodológicas para la enseñanza de resolución de problemas aritméticos a alumnado con autismo. *Epsilon*, (116), 53–62.

Filloy, E. y Rojano, T. (1989). Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics, 9*(2), 19–25.

García-Alegre, E. (coord.) (2021). *¿Qué hemos aprendido de diez centros PAC? Lo difícil hecho fácil*. MEFPD. https://www.educacionfpydeportes.gob.es/mc/sgctie/cooperacion-territorial/programas-cooperacion/proa/recursos.html

Good, S. (2013). *What is a rich task?* Greater Cleveland Council of Teachers of Mathematics. http://mygcctmonline.org/resources/19sept2013/Rich_Tasks-What_Where_Why_How.pdf

Grootenboer, P. (2009). Rich mathematical tasks in the Maths in the Kimberley (MITK) Project. En R. Hunter, B. Bicknell y T. Burgess (Eds.), *Crossing divides, Proceedings of the 32nd annual conference of the MERGA, 1* (pp. 696-699). MERGA.

Gutierrez, R. (2002). Enabling the Practice of Mathematics Teachers in Context: Toward a New Equity Research Agenda. *Mathematical Thinking and Learning*, *4*(2–3), 145–187. https://doi.org/10.1207/S15327833MTL04023_4

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. J. Kaput, D. W. Carraher, y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5–17). Routledge.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching of algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (Vol. 2, pp. 707–762). Information Age Publishing.

Lingard, R. Ladwig, J., Mills, M., Bahr, M., Chant, D., Warry, M., Allwood, J., Capeness, R., Christie, P., Gore, J., Haydes, D. y Luke, A. (2001). *The Queensland school reform longitudinal study*. Education Queensland.

Llinares, S. (2013). Professional noticing: A component of the mathematics teacher's professional practice. *Sisyphus — Journal of Education, 1*(3), 76–93.

Meyer, A., Rose, D. H. y Gordon, D. (2014). *Universal design for learning: Theory and practice*. CAST Professional Publishing.

Ministerio de Educación, Formación Profesional y Deportes. (2025a). *Estudio sobre la implementación y mejora del PROA+*. MEFPD. https://www.educacionfpydeportes.gob.es/mc/sgctie/cooperacion-territorial/programas-cooperacion/proa/recursos.html

Ministerio de Educación, Formación Profesional y Deportes. (2025b). *Catálogo de actividades palanca PROA+. Actualización agosto 2025*. Subdirección General de Cooperación Territorial e Innovación Educativa. https://www.libreria.educacion.gob.es/libro/catalogo-de-actividades-palanca-proa+_185899/

Moreno, A. (2024). Generalization processes of 5th grade elementary school students using graphs. In A. Twohill, I. I. Baykal, J. Miller, E. Knuth, y A. Ribeiro (Eds), *Proceedings from ICME 15, Topic Study Group 1.2: Teaching and learning of early algebra*. https://helvia.uco.es/bitstream/handle/10396/30971/2024%20ICME15%20Sydney.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Moreno, M., Santonja, P. y Llinares, S. (2026). Levels of articulation in prospective mathematics teacher noticing. *Educational Studies in Mathematics*, *121*(1), 51-71. https://doi.org/10.1007/s10649-025-10442-9

Moses, R. P. y Cobb, C. E. (2001). *Radical equations: Math literacy and civil rights*. Beacon Press.

OECD (2012), *Equity and Quality in Education: Supporting Disadvantaged Students and Schools*, OECD Publishing, Paris, https://doi.org/10.1787/9789264130852-en.

OECD (2018), *Equity in Education: Breaking Down Barriers to Social Mobility*, PISA, OECD Publishing, Paris, https://doi.org/10.1787/9789264073234-en.

Putnam, R. T. y Borko, H. (2000). What do new views of knowledge and thinking have to say about research on teacher learning? *Educational Researcher, 29*(1), 4-15.

Radford, L. (2010). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education, 12*(1), 1–19. https://doi.org/10.1080/14794800903569741

Rose, D. H. y Meyer, A. (2002). *Teaching every student in the digital age: Universal design for learning*. ASCD.

Smith, M. S. y Stein, M. K. (2011). *5 practices for orchestrating productive mathematics discussions*. National Council of Teachers of Mathematics.

Stein, M. K., Smith, M, Henningsen, M. y Silver, E. (2000). *Implementing Standards-Based Mathematics Instruction*. Teachers College Press.

Stinson, D. W. (2004). Mathematics as "gate-keeper" (?): Three theoretical perspectives that aim toward empowering all children with a key to the gate. *The Mathematics Educator, 14*(1), 8–18.

Torres, M. D., Moreno, A., Vergel, R. y Cañadas, M. C. (2024). The Evolution from “I think it plus three” Towards “I think it is always plus three.” Transition from Arithmetic Generalization to Algebraic Generalization. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *22*(5), 971-991. https://doi.org/10.1007/S10763-023-10414-6

[i] Cabe citar el programa Title I en Estados Unidos (desde 1965), las *Education Priority Areas* y, más tarde, las Education Action Zones en el Reino Unido, o las *Zones d’Éducation Prioritaire* en Francia (desde 1982), entre otros (Bénabou, Kramarz y Prost, 2009). En el plano europeo, situar el abandono escolar temprano por debajo del 10 % fue un objetivo explícito de la Estrategia Europa 2020 y de la Recomendación del Consejo de 2011 (Consejo de la Unión Europea, 2011; Comisión Europea, 2011). La OCDE ha consolidado, además, la equidad como prioridad sistémica de política educativa (OECD, 2012, 2018).

Seminario de investigación II

FORMACIÓN PARA LA PROFESIÓN DOCENTE DESDE LA DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA: RETOS DE LA FORMACIÓN INICIAL

Coordina:

Laura Muñiz-Rodríguez
Universidad de Oviedo

Ponentes:

María Cinta Muñoz-Catalán
Universidad de Sevilla
Reflexión sobre la formación inicial en Educación Infantil desde la investigación en Didáctica de la Matemática: retos y propuestas

Pablo Beltrán-Pellicer
Universidad de Zaragoza
Docentes sin identidad matemática: retos de la formación inicial del profesorado de Educación Primaria

Carlos Segura Cordero
Universitat de València
¿Basta con saber matemáticas? Del dominio disciplinar a la mirada profesional en la formación inicial del profesorado de Secundaria

FORMACIÓN PARA LA PROFESIÓN DOCENTE DESDE LA DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA: RETOS DE LA FORMACIÓN INICIAL

Teacher education from the perspective of mathematics education: challenges of initial teacher training

Muñiz-Rodríguez, L.

Universidad de Oviedo

Resumen

El seminario de investigación aborda los retos actuales de la formación inicial del profesorado desde la perspectiva de la Didáctica de la Matemática. Se contextualiza el papel estratégico de la educación matemática y la necesidad de fortalecer la formación disciplinar y didáctico-disciplinar de los futuros docentes. Asimismo, se revisan los principales debates y procesos de reforma de la formación inicial del profesorado en España. El seminario reúne tres ponencias centradas, respectivamente, en la formación matemática de los futuros maestros de Educación Infantil, en la construcción de la identidad profesional del profesorado de Educación Primaria como docente de matemáticas y en los retos de la formación del profesorado de Matemáticas de Educación Secundaria, con especial atención a la mirada profesional y a la conexión entre teoría y práctica. Finalmente, se plantean propuestas para fortalecer la formación inicial del profesorado de matemáticas.

Palabras clave: *educación matemática, formación inicial docente, profesión docente*

Abstract

The research seminar addresses current challenges in initial teacher education from the perspective of mathematics education. It examines the strategic role of mathematics education and the need to strengthen future teachers' disciplinary and pedagogical content knowledge. The main debates and reform processes concerning initial teacher education in Spain are also discussed. The seminar brings together three presentations focusing, respectively, on mathematics education for future Early Childhood teachers, the development of Primary teachers' professional identity as mathematics teachers, and the challenges of Secondary mathematics teacher education, with particular attention to professional noticing and the connection between theory and practice. Finally, proposals are put forward to strengthen initial mathematics teacher education.

Keywords: *initial teacher education, mathematics education, teaching profession*

La reflexión sobre la formación para la profesión docente y los desafíos que afronta la formación inicial constituye una preocupación permanente en el ámbito educativo y universitario. En una sociedad marcada por constantes transformaciones culturales, tecnológicas y ambientales, la educación matemática adquiere un papel estratégico, al proporcionar a la ciudadanía las competencias necesarias para resolver problemas en contextos reales, analizar datos, valorar evidencias, identificar sesgos y participar de manera informada y responsable en la toma de decisiones individuales y colectivas (OECD, 2023). Desde esta perspectiva, uno de los grandes retos de la profesión docente es garantizar una enseñanza de las matemáticas que contribuya efectivamente a dicha formación ciudadana. En consecuencia, la formación inicial del profesorado de todas las etapas educativas (Infantil, Primaria y Secundaria) debe preparar a los futuros docentes para promover una educación

Muñiz-Rodríguez, L. (2026). Formación para la profesión docente desde la didáctica de la matemática: Retos de la formación inicial. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (pp. 47-51). SEIEM.

matemática que responda a las necesidades y complejidades del mundo contemporáneo, orientada al desarrollo de competencias, conocimientos y valores que permitan comprender críticamente la realidad y transformarla en favor de sociedades más justas, equitativas y sostenibles.

A este desafío se ha contribuido desde distintos espacios institucionales y académicos, como el Ministerio de Educación y Formación Profesional, el Ministerio de Universidades, la Conferencia de Decanos y Decanas de Educación (CoDE), y diversas sociedades científicas y académicas. En España, la normativa vigente que establece los requisitos para la verificación de los títulos universitarios oficiales que habilitan para el ejercicio de la profesión docente en Educación Infantil (Ministerio de Educación y Ciencia, 2007a), Primaria (Ministerio de Educación y Ciencia, 2007b) y Secundaria (Ministerio de Educación y Ciencia, 2007c) acumula ya cerca de dos décadas de recorrido y precisa una actualización que responda a las necesidades, retos y demandas actuales del sistema educativo y de la profesión docente. Esta revisión resulta especialmente necesaria en el ámbito de la educación matemática, donde los avances en la investigación, las nuevas demandas asociadas a la alfabetización matemática y estadística, la creciente presencia de los datos en la vida cotidiana y la necesidad de formar una ciudadanía crítica y participativa exigen repensar las competencias y conocimientos que deben desarrollar los futuros docentes (Martín de Diego et al., 2020).

En enero de 2022, el Ministerio de Educación y Formación Profesional (2022) publicó un documento con 24 propuestas de reforma para la mejora de la profesión docente, articuladas en torno a la formación inicial y permanente, el acceso a la profesión, las especialidades y el desarrollo profesional. Entre sus principales líneas de actuación se incluyen la definición de un marco de competencias profesionales docentes, la revisión de los procesos de acceso y selección, el refuerzo de la formación inicial con mayor vinculación entre teoría y práctica, la mejora de la formación permanente, así como el impulso de una carrera profesional más estructurada y evaluada, con el objetivo de fortalecer la calidad del sistema educativo a través de una docencia más cualificada, coherente y adaptada a los retos contemporáneos.

En febrero de 2023, el Ministerio de Universidades publicó el proyecto de orden por la que se establecen los requisitos para la verificación de los planes de estudios conducentes a la obtención de los títulos universitarios oficiales que habiliten para el ejercicio de la profesión de maestro en Educación Infantil (Ministerio de Universidades, 2023a) y en Educación Primaria (Ministerio de Universidades, 2023b), recibiendo numerosas alegaciones. Las críticas se centraron, de forma recurrente, en la reducción del peso de las didácticas disciplinares, la pérdida de presencia de contenidos específicos y el desequilibrio entre formación competencial general y conocimiento disciplinar. En conjunto, quienes alegaron expresaron una oposición clara a la configuración de los nuevos planes de estudio del profesorado de Infantil y Primaria.

En el ámbito de la educación matemática, cobra especial relevancia el papel desempeñado por entidades como la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), la Real Sociedad Matemática Española (RSME), la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM), o el Comité Español de Matemáticas (CEMat), que no solo participaron activamente en el periodo de alegaciones a los proyectos de orden de 2023, sino que han mantenido una presencia constante en los distintos procesos de debate y reforma de la formación inicial del profesorado. En particular, su contribución puede resumirse en una serie de aportaciones que inciden directamente en la educación matemática y en las condiciones necesarias para garantizar una formación sólida del futuro profesorado: la necesidad de asegurar un nivel mínimo de competencia matemática del estudiantado que permita abordar con solvencia los contenidos de las titulaciones, la exigencia de una formación matemática rigurosa y de calidad durante los programas de formación inicial docente, la constatación de que la formación matemática en las titulaciones actuales presenta un peso insuficiente, la conveniencia de priorizar el acceso al Máster en Formación del Profesorado a titulados en Matemáticas, la necesidad de revisar la oferta de plazas en el ámbito matemático, actualmente insuficiente en el sistema público, y la recuperación de la figura del maestro especialista

en Matemáticas. Asimismo, se ha insistido en que, aunque no se contemplen nuevas especialidades dentro del Grado en Maestro en Educación Primaria, el peso de las matemáticas en esta titulación resulta claramente insuficiente para garantizar una formación sólida en el área, lo que hace necesario contar con plantillas estables de profesorado experto en Didáctica de la Matemática que permitan fortalecer la formación de los futuros maestros en este ámbito.

A principios de 2024, la CoDE propuso la elaboración de cinco Libros Blancos correspondientes a Educación Infantil, Educación Primaria, Máster de Formación del Profesorado de Educación Secundaria, Pedagogía y Educación Social. Para su desarrollo se constituyeron diversos grupos de trabajo integrados por profesorado de distintas Facultades de Educación. Dado el elevado número de propuestas para formar parte de estos grupos y la desigual distribución de candidaturas entre las distintas áreas de conocimiento, se recurrió a un sorteo (entre los miembros propuestos por las facultades) que permitiera garantizar una representación equilibrada de las áreas establecidas como propias del ámbito de ciencias de la educación según la Agencia Nacional de Evaluación de la Calidad y Acreditación (Ministerio de Universidades, 2023c), evitando la repetición de comunidades autónomas y facultades dentro de una misma titulación. No obstante, como consecuencia de la distribución de las candidaturas y del propio resultado del sorteo, el grupo finalmente constituido no contó con representación del área de Didáctica de la Lengua y la Literatura. Por su naturaleza, el área de Didáctica de la Matemática contaba con representantes en los Libros Blancos de Educación Infantil (Encarnación Sánchez Jiménez como titular y Dolores Rodríguez Vivero como suplente), Educación Primaria (Laura Muñiz Rodríguez como titular y José Antonio González-Calero Somoza como suplente) y Máster de Formación del Profesorado de Educación Secundaria (Marta Pla Castells y Mercedes Hidalgo Herrero como titulares y Ana Belén Rodríguez Raposo y María del Carmen López Esteban como suplentes). En este punto, deseo poner en valor y expresar en nombre de toda la comunidad científica nuestro más profundo reconocimiento y agradecimiento por la disposición, el esfuerzo sostenido y el rigor en el trabajo desarrollado por todas las personas implicadas en la elaboración de estos documentos, cuya dedicación y compromiso han sido absolutamente determinantes para hacer posible este proceso.

El principal objetivo planteado por la CoDE para la redacción de los Libros Blancos era elaborar un documento que analizase los problemas actuales de la formación, la evolución de los estudios, la oferta y demanda de las distintas titulaciones, los modelos internacionales de formación, los perfiles profesionales, objetivos y competencias de los planes de formación inicial docente, y los modelos de estructura existentes actualmente y opciones de adaptación a una nueva normativa. En esencia, este proceso pretendía actualizar el Libro Blanco del Título de Grado en Magisterio, auspiciado por la ANECA (2005) y ampliar la iniciativa a la Educación Secundaria. El proceso de elaboración de los Libros Blancos ha sido complejo y no ha estado exento de importantes disensos sobre varios de sus elementos fundamentales. Estas discrepancias fueron especialmente intensas en el caso del Libro Blanco de Educación Primaria, hasta el punto de que la CoDE decidió escindir el grupo de trabajo inicial en dos: uno integrado por los representantes de Didáctica de las Ciencias Experimentales, Didáctica de las Ciencias Sociales, Didáctica de la Matemática, Didáctica de la Lengua y la Literatura y Didáctica de la Expresión Plástica, y otro por el resto de sus miembros. Pese al desacuerdo manifestado por los representantes de las didácticas específicas con la forma de proceder, la CoDE encargó a cada nuevo grupo de trabajo la elaboración completa de un Libro Blanco, con el compromiso de realizar una revisión y unificación posterior. Sin embargo, la versión final del Libro Blanco de Educación Primaria publicada por la CoDE omite las ideas del documento elaborado por los representantes mencionados con anterioridad, motivo por el cual enviaron el manifiesto *No con mi nombre* a la CoDE solicitando la retirada de su autoría por invisibilizar las aportaciones que habían realizado.

Entre otros aspectos, el Libro Blanco de Educación Primaria publicado por la CoDE se fundamenta en un Marco de Competencias Profesionales Docentes propuesto por el Ministerio de Educación,

Formación Profesional y Deportes, objeto de numerosas alegaciones, que prioriza la pedagogía general frente al conocimiento didáctico-disciplinar. En este sentido, los representantes de las didácticas específicas defienden que todas las competencias pueden abordarse desde las distintas áreas curriculares que conforman el currículo de Educación Primaria. Sin embargo, sin una formación específica en el desarrollo disciplinar de dichas competencias, el futuro docente no dispondrá del conocimiento especializado necesario para su adecuada enseñanza en cada área. Por ello, resulta imprescindible explicitar esta concreción, ya que, de no hacerlo, se corre el riesgo de perpetuar las deficiencias actuales. A modo de ejemplo, la mayoría de los planes de estudio vigentes no incluyen una formación suficiente en dificultades de aprendizaje ni en herramientas de evaluación específicas asociadas al ámbito de las matemáticas. Bajo esta premisa, una de las contribuciones más significativas del Libro Blanco de Educación Primaria elaborado por los cinco representantes mencionados con anterioridad fue la concreción del Marco de Competencias Profesionales Docentes desde la perspectiva de las didácticas específicas, entre ellas, la Didáctica de la Matemática.

Las sociedades científicas y académicas, que ya habían solicitado ser reconocidas como interlocutoras en este proceso, apoyaron de manera constante la labor de los representantes en los tres Libros Blancos, contribuyendo así a matizar y paliar la visión generalista de la CoDE mediante el aporte de enfoques disciplinares más específicos y contextualizados. Por este motivo hago extensible mi agradecimiento a los miembros de las sociedades que brindaron su apoyo durante este proceso, y en particular a los compañeros que formaron parte de los grupos de trabajo creados para este propósito.

El objetivo de este seminario de investigación es reflexionar sobre los retos que plantea la formación inicial del profesorado en las distintas etapas educativas (Educación Infantil, Educación Primaria y Educación Secundaria), a partir de las principales orientaciones actuales y del marco de reformas y debates en curso, desde una perspectiva centrada en la educación matemática. Para ello, cada una de las tres ponencias que conforman este seminario aborda estos aspectos en relación con cada una de las etapas educativas mencionadas, aportando una visión complementaria y articulada del conjunto del sistema de formación del profesorado. Tomando como referencia el recorrido previo ya descrito sobre los procesos de cambio normativo y sus desarrollos más recientes, se pretende profundizar en algunos de los desafíos específicos que dichos cambios plantean para la formación inicial del profesorado de matemáticas en cada una de las etapas educativas. Así, la primera ponencia examina críticamente la formación de maestros de Educación Infantil a la luz del nuevo currículo y del reciente Libro Blanco de Educación Infantil (Muñoz-Catalán, 2026); la segunda analiza la construcción de la identidad profesional del profesorado de Educación Primaria como docente de matemáticas y las implicaciones que ello tiene para su formación inicial (Beltrán-Pellicer, 2026); y la tercera aborda los principales límites y retos de la formación del profesorado de Matemáticas de Educación Secundaria, prestando especial atención al desarrollo de la mirada profesional y a las propuestas formativas orientadas a fortalecer la conexión entre teoría y práctica (Segura, 2026). Las tres ponencias concluyen formulando propuestas concretas dirigidas a mejorar la formación inicial del profesorado de matemáticas en el contexto de las reformas actualmente en desarrollo.

Finalizo expresando mi más sincero agradecimiento a la Junta Directiva de la SEIEM, así como al Comité Científico del XXIX Simposio de la SEIEM que han impulsado esta iniciativa y confiaron en la pertinencia de abordar los retos de la formación inicial para la profesión docente. También a los tres ponentes (Cinta Muñoz Catalán, Pablo Beltrán Pellicer y Carlos Segura Cordero) por su generosa colaboración, dedicación y valiosas aportaciones. Su compromiso y disposición al diálogo han contribuido de manera decisiva a enriquecer la reflexión y el intercambio de conocimiento que este seminario pretende promover.

Agradecimientos: Proyecto PID2024-155358NB-100 de la Agencia Estatal de Investigación de España.

Referencias

ANECA (2005). *Libro Blanco. Título de Grado en Magisterio. Volumen 1*. Agencia Nacional de Evaluación de la Calidad y Acreditación. https://www.aneca.es/documents/20123/340261/libroblanco_jun05_magisterio1.pdf/568b7bd7-daa6-e0b7-c577-a9aa8a6d613a?t=1778756858466

Beltrán-Pellicer, P. (2026). Docentes sin identidad matemática: retos de la formación inicial del profesorado de Educación Primaria. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (pp. 67-81). SEIEM.

Martín de Diego, D., Chacón Rebollo, T., Curbera Costello, G., Marcellán Español, F. y Siles Molina, M. (2020). *Libro Blanco de las Matemáticas*. Centro de Estudios Ramón Areces. https://www.fundacionareces.es/recursos/doc/portal/2020/10/14/libro-blancode-las-matematicas.pdf

Ministerio de Educación y Ciencia (2007a). Orden ECI/3854/2007, de 27 de diciembre, por la que se establecen los requisitos para la verificación de los títulos universitarios oficiales que habiliten para el ejercicio de la profesión de Maestro en Educación Infantil. *Boletín Oficial del Estado, 312*, 53735-53738.

Ministerio de Educación y Ciencia (2007b). Orden ECI/3857/2007, de 27 de diciembre, por la que se establecen los requisitos para la verificación de los títulos universitarios oficiales que habiliten para el ejercicio de la profesión de Maestro en Educación Primaria. *Boletín Oficial del Estado, 312*, 53747-53750.

Ministerio de Educación y Ciencia (2007c). Orden ECI/3858/2007, de 27 de diciembre, por la que se establecen los requisitos para la verificación de los títulos universitarios oficiales que habiliten para el ejercicio de las profesiones de Profesor de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas. *Boletín Oficial del Estado, 312*, 1-6.

Ministerio de Educación y Formación Profesional (2022). *Documento para debate 24 propuestas de reforma para la mejora de la profesión docente*. https://educagob.educacionfpydeportes.gob.es/dam/jcr:adf4f050-9832-4a88-9cd2-96cd3519c664/documento-de-debate-24-propuestas-de-reforma-profesi-n-docente.pdf

Ministerio de Universidades (2023a). *Proyecto de Orden por la que se establecen los requisitos para la verificación de los planes de estudios conducentes a la obtención de los títulos universitarios oficiales que habiliten para el ejercicio de la profesión de Maestra/o en Educación Infantil*. https://www.ciencia.gob.es/Convocatorias/Participacion-Publica/Audiencia-e-informacion-publica/2023/AIP_O_TUMaestroInfantil.html

Ministerio de Universidades (2023b). *Proyecto de Orden por la que se establecen los requisitos para la verificación de los planes de estudios conducentes a la obtención de los títulos universitarios oficiales que habiliten para el ejercicio de la profesión de Maestra/o en Educación Primaria*. https://www.ciencia.gob.es/Convocatorias/Participacion-Publica/Audiencia-e-informacion-publica/2023/AIP_O_HABPROFM_EP.html

Ministerio de Universidades (2023c). Resolución de 14 de noviembre de 2023, de la Agencia Nacional de Evaluación de la Calidad y Acreditación, por la que se crean las comisiones de acreditación que valoran los méritos y competencias en el procedimiento de acreditación estatal para el acceso a los cuerpos docentes universitarios. *Boletín Oficial del Estado, 279*, 155503-155510. https://www.boe.es/eli/es/res/2023/11/14/(1)/dof/spa/pdf

Muñoz-Catalán, M.C. (2026). Reflexión sobre la formación inicial en Educación Infantil desde la investigación en Didáctica de la Matemática: retos y propuestas. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (pp. 52-66). SEIEM.

OECD (2023). *PISA 2022 Assessment and Analytical Framework*. OECD Publishing. https://doi.org/10.1787/dfe0bf9c-en

Segura, C. (2026). ¿Basta con saber matemáticas? Del dominio disciplinar a la mirada profesional en la formación inicial del profesorado de secundaria. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (pp. 82-96). SEIEM.

REFLEXIÓN SOBRE LA FORMACIÓN INICIAL EN EDUCACIÓN INFANTIL DESDE LA INVESTIGACIÓN EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA: RETOS Y PROPUESTAS

Reflection on pre-service early childhood teacher education from research in mathematics education: challenges and proposals

Muñoz-Catalán, M. C.

Universidad de Sevilla

Resumen

Este documento está centrado en la formación del futuro maestro y de la futura maestra de Educación Infantil. Nos encontramos en un momento clave, tanto por la publicación del currículo de esta etapa, como por la reciente publicación del Libro Blanco del Grado en Educación Infantil, llamado a ser el referente para la normativa que regulará los nuevos planes de estudios. Se pretende proporcionar una panorámica crítica con el fin de promover la reflexión y la toma informada de decisiones conjuntas en el seno de nuestra Sociedad. En particular, se analiza la situación de la formación inicial respecto de las matemáticas en España; se describe el proceso de elaboración del Libro Blanco; se analiza la debilidad del currículo oficial, contrastándolo con la naturaleza profunda de las matemáticas escolares; y, finalmente, se destacan los retos formativos. Todo ello se hace incorporando resultados de la investigación española del último lustro.

Palabras clave: *maestros y maestras de Educación Infantil, formación inicial, matemática escolar, tarea profesional.*

Abstract

This document focuses on the pre-service education of Early Childhood Education teachers. We are currently at a pivotal moment, marked by both the publication of the curriculum for this educational stage and the recent release of the White Paper for the Degree in Early Childhood Education, which is set to become the benchmark for the legal regulations governing pre-service teacher education curriculum. The aim is to provide a critical overview in order to foster reflection and joint decision-making within our Society. In particular, it analyses the current state of initial mathematics teacher education in Spain; describes the development process of the White Paper; evaluates the weaknesses of the official curriculum, contrasting them with the profound nature of school mathematics; and, finally, highlights challenges in teacher education by incorporating findings from Spanish research over the last five years.

Keywords: *Early Childhood Education teachers, preservice teacher education, school mathematics, professional task.*

INTRODUCCIÓN

Este documento está centrado en la formación del estudiante para maestro y maestra de Educación Infantil, respecto de la enseñanza de las matemáticas (en adelante EMEI). Como ámbito de investigación en España, ha cobrado una relevancia creciente, especialmente desde la consolidación en 2011 del grupo *Investigación en Educación Matemática Infantil* (IEMI) de la SEIEM.

Nos encontramos en un momento clave para el ámbito universitario: la reciente publicación del currículo de Educación Infantil (Ministerio de Educación y Formación Profesional [MEFP], 2022) y la aprobación del Libro Blanco del Grado en Educación Infantil (CoDE, 2025), marcan el inicio de

Muñoz-Catalán, M. C. (2026). Reflexión sobre la formación inicial en Educación Infantil desde la investigación en Didáctica de la Matemática: retos y propuestas. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (pp. 52-66). SEIEM.

un proceso inminente de remodelación de los planes de estudio del citado grado. Este escenario presenta desafíos críticos, pues, por un lado, el nuevo currículo no integra los resultados de la investigación en Didáctica de la Matemática; por otro lado, el Libro Blanco, aunque enfatiza la necesidad de una mayor formación en las didácticas específicas, no ha logrado concretar los mínimos necesarios para garantizar una formación especializada. A esto se suma la realidad del estudiantado que accede al Grado de Educación Infantil (en adelante GMEI), quienes presentan carencias en su formación matemática, así como dificultades para expresarse y razonar didáctico-matemáticamente.

Este trabajo presenta la formación inicial del EMEI como la fase de inicio del desarrollo profesional, situándola en un continuo ininterrumpido con la formación permanente del profesorado (Carrillo y Climent, 2009; Contreras, 2022). En esta etapa, se inicia el desarrollo de competencias profesionales (Ponte y Chapman, 2008), las cuales se fundamentan en un sólido conocimiento profesional y se dinamizan a través de tareas profesionales (Clarke et al., 2009; Joglar-Prieto et al., 2022). La investigación subraya que estas tareas permiten al EMEI apreciar la complejidad de la enseñanza matemática en Educación Infantil (en adelante EI) y reconocer la práctica como una fuente de aprendizaje para su futuro profesional (Carrillo y Climent, 2009; Llinares et al., 2022).

La estructura de esta ponencia se organiza en cuatro ejes fundamentales: en primer lugar, se analiza la situación de la formación matemática del EMEI en España, caracterizada por una carga crediticia deficitaria; en segundo lugar, se describe el proceso de elaboración del Libro Blanco, examinando sus luces y sus sombras como referente para los futuros planes de estudio; en tercer lugar, se analiza la debilidad del currículo oficial y se contrasta con la especificidad de la naturaleza de las matemáticas escolares; y, finalmente, se destacan los retos formativos, incorporando resultados de la investigación española del último lustro. Se pretende proporcionar una panorámica crítica con el fin de promover la reflexión y la toma de decisiones conjuntas en el seno de nuestra Sociedad.

LA FORMACIÓN MATEMÁTICA DE LOS FUTUROS MAESTROS DE EDUCACIÓN INFANTIL EN EL CONTEXTO ESPAÑOL: UN ANÁLISIS DE SU SITUACIÓN ACTUAL

Diversos estudios sobre la formación inicial en el área de Didáctica de la Matemática de los EMEI en España expresan su preocupación por la situación deficitaria y marginal de las asignaturas de esta área que se ofertan actualmente en los grados de EI. Alsina (2020) califica la formación inicial en España como una "crónica de una ausencia anunciada". Su estudio evidencia que la tendencia mayoritaria en las universidades españolas (habiendo considerado 1 universidad por cada comunidad autónoma en el caso de España) es dedicar solo 6 créditos ECTS a la Didáctica de la Matemática, lo que representa apenas un 2,5% de la carga total del grado. Estudios posteriores de Cerisola et al. (2020) y Nolla et al. (2021) amplían la muestra a las 63 universidades españolas y ratifican la escasez crediticia en el GMEI, con un rango de 3 a 18 ECTS, con 6 ECTS como valor más frecuente. Además, revelan que las universidades privadas mantienen una carga crediticia inferior a las instituciones públicas.

Méndez-Coca et al. (2021) aplicaron el modelo MTSK (Carrillo et al., 2018) a las guías docentes del GMEI publicadas por las universidades españolas, observando un equilibrio entre *contenidos matemáticos* y *didácticos-matemáticos* en las asignaturas del área, pero con una elevada ambigüedad en su formulación. Esta imprecisión, sumada a la heterogeneidad de perfiles de los formadores universitarios (matemáticos o pedagógicos generales), conlleva el riesgo de que el enfoque final del contenido impartido dependa excesivamente de la formación, experiencias y creencias individuales de quien dirige la formación. En consecuencia, advierten de que la falta de un conocimiento especializado en Didáctica de la Matemática puede derivar en una formación poco especializada o alejada de las necesidades profesionales específicas de la etapa de EI.

Cabe destacar la omisión de bloques de contenidos esenciales, según la investigación nacional e internacional, como la ausencia de *Estadística y Probabilidad* en todas las guías analizadas (Alsina, 2020; Méndez-Coca et al., 2021), de *Medida* en 7 de 26 programas (Méndez-Coca et al., 2021) y la

falta de referencias a la etapa 0-3 años (Alsina, 2020). Esta situación evidencia una brecha entre la investigación y la formación inicial.

Desde la SEIEM se ha impulsado el trabajo para la elaboración del Libro Blanco del GMEI como uno de los ejes de la "Agenda para la acción" (Alsina, 2020). El siguiente apartado detalla el procedimiento seguido y los logros alcanzados.

ELABORACIÓN DEL LIBRO BLANCO DEL GRADO: ¿UNA OPORTUNIDAD PERDIDA?

En noviembre de 2025, la XXI Asamblea de la Conferencia de Decanos de Educación (CoDE) aprobó en Las Palmas de Gran Canaria el Libro Blanco del GMEI (CoDE, 2025). Este documento es fruto de la reflexión efectuada por un grupo de trabajo de distintas universidades españolas, en el cual participó nuestra compañera Encarnación Sánchez Jiménez, a quien le expresamos nuestro reconocimiento por la labor realizada. La introducción del Libro Blanco subraya que el documento es fruto del consenso e integra tanto las aportaciones de expertos como los acuerdos logrados en las conferencias celebradas en la Universidad de Castilla-La Mancha (mayo de 2024), en la Universidad de Cádiz (noviembre de 2024) y en la Universitat de Lleida (mayo de 2025).

La elaboración de este documento se articuló bajo una dinámica formalmente colaborativa; se distribuyeron versiones preliminares a las Facultades de Educación en un mínimo de dos rondas de consulta, con el propósito de canalizar las enmiendas a través de las comisiones competentes. En este marco, la SEIEM elaboró un informe técnico (Alsina et al., 2024) con el fin de apoyar a los compañeros y compañeras implicados en el proceso y con la expectativa de que el capital de experiencia e investigación del que se dispone influyera en el Libro Blanco. Se debe tener en cuenta que, si bien este documento no es vinculante, está destinado a orientar el diseño de los futuros planes de estudio oficiales. Con el avance del proceso, se constató que los esfuerzos realizados no alcanzaban el impacto previsto en la redacción del documento. Especial atención requirió el apartado 6.2, referido a la contribución de nuestra área, cuya redacción final es la siguiente:

> Finalmente, el área de Didáctica de las Matemáticas contribuye a conocer mejor el entorno, identificar patrones, modelizar matemáticamente la realidad y resolver problemas, integrándose de manera transversal en las actividades educativas. Este enfoque prepara a los futuros docentes para diseñar situaciones de aprendizaje que promuevan el desarrollo del pensamiento lógico-matemático, potencien una comunicación precisa y fluida y puedan modelizar las situaciones resolviendo problemas con un lenguaje riguroso y adaptado a la infancia. (CoDE, 2025, p. 75)

A pesar de las reiteradas indicaciones, la versión final mantiene la denominación incorrecta del área y plantea una contribución centrada en las destrezas del niño de Infantil (conocer el entorno, identificar patrones), en lugar de focalizarse en las competencias profesionales que requiere el futuro maestro para guiar esos procesos.

Un aspecto crítico y latente a lo largo del Libro Blanco es la falta de articulación epistemológica entre las áreas de conocimiento, propias de la estructura disciplinar de la universidad, y las áreas del currículo de EI. Según el Real Decreto 95/2022, de 1 de febrero, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Infantil (MEFP, 2022), esta etapa se organiza en tres ámbitos globalizados e interconectados: *Crecimiento en Armonía*, *Descubrimiento y Exploración del Entorno*, y *Comunicación y Representación de la Realidad*. Resolver esta articulación es crucial para identificar la contribución de cada área de conocimiento a las tres áreas curriculares. No obstante, la cuestión resultó sensible en la reunión de la CoDE en Cádiz (2024), donde el debate deliberadamente se eludió bajo el argumento de que no era el momento de abordar el reparto de créditos, pese a que eso no era lo que se estaba planteando.

Pese a los desafíos señalados, se destacan tres aspectos positivos. En primer lugar, se extiende la función educativa al primer ciclo (0-3 años), clásicamente caracterizada por la visión asistencial, mediante la exigencia de la titulación de Grado. En segundo lugar, de los cuestionarios y grupos

focales con profesores universitarios se subraya la urgencia de otorgar mayor relevancia crediticia a las didácticas específicas (especialmente a la Didáctica de la Matemática), para asegurar una formación sólida que permita a los EMEI comprender los contenidos disciplinares y liderar el diseño de situaciones de aprendizaje adecuadas al desarrollo infantil. Finalmente, el documento contempla una vía de especialización a través de menciones de un año de duración. Si bien es cierto que esta especialización se asocia explícitamente a otros ámbitos (e. g. Atención Temprana, Idiomas, Pedagogía Terapéutica), cabe cuestionarse la viabilidad y pertinencia de proyectar, de igual modo, una línea de especialización orientada hacia las didácticas específicas.

DESCONEXIÓN ENTRE EL CURRÍCULO DE EI Y LAS MATEMÁTICAS ESCOLARES

El currículo en Educación Infantil: unas matemáticas escolares diluidas

Cualquier reflexión sobre la formación inicial de maestros debe necesariamente considerar el currículo de la etapa, al ser el marco normativo que regirá la actuación docente del EMEI. Como se dijo en el apartado anterior, MEFP (2022) organiza el currículo en torno a tres áreas con un enfoque global e interdisciplinar, a las cuales deben contribuir las distintas áreas de conocimiento. Este currículo se alinea con las directrices internacionales en torno al enfoque competencial.

El documento elaborado en el seno de la SEIEM para apoyar el proceso de la elaboración del Libro Blanco (Alsina et al., 2024) lamenta la desconexión que el currículo presenta con respecto a propuestas profesionales. Por un lado, no se ha considerado documentos de consenso nacional como las *Bases para la elaboración de un currículo de Matemáticas* del Comité Español de Matemáticas (CEMat, 2021), donde se propone la necesidad de abordar con seriedad el aprendizaje matemático del alumnado de EI mediante el desarrollo de cinco sentidos: el algebraico, el espacial, el estocástico, el de medida y el numérico. Por otro lado, tampoco se han considerado los principios y estándares del currículo, propuestos por el *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2000), los cuales están basados en la investigación sobre el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas y están siendo actualmente asumidos de forma generalizada internacionalmente. Este último documento fue pionero por proponer, junto a los cinco estándares de contenidos, cinco estándares de procesos, como son: *Resolución de problemas*, *Razonamiento y demostración*, *Comunicación*, *Conexiones* y *Representación*, los cuales ponen de relieve la importancia de cómo se construye y valida el conocimiento en matemáticas durante toda la escolarización, comenzando por EI.

En 2012, el *Council of Chief State School Officers* publicó el documento *Common Core State Standards* (CCSSO, 2012) que ahonda en los estándares del NCTM (2000). En dicho documento se propuso que los estándares de contenidos debían ser desarrollados en conexión con ocho *Estándares para las prácticas matemáticas*, que definen las formas en las que se espera que el alumnado interactúe con el conocimiento matemático: 1. Entiende problemas y persevera en resolverlos; 2. Razona de manera abstracta y cuantitativa; 3. Construye argumentos viables y critica el razonamiento de otros; 4. Realiza modelos matemáticos; 5. Utiliza estratégicamente las herramientas apropiadas; 6. Pone atención a la precisión; 7. Busca y utiliza estructuras; 8. Busca y expresa regularidad en razonamientos repetitivos.

En el análisis del currículo que plantean Alsina et al. (2024) se destacan los aspectos críticos que se presentan en la Tabla 1.

Tabla 2

Características del actual currículo de Educación Infantil (Alsina et al., 2024)

- Ambigüedad y falta de precisión: se usa la expresión "habilidades o destrezas lógico-matemáticas" como cajón desastre para englobar todo el contenido de la matemática escolar sin haberlo definido.

-Sesgo hacia el número**:** La formulación de los principios pedagógicos expresa una interpretación parcial de lo que implica desarrollar la competencia matemática en infantil y deja de lado otros sentidos matemáticos imprescindibles.

-Omisión de contenidos clave**:** El informe identifica múltiples lagunas en los "saberes básicos" en comparación con la investigación contemporánea. Específicamente señala:

- Sentido algebraico: Se omite totalmente la referencia a los patrones.
- Sentido espacial: Se limita a la posición en el espacio, ignorando las propiedades de las figuras geométricas y las transformaciones.
- Sentido estocástico: Este bloque (estadística y probabilidad) no es considerado en absoluto en el currículo actual.
- Sentido de la medida: Se obvian magnitudes como la longitud y se omiten procesos como la estimación o el uso de instrumentos de medida.
- Sentido numérico: A pesar del sesgo mencionado, faltan aspectos fundamentales como la subitización, las relaciones cuantitativas y el cálculo aritmético.

-Ausencia de procesos matemáticos**:** No incluye de manera explícita los estándares de procesos, los cuales son la base de la construcción del conocimiento matemático.

Ante esta realidad, Alsina et al. (2024) advierten que un MEI que se cuestione qué elementos debe abordar en cada curso, cómo secuenciarlos o con qué enfoque trabajarlos, no hallará respuesta alguna. El currículo deja la responsabilidad de esta concreción al profesional "cuya formación inicial […] no parece proporcionarle suficientes criterios para abordar tal responsabilidad, dado el carácter mayormente generalista de la formación inicial" (p. 9).

Las características de las matemáticas escolares en Educación Infantil desde la investigación

Si el currículo posee una mirada tan restrictiva y pobre de las matemáticas, ¿cuáles deben ser las características de las matemáticas escolares para EI, que reflejen los avances de la investigación y contribuyan a potenciar el razonamiento matemático del alumnado para su desarrollo integral?

El grupo *Investigación en Educación Matemática Infantil* de la SEIEM elaboró una declaración de posición sobre las matemáticas en EI, la cual ha sido publicada en dos monográficos especiales de la revista EDMA en 2025 (vol. 14, números 1 y 2). En Muñoz-Catalán et al. (2025) se presenta una caracterización de las matemáticas escolares de esta etapa. La idea clave que articula el documento es que para promover una educación matemática de calidad en EI, las matemáticas deben ser conceptualizadas considerando simultáneamente dos referentes: la etapa de desarrollo psicobiológico en el que se encuentra el alumnado, y la naturaleza y estructura de las matemáticas avanzadas y las formas para generar y validar este conocimiento. Estos dos aspectos no son en absoluto antagónicos y, de hecho, están presentes en propuestas curriculares con foco en las matemáticas en EI y gran base científica, como "Building Blocks" (Clements y Sarama, 2007), "Number worlds" (Griffin, 2004) o con títulos tan sugerentes como "Big math for little kids" (Balfanz et al., 2003; Greenes et al., 2004). En todas ellas se promueve un aprendizaje lúdico pero intencional de ideas matemáticas profundas,

y se estimula al alumnado a reflexionar sobre su propio pensamiento matemático y a comunicarlo con rigurosidad y precisión.

Las matemáticas en EI deben caracterizarse por su *amplitud* y *profundidad* (Muñoz-Catalán et al., 2025). Por un lado, han de ser *amplias* al dirigirse a la esencia de la propia matemática y abarcar la totalidad de los estándares de contenidos establecidos por el NCTM (2000). Por otro lado, revisten una naturaleza de profundidad debido a tres factores fundamentales: en primer lugar, porque se despojan de artificios sofisticados para aproximar al alumnado a la esencia de los conceptos matemáticos; en segundo lugar, porque deben priorizar los estándares de procesos, para fomentar habilidades de pensamiento crítico y reflexivo (NCTM, 2000; CCSSO, 2012); y, en tercer lugar, porque se deben proyectar en una íntima conexión con las matemáticas avanzadas (Klein, 1914, 1945) al tiempo que respetan el desarrollo cognitivo propio de esta etapa. En este marco, cobra especial relevancia la noción de *grandes ideas matemáticas* que se definen por ser matemáticamente centrales, por resultar consistentes con el desarrollo del pensamiento lógico-matemático del alumnado y por ser generativas de aprendizajes futuros (Clements y Sarama, 2009). Las grandes ideas evitan la fragmentación del conocimiento y pueden ser desarrolladas mediante las trayectorias de aprendizaje (Clements y Sarama, 2009, 2024).

El aprendizaje matemático se inicia en la *acción*; por ello, las matemáticas en EI son esencialmente manipulativas y experienciales y deben surgir para dar respuesta a problemas del interés del alumnado en situaciones reales (Alsina et al., 2022; Muñoz-Catalán et al., 2025). El uso de recursos (desde objetos reales hasta los materiales didáctico-matemáticos ad-hoc) facilita la interacción directa con los conceptos, ayuda a materializar nociones abstractas y a formular argumentos matemáticos propios. Sin embargo, estas matemáticas deben llevar al alumnado *hacia la modelización*. Así, deben nutrirse del uso de distintos sistemas de representación (Lesh *et al*., 1987), y de la conversión entre ellos como práctica matemática (Kuntze et al., 2015) con el propósito de desarrollar flexibilidad representacional, impulsar razonamiento y favorecer la progresiva desvinculación con el contexto del problema. Solo así se incide en la *modelización de la realidad con las matemáticas* (Flynn, 2017) o *Matematización* (Freudenthal, 1973).

Las matemáticas escolares (Muñoz-Catalán et al., 2025) conciben al alumnado no como un usuario, sino como un auténtico constructor de conocimiento, capaz de actuar como un matemático al identificar problemas, proceder de manera organizada y sistemática y detectar patrones. Aunque se encuentre en un periodo de razonamiento prelógico, la investigación ha puesto de manifiesto que cuando se le enfrenta a entornos de aprendizaje estimulantes, caracterizados por el rigor, la exploración y la seguridad afectiva, el conocimiento que desarrolla resulta complejo y sofisticado (Geist, 2009). Incluso llega a manifestar destrezas asociadas al razonamiento abstracto de la matemática formal, la anticipación de resultados y el pensamiento condicional (Greenes et al., 2004).

RETOS EN LA FORMACIÓN INICIAL DEL DOCENTE DE EDUCACIÓN INFANTIL: ARTICULACIÓN ENTRE TEORÍA Y PRÁCTICA

A continuación, se exponen los principales retos que afrontamos en la formación inicial de esta etapa, respaldando dicho análisis con evidencias empíricas cuando la literatura científica las ofrece.

Características de los EMEI que acceden al Grado

El estudiantado del GMEI procede, mayoritariamente, del Bachillerato tras superar la prueba de acceso a la universidad (principalmente de la especialidad de Humanidades y Ciencias Sociales), o de Ciclos Formativos de Grado Superior en Educación Infantil. Hay un reducido grupo que cursa el Doble Grado en Educación Infantil y Primaria, y un porcentaje residual de estudiantes que ya son titulados universitarios. La mayoría ha cursado matemáticas hace años o las ha evitado en su etapa escolar, y manifiesta un marcado rechazo afectivo hacia ellas. Por tanto, presenta grandes carencias de conocimiento en la mayor parte de los bloques curriculares, así como concepciones erróneas sobre

la disciplina. Además, estamos observando el deterioro progresivo de capacidades relacionadas con la atención, la comprensión y expresión escrita.

El estudiantado del GMEI carece de referentes de la práctica. La visión que posee de las matemáticas y de cómo se aprenden y se enseñan está fuertemente influenciada por sus experiencias y por los contextos institucionales en los que ha crecido (Ponte y Chapman, 2008). En el caso del EMEI, a diferencia de lo que ocurre en otras etapas, la lejanía cronológica de su propia experiencia como discentes de EI les priva de recuerdos o modelos mentales específicos de este nivel. En consecuencia, tienden a rellenar esa falta de referentes importando los enfoques tradicionales de las etapas educativas más recientes, lo que termina por condicionar su visión pedagógica. Además, al concebir el razonamiento matemático como un proceso de alta complejidad y ajeno a las primeras edades, sus expectativas hacia el alumnado de 0 a 6 años son muy limitadas, lo que genera una percepción restrictiva de su papel como de meros transmisores de conocimientos, ignorando la importancia de los procesos matemáticos y la naturaleza intuitiva y emergente del pensamiento infantil.

La abundante formación pedagógica y psicológica del título les proporciona una jerga, procedente de la teoría constructivista, que emplean indiscriminadamente. Utilizan términos como *actividad significativa y motivante*, *enfoque lúdico*, *rol activo del alumnado* o *profesor como guía*, sin una asunción real de sus repercusiones, operando como un disfraz discursivo para encubrir la naturaleza tradicional de las actividades que seleccionan o diseñan. ¿Puede considerarse que el alumnado de EI está teniendo un rol activo solo porque el profesorado le deje moverse en la clase para ejecutar el significado de algún concepto previamente explicado (como, por ejemplo, encima y debajo)?

Además, esta formación pedagógica no va asociada a una competencia de razonamiento profundo de índole pedagógico o didáctico-matemático (Shulman, 1987). En la Universidad de Sevilla solemos implementar la actividad para EI "Recorridos sobre una malla" (Ruiz-Higueras, 2005) adaptada para el EMEI (Por ejemplo, se dibuja una malla de 4x4). Se trata de una situación diseñada desde la Teoría de las Situaciones Didácticas, que integra los procesos claves asociados a la orientación espacial (percepción, representación e interpretación del espacio) y cuyo objetivo de aprendizaje matemático es identificar la necesidad de incluir puntos de referencia para representar el espacio. Como situación a-didáctica, el saber espacial surge como instrumento necesario para resolver un reto de comunicación sin explicaciones previas del docente. La imprecisión del mensaje producido provoca un conflicto cognitivo que lleva a la construcción del conocimiento. A pesar de que los EMEI experimentan la actividad, no son capaces de identificar la finalidad de cada fase o el contenido matemático objeto de aprendizaje. Esta limitación evidencia sus dificultades para implicarse en un razonamiento pedagógico-matemático adecuado y, por ende, para llevar al aula este tipo de propuestas

El EMEI competente para la enseñanza de las matemáticas: sólido conocimiento especializado y desarrollo profesional a través de tareas profesionales

En los marcos legislativos que regulan la formación inicial docente se apuesta por una formación que promueva la adquisición de competencias profesionales. El enfoque competencial supone la articulación de: un conocimiento específico para enseñar matemáticas y la identificación de unas prácticas profesionales específicas, que conforman la práctica de enseñar matemáticas. Un profesor competente en la enseñanza de las matemáticas es aquel: "capaz de tomar decisiones de acción apoyadas en procesos de razonamiento usando conocimiento específico vinculado al conjunto de prácticas que constituyen las prácticas de enseñar matemáticas" (Llinares et al., 2022, p. 482).

La investigación sobre la formación inicial del MEI respecto de la enseñanza de las matemáticas a nivel internacional todavía es incipiente (Elia et al., 2023). Alsina (2025) destaca que la situación a nivel español es similar, aunque es a partir del año 2014, tres años más tarde de la reactivación del grupo de trabajo EIMI de la SEIEM, cuando se produce un ligero aumento, que se intensifica a partir de 2019. Una de las tres agendas con un mayor número de artículos es "Aprender el conocimiento y

destrezas útiles para enseñar matemáticas", seguida de "Planificación y gestión de la enseñanza en diversos contextos de enseñanza y su influencia en el desarrollo de la comprensión".

La formación inicial del profesor necesita responder a dos tipos de preguntas: ¿cuáles son las competencias y conocimientos que los futuros profesores de EI necesitan para enseñar matemáticas? ¿Qué tipos de oportunidades de aprendizaje les debemos brindar para promover su desarrollo profesional? A continuación, se responde estas preguntas, incluyendo ejemplos de investigaciones realizadas en el contexto español durante el último lustro.

El qué de la formación inicial de profesores de EI: conocimiento especializado

En España existen manuales que han respondido a esta pregunta desde la investigación, útiles para la formación inicial del MEI. La propuesta de Chamorro (2005) supuso un punto de inflexión en la formación de los maestros en nuestro país, dominada en aquel momento por la impartición de Matemáticas puras en las asignaturas de la diplomatura. Cabe destacar también los manuales de Arteaga y Macías (2016), Castro y Castro (2016) y Muñoz-Catalán y Carrillo (2018), siendo este último donde se incluye por primera vez el bloque de estadística y probabilidad y pone en valor la necesidad de que estos profesionales se planteen aspectos clave del razonamiento matemático, de las formas de producir y validar conocimiento matemático.

La escasa investigación sobre el MEI y las matemáticas suele priorizar el *conocimiento didáctico del contenido* (PCK) (e. g. Lee, 2017) como factor determinante de la calidad de la enseñanza, entendiéndolo como el rasgo distintivo del especialista en el contenido frente al pedagogo generalista. Pese a que revisiones exhaustivas del *conocimiento de la materia* (SMK) como la de Rollnick y Mavhunga (2016) omiten esta etapa, autores como Oppermann et al. (2016) reivindican el SMK como el cimiento indispensable para que el MEI construya un PCK especializado y eficaz.

La investigación sobre el conocimiento del EMEI revela las características, las lagunas y errores de conocimiento que poseen tanto sobre conocimiento numérico (Lendínez y García, 2021), álgebra (e. g. Pincheira y Alsina, 2022), medida (e. g. Sala-Sebastià et al., 2022), conocimientos lógicos (e. g. Lerma et al., 2021), fenómenos aleatorios (e. g., Vera et al., 2024), como sobre contenidos geométricos (Gallego-Sánchez y Gavilán-Izquierdo, 2025).

Se está acometiendo una agenda de investigación que considera como referente la práctica docente para comprender la naturaleza específica del conocimiento profesional del MEI e identificar su contenido, el cual debe ser objeto de estudio del EMEI. Para ello se utiliza el modelo MTSK (Carrillo et al., 2018), adaptado a EI en su dominio MK (Muñoz-Catalán et al., 2022a), lo que permite poner el foco en aspectos que tradicionalmente parecían omitirse para este perfil. Por un lado, este enfoque resalta el subdominio de *Conocimiento de la estructura de la matemática* por la mirada avanzada y conectada que este profesional debe proyectar a las matemáticas de EI. Por otro lado, destaca el *Conocimiento de las Prácticas de la Matemática* que, por haberse definido originariamente tomando como referente las prácticas matemáticas formales (como definir, demostrar, etc) parecía ajeno a este profesional por las matemáticas escolares de esta etapa. La investigación ha revelado que las prácticas precursoras de aquellas, como comparar, modelizar, usar un lenguaje riguroso y representar y realizar conversiones entre sistemas de representación, entre otras (e. g. Muñoz-Catalán et al., 2023), deben formar parte de las prácticas que el EMEI debe conocer para promover conocimiento matemático en el aula y validarlo. Esta agenda ha constatado que este profesional posee un conocimiento específico e idiosincrásico, robusto y altamente cohesionado (MK), sobre el que edificar su conocimiento didáctico del contenido. También indica que el MEI debe conocer teorías de enseñanza y aprendizaje, estrategias, tareas y recursos; cómo interactúa el alumnado con el contenido matemático y cómo evoluciona su razonamiento matemático; así como las prescripciones curriculares y estándares de aprendizaje, con el fin de tomar decisiones fundamentadas sobre cómo secuenciar contenidos, responder al alumnado y generar oportunidades de aprendizaje de calidad (PCK sustentado en un sólido MK) (Escudero-Domínguez et al., 2021; Muñoz-Catalán et al., 2017, 2019, 2022a, 2022b).

Otras agendas consideran como focos de la formación inicial los estándares de procesos (NCTM, 2000) (e. g. Alsina et al., 2024), prácticas concretas como formulación de problemas de modelización (Garcia-Marques et al. 2023), las trayectorias hipotéticas de aprendizaje (e. g. Gallego-Sánchez y Gavilán-Izquierdo, 2025; Moreno et al., 2021), el conocimiento tecnológico y pedagógico del contenido (TPACK) (Gallego-Sánchez y Gavilán-Izquierdo, 2025) o cuestiones afectivas hacia las matemáticas (e. g. Loureiro-Ga y Gutiérrez-Rodríguez, 2025). Muchos de estos trabajos se desarrollan con la finalidad de desarrollar en los EMEI la competencia "mirar profesionalmente" (e. g. Joglar-Prieto et al., 2021; Léndinez et al., 2022; Moreno et al., 2021).

El cómo de la formación inicial: las tareas profesionales como oportunidades de aprendizaje

Ball y Forzani (2009) conciben la enseñanza de las matemáticas como una actividad compleja, caracterizada por ser en esencia un trabajo matemático y orientada a ayudar al alumnado a aprender matemáticas. Según esta visión profesional, los currículos de formación inicial deberían situar la práctica docente en el centro del desarrollo profesional de los EMEI, estructurándose mediante tareas profesionales: "el sistema de actividades del profesor que conforman su práctica cuando enseña matemáticas" (Joglar-Prieto et al., 2022, p. 212). Algunos estudios han mostrado que este enfoque práctico en la formación inicial aumenta la eficacia y mejora los resultados (Boyd et al., 2009; Joglar-Prieto et al., 2022). Pese a que estas investigaciones suelen centrarse en otras etapas, sus hallazgos son transferibles a la formación del EMEI.

Existen distintas clasificaciones de tareas profesionales (Clarke et al., 2009; Joglar-Prieto et al., 2022). Al objeto de este trabajo, se destacan cuatro tipos de tareas centradas en:

Problematizar el contenido matemático: Debido a que los EMEI suelen percibir los contenidos de EI como triviales, la formación debe ofrecer oportunidades para problematizarlos desde la perspectiva del aprendizaje. Por tanto, deben percibir las dificultades que emergen de la naturaleza simbólica y lógica de la matemática; adoptar el rol de resolutores de problemas apreciando las fases, la heurística utilizada y las dificultades propias; y participar en situaciones de creación de conocimiento en los que vivencien las prácticas matemáticas y reflexionen sobre el papel del rigor del lenguaje y de la comunicación con iguales en el proceso de construcción y validación de conocimiento. Estas tareas obligan al EMEI a reconstruir el contenido matemático para la enseñanza, lo que supone "desempaquetar" el contenido matemático, desproveerlo de su aspecto formal y desmenuzarlo en sus elementos constitutivos básicos (Ball y Bass, 2000) para dotarlo de un sentido profesional. Lendínez et al. (2022) y Lerma et al. (2021) abundan en este sentido.

Analizar las respuestas del alumnado y la práctica del MEI y EMEI. Estas tareas son importantes porque desarrollan la competencia "mirada profesional" que les permiten identificar problemas de la práctica y formular preguntas sobre las que construir respuestas provisionales. Dada la escasa expectativa del EMEI hacia el alumnado de esta etapa, el análisis de respuestas del alumnado contribuye a problematizar el contenido y a revestirlo de la seriedad y profundidad que merece. El análisis de vídeos de aula, con foco en el MEI o EMEI, también es clave porque puede ayudar a operativizar una teoría, puede constituir un referente de "buena práctica profesional" tan necesario para los EMEI y puede proporcionar dilemas que ayuden a asumir la complejidad de la enseñanza de las matemáticas en esta etapa educativa (Markovits y Smith, 2008). Este tipo de tareas está presente en estudios como Lendínez y García (2021, *Lesson study*) o Moreno et al. (2021).

Analizar los materiales curriculares: como documentos curriculares normativos o de asociaciones profesionales, libros de texto o recursos manipulativos. Con relación a estos últimos, los EMEI deben conocer las ventajas, limitaciones y complementariedad entre los materiales, lo cual se favorece si experimentan previamente su papel como medios para problematizar y reconstruir su propio conocimiento matemático. Solo a través de esta vivencia personal, el futuro docente será capaz de emplearlo para proporcionar oportunidades de aprendizaje eficaces a su alumnado. Algunos trabajos que contemplan estos materiales son Pincheira y Alsina (2022) o Codes et al. (2024).

Diseños didácticos: Uno de los objetivos y mayores retos que tenemos desde la formación es desarrollar la competencia de planificación de los EMEI para que sus diseños cumplan con los estándares académicos. Esta tarea, abordada de forma recurrente en la investigación, presenta tanto dificultades como éxitos (e. g. Alsina et al., 2024; Codes et al., 2024; Lendínez et al., 2022; Lerma et al., 2021; Gallego-Sánchez y Gavilán-Izquierdo, 2025; Garcia-Marques et al., 2023). Resulta eficaz implicar a los EMEI en la simulación de situaciones de aprendizaje fundamentadas, como la descrita anteriormente de Ruiz-Higueras (2005), para que comprendan las repercusiones de las decisiones didácticas. Finalmente, la implementación de este tipo de actividades en el practicum otorga sentido a lo aprendido y les permite valorarlas a través del análisis de sus tutores y tutoras MEI, quienes, generalmente tras una reticencia inicial, suelen destacar el valor profesional de estas propuestas.

Lo habitual es que las tareas profesionales contengan una combinación de las indicadas anteriormente, con el fin de promover la construcción conjunta de elementos del *conocimiento matemático* y del *conocimiento didáctico del contenido*. Las tareas no solo son el contexto, sino el medio para que el EMEI desarrolle sus competencias profesionales y las valore como fuente de aprendizaje para su futuro profesional. Deben desarrollarse mediante la reflexión y la colaboración, pilares que la literatura de investigación destaca como promotores del desarrollo profesional (Llinares y Krainer, 2006). En esta línea, Berciano y Jiménez-Gestal (2025) proponen un ciclo continuo de evaluación, reflexión y mejora, centrado en la metacognición de la propia práctica, que permita al MEI adaptarse a contextos cambiantes y promover una enseñanza profunda y significativa.

CONCLUSIONES Y REFLEXIONES FINALES

En el documento elaborado en el seno de la SEIEM para la elaboración del Libro Blanco del GMEI (Alsina et al., 2024) se proponen 9 resultados de aprendizaje, que se presentan en la Tabla 2.

Complementariamente a estos resultados curriculares, el escenario actual plantea desafíos estructurales e interrogantes que demandan, con igual urgencia, una reflexión sistemática:

- ¿Se debería realizar una prueba de conocimientos matemáticos para el acceso al GMEI? ¿Debería incorporarse en estas pruebas otras cuestiones de índole psicosociológicas? Alsina (2020) manifiesta que esta medida ya se adopta en comunidades autónomas como Catalunya e Illes Balears.

- ¿Qué formación necesita el EMEI para atender a un aula cada vez más diversa? ¿Estamos preparados los formadores y las formadoras para ayudarles a diseñar tareas con enfoque *diseño universal para el aprendizaje*, sin desvirtuar la naturaleza de la matemática escolar de EI aquí descrita?

- El Libro Blanco amplía la visión educativa al ciclo de 0-3 años y la SEIEM (Alsina et al., 2022) aboga por un desarrollo matemático sistemático temprano. Alsina (2020) advierte que la presencia de estos contenidos en las universidades es actualmente muy escasa, ¿Cómo debemos configurar la formación inicial para asumir el carácter educativo del ciclo 0-3 años? ¿Estamos preparados los formadores y las formadoras para trabajar con los futuros docentes sobre la etapa 0-3?

- Los EMEI no hacen un uso responsable de la Inteligencia Artificial cuando elaboran los trabajos; la usan sin conocer realmente sus posibilidades, sus limitaciones o sus implicaciones éticas y académicas. Es necesario formación y una reflexión seria sobre cómo incluirla en la formación inicial y sobre sus repercusiones en los sistemas de evaluación.

La comunidad de investigadores y formadores debe afrontar el desafío de establecer mecanismos que articulen la formación inicial y la continua como un proceso ininterrumpido y coherente (e. g. Badillo et al, 2023; Carrillo y Climent, 2009). Badillo et al. (2023), Contreras (2022), entre otros, sostienen que ambas etapas constituyen un continuo y proponen el modelo de formación dual como estrategia fundamental para mitigar la brecha entre el contexto académico y el escolar. Para transitar de una relación de mera "invitación" a una colaboración bidireccional y fluida, resulta imperativo consolidar estructuras como las comunidades de práctica y los equipos de investigación internivel. En estos

foros, el análisis sistemático de la práctica real actúa como el catalizador del desarrollo profesional compartido entre futuros maestros, docentes en ejercicio e investigadores. En definitiva, la confluencia de estas visiones permite que la investigación y la docencia se nutran mutuamente, garantizando, como subrayan Ayala-Altamirano y Cortiñas (2025), que el proceso de transferencia efectiva se materialice a través de la labor conjunta y del compromiso con la complejidad de la realidad del aula.

Tabla 2

Resultados de aprendizaje para la formación del EMEI (Alsina et al., 2024)

• Conocer las orientaciones planteadas en propuestas curriculares (autonómicas, estatal e internacionales) y relacionarlas críticamente con propuestas profesionales específicas de matemáticas de Educación Infantil.
• Conocer las aportaciones de la investigación sobre el aprendizaje y la enseñanza de los conocimientos matemáticos de Educación Infantil y conectarlas con su práctica docente en la etapa educativa.
• Conocer los fundamentos matemáticos relativos a los conocimientos escolares, reconociendo las conexiones propedéuticas entre ellos y comunicar eficazmente argumentaciones matemáticas relativas a los conocimientos.
• Enunciar y resolver problemas matemáticos (atendiendo a las estructuras semántica y sintáctica) relativos a los conocimientos de las matemáticas escolares y relacionarlos con consideraciones sobre su aprendizaje y enseñanza.
• Analizar críticamente situaciones de aprendizaje, contextos y recursos (materiales, juegos, etc.) para la enseñanza de los conocimientos matemáticos de infantil, argumentando posibles beneficios y obstáculos para el aprendizaje.
• Diseñar recursos y situaciones de aprendizaje para la enseñanza de los conocimientos matemáticos de EI y la evaluación de su aprendizaje, haciendo explícitas las decisiones tomadas y sus razones.
• Identificar y explicitar el posible proceso de pensamiento matemático del alumnado manifestado en sus producciones, considerando nociones sobre el aprendizaje de dichos conocimientos.
• Tomar conciencia del valor de analizar sistemáticamente las situaciones de enseñanza-aprendizaje matemáticos como vía de desarrollo profesional del profesorado.
• Valorar y analizar el trabajo colaborativo docente sobre conocimiento didáctico-matemático como vía de desarrollo profesional del profesorado.

Agradecimientos

Trabajo financiado por MICIU/AEI/10.13039/501100011033/FEDER, UE (Proyecto MTSK&C-RFPM, PID2021-122320NB-I00), e impulsado por la Red MTSK (AUIP), el Instituto Interuniversitario IEDU y el grupo GIEM (FQM-226, Plan Andaluz de Investigación).

Referencias

Alsina, Á. (2020). La matemática y su didáctica en la formación de maestros de Educación Infantil en España: Crónica de una ausencia anunciada. *La Gaceta de la RSME*, *23*(2), 373-387.

Alsina, À., Berciano, A., de Castro, C., Edo, M., Giménez, J., Jiménez-Gestal, C., Prat Moratonas, M., Salgado, M. y Vanegas, Y. (2022). Matemáticas en la Educación Infantil. En L. J. Blanco Nieto, N. Climent Rodríguez, M. T. González Astudillo, A. J. Moreno Verdejo, G. Sánchez-Matamoros García, C. de Castro Hernández, y C. Jiménez Gestal (Eds.), *Aportaciones al desarrollo del currículo desde la investigación en educación matemática* (pp. 107-147). Universidad de Granada; SEIEM

Alsina, Á. (2025). Panorámica de la investigación en educación matemática infantil en España (2000-2024). *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, *14*(1), 1-28. https://doi.org/10.24197/edmain.1.2025.1-43

Alsina, Á., Berciano, A., Cañadas, M. y Muñoz-Catalán, M.C. (2024). *Formación inicial del profesorado de educación infantil para la enseñanza de las matemáticas. Propuestas de la sociedad española de investigación en educación matemática*. https://l1nk.dev/avkhd12

Alsina, Á., Pincheira, N. y Delgado-Rebolledo, R. (2024). The professional practice of designing tasks: how do pre-service early childhood teachers promote mathematical processes in early algebra? *ZDM*, *56*(6), 1197-1210. https://doi.org/10.1007/s11858-024-01636-1

Ayala-Altamirano, C. y Cortiñas, J. R. (2025). De la investigación al aula: caminos y desafíos para una transferencia efectiva en Educación Matemática. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. 66-79). SEIEM.

Arteaga, B. y Macías, J. (2016). *Didáctica de las matemáticas en Educación Infantil*. Universidad Internacional de La Rioja.

Balfanz, R., Ginsburg, H. P. y Greenes, C. (2003). The Big Math for Little Kids early childhood mathematics program. *Teaching Children Mathematics, 9*(5), 264-268.

Ball, D. L. y Bass, H. (2000). Interweaving content and pedagogy in teaching and learning to teach: Knowing and using mathematics. In J. Boaler (Ed.), *Multiple perspectives on the teaching and learning of mathematics* (pp. 83-104). JAI/Albex.

Ball, D.L. y Forzani, F.M. (2009). The Work of Teaching and the Challenge for Teacher Education. *Journal of Teacher Education*, *60* (5), 497-511. https://doi.org/10.1177/0022487109348479

Badillo, E. R., Climent, N., Barquero, B., Contreras, L. C., García, F. J., González, M. T., Joglar, N. y Moreno, A. (2023). El desafío de la formación continua del profesorado de matemáticas. *Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *99*, 8-15.

Boyd, D. J., Grossman, P. L., Lankford, H., Loeb, S. y Wyckoff, J. (2009). Teacher Preparation and Student Achievement. *Educational Evaluation and Policy Analysis, 31*(4), 416-440. https://doi.org/10.3102/0162373709353129

Carrillo, J. y Climent, N. (2009). From Professional Tasks in Collaborative Environments to Educational Tasks in Mathematics Teacher Education. En B. Clarke, B. Grevholm, R. y Millman (Eds.), *Tasks in Primary Mathematics Teacher Education* (Vol. 4, pp. 215-234). Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-09669-8_15

Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M.ª C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, *20*, 236-253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Castro, E. y Castro, E. (Eds.) (2016). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Infantil*. Pirámide.

Chamorro, M.C. (coord.). (2005). *Didáctica de la Matemática para Primaria.* Pearson-Prentice Hall

CCSSO (2012). *Common Core State Standards. Mathematics Standards. English/Spanish Language version*. https://www.thecorestandards.org/Math/

CEMat (2021). *Bases para la elaboración de un currículo de Matemáticas en Educación no Universitaria*. https://matematicas.uclm.es/cemat/wp-content/uploads/bases2021.pdf

Cerisola, A., Muñoz, R. y Nolla, A. (2020). Comentario sobre «La Matemática y su didáctica en la formación de maestros de Educación Infantil en España: crónica de una ausencia anunciada». *La Gaceta de la RSME*, *23*(3), 577-582.

Clarke, B., Grevholm, B. y Millman, R. (Eds.). (2009). *Tasks in Primary Mathematics Teacher Education: Purpose, Use and Exemplars* (Vol. 4). Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-09669-8

Clements, D. H. y Sarama, J. (2009). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach*. Routledge.

Clements, D. H. y Sarama, J. (2007). Building Blocks for early childhood mathematics. *Early Childhood Research Quarterly*, *22*(1), 136-146. https://doi.org/10.1016/j.ecresq.2006.12.003

Clements, D. y Sarama, J. (2024). Systematic review of learning trajectories in early mathematics. *ZDM Mathematics Education, 57*, 637-650. https://doi.org/10.1007/s11858-024-01644-1

Codes, M., Morón, M. C. y Trabajo, M. (2024). Construyendo conocimiento especializado e integrado en estudiantes para maestro de educación infantil. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 567-574). SEIEM

Cochran, M. y Lytle, S.L. (2003). Más allá de la certidumbre: adoptar una actitud indagadora sobre la práctica. En A. Lieberman y L. Miller (Eds.), *La indagación como base para la formación del profesorado y la mejora de la educación* (pp. 65-79). Octaedro.

Conferencia de Decanas y Decanos de Educación (2025). *Libro Blanco del Grado en Educación Infantil*. https://confede.es/

Contreras, L. C. (2022). La nueva propuesta curricular y la formación del profesor. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 63-79). SEIEM

Escudero-Domínguez, A., Muñoz-Catalán, M. C. y Carrillo, J. (2021). Caracterizando el conocimiento especializado de un profesor de Educación Infantil enseñando prismas. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 237-244). SEIEM.

Elia, I., Baccaglini-Frank, A., Levenson, E., Matsuo, N., Feza, N. y Lisarelli, G. (2023). Early Childhood Mathematics Education Research: Overview of Latest Developments And Looking Ahead. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *28*, 75-129. https://doi.org/10.4000/adsc.3113

Flynn, M. (2017). *Beyond Answers: Exploring Mathematical Practices with Young Children*. Stenhouse Publishers

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Reidel.

Gallego-Sánchez, I. y Gavilán-Izquierdo, J. M. (2025). Barreras a la integración de tecnología en la enseñanza de las matemáticas en educación infantil. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán, e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (p. 498). SEIEM.

Garcia-Marques, M. E., Melchor-Borja, C. y Pla-Castells, M. (2023). Formando en modelización matemática al futuro profesorado en Educación Infantil. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (p. 574). SEIEM.

Geist, E. (2009). *Children are born mathematicians: Supporting Mathematical Development, Birth to Age 8*. Pearson.

Greenes, C., Ginsburg, H. P. y Balfanz, R. (2004). Big Math for Little Kids. *Early Childhood Research Quarterly*, *19*(1), 159-166. https://doi.org/10.1016/j.ecresq.2004.01.010

Griffin, S. (2004). Number Worlds: A curriculum for young children who are at risk for school failure. en D. H. Clements, J. Sarama y A.-M. DiBiase (Eds.), *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education* (pp. 325-341). Lawrence Erlbaum Associates.

Joglar-Prieto, N., Belmonte, J. M., Liñán, M. M., Muñoz-Catalán, M. C., Pizarro, R. N., Ramírez-García, M. y Méndez, M. (2021). El papel de una tarea formativa sobre el número en el desarrollo de la competencia noticing del futuro maestro de Educación Infantil. En GIDIMAT-UA (Ed.), *Ideas para la educación matemática: Perspectivas desde el trabajo de M.ª Luz Callejo de la Vega* (pp. 183-203). GIDIMAT-UA.

Joglar-Prieto, N., Liñán-García, M. M. y Contreras, L. C. (2022). MTSK en la formación inicial del profesorado de primaria. En J. Carrillo, M. A. Montes y N. Climent (Eds.), *Investigación sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK)* (pp. 207–222). Dykinson.

Klein, F. (1914, 1945). *Elementary mathematics from an advanced standpoint*. Dover.

Kuntze, S., Dreher, A. y Friesen, M. (2015). Teachers' resources in analysing mathematical content and classroom situations –The case of using multiple representations. En K. Krainer y N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (p. 3213-3219). Charles University y ERME.

Lee, J. E. (2017). Preschool Teachers' Pedagogical Content Knowledge in Mathematics. *International Journal of Early Childhood, 49*, 229-243. https://doi.org/10.1007/s13158-017-0189-1

Lendínez, E. M., García, F. J., Lerma, A. M. y Abril, A. M. (2022). Desarrollo de la autoeficacia percibida a través del estudio de clases en formación inicial de docentes de Educación Infantil. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 355-362). SEIEM

Lerma, A. M., Barquero, B., García, F. J., Hidalgo-Herrero, M., Ruiz-Olarría, A. y Sierra, T. (2021). Los conocimientos lógicos en la formación matemático-didáctica de maestros. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 385-392). SEIEM.

Lesh, R., Post, T. R. y Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. En C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 33-40). Lawrence Erlbaum.

Llinares, S. y Krainer, K. (2006). Mathematics (student) teachers and teacher educators as learners. A. Gutiérrez y P. Boero (Eds), *Handbook of research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (429-459). Sense Publishers.

Llinares, S., Breda, A., Climent Rodríguez, N., Fernández Verdú, C., Font, V., Lupiáñez Gómez, J. L., Moreno Moreno, M., Pérez Tyteca, P., Ruiz Hidalgo, J. F. y Sánchez Brualla, A. (2022). Formación y desarrollo profesional del profesorado de matemáticas. En L. J. Blanco Nieto, N. Climent Rodríguez, M. T. González Astudillo, A. Moreno Verdejo, G. Sánchez-Matamoros García, C. de Castro Hernández y C. Jiménez Gestal (Eds.), *Aportaciones al desarrollo del currículo desde la investigación en educación matemática* (pp. 480-531). Universidad de Granada; SEIEM.

Loureiro-Ga, M. y Gutiérrez-Rodríguez, I. (2025). Metodología docente: mejorando la actitud hacia las matemáticas en Educación Infantil. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán, y I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. 284-292). SEIEM.

Markovits, Z. y Smith, M. (2008). Cases as tools in mathematics teacher education. In D. Tirosh y T. Woods (Eds.), *The international handbook of mathematics teacher education* (Vol. 2) (pp. 39-64). S Publishers.

Méndez-Coca, M., Belmonte, J. M., Pizarro Contreras, N. y Ramírez García, M. (2023). Formación matemática en el Grado de Maestro de Educación Infantil: Análisis de las guías docentes de las universidades públicas españolas. En A. García-Díaz, I. García-Alonso y D. Sosa-Martín (Eds.), *Estrategia de formación docente* (pp. 756-780). Dykinson

Ministerio de Educación y Formación Profesional. (2022, 2 de febrero). *Real Decreto 95/2022, de 1 de febrero, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Infantil. Boletín Oficial del Estado*, (28), 14543-14595. https://www.boe.es/eli/es/rd/2022/02/01/95

Moreno, M., Sánchez-matamoros, G., Callejo, M. L., Perez-Tyteca, P. y Llinares, S. (2021). How prospective kindergarten teachers develop their noticing skills: the instrumentalization of a learning trajectory. *ZDM*, *53*(1), 57-72. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01234-5

Muñoz-Catalán, C. y Carrillo, J. (Eds.) (2018). *Didáctica de las matemáticas para maestros de Educación Infantil*. Paraninfo.

Muñoz-Catalán, M. C., Joglar, N., Ramírez, M., Escudero, A. M., Aguilar, Á. y Ribeiro, C. M. (2019). El conocimiento especializado del profesor de infantil desde el aula de matemáticas. En Badillo, E., Climent, N., Fernández, C. y M. T. González (eds.). *Investigación sobre el profesor de matemáticas: práctica de aula, conocimiento, competencia y desarrollo profesional* (pp. 63-84). Ediciones Universidad Salamanca.

Muñoz-Catalán, M.C; Joglar-Prieto, N.; Ramírez, M. y Codes, M. (2022a). El modelo MTSK desde la perspectiva del profesor de Educación Infantil: foco en el dominio matemático. En Carrillo, J.; Montes, M.A y Climent, N. (Eds.), *Investigación sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): 10 años de camino*, (p. 235-250). Dykinson, S.L.

Muñoz-Catalán, M.C., Liñán-García, M.M. y Ribeiro, M. (2017). El conocimiento especializado para enseñar la operación de resta en Educación Infantil. *Cadernos de Pesquisa*, *24*, 4-19. Número especial. https://doi.org/10.18764/2178-2229.v24nespecialp4-19

Muñoz-Catalán, M. C., Liñán-García, M. M., Joglar-Prieto, N. y Ramírez-García, M. (2023). Conocimiento especializado de una maestra de Educación Infantil: la descomposición aditiva del número 6. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 403-410). SEIEM.

Muñoz-Catalán, M. C., Liñán-García, M. M. y Joglar-Prieto, N. (2025). La naturaleza de las matemáticas escolares en Educación Infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, *14*(1), 68-91. https://doi.org/10.24197/edmain.1.2025.85-104

Muñoz-Catalán, M.C., Ramírez-García, M., Joglar-Prieto, N. y Carrillo-Yáñez, J. (2022b), Early childhood teachers' specialised knowledge to promote algebraic thinking as from a task of additive decomposition (*El conocimiento especializado del profesor de educación infantil para fomentar el pensamiento algebraico a partir de una tarea de descomposición aditiva*), *Journal for the Study of Education and Development*, *45*(1), 37-80. https://doi.org/10.1080/02103702.2021.1946640

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. NCTM.

Nolla, A., Cerisola, A., Fernández, B. y Muñoz, R. (2021). La formación inicial de los maestros en Matemáticas y su Didáctica. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, *96* (35.1), 185-207. https://doi.org/10.47553/rifop.v96i35.1.85882

Oppermann, E., Anders, Y. y Hachfeld, A. (2016). The influence of preschool teachers' content knowledge and mathematical ability beliefs on their sensitivity to mathematics in children's play. *Teaching and Teacher Education*, *58*, 174-184. https://doi.org/10.1016/j.tate.2016.05.004

Ponte, J. P. da y Chapman, O. (2008). Preservice mathematics teachers' knowledge and development. En L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 225-263). Routledge.

Pincheira, N. y Alsina, Á. (2022). Evaluación del conocimiento para enseñar álgebra temprana durante la formación inicial del profesorado en Educación Infantil. *Revista de Investigación en Educación, 20*(2), 154-171. https://doi.org/10.35869/reined.v20i2.4222

Rollnick, M. y Mavhunga, E. (2016) The Place of Subject Matter Knowledge in Teacher Education. In J. Loughran and M. Hamilton (Eds). *The International Handbook on Teacher education* (pp. 423-452). Springer.

Ruiz-Higueras, L. (2005). Aprendizaje y matemáticas. La construcción del conocimiento matemático en la Escuela Infantil. En C. Chamorro (Eds.), *Didáctica de las matemáticas. Colección didáctica infantil* (pp. 1-38). Pearson.

Sala Sebastià, G., Breda, A. y Farsani, D. (2022). Idoneidad didáctica de una tarea de medida con futuros maestros de educación infantil. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 539-547). SEIEM

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, *57*(1), 1-23. https://doi.org/10.17763/haer.57.1.j463w79r56455411

Vera, O., Batanero, C. y Pallauta, J. D. (2024). Comprensión de la aleatoriedad por maestros de educación infantil en formación. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent, y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 402-409). SEIEM.

DOCENTES SIN IDENTIDAD MATEMÁTICA: RETOS DE LA FORMACIÓN INICIAL DEL PROFESORADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Teachers without a mathematical identity: challenges in the initial education of primary school teachers

Beltrán-Pellicer, P.

Universidad de Zaragoza

Resumen

En este trabajo analizamos la formación inicial de los docentes de Educación Primaria para la enseñanza de las matemáticas y argumentamos que su principal problema es la ausencia de una identidad profesional como docentes de matemáticas. A partir del marco normativo vigente y de la literatura sobre identidad profesional docente, mostramos que esta ausencia se construye de forma acumulativa, desde el perfil de acceso al Grado de Maestro/a en Educación Primaria hasta un marco de especialidades que no reconoce la enseñanza de las matemáticas en Primaria como un área especializada. Revisamos también la investigación sobre identidad profesional en las actas de la SEIEM, constatando que no ha recibido demasiada atención de forma explícita en la etapa de Primaria y sigue siendo una agenda viva de trabajo. Concluimos señalando algunos retos para la formación inicial y planteamos interrogantes para el debate.

Palabras clave: *identidad profesional, formación inicial del profesorado, desarrollo profesional, educación primaria*

Abstract

In this paper we examine the initial training of Primary Education teachers for mathematics teaching, and argue that its core problem is the absence of a professional identity as a mathematics teacher. Drawing on the current regulatory framework and on the literature on teacher professional identity, we show that this absence builds up cumulatively, from the profile of students entering the degree to a specialities framework that does not recognise mathematics teaching in Primary Education as a specialised area. We also review research on professional identity published in SEIEM conference proceedings, showing that the Primary stage has received little attention. We conclude by pointing out some challenges for initial teacher education and raise questions for debate.

Keywords: *professional identity, initial teacher training, professional development, primary education*

INTRODUCCIÓN

El momento actual es especialmente sensible para la formación inicial del profesorado de todas las etapas. Apenas se cumplen cinco años de la publicación de los currículos desarrollados en el marco de la Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación (LOMLOE), que supusieron importantes novedades como la introducción de las competencias específicas y sus criterios de evaluación asociados. En el caso de Educación Primaria el marco curricular a nivel estatal es el Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria (MEFP, 2022). A esto se suma la Ley Orgánica 2/2023, de 22 de marzo, del Sistema Universitario (LOSU), que ha dado paso a una etapa de remodelación de planes de estudio en la que se enmarca, por ejemplo, la

Beltrán-Pellicer, P. (2026). Docentes sin identidad matemática: retos de la formación inicial del profesorado de Educación Primaria. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (pp. 67-81). SEIEM.

aprobación del Libro Blanco del Grado en Educación Primaria por la Conferencia de Decanas y Decanos de Educación (CoDE, 2025). Como ha documentado la coordinadora de este seminario, el proceso del Libro Blanco de Educación Primaria ha sido particularmente conflictivo y el resultado final no pronostica un futuro halagüeño para la educación matemática. Al igual que en el Marco de Competencias Profesionales Docentes propuesto por el Ministerio de Educación, se prioriza la pedagogía general frente al conocimiento didáctico-disciplinar y apenas se concretan las didácticas específicas en el documento final. Esta tensión entre la riqueza de los nuevos planteamientos curriculares y la insuficiencia de la formación del profesorado para abordarlos no es exclusiva de España. En Italia, de hecho, ni siquiera existe todavía una vía institucional de formación inicial para el profesorado de Secundaria (Mellone et al., 2023); en Inglaterra se busca la manera de construir modelos más comunitarios de formación docente (Coles et al., 2023); y en Portugal el esfuerzo se ha centrado en incorporar la tecnología a esa formación (Branco, 2023). El patrón de fondo es el mismo que señala Contreras (2022) para el caso español: las nuevas propuestas curriculares apuestan por unas matemáticas más ricas, basadas en la resolución de problemas, el razonamiento y la conexión entre ideas, que exigen del profesorado un conocimiento especializado más necesario que nunca.

Diferentes marcos teóricos han estudiado los conocimientos y competencias del (buen) docente de matemáticas. De esta forma, en la comunidad de investigadores en didáctica de las matemáticas hay consenso en que no es suficiente saber matemáticas, ni que las matemáticas que tiene que conocer un docente son las mismas que las que se tratan en los grados de Matemáticas. El conocimiento de un (buen) docente de matemáticas debe incluir matemáticas orientadas a la enseñanza, y una serie de competencias que profesionalizan su labor. La importancia del *conocimiento pedagógico (didáctico) del contenido* se viene señalando de forma explícita, al menos, desde los trabajos de Shulman (1986), y sus ideas han sido desarrolladas en modelos específicos para el profesor de matemáticas, como el Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT) (Ball et al., 2008), el Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK) (Carrillo et al., 2018) y el modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas (CCDM) (Godino et al., 2017).

Cuando hablamos del (buen) docente, entre paréntesis, no es algo gratuito. En el sistema educativo español, que será el que se tenga en consideración a lo largo de este trabajo, es un hecho que es posible (y bastante probable) acceder a la profesión docente en Educación Primaria con muy pocos conocimientos y competencias para la enseñanza de las matemáticas. Por un lado, aunque se profundizará en este trabajo en la estructura de la formación inicial, en los grados de Maestro/a en Educación Primaria (en adelante, GMEP) se cursan una media de tres asignaturas del área de Didáctica de la Matemática, 18 créditos. A ello, hay que restar una de estas asignaturas cuando el estudiante ejerce su derecho de compensación en algún momento. Por lo tanto, se disponen de dos o tres asignaturas, junto con parte del período de prácticas escolares, para abordar la formación inicial en lo que refiere a enseñanza de las matemáticas.

Por otro lado, el acceso a la función docente en el sistema público se realiza mediante un proceso de concurso-oposición convocado por cada comunidad autónoma, regulado por el Real Decreto 276/2007 y la Orden ECI/592/2007, de 12 de marzo. El temario oficial de la especialidad de Educación Primaria está compuesto por 25 temas, de los cuales solo seis abordan contenidos matemáticos (área de matemáticas, resolución de problemas, números, magnitudes y medida, geometría y estadística; en efecto, nada de probabilidad). El resto de los temas tratan sobre desarrollo psicoevolutivo, currículo general, tutoría, atención a la diversidad, evaluación, tecnologías, lengua, ciencias experimentales, ciencias sociales, educación artística y educación para la ciudadanía. Dado que en la primera prueba del proceso hay un sorteo para el tema, si añadimos que el caso práctico puede no tener relación con las matemáticas y que la programación y las unidades didácticas no tienen por qué ser de matemáticas, un aspirante puede obtener plaza sin haber demostrado conocimiento alguno sobre cómo se enseña y se aprende matemáticas.

Esta desconexión entre los modelos teóricos sobre el "buen docente" y los mecanismos de acceso a la profesión de maestro/a también se produce en la educación privada, tanto concertada como no. En estos casos basta con que el centro educativo y el candidato acuerden un contrato laboral en el marco del Estatuto de los Trabajadores y del convenio colectivo aplicable, más allá de los requisitos de titulación.

Estas carencias son preocupantes, puesto que la investigación vincula claramente el conocimiento matemático para la enseñanza con la calidad de esta y, sobre todo, con la del aprendizaje del alumnado (Baumert et al., 2010; Hill et al., 2005). El informe TIMSS 2023 (INEE, 2024) muestra que el alumnado español de 4.º de Primaria obtiene una puntuación media de 498 puntos en la prueba de matemáticas, por debajo del promedio de la OCDE (525) y de la UE (514), y que esta puntuación ha descendido respecto a la edición de 2019 (502 puntos). Más allá de la posición en el ranking internacional, lo verdaderamente preocupante es la brecha de género en cuanto a rendimiento: en 2023, los niños obtuvieron una puntuación media de 507 puntos, frente a los 489 de las niñas, una diferencia de 18 puntos que se ha incrementado más de un 63% desde 2011, cuando la brecha era de 11 puntos. Resulta llamativo que este fenómeno se produzca a unas edades tan tempranas, lo que revela que la enseñanza de las matemáticas en las aulas no está logrando contrarrestar ciertas dinámicas y condicionamientos sociales y culturales que potencian unas matemáticas asociadas a lo masculino. También cabe plantearse la hipótesis de que, si el aula no consigue superar estos sesgos (y otros), es porque los docentes no disponen de los conocimientos y competencias especializados que les doten de herramientas para una reflexión profunda sobre su práctica de aula. Además, si se quiere incorporar la perspectiva de género en la formación inicial del profesorado que enseña matemáticas ha de hacerse desde la perspectiva que didáctica de las matemáticas: ¿qué se puede hacer en el aula de Matemáticas de Primaria para reducir la brecha de género?

En este contexto, analizamos uno de los factores que contribuyen a explicar esta situación: la ausencia casi generalizada de identidad profesional de los docentes de Educación Primaria como docentes de matemáticas. A diferencia del profesorado de Educación Secundaria, que se reconoce a sí mismo como *profesor/a de Matemáticas*, los docentes de Primaria se identifican principalmente como *maestros/as generalistas* y, en el mejor de los casos, como especialistas en algún área (Lengua Extranjera, Educación Física o Música), pero rara vez como *maestros/as de Matemáticas*. Vinculamos esta carencia de identidad profesional con la existencia de otros fenómenos: el perfil de acceso al GMEP, marcado por la ausencia de pruebas que garanticen una competencia matemática mínima; las dificultades propias de la enseñanza universitaria de didáctica de las matemáticas, donde los estudiantes llegan con afectos, creencias y actitudes hacia las matemáticas frecuentemente negativos, fruto de su propia experiencia en el sistema educativo y de un imaginario social ampliamente compartido; la insuficiencia de la formación inicial recibida, tanto en carga lectiva como en menciones, para transformar ese punto de partida en el conocimiento especializado que requiere un (buen) docente de matemáticas; y, de forma más estructural, el Real Decreto 1594/2011 (ME, 2011), un marco normativo de especialidades docentes que no reconoce la enseñanza de las matemáticas en Primaria como un ámbito que requiera conocimiento especializado, a diferencia de lo que ocurre con Lengua Extranjera, Educación Física o Música. Para ello, en primer lugar, presentamos la identidad profesional docente como marco de análisis; en segundo lugar, articulamos estos factores con el marco institucional y curricular en el que se desenvuelve la profesión; en tercer lugar, revisamos la investigación reciente publicada en las actas de la SEIEM sobre identidad profesional docente; y finalizamos el trabajo señalando retos concretos y líneas de mejora para la formación inicial del profesorado de Educación Primaria.

LA IDENTIDAD PROFESIONAL DOCENTE COMO MARCO DE ANÁLISIS

La identidad profesional es una noción ampliamente utilizada en la investigación educativa, aunque definida de maneras distintas según los estudios. En su revisión de la investigación sobre identidad profesional docente, Beijaard et al. (2004) distinguen tres líneas de trabajo: estudios centrados en la formación de la identidad profesional, estudios centrados en la identificación de sus características, y estudios que la abordan a través de cómo se plasma en narrativas del profesorado. De esta revisión, los autores extraen varios rasgos que consideran esenciales: la identidad profesional se forma a través de un proceso continuo de interpretación y reinterpretación de las experiencias personales, de manera que responde tanto a la pregunta "¿quién soy en este momento?" como a "¿quién quiero llegar a ser?". Esto último implica que la identidad no es estable e inamovible, sino que es dinámica y que no solo tiene que ver con la persona, sino con el contexto en que se desenvuelve y las interacciones que vive. Además, una característica clave es la *agencia* o capacidad del docente de ser un agente activo de su propio desarrollo profesional.

En el ámbito específico de la educación matemática, autores como Losano et al. (2018) recogen estos rasgos de la identidad profesional, conceptualizando la identidad profesional del docente de matemáticas como un conjunto de autocomprensiones relacionadas con las formas de ser, vivir y proyectarse en la profesión docente, frente a las demandas y condiciones sociales y políticas de la práctica. Desde esta perspectiva, la identidad se desarrolla de forma dialógica a partir de la interacción entre el terreno íntimo del profesorado —sus conocimientos, sueños y creencias— y las prácticas y discursos a los que está expuesto, entre ellos el currículo oficial, los materiales curriculares y las demandas de compañeros, equipos directivos y familias. Por su parte, Escudero-Ávila et al. (2021) sitúan la identidad profesional, junto con el conocimiento profesional y las prácticas de enseñanza, como uno de los contenidos centrales de los que debe ocuparse la formación del profesorado de matemáticas. Estos autores subrayan que quienes forman a futuros docentes deben ser conscientes de los múltiples factores (creencias, interacción con el entorno, actitudes, emociones) que influyen en el desarrollo de la identidad, prestando especial atención, por lo tanto, al dominio afectivo. Es decir, a las concepciones y creencias que el futuro docente tiene hacia las matemáticas y su enseñanza.

Resulta interesante considerar esta forma de entender la identidad profesional como un proceso dinámico e inacabado (Beijaard et al., 2004), que se construye de forma dialógica entre lo íntimo y lo institucional (Losano et al., 2018), y que la formación inicial debería atender de manera deliberada, como un contenido más (Escudero-Ávila et al., 2021). De esta forma, si la identidad se construye a partir de la confrontación de la trayectoria personal del futuro docente con las prácticas, discursos e instituciones a los que se expone durante su formación, el diseño de esta formación no es neutro respecto a la identidad profesional que puede llegar a construir el maestro de Primaria como docente de matemáticas. Cada contenido que se selecciona, cada tarea, los modelos de prácticas y los enfoques de enseñanza elegidos, son factores que van a contribuir a la formación de esta identidad. Al mismo tiempo, la identidad, junto con el conocimiento y las competencias del profesorado, es uno de los contenidos que la formación inicial debe abordar explícitamente. Cuando la cuestión de la identidad no se tiene en cuenta como objetivo en el GMEP, las consecuencias perdurarán durante la trayectoria profesional de los futuros docentes. Al menos, durante los primeros años. No considerar la formación de la identidad en la formación inicial influye directamente sobre si el egresado del GMEP llega a reconocerse, o no, en algún momento, como profesor de matemáticas.

POR QUÉ NO SE FORMA LA IDENTIDAD MATEMÁTICA DE LOS DOCENTES DE EDUCACIÓN PRIMARIA

La asimetría entre áreas de conocimiento desde la legislación: el Real Decreto 1594/2011

El Real Decreto 1594/2011, de 4 de noviembre, sobre especialidades docentes del Cuerpo de Maestros, establece las especialidades de Educación Infantil; Educación Primaria; Lengua Extranjera: Inglés, Francés o Alemán; Educación Física; Música; Pedagogía Terapéutica; y Audición y Lenguaje (ME, 2011). Es el marco normativo que, de forma más estructural, condiciona la identidad profesional del docente de Primaria como docente de matemáticas. Este decreto produce una descompensación o asimetría entre áreas de conocimiento que permea todo el sistema: la legislación reconoce explícitamente que las asignaturas de Lengua Extranjera, Educación Física y Música requieren un conocimiento especializado y, por tanto, una especialidad docente en los colegios. En cambio, no reconoce lo mismo para la enseñanza de matemáticas, lengua, ciencias experimentales o las ciencias sociales. Tanto el reciente estudio diagnóstico sobre la situación en competencia matemática del CEMat (Barquero et al., 2024) como el documento de la SEIEM sobre las 24 propuestas de reforma (SEIEM, 2022) señalan este decreto como un obstáculo claro en el camino hacia una enseñanza de calidad de las matemáticas en Educación Primaria.

Esta asimetría transmite un mensaje claro: las matemáticas no son un área que requiera especialización en Primaria; cualquier maestro generalista está habilitado para enseñarlas. La consecuencia sobre la identidad profesional del maestro es clara y directa: si el sistema no reconoce la necesidad de un conocimiento especializado para la enseñanza de las matemáticas, el propio maestro tiende a no reconocerla. El mismo problema lo tienen el resto de las áreas sin especialidad reconocida por dicho decreto.

El problema se agrava cuando se observa que, además, los especialistas reconocidos por el Real Decreto 1594/2011 (ME, 2011) también pueden impartir docencia de las asignaturas propias del maestro generalista, pero no al revés. Esto conlleva que los centros educativos tiendan a ofertar vacantes de especialistas, antes que generalistas, puesto que es más sencillo completar el horario de los primeros. Como se verá en la siguiente sección, este marco legislativo condiciona totalmente los planes de los GMEP a través de la configuración de las menciones.

Podría pensarse que incluir la enseñanza de las asignaturas de Matemáticas, Lengua, Ciencias Naturales y Ciencias Sociales en las competencias profesionales del docente generalista de Primaria tiene sentido. Lo tendría, quizás, si el sistema dotase de una formación inicial sólida en todas esas áreas, al mismo tiempo que dispusiese de un marco de desarrollo profesional para continuar dicha formación. Sin embargo, cuesta creer que cada una de esas didácticas específicas no merezca, al menos, la misma atención que las que están reconocidas por el mencionado Real Decreto.

Esta asimetría valorativa produce otros efectos identitarios no deseables. Al no existir una especialidad en Matemáticas, la responsabilidad de la enseñanza matemática recae, como se ha señalado, sobre todos los docentes tutores, generalistas. Tampoco existe, al menos de manera estructural y reconocida, un referente disciplinar en el centro que oriente, coordine o asuma esa responsabilidad. Más aún, el docente que se interesa por la enseñanza de las matemáticas tampoco encuentra, en muchos centros, un interlocutor con identidad y formación equivalente: opera como un generalista con un "interés personal", sin reconocimiento institucional ni trayectoria profesional estructurada. En la mayoría de las comunidades autónomas tampoco se encuentra en los centros de formación del profesorado este interlocutor, puesto que, salvo excepciones, los asesores de formación también son de carácter generalista.

A todo esto, se le añade, como se ha visto en la introducción, que el temario de oposiciones de la especialidad de Educación Primaria apenas contempla seis temas de matemáticas sobre un total de veinticinco, con un supuesto práctico que puede versar sobre cualquier área. Por lo tanto, el futuro

docente de Educación Primaria recibe así el mensaje de que el conocimiento didáctico-matemático no es decisivo para su carrera profesional. El Real Decreto 1594/2011 (ME, 2011), probablemente sin proponérselo, configura un marco institucional que contribuye a consolidar la falta de identidad profesional del docente de Primaria como profesor de matemáticas.

La tensión entre las especialidades docentes recogidas en el RD 1594/2011 (ME, 2011) y las necesidades obvias del actual sistema educativo está dando lugar, en algunas comunidades autónomas, a la emergencia de nuevos perfiles profesionales. El documento de la SEIEM sobre las 24 propuestas de reforma (SEIEM, 2022) cita como ejemplo el caso de Cataluña, cuyo sistema de acreditación de perfiles profesionales docentes reconoce especialidades docentes no contempladas en el decreto estatal. Por su parte, la SEIEM solicita en dicho documento que se modifique el decreto de especialidades para incluir una especialidad STEM para Matemáticas y Ciencias Experimentales en Educación Primaria. Esta propuesta no implica necesariamente eliminar al maestro generalista, sino que constituye una solución de compromiso. Dicho gesto no exigiría una gran inversión económica, siendo más de carácter organizativo, ya que simplemente supone incorporar un perfil especializado que actúe como referente didáctico-disciplinar en el equipo docente. La introducción de este perfil repercutiría directamente sobre la identidad profesional, al dotar de un reconocimiento institucional al conocimiento y competencias especializadas.

El GMEP y la ausencia de menciones de especialización

Como se ha señalado anteriormente, la identidad profesional del docente de Educación Primaria como docente de matemáticas no se forma espontáneamente en la formación inicial; requiere oportunidades explícitas para que el futuro docente se reconozca como alguien que enseña matemáticas y no solo como alguien que "tiene matemáticas en su horario". Sin embargo, el plan de estudios del GMEP no ofrece, en la mayoría de las universidades, un itinerario claro de especialización para la docencia de matemáticas. Los estudiantes cursan asignaturas del área de Didáctica de las Matemáticas en las mismas condiciones que las demás didácticas específicas que no disponen de mención, sin que exista un itinerario formativo que permita profundizar en su conocimiento y competencias didáctico-matemáticos. La Orden ECI/3857/2007 (MEC, 2007), que regula los requisitos para la verificación de los títulos oficiales de Maestro/a, contempla explícitamente la posibilidad de que el alumnado curse menciones (entre 30 y 60 créditos ECTS) en áreas como Lenguas Extranjeras, Educación Musical, Plástica y Visual, o Educación Física (las recogidas en el decreto de especialidades). En la medida en que estas áreas de especialidad se ven reforzadas por las menciones, mientras que las áreas disciplinares básicas (Matemáticas, Ciencias Experimentales, Ciencias Sociales) no disponen de un itinerario equivalente, se produce una descompensación manifiesta en la formación que reciben los futuros docentes para el desarrollo de competencias profesionales en aquellas áreas (SEIEM, 2022).

En efecto, algunas universidades han implementado menciones en Matemáticas o en áreas afines, como STEM, respondiendo a las demandas en la formación inicial. A pesar de que se trata de iniciativas minoritarias y aisladas, marcan el camino a seguir, generando presión para el reconocimiento de estos perfiles profesionales en una futura modificación del Real Decreto 1594/2011 de especialidades (ME, 2011). Hasta que llegue ese momento, no obstante, la lucha de estas menciones con las que sí que disponen de ese reconocimiento es clara, dado que cursar estas últimas redunda en un aumento de la empleabilidad de los graduados. En otras palabras, cursar una mención en Matemáticas o STEM no abre ninguna puerta profesional, ya que el maestro que la cursa accede al mismo cuerpo, por la misma especialidad y con el mismo temario de oposiciones que el que no la ha cursado. Tampoco habilita para entrar a formar parte de listas de interinidad específicas, más allá de la de maestro generalista, por lo que la situación apunta a una clara falta de incentivos para cursar estas menciones.

La identidad debilitada antes del acceso: el perfil de los estudiantes del GMEP

Resulta complicado, por no decir imposible, identificar el origen de la ausencia de identidad profesional de los maestros como docentes de matemáticas. Este trabajo trata de reflexionar acerca del origen multifactorial, instalado además en el imaginario colectivo, para el que "magisterio es una carrera de letras". Más allá de la distinción entre "letras" y "ciencias", que no lleva a ningún sitio, es un hecho que el problema de la identidad profesional no comienza en el GMEP, sino antes, con el perfil de los estudiantes que acceden a él.

Así, los estudiantes del GMEP proceden, mayoritariamente, del Bachillerato de Humanidades y Ciencias Sociales, o de Ciclos Formativos de Grado Superior (Muñoz et al., 2022). Un porcentaje elevado no ha cursado matemáticas en Bachillerato ni se ha examinado de ellas en las pruebas de acceso a la universidad (Nolla et al., 2021). Esta realidad genera un punto de partida problemático, ya que las razones para evitar las matemáticas suelen estar relacionadas con unos afectos negativos hacia ellas. Implícitamente, se asume, además, que el GMEP no es una carrera de "ciencias", cuando tanto maestros generalistas como especialistas (sobre todo en los inicios de su carrera profesional) van a dedicarse a la docencia de las matemáticas.

Por lo tanto, el problema no es solo cognitivo, sino afectivo y, en última instancia, identitario. Los afectos hacia las matemáticas de los estudiantes del GMEP (emociones, actitudes, creencias, valores) proceden de su propia experiencia como alumnado de Primaria y Secundaria y de un imaginario social que asocia las matemáticas con la dificultad y el talento innato. Creencias como "no soy buena en matemáticas" o "las matemáticas no son para mí", "no necesito las matemáticas para ser maestro" condicionan mucho la incipiente construcción de la identidad profesional como futuros docentes, antes incluso de empezar el grado.

Si los estudiantes de GMEP no se reconocen a sí mismos como alguien que puede aprender y enseñar matemáticas, difícilmente desarrollará la disposición y el compromiso necesarios para adquirir el conocimiento didáctico-matemático que requiere un (buen) docente. En ese sentido, hay más que suficiente literatura en educación matemática acerca de la relación entre lo cognitivo y lo afectivo. Así, Gómez-Chacón (2000) señala cómo los afectos hacia las matemáticas influyen en el proceso de enseñanza-aprendizaje tanto del alumnado como del futuro docente, y cómo las creencias de autoeficacia negativas son uno de los predictores más robustos del rechazo al aprendizaje de las matemáticas. En la misma línea, Sánchez Mendías et. al. (2022) caracterizan la ansiedad matemática del futuro docente como un obstáculo que, lejos de superarse durante el GMEP, puede consolidarse y terminar repercutiendo en el ejercicio profesional.

Dado que el perfil de acceso no garantiza una competencia matemática mínima, la SEIEM (2022) ha llamado la atención sobre esta cuestión y aboga por la implementación de una prueba específica de admisión que incluya los contenidos y competencias disciplinares instrumentales (matemáticas y lenguaje/comunicación), con el fin de garantizar que los estudiantes que acceden al GMEP hayan desarrollado un nivel adecuado de conocimientos y competencia matemática. Esta medida ha sido adoptada ya en Cataluña (pruebas de Competencia Lógico-Matemática, CLOM, desde el curso 2016/17) e Islas Baleares (prueba de aptitud personal, PAP, desde 2020/21), experiencias que han sido valoradas positivamente desde diferentes puntos de vista. No obstante, estas pruebas asumen que ni el sistema ni la Prueba de Acceso a la Universidad, en su formato actual, son capaces de evaluar estas competencias esenciales. Además, ¿por qué estas pruebas específicas solo se plantean para los GMEP? ¿No serían también deseables para otras titulaciones, como Medicina o Enfermería?

El resultado de todo lo anterior es un círculo vicioso difícil de romper. Por un lado, los estudiantes acceden al GMEP con una identidad previa como "no matemáticos", con afectos y creencias negativas y con unos conocimientos y competencias matemáticas insuficientes en muchos casos. Por otro lado, el GMEP, con una carga limitada de créditos en el área de Didáctica de la Matemática no logra transformar sustancialmente ese punto de partida, debiendo atender tanto los afectos negativos

(una reconciliación con las matemáticas) como el desarrollo de conocimientos y competencias didáctico-matemáticos, al mismo tiempo que los puramente matemáticos.

Sfard y Prusak (2005) describen este círculo vicioso de una manera similar, como una brecha entre la identidad actual (personal) y la identidad designada (institucional) que es difícil de superar a lo largo de la formación inicial. Los estudiantes, futuros docentes de Primaria, no llegan a construir un relato para formar su identidad designada (aunque reciban mensajes institucionales en contra) como docentes de matemáticas. De esta forma, su identidad actual como maestro generalista en formación, o especialista de disciplinas reconocidas por el decreto de especialidades ("maestro/a de Educación Física", o "maestro/a de Música") permanece inalterada a lo largo de todo el proceso. Superar esta brecha exige actuar de manera planificada sobre la identidad profesional de los docentes de Primaria como docentes de matemáticas. No es suficiente con incrementar la presencia del área de Didáctica de la Matemática en el GMEP, ni con introducir pruebas de admisión específicas, ni con revisar el marco de especialidades docentes. Cada una de estas medidas es necesaria, pero ninguna es suficiente por sí sola. Una identidad profesional bien construida como docentes de matemáticas debería ser el objetivo prioritario.

LA INVESTIGACIÓN SOBRE IDENTIDAD PROFESIONAL EN LA SEIEM

Dado que este trabajo se inserta en un seminario de la SEIEM, procede preguntarse por la agenda de trabajo de la propia comunidad de investigadores sobre identidad profesional. Con este fin, se ha realizado un análisis de las actas de los simposios de la SEIEM de las últimas diez ediciones (XIX a XXVIII), localizando aquellas comunicaciones que abordan la identidad profesional como objeto de estudio o como dimensión teórica explícita.

En primer lugar, se encuentran comunicaciones centradas en el conocimiento del formador de profesores de matemáticas y en la identidad profesional como dimensión del contenido de esta formación. Claros exponentes de esta línea son los trabajos de Pascual, Montes et al. (2019), Pascual, Codes et al. (2024) y Pérez-Montilla et al. (2023, 2024). Son trabajos desde el marco del Conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK) (Carrillo et al., 2018) que articulan un modelo donde confluye conocimiento profesional, habilidades profesionales e identidad profesional, modelo descrito en más detalle en Escudero-Ávila et al. (2021). Se asume que el formador de profesores debe considerar la construcción de la identidad profesional, y estas investigaciones indagan, por ejemplo, en cuál es la importancia que cada formador otorga a cada una de las tres facetas, en sentido de priorización o relevancia sobre las otras. Por su parte, Pérez-Montilla et al. (2023, 2024) señalan que las investigaciones sobre conocimientos y competencias profesionales deberían incluir también reflexiones explícitas sobre cómo dichos resultados pueden ser de utilidad a los formadores para ayudarles a proporcionar oportunidades para construir una identidad profesional como docentes de matemáticas. En esta línea, Reyes-Bravo et al. (2022), en un estudio con formadores de profesores de Primaria en Chile, indagaron en las concepciones sobre el contenido de la formación inicial y observaron que los formadores tendían a privilegiar el conocimiento matemático en detrimento de las prácticas de enseñanza y la identidad profesional, que apenas recibía atención explícita. También en el ámbito del formador de profesores, Ayala-Altamirano y Cortiñas (2025) señalan que algunos formadores cuentan con formación específica en didáctica de la matemática, mientras que otros provienen de campos afines y deben construir su identidad profesional sobre la marcha.

En segundo lugar, encontramos comunicaciones sobre la construcción de la identidad profesional del profesorado de Secundaria, especialmente en su formación inicial. Salomón et al. (2017) estudiaron las reflexiones de estudiantes del Máster de Formación del Profesorado de Secundaria sobre el recuerdo de su experiencia escolar en matemáticas, entendiendo este recuerdo como un primer paso en la construcción de su identidad profesional. Más recientemente, Garrido-Rojas et al. (2024, 2025), Moreno y Ruiz-Hidalgo (2024) han analizado la relación entre el perfil del profesorado de

Matemáticas de Secundaria en ejercicio (titulación, edad, experiencia) y su percepción de la formación inicial y continua, utilizando la identidad profesional como marco teórico explícito, según la concepción de Losano et al. (2018). Estos autores identifican cuatro perfiles diferentes, con percepciones variadas sobre su formación inicial, que sugieren la necesidad de adecuar la formación a cada uno de ellos.

En tercer lugar, encontramos el seminario de Badillo y Fernández (2018), quienes analizaron, desde tres perspectivas distintas (MTSK, Mirada Profesional y CCDM), la narrativa de una profesora en ejercicio, mostrando cómo las herramientas conceptuales de cada perspectiva permiten abordar de manera complementaria el conocimiento, las creencias, las competencias y la identidad profesional del docente.

En cuarto lugar, hay dos trabajos que mencionan el papel de ciertos recursos en la identidad profesional. Por un lado, Arcavi (2022) sugiere que las tecnologías de la información y de la comunicación pueden llegar a suponer una amenaza para la identidad profesional de determinado perfil de profesores. Por otro lado, Fuertes-Prieto et al. (2022) analizan creencias e ideas de los futuros maestros sobre el uso de la Historia de las Matemáticas como recurso didáctico y cómo contribuye positivamente a la construcción de su identidad profesional.

Finalmente, la comunicación de Pascual y Montes (2017) aborda la identidad profesional del maestro de Primaria en un experimento de enseñanza con maestros egresados, donde concibieron el desarrollo de la identidad profesional como objetivo implícito, ligado al fomento de la autonomía y la autoconsciencia a través del planteamiento de preguntas metacognitivas.

Conviene observar que hay infinidad de trabajos que se podrían relacionar con la cuestión de la identidad profesional como docentes de matemáticas. De hecho, cualquiera que trate sobre conocimiento especializado para la enseñanza o sobre actitudes y creencias del profesorado en formación o en ejercicio. Por ejemplo, Cárdenas y Cáceres-García (2018) investigan las concepciones de los estudiantes para maestro de Educación Infantil sobre el conocimiento profesional del docente de matemáticas y, aunque no mencionan de forma explícita la identidad, los resultados son claramente interpretables desde ese marco: ¿cómo se ven a sí mismos los estudiantes para maestro de educación infantil?

Este análisis de las actas de los simposios de la SEIEM muestra que la identidad profesional ha ganado terreno como categoría analítica explícita, aunque su presencia como foco principal de investigación es todavía limitada y se concentra en el formador de docentes y en el profesorado de Secundaria. Parece que, al menos en las actas, la identidad profesional del maestro de Primaria como docente de matemáticas sigue siendo un terreno fértil para la investigación, como así lo sugiere el hecho de que hay algunas tesis en proceso (María-Bartolomé et al., 2026). Este tipo de investigación desde la didáctica específica de las matemáticas viene a subrayar la importancia de la identidad como docentes de matemáticas, frente a un corpus de investigación generalista consolidado.

RETOS PARA LA FORMACIÓN INICIAL DEL MAESTRO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

A partir del análisis realizado, y al margen de las propuestas que emanan de los documentos de SEIEM (2022) y CEMat (Barquero et al., 2024) se sugieren a continuación cuatro retos para la formación inicial del maestro de Educación Primaria en relación con la enseñanza de las matemáticas.

Reto 1: Asegurar el nivel de competencia matemática de acceso y reforzar la formación en didáctica de las matemáticas en el GMEP

El sistema de acceso y admisión a la universidad, basado en un bachillerato y unas pruebas de acceso donde pueden evitarse las matemáticas se muestra ineficiente en el caso de GMEP. Bastaría con que la PAU evaluase en una prueba competencial lo mismo que evalúan las pruebas específicas en Cataluña (CLOM) e Islas Baleares (PAP): competencia matemática y competencia lingüística o

comunicativa. Esto es algo de lo que se beneficiarían más grados universitarios, no solo los de GMEP, y, en última instancia, toda la enseñanza anterior. No obstante, hasta que ese momento llegue (en algún momento se ha hablado en la prensa de una *prueba de madurez*), debería valorarse el uso de este tipo de pruebas.

El escaso espacio que tiene la formación en didáctica de las matemáticas en el GMEP es, a todas luces, insuficiente y contrario a toda la literatura sobre la importancia del conocimiento didáctico-específico para la enseñanza. Si a esto se le añade que las prácticas escolares, en muchas ocasiones, aparecen desconectadas de dicha formación, ocurre que los egresados presentan un déficit de conocimientos y competencias para la enseñanza de las matemáticas y, lo que es peor, no han construido su identidad profesional como docentes de matemáticas. Esto último, es lo que abriría la puerta a buscar formación continua especializada y específica para las matemáticas.

La SEIEM (2022) es consciente de este fenómeno y viene reclamando un incremento de la presencia de la formación en didáctica de las matemáticas. Junto con el resto de las sociedades de investigación de las demás didácticas específicas presentó alegaciones a la propuesta de nuevos planes de estudio para el GMEP, donde, recordemos, se reducía a una sola asignatura todo lo que tuviera que ver con educación matemática. Las tensiones continúan y nos encontramos en un período de cambio que no sabemos qué resultado tendrá. Resulta necesario reivindicar la importancia de abordar cuestiones tradicionalmente generalistas, como currículo, evaluación, género, diversidad o tecnologías digitales desde la didáctica específica. Conviene tener presente que la propuesta de *Marco de competencias profesionales docentes*, todavía en estudio, pero sobre la que se pudieron presentar alegaciones en 2025, relegaba la didáctica específica a un segundo plano.

Este reto no puede abordarse por separado del debate sobre las menciones del GEMP. Si existen menciones para Lengua Extranjera, Música y Educación Física, no hay razón para que no existan menciones en Matemáticas, Lengua, Ciencias Experimentales o Ciencias Sociales. En efecto, esto está relacionado con la normativa de especialidades en los centros educativos, pero quizá la universidad debería asumir el interés de dichas menciones, cuya ausencia se traduce en menos oportunidades para formar la identidad profesional como docentes de matemáticas.

Reto 2: Tener presente, como formadores de docentes, la construcción de la identidad profesional del maestro como profesor de matemáticas

El segundo reto consiste en aprovechar conscientemente el espacio que tiene la formación en didáctica de las matemáticas en el GMEP para construir la identidad profesional de los estudiantes como futuros docentes de matemáticas. No es cuestión de una asignatura concreta, sino de:

Proponer tareas profesionales con foco identitario

Las tareas que se plantean en la formación inicial (Clarke et al., 2009; Joglar-Prieto et al., 2022) no deben limitarse al desarrollo de conocimiento y competencias, sino que deben explicitar el componente identitario. Ejemplo de este tipo de tareas son el análisis de vídeos de aula con instrumentos específicos (como POEMat.ES, de Joglar et al., 2021, que podría adaptarse para Primaria); el estudio de casos prácticos de maestros de Primaria o la identificación de dilemas profesionales de la enseñanza matemática. La discusión de dilemas, en particular, obliga al futuro maestro a posicionarse como docente de matemáticas, explicitando criterios, valores y conocimientos. Las tareas de corte narrativo, como la escritura de autobiografías matemáticas, la discusión grupal de experiencias personales con la materia o la reflexión sobre el "yo docente" que se desea llegar a ser resultan particularmente eficaces para favorecer este cambio identitario en el profesorado de Primaria en formación, precisamente el colectivo que arrastra mayores dificultades afectivas con las matemáticas (Lutovac y Kaasila, 2018).

Este tipo de tareas ha de articularse con otras que, evidentemente, también contribuyen a la formación de esa identidad. Por ejemplo, tareas para desarrollar la competencia de mirada profesional o *noticing*

(Llinares, 2012), entendida como la capacidad de atender a aspectos relevantes del pensamiento matemático del alumnado, interpretarlos desde el conocimiento didáctico-matemático y decidir cómo responder mediante acciones de enseñanza fundamentadas. Los conocimientos y competencias profesionales se reconocen en diversos marcos teóricos, desde los que emanan experiencias, actividades y tareas profusamente analizadas bajo su lente. Son ejemplo de ello el enfoque ontosemiótico y su CCDM (Godino et al., 2017), y el MTSK (Carrillo et al., 2018).

Modelos de práctica profesional

La formación inicial debería poner contacto a los futuros docentes con modelos de referencia profesional de la enseñanza de las matemáticas en Primaria. En el punto anterior se ha mencionado el análisis de vídeos de maestros en ejercicio y el estudio de episodios de aula, pero debería irse más allá y promover el contacto con maestros con una trayectoria reconocida en la enseñanza matemática. El contacto con estos referentes permitiría a los futuros docentes construir imágenes alternativas a su idea de docente (Mewborn y Tyminski, 2006) y a posicionarse identitariamente en relación con ellas. Esta tarea es tanto más urgente cuanto que el profesorado muestra una tendencia a emplear modelos de enseñanza similares a los que experimentó en su día como estudiante (Wright, 2017), a menudo alejados de una enseñanza rica de las matemáticas. Romper con estos modelos heredados constituye, en sí mismo, un reto identitario para los futuros docentes, y un reto para los formadores de docentes, puesto que a través de su performatividad han de promover romper con dichos modelos heredados.

Integración progresiva de la práctica en la identidad disciplinar

Las prácticas escolares ocupan un espacio considerable en el GMEP y no deberían considerarse nunca como un espacio indiferenciado de aplicación de principios pedagógicos generales, sino como una oportunidad que permita a los futuros docentes vivir la experiencia de enseñar matemáticas desde otros modelos, analizar su práctica y reflexionar sobre su identidad como docente de matemáticas. Es necesario, por lo tanto, una vinculación entre las asignaturas del área de Didáctica de la Matemática y las prácticas escolares, mediante tareas que articulen el conocimiento didáctico-matemático con la práctica de aula, crucial para este objetivo identitario. Los marcos teóricos ya mencionados aportan herramientas variadas para llevar a cabo esta reflexión. Por ejemplo, el CCDM, al integrar en su arquitectura la competencia de análisis de la propia práctica como una dimensión formativa explícita, proporciona un marco para que la reflexión de los futuros docentes sobre sus experiencias en el aula no se reduzca a una mera narración autobiográfica, sino que se organice en torno a criterios de idoneidad didáctica y a las facetas del conocimiento especializado (Godino et al., 2017).

En relación con este punto resulta interesante la creación de comunidades de práctica conformadas por maestros en ejercicio, formadores universitarios y los futuros docentes. La formación de los tutores de prácticas es aquí especialmente decisiva. Si los maestros tutores no tienen un conocimiento didáctico-matemático sólido ni una identidad profesional como profesores de matemáticas, la estancia de los futuros docentes en el centro reproducirá la cultura generalista. Por ello, la fidelización de centros y tutores con un perfil especializado, mediante proyectos de investigación e innovación en colaboración con la universidad, es una línea de actuación a considerar. Idealmente, esta línea de acción desemboca en la recuperación de las antiguas escuelas anejas a las facultades y el desarrollo de redes de centros de prácticas (SEIEM, 2022). En Inglaterra, por ejemplo, se ha ensayado un modelo de formación docente "comunitaria" basado en prácticas de coenseñanza y discusión reflexiva entre pares (Coles et al., 2023); en Italia, ante la falta de una vía institucional de formación inicial del profesorado de Secundaria, se ha optado por formar formadores mediante un modelo en cascada (Mellone et al., 2023). Ambas experiencias ofrecen referentes concretos de cómo dar forma a estas comunidades de práctica en el contexto español.

Reto 3: Revisar el marco de especialidades docentes del Cuerpo de Maestros

Por último, es imprescindible una revisión del marco de especialidades docentes. Como hemos argumentado, el RD 1594/2011 (ME, 2011) constituye un obstáculo estructural para la identidad profesional del docente de Primaria como profesor de matemáticas. La SEIEM (2022) ha propuesto la creación de una especialidad STEM, que tendría, al menos, los siguientes efectos positivos:

- Reconocimiento institucional de la especialización: la existencia de una especialidad en Matemáticas (o STEM) en el Cuerpo de Maestros transmitiría un mensaje claro sobre la necesidad de un conocimiento especializado para enseñar matemáticas en Primaria.
- Existencia de un referente profesional en los centros: el maestro especialista en Matemáticas podría actuar como referente disciplinar en el equipo docente, coordinando la enseñanza matemática y apoyando en el desarrollo del conocimiento didáctico-matemático
- Coherencia con la formación inicial: si el marco de especialidades reconoce la necesidad de especialización, los planes de estudio del GMEP podrán organizarse en consonancia, con itinerarios o menciones en matemáticas que permitan una formación más profunda.

Agradecimientos: Grupo S60_23R - Investigación en Educación Matemática (Gobierno de Aragón, España).

Referencias

Arcavi, A. (2022). Tecnologías y educación matemática: ¿Andarán dos juntos si no estuvieren de acuerdo? En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 7-16). SEIEM.

Ayala-Altamirano, C. y Cortiñas, J. R. (2025). De la investigación al aula: caminos y desafíos para una transferencia efectiva en Educación Matemática. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds*.), Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. 66-79). SEIEM

Badillo, E. y Fernández, C. (2018). Oportunidades que emergen de la relación entre perspectivas: análisis del conocimiento y/o competencia docente. En L.J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 66-80). SEIEM.

Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Barquero, B., Carriazo, A., de León, M., Moreno, A. J., Muñoz, J. J., Planas, N. y Rodríguez-Muñiz, L. J. (2024). *Estudio diagnóstico sobre la situación en competencia matemática*. Comité Español de Matemáticas (CEMat).

Baumert, J., Kunter, M., Blum, W., Brunner, M., Voss, T., Jordan, A., Klusmann, U., Krauss, S., Neubrand, M. y Tsai, Y. M. (2010). Teachers' mathematical knowledge, cognitive activation in the classroom, and student progress. *American Educational Research Journal*, *47*(1), 133-180. https://doi.org/10.3102/0002831209345157

Beijaard, D., Meijer, P. C. y Verloop, N. (2004). Reconsidering research on teachers' professional identity. *Teaching and Teacher Education*, *20*(2), 107-128. https://doi.org/10.1016/j.tate.2003.07.001

Branco, N. (2023). Prácticas con tecnología en la formación del profesorado de matemáticas para afrontar nuevas demandas curriculares. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 89-96). SEIEM.

Cárdenas, J. A. y Cáceres-García, M. J. (2018). Concepciones de los estudiantes para maestro de educación infantil sobre el conocimiento profesional del docente de matemáticas. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 191-200). SEIEM.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, *20*(3), 236-253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Clarke, B., Grevholm, B. y Millman, R. (Eds.). (2009). *Tasks in Primary Mathematics Teacher Education: Purpose, Use and Exemplars* (Vol. 4). Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-09669-8

Coles, A., Helliwell, T. y Malkin, E. (2023). Hacia una formación comunitaria de profesores de matemáticas. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 69-78). SEIEM.

Conferencia de Decanas y Decanos de Educación (CoDE) (2025). *Libro Blanco del Grado en Educación Primaria*. CoDE.

Contreras, L. C. (2022). La nueva propuesta curricular y la formación del profesor. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 63-79). SEIEM.

Escudero-Ávila, D., Montes, M. y Contreras-González, L. C. (2021). What do mathematics teacher educators need to know? Reflections emerging from the content of mathematics teacher education. En M. Goos y K. Beswick (Eds.), *The Learning and Development of Mathematics Teacher Educators: International Perspectives and Challenges* (pp. 23-40). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-62408-8_2

Fuertes-Prieto, M. A., Santágueda-Villanueva, M., Lorenzo-Valentín, G. (2022). Creencias e ideas de los futuros maestros sobre el uso de la Historia de las Matemáticas como recurso didáctico. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 277-284). SEIEM.

Garrido-Rojas, J., Moreno, A. y Ruiz-Hidalgo, J. F. (2024). Tendencias en Educación Matemática: explorando la relación entre el perfil del profesorado y la percepción de la formación en Enseñanza Secundaria. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 273-280). SEIEM.

Garrido-Rojas, J., Moreno, A. y Ruiz-Hidalgo, J. F. (2025). Tipología del profesorado de Matemáticas en secundaria. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp.196-203). SEIEM.

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C. y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema*, *31*(57), 90-113. https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a05

Gomez-Chacón, I. M. (2000). Affective influences in the knowledge of mathematics. *Educational studies in Mathematics, 43*(2), 149-168.

Hill, H. C., Rowan, B. y Ball, D. L. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal*, *42*(2), 371-406. https://doi.org/10.3102/00028312042002371

Instituto Nacional de Evaluación Educativa (INEE). (2024). *TIMSS 2023. Informe español*. Ministerio de Educación, Formación Profesional y Deportes. https://www.educacionfpydeportes.gob.es/inee/evaluaciones-internacionales/timss/timss-2023.html

Joglar, N., Ferrando, I., Abánades, M. Á., Arteaga, B. P., Barrera, V., Belmonte, J. M. y Star, J. (2021). POEMat.ES: Pauta de observación de la enseñanza de matemáticas en educación secundaria en España. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *20*, 89-103. https://doi.org/10.35763/aiem20.4004

Joglar-Prieto, N., Liñán-García, M. M. y Contreras, L. C. (2022). MTSK en la formación inicial del profesorado de primaria. En J. Carrillo, M. A. Montes y N. Climent (Eds.), *Investigación sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK)* (pp. 207-222). Dykinson.

Losano, L., Fiorentini, D. y Villarreal, M. (2018). The development of a mathematics teacher's professional identity during her first year teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *21*, 287–315. https://doi.org/10.1007/s10857-017-9364-4

Lutovac, S. y Kaasila, R. (2018). Future directions in research on mathematics-related teacher identity. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *16*(4), 759-776. https://doi.org/10.1007/s10763-017-9796-4

Llinares, S. (2012). Formación de profesores de matemáticas. Caracterización y desarrollo de competencias docentes. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, *10*, 53-62.

María-Bartolomé, Á., Maroto, A. I. y Espina, E. (2026). Caracterización de la identidad profesional docente en matemáticas: marco conceptual y diseño de investigación. En *Libro de resúmenes. III Jornadas de Intercambio y Difusión de Experiencias de Investigación en Educación Matemática (JIDEIEM)* (pp. 22-23). Universidad de Zaragoza.

Mellone, M., Baccaglini-Frank, A. y Di Martino, P. (2023). La necesidad y la esperanza de un camino institucional para la formación inicial de profesores de secundaria en Italia. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 79-87). SEIEM.

Mewborn, D. S. y Tyminski, A. M. (2006). Lortie's apprenticeship of observation revisited. *For the Learning of Mathematics*, *26*(3), 23-32.

Ministerio de Educación y Ciencia (2007, 29 de diciembre). *Orden ECI/3857/2007, de 27 de diciembre, por la que se establecen los requisitos para la verificación de los títulos universitarios oficiales que habiliten para el ejercicio de la profesión de Maestro en Educación Primaria*. *Boletín Oficial del Estado, (312)*, 53747-53750. https://www.boe.es/eli/es/o/2007/12/27/eci3857

Ministerio de Educación y Formación Profesional (2022, 2 de marzo). *Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria*. *Boletín Oficial del Estado*, (52), 24386 - 24504. https://www.boe.es/eli/es/rd/2022/03/01/157

Ministerio de Educación (2011, 9 de noviembre). *Real Decreto 1594/2011, de 4 de noviembre, por el que se establecen las especialidades docentes del Cuerpo de Maestros que desempeñen sus funciones en las etapas de Educación Infantil y de Educación Primaria reguladas en la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación*. *Boletín Oficial del Estado*, (270), 116652-116657. https://www.boe.es/eli/es/rd/2011/11/04/1594

Muñoz, I. A., Resino, D. A., Ruiz-Lázaro, J., Sánchez-Munilla, M., de Miguel, C. R., Constante-Amores, A. y Navarro-Asencio, E. (2022). Perfil de acceso a la universidad de los maestros en España. *Educación XX1, 25*(2), 39-63. https://doi.org/10.5944/educxx1.31924

Nolla, A., Muñoz, R., Cerisola, A. y Fernández, B. (2021). La formación inicialde los maestros en matemáticas y su didáctica. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado, 96*(35.1), 185-208. https://doi.org/10.47553/rifop.v96i35.1.85882

Pascual, M. I. y Montes, M. (2017). Las preguntas de los maestros egresados como guía de su formación: una aproximación metacognitiva. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 387-395). SEIEM.

Pascual, M. I., Montes, M. y Contreras, L. C. (2019). Un acercamiento al conocimiento del formador de profesores de matemáticas. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 473-482). SEIEM.

Pascual, M. I., Codes, M., Martín-Díaz, J. P. y Contreras, L. C. (2024). Perspectivas de dos formadores sobre la formación inicial de maestros de Educación Primaria. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 409-416). SEIEM.

Pérez-Montilla, A., Cardeñoso, J. M. y Montes, M. A. (2023). Una aproximación al conocimiento del formador de docentes de matemáticas en la formación inicial. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 443-450). SEIEM.

Pérez-Montilla, A., Cardeñoso, J. M. y Montes, M. Á. (2024). Caracterizando el conocimiento didáctico del formador de docentes de matemáticas. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 433-440). SEIEM.

Reyes-Bravo, M., Estrella, S. y Tarisfeño-Vásquez, S. (2022). ¿Cuál es el "contenido" de la formación inicial de profesores que enseñarán matemática? Concepciones de formadores. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 489-497). SEIEM.

Salomón, M. S., Melo, L., Chamoso, J. M., Cáceres-García, M. J., Sánchez, B., Rodríguez, M., González, M. T. y Corrochano, D. (2017). Caracterización de las reflexiones de estudiantes del Máster en Formación del Profesorado de Matemáticas de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato sobre el recuerdo de su experiencia escolar en matemáticas de secundaria. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (p. 579). SEIEM.

Sánchez Mendías, J., Segovia Alex, I. y Miñán Espigares, A. (2022). Ansiedad matemática, rendimiento y formación de acceso en futuros maestros. *PNA, 16*(2), 115-140. https://doi.org/10.30827/pna.v16i2.21703

SEIEM (2022). *Debate sobre el documento: 24 propuestas de reforma para la mejora de la profesión docente*. Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Sfard, A. y Prusak, A. (2005). Telling identities: In search of an analytic tool for investigating learning as a culturally shaped activity. *Educational Researcher*, *34*(4), 14-22. https://doi.org/10.3102/0013189X034004014

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14. https://doi.org/10.3102/0013189X015002004

Wright, P. (2017). Critical relationships between teachers and learners of school mathematics. *Pedagogy, Culture & Society*, *25*(4), 515-530. https://doi.org/10.1080/14681366.2017.1285345

¿BASTA CON SABER MATEMÁTICAS? DEL DOMINIO DISCIPLINAR A LA MIRADA PROFESIONAL EN LA FORMACIÓN INICIAL DEL PROFESORADO DE SECUNDARIA

Is knowing mathematics enough? From disciplinary knowledge to professional vision in pre-service secondary teacher education

Segura, C.

Universitat de València

Resumen

Este trabajo analiza los límites de la formación inicial del profesorado de matemáticas en secundaria en España. A partir de la literatura sobre conocimiento profesional docente y de documentos institucionales recientes, se identifican tensiones estructurales relacionadas con el acceso, la definición de competencias, la duración del máster y la débil conexión entre teoría y práctica. Se presta especial atención al desarrollo de la mirada profesional como núcleo del conocimiento didáctico-matemático. Se revisan propuestas basadas en el tercer espacio, comunidades de práctica y lesson study, además de alternativas como el análisis de vídeos de aula y el uso de instrumentos específicos de observación. Se argumenta que estos dispositivos permiten convertir la práctica en objeto de análisis profesional y contribuyen a una formación más integrada y fundamentada del futuro profesorado de matemáticas.

Palabras clave: *formación inicial, profesorado de matemáticas, conocimiento didáctico-matemático, mirada profesional, análisis de vídeos.*

Abstract

This paper analyses the limitations of the initial mathematics teacher education for secondary schools in Spain. Drawing on the literature on teacher professional knowledge and recent institutional reports, it identifies structural tensions related to access, the definition of competencies, the duration of the master's programme, and the weak connection between theory and practice. Particular attention is given to the development of professional vision as a core component of mathematical knowledge for teaching. The paper reviews proposals based on third space approaches, communities of practice, and lesson study, as well as alternatives such as video-based classroom analysis and the use of subject-specific observation tools. It is argued that these approaches enable teaching practice to become an object of professional analysis and contribute to a more integrated and theoretically grounded preparation of future mathematics teachers.

Keywords: *initial teacher education, mathematics teachers, mathematical knowledge for teaching, professional vision, video-based analysis.*

LA RESPUESTA INSTITUCIONAL AL PROBLEMA DE ENSEÑAR MATEMÁTICAS

Hace dieciséis años, la implantación del Máster Universitario en Profesor/a de Educación Secundaria (MAES) supuso un punto de inflexión en la formación inicial del profesorado de matemáticas. En aquel contexto, Ruiz et al. (2009) recuperaban una pregunta que sigue siendo pertinente: "¿Es seguro que el futuro profesorado de matemáticas necesita una formación profesional específica para poder realizar el oficio de profesor? ¿Qué argumentos pueden darse a favor de la necesidad de dicha formación?".

Históricamente, la respuesta a esta cuestión se articuló mediante dispositivos institucionales de formación y acreditación. El Curso de Aptitud Pedagógica (CAP), vigente entre 1971 y 2009, reguló

Segura, C. (2026). ¿Basta con saber matemáticas? Del dominio disciplinar a la mirada profesional en la formación inicial del profesorado de secundaria. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (pp. 82-96). SEIEM.

el acceso a la docencia en secundaria, pero también consolidó una jerarquía de saberes en la que el dominio disciplinar ocupaba el centro de la preparación docente y la formación didáctica quedaba en una posición secundaria, añadida y a menudo percibida como trámite burocrático (Font, 2011; Rico, 2004). Esta configuración contribuyó a una identidad profesional débil del docente de matemáticas, caracterizada por Ruiz et al. (2009) como una forma de semiprofesión.

La sustitución del CAP por el MAES introdujo una nueva respuesta institucional y redefinió, al menos formalmente, la formación inicial del profesorado de secundaria. Sin embargo, la cuestión decisiva es si esta arquitectura ha superado la concepción heredada o si mantiene algunas de sus tensiones: la separación entre formación disciplinar y pedagógica, la fragilidad de las didácticas específicas y la dificultad para articular teoría, práctica y conocimiento profesional.

CONOCIMIENTO PROFESIONAL DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS Y LÍMITES DEL MAES COMO MODELO DE PROFESIONALIZACIÓN

A partir de Shulman (1986), la investigación sobre el conocimiento docente situó el *Conocimiento Didáctico del Contenido* (CDC) en el centro de la profesionalización de la enseñanza. Desde esta perspectiva, enseñar no consiste solo en dominar una disciplina, sino en transformar ese saber en formas accesibles para el alumnado, mediante representaciones, explicaciones, ejemplos y modos de anticipar sus dificultades y errores (Shulman, 1986). Así entendido, el CDC no es pedagogía general aplicada a un contenido, sino un conocimiento profesional específico que emerge de la intersección entre contenido, enseñanza y aprendizaje.

En las últimas décadas, los trabajos de Shulman han servido de base para desarrollar modelos específicos sobre el conocimiento del profesor de matemáticas, como el *Conocimiento Matemático para la Enseñanza* (MKT; Ball et al., 2008), el *Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (MTSK; Carrillo et al., 2018) o el modelo de C*onocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas* (CCDM; Godino et al., 2017). Estos enfoques coinciden en reconocer la existencia de un conocimiento matemático propio de la enseñanza y en caracterizar el conocimiento didáctico del contenido matemático a partir de dimensiones vinculadas al aprendizaje del alumnado, la enseñanza de las matemáticas y el uso didáctico de las tareas. Diversos estudios han mostrado, además, que este conocimiento especializado se relaciona con la calidad de la enseñanza y con el aprendizaje del alumnado (Baumert et al., 2010; Hill et al., 2005).

En conjunto, estas evidencias refuerzan la necesidad de una formación específica para el profesorado de matemáticas, orientada al desarrollo de un conocimiento profesional especializado que articule contenido, enseñanza y aprendizaje. Estudios como el TEDS-M han mostrado la importancia de las oportunidades de aprendizaje en la formación inicial para el desarrollo del conocimiento matemático y didáctico-matemático del futuro profesorado (Blömeke et al., 2016), mientras que otras investigaciones han vinculado el fortalecimiento de la formación en conocimiento especializado del docente de matemáticas con mejoras en el aprendizaje del alumnado (Baumert et al., 2010). Desde esta perspectiva, la profesionalización del profesorado de matemáticas no puede reducirse al dominio disciplinar, sino que exige una preparación didáctico-matemática sistemática (Strutchens et al., 2017). Sin embargo, la respuesta institucional previa a la implantación del MAES contrastaba con esta evidencia acumulada.

En este contexto, la implantación del MAES en el curso 2009-2010 fue recibida por los formadores del futuro profesorado de matemáticas como una oportunidad para profesionalizar la formación inicial y aproximarla a los avances de la investigación en educación matemática (Font, 2011; Muñiz-Rodríguez et al., 2017; Santos y Lorenzo, 2015). Esta reforma desplazó la formación de una posición periférica a un programa universitario de posgrado con carácter habilitante para el ejercicio docente. En la especialidad de Matemáticas, dicho programa responde a un modelo consecutivo de formación (Muñiz-Rodríguez et al., 2016): tras un grado universitario que acredita la formación disciplinar, el futuro docente cursa un máster de 60 ECTS. El plan de estudios se estructura en tres módulos: uno genérico, vinculado a la formación psicosociopedagógica; uno específico, centrado en la

especialidad; y uno práctico, integrado por las prácticas externas y el Trabajo Fin de Máster. En Matemáticas, el módulo específico articula *Complementos de Formación Disciplinar* (CFD), *Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas* (AEM), e *Innovación Docente e Iniciación a la Investigación Educativa* (IDIIE). Aunque esta arquitectura general está regulada a nivel estatal, su concreción presenta una notable variabilidad entre universidades. Como señalan Arce et al. (2024), la distribución de créditos entre módulos, el peso de la Didáctica de la Matemática y la duración del prácticum no son uniformes. En particular, el módulo específico de la especialidad de Matemáticas oscila entre 24 y 32 créditos ECTS según la universidad. Por lo tanto, el MAES de Matemáticas comparte una estructura común, pero muestra un desarrollo efectivo heterogéneo. Incluso los requisitos de acceso a la especialidad son distintos entre universidades.

Esta heterogeneidad no fue la única razón por la que, pese a los avances, desde el inicio se alertó de las limitaciones del MAES para resolver el reto de la profesionalización del profesorado de matemáticas de secundaria (Santos y Lorenzo, 2015). Una de las más relevantes fue la formulación excesivamente general de sus competencias, comunes al conjunto de especialidades y poco articuladas en torno al CDC matemático, pese a que esta dimensión ha sido identificada por la investigación como nuclear en el conocimiento profesional docente. Así, se ha señalado que las competencias reguladas para el MAES resultan ambiguas, parcialmente redundantes y débilmente vinculadas con estándares internacionales específicos para el profesorado de matemáticas (Escudero, 2009; Muñiz-Rodríguez et al., 2016). A ello se añade la ausencia de indicadores claros para evaluar el desarrollo de las competencias (Muñiz-Rodríguez et al., 2017). Font (2011), por su parte, advirtió que el modelo seguía apoyándose en el supuesto problemático de que la formación matemática previa del alumnado es suficiente, cuando los perfiles de acceso muestran una notable diversidad. Además, desde el principio se alertó de la dificultad para conectar teoría y práctica (Santos y Lorenzo, 2015).

TENSIONES DEL MAES Y PROPUESTAS DE REFORMA: DEL DIAGNÓSTICO GENERAL A LA ESPECIFICIDAD MATEMÁTICA

Esta preocupación está en la base del *Libro Blanco del Máster en Formación del Profesorado*, impulsado por la Conferencia de Decanas y Decanos de Educación (CoDE), cuyo proceso se inició en 2024 y fue aprobado en noviembre de 2025. El documento (CoDE, 2025) se plantea como un diagnóstico crítico de la situación del MAES en España y en el contexto europeo, orientado a identificar sus principales tensiones y a proponer mejoras en su estructura, competencias, prácticas, coordinación institucional y vinculación con el desarrollo profesional docente. Este artículo plantea una lectura comparativa entre ese diagnóstico general, y tres documentos centrados específicamente en la formación del profesorado de matemáticas: las *Propuestas de SEIEM para la formación inicial del profesorado de matemáticas de secundaria* (Arce et al., 2024), el *Documento de SEIEM sobre las 24 propuestas de reforma para mejora de la formación docente del Ministerio de Educación y Formación Profesional* (SEIEM, 2022), y el *Estudio diagnóstico sobre la situación de la competencia matemática en España* del CEMat (Barquero et al., 2024). La comparación atiende tanto a los problemas identificados como a las soluciones propuestas, con el fin de valorar convergencias y especificidades entre una agenda general de reforma del MAES y una agenda propia de la educación matemática. A continuación, se presentan varias subsecciones que agrupan los problemas identificados y las propuestas de solución por ejes temáticos, si bien la falta de conexión entre teoría y práctica se abordará en una sección diferenciada.

Acceso a la especialidad de Matemáticas, perfil heterogéneo del estudiantado y carencias de conocimiento disciplinar

El acceso a las especialidades del MAES constituye una tensión especialmente relevante en la formación inicial del profesorado de secundaria. El Libro Blanco identifica una notable variabilidad entre universidades y comunidades autónomas en los criterios de admisión, las titulaciones que dan acceso a las especialidades y los procedimientos de acreditación del conocimiento disciplinar previo.

Esta disparidad puede generar desigualdad en las oportunidades de acceso y diferencias importantes en el nivel de preparación con el que el estudiantado inicia el máster (CoDE, 2025). Desde una perspectiva general de homogeneidad, equidad y planificación, el Libro Blanco propone establecer condiciones comunes de acceso entre universidades, vincular la oferta de plazas a las necesidades docentes reales y avanzar hacia una prueba general de acceso para todo el Estado. La propuesta, sin embargo, tiene un enfoque general y algo indefinido, pues propone seleccionar estudiantes con aptitudes comunicativas, reflexivas y motivacionales para la docencia (CoDE, 2025).

En el caso de Matemáticas, esta cuestión adquiere una relevancia particular, porque la especialidad requiere un conocimiento disciplinar sólido (Strutchens et al., 2017) y porque el número de plazas ofertado en las universidades públicas es insuficiente (CoDE, 2025). El informe del CEMat advierte que la falta de pruebas de acceso en la mayoría de las universidades permite que accedan estudiantes procedentes de titulaciones alejadas de la especialidad, como Química o Economía, y señala que, en algunos casos, esas titulaciones contienen una carga matemática muy reducida, incluso en torno a 12 ECTS. Esta situación dificulta garantizar que todos los egresados del MAES conozcan suficientemente el contenido matemático de la especialidad (Barquero et al., 2024). Además, esto introduce un problema formativo: si el estudiantado accede con niveles muy desiguales de conocimiento matemático previo, el máster debe dedicar parte de su limitada duración a compensar estas carencias, reduciendo así el margen para desarrollar competencias didáctico-matemáticas (Arce et al., 2024; Font, 2011). De ahí que la SEIEM insista en vincular los planes de estudio y los criterios de acceso a un marco bien definido de competencias profesionales específicas del profesorado de matemáticas (Arce et al., 2024), como se explicará en la siguiente subsección. En esta misma línea, tanto la SEIEM (2022) como el CEMat (Barquero et al., 2024) defienden la prioridad de acceso para egresados de Matemáticas, Estadística o titulaciones afines, así como la exigencia de una formación matemática previa suficiente para otros perfiles, con procedimientos de acreditación más rigurosos (créditos mínimos o pruebas específicas).

Esta problemática se ve agravada por la disminución de egresados de Matemáticas que optan por la docencia. Tanto la SEIEM como el CEMat señalan que, aunque la enseñanza ha constituido tradicionalmente una salida profesional relevante para los titulados en Matemáticas, el creciente atractivo de la empresa, la industria, la ciencia de datos, la inteligencia artificial y las tecnologías de la información ha desplazado parte de esas vocaciones hacia otros ámbitos profesionales (Arce et al., 2024; Barquero et al., 2024). El informe del CEMat estima, a partir de los datos de PISA 2022, que la tasa media de profesorado de Matemáticas con formación inicial universitaria en Matemáticas en los centros españoles participantes fue del 48%, lejos de los porcentajes de algunos países europeos con mejores resultados en competencia matemática, como Finlandia o Letonia, en torno al 60%, Estonia, con un 65%, o Irlanda y Gran Bretaña, en torno al 70% (Barquero et al., 2024). Este dato refuerza la necesidad de combinar la regulación del acceso al MAES con políticas de atracción de vocaciones docentes entre estudiantes de Matemáticas, como se discutirá más adelante.

Competencias específicas para el profesorado de matemáticas de secundaria

Ya se ha señalado que el MAES se apoya en competencias comunes al conjunto de especialidades, lo que dificulta definir con precisión qué debe saber y saber hacer un futuro profesor de matemáticas (Muñiz-Rodríguez et al., 2016). El Libro Blanco plantea la necesidad de revisar competencias, objetivos y resultados de aprendizaje, aunque de nuevo lo hace desde una perspectiva general, centrada en las nuevas demandas sociales, curriculares, digitales e inclusivas de la profesión docente (CoDE, 2025). De hecho, toma como referencia el Marco de Competencias Profesionales Docentes y las 24 propuestas ministeriales, que han recibido críticas relevantes desde las didácticas específicas (SEIEM, 2022). Frente a esta aproximación general, los documentos de la SEIEM insisten en que el marco competencial debe incorporar competencias específicas para la enseñanza de las matemáticas, en coherencia con los modelos de conocimiento especializado del profesorado.

En esta línea, Arce et al. (2024), a partir de propuestas previas (Font, 2011; Godino et al., 2017; Rico, 2004), identifican siete competencias profesionales específicas del profesor de matemáticas: competencia matemática especializada para la enseñanza; competencia curricular o de planificación y diseño de secuencias didácticas; competencia de gestión e interpretación del trabajo matemático del estudiantado; competencia de guía y gestión de la comunicación e interacción en el aula; competencia de evaluación de los aprendizajes matemáticos; competencia digital en matemáticas; y competencia de actualización y desarrollo profesional. Además, el documento concreta resultados de aprendizaje asociados a cada competencia, lo que ofrece una base para construir indicadores y herramientas de evaluación del desarrollo competencial en la especialidad de Matemáticas (Muñiz-Rodríguez et al., 2017). Esta concreción resulta especialmente relevante si se considera que el informe del CEMat reclama impulsar programas de análisis y evaluación de la competencia profesional del profesorado de matemáticas (Barquero et al., 2024).

Duración del MAES, ausencia de formación didáctica previa y Grado en Educación Matemática

El Libro Blanco señala, en línea con los informes Eurydice (2024), que la duración de la formación inicial del profesorado de educación secundaria en España se encuentra entre las más reducidas de los países europeos que adoptan modelos consecutivos. En varios sistemas de nuestro entorno, la formación de posgrado orientada a la docencia alcanza los 120 ECTS, como ocurre en Francia, Alemania o Portugal, o se sitúa en torno a los 90 ECTS, como en los Países Bajos. En este contexto, la ampliación del MAES a 90 o 120 ECTS constituye una de las propuestas de mayor impacto del documento (CoDE, 2025). Sin embargo, esta medida debe interpretarse a la luz de la opción adoptada por España en el proceso de adaptación al Espacio Europeo de Educación Superior. Mientras que buena parte de los países europeos consolidaron una estructura de 180 ECTS para el grado y 120 ECTS para el máster (modelo 3+2), España optó por una estructura 4+1, con grados de 240 ECTS y másteres de 60 ECTS. Esta decisión tuvo consecuencias directas sobre la formación inicial del profesorado de secundaria, al concentrar en un único curso una preparación profesional, como se ha visto, muy compleja (Strutchens et al., 2017). Ahora bien, la ampliación del MAES a dos cursos exigiría valorar también sus efectos sistémicos: en el marco universitario español, un itinerario 4+2 supondría una formación total de seis años, lo que podría incidir en la decisión de acceder a la profesión docente, especialmente en áreas deficitarias como Matemáticas (Barquero et al., 2024).

Las propuestas de la SEIEM y del CEMat apuntan, más que a una ampliación del MAES, a una mejor redistribución y articulación de la formación, con el fin de reforzar el componente didáctico-matemático sin generar nuevas barreras de acceso a la profesión. Los documentos coinciden en que el desarrollo del conocimiento didáctico-matemático se ve limitado por la actual distribución de créditos, especialmente porque el máster no puede suplir por sí solo la ausencia de formación didáctica previa en los grados de Matemáticas y en otras titulaciones afines (Arce et al., 2024; SEIEM, 2022). En este sentido, ambos documentos desplazan parte de la solución desde la formación de posgrado hacia la formación de grado, al plantear que el desarrollo didáctico-matemático comience antes del MAES y pueda contribuir también a despertar vocaciones docentes (Arce et al., 2024; Barquero et al., 2024).

Así, una solución de alcance limitado sería incorporar en el Grado en Matemáticas algunas materias de didáctica específica, o incluso un itinerario orientado a iniciar el desarrollo del conocimiento especializado para la enseñanza de las matemáticas (Barquero et al., 2024). No obstante, esta medida no resolvería el problema en su conjunto: el Real Decreto 1393/2007, de 29 de octubre, por el que se establece la ordenación de las enseñanzas universitarias oficiales, determinó que los grados debían primar los contenidos generalistas y de formación básica, reservando los contenidos especializados para los másteres. En consecuencia, el margen para incorporar itinerarios didáctico-matemáticos en el grado es limitado, especialmente en comparación con las antiguas licenciaturas, cuya estructura 3+2 permitía una especialización interna más definida. Además, una parte relevante del alumnado

que accede a la especialidad de Matemáticas del MAES no procede del Grado en Matemáticas (Barquero et al., 2024; Muñiz-Rodríguez et al., 2020), lo que reduce el alcance de una intervención centrada exclusivamente en dicho grado.

Por ello, una reforma más ambiciosa podría explorar la coexistencia del modelo consecutivo vigente con una vía concurrente específica, como ocurre en países europeos como Finlandia, Austria, Noruega, Reino Unido o Irlanda (Eurydice, 2024). Así, un Grado en Educación Matemática sería capaz de articular desde el inicio formación matemática, didáctico-matemática, psicosociopedagógica y práctica, lo que favorecería la construcción de una identidad profesional temprana y sólida (Arce et al., 2024). Este año se ha presentado en SEIEM una propuesta de plan de estudios para un grado de esta naturaleza (Adamuz et al., 2026). El plan se estructura en 60 créditos de formación básica, 120 obligatorios, 24 optativos, 24 de prácticas académicas externas y 12 de Trabajo Fin de Grado. Las materias básicas combinan fundamentos de matemáticas, fundamentos de educación matemática, contenidos iniciales de matemáticas universitarias y una primera aproximación a la matemática escolar, las bases curriculares, la resolución de problemas y la modelización. Las materias obligatorias se organizan en dos grandes bloques: por un lado, conocimientos matemáticos avanzados —lógica, álgebra, análisis, estadística y probabilidad, geometría, matemática discreta, métodos numéricos y computación— y, por otro, conocimientos didácticos específicos, con asignaturas de didáctica de la aritmética, del álgebra, del análisis, de la estadística y la probabilidad, de la geometría, además de enseñanza de las matemáticas y tecnología, enseñanza de las matemáticas y diversidad, y argumentación, representación y comunicación en matemáticas. La optatividad amplía el perfil formativo hacia el desarrollo profesional, la investigación y transferencia en didáctica de la matemática, el diseño de recursos didácticos y la didáctica de la matemática en distintas etapas educativas. Además, las prácticas se distribuyen en tres momentos, con la posibilidad de vincular las dos primeras con asignaturas de Didáctica de la Matemática y con la asistencia a centros educativos, favoreciendo así una retroalimentación progresiva entre teoría y práctica. Ahora bien, su desarrollo exigiría resolver retos institucionales y normativos relevantes, especialmente en relación con su encaje en el actual sistema habilitante para el profesorado de Secundaria. No se trataría solo del problema de reconocer créditos entre grado y posgrado, sino de definir cómo se garantizaría su equivalencia con la vía consecutiva. Sería necesario definir si esta vía debería culminar igualmente en un máster habilitante, si podría configurarse como un grado más máster integrado, o si requeriría una modificación normativa específica.

Falta de integración entre formación inicial del profesorado de matemáticas y acceso, inducción y desarrollo profesional

Una de las tensiones más relevantes del MAES es su débil articulación con el acceso efectivo a la profesión docente, la incorporación inicial al puesto y el desarrollo profesional posterior (CoDE, 2025). Esta desconexión puede hacer que el máster se perciba como un requisito administrativo, más que como una fase de profesionalización. Desde una perspectiva internacional, esta situación contrasta con la idea de que la formación inicial debería formar parte de un continuo más amplio de crecimiento profesional, que incluye la inserción en la profesión y la formación permanente. La comparación con otros sistemas muestra que esta separación no es inevitable. En Francia, el acceso a la docencia en secundaria se ha articulado mediante concursos específicos, como el *Certificat d'aptitude au professorat de l'enseignement du second degré* (CAPES), en conexión con los másteres *Métiers de l'enseignement, de l'éducation et de la formation* (MEEF), impartidos en los *Instituts nationaux supérieurs du professorat et de l'éducation* (INSPÉ). Estos programas combinan la preparación para el concurso con una formación en alternancia —*sandwich training*— entre la universidad y la práctica en centros escolares (Cornu, 2015). En Alemania, la formación del profesorado se organiza habitualmente en dos fases: una formación universitaria —grado y máster o examen estatal, según el Land— y un periodo posterior de prácticas supervisadas, el *Referendariat*, que culmina con una segunda evaluación estatal y habilita para el ejercicio docente (Eurydice, 2024).

Desde la educación matemática, el problema adquiere una concreción especial en la escasa relación entre la especialidad cursada en el MAES y los mecanismos reales de acceso a la profesión (SEIEM, 2022). Arce et al. (2024) señalan dos aspectos especialmente relevantes: que sea posible presentarse a oposiciones de Matemáticas sin haber cursado necesariamente la especialidad de Matemáticas en el máster, y que el temario de la prueba teórica siga centrado casi exclusivamente en conocimiento disciplinar matemático, sin presencia explícita de conocimientos de Didáctica de la Matemática. Esta situación debilita el valor profesional de la especialidad cursada y transmite la idea de que la formación didáctico-matemática no resulta decisiva para enseñar matemáticas en secundaria.

A esta débil conexión entre máster y selección se suma un problema de acceso efectivo a las aulas. El CEMat vincula esta cuestión con la escasez de profesorado especialista: las listas de interinidad pueden agotarse, lo que permite la incorporación de aspirantes que no han superado adecuadamente la evaluación del conocimiento matemático o cuya formación didáctica no ha sido suficientemente valorada; además, algunas comunidades autónomas han abierto bolsas urgentes admitiendo incluso aspirantes sin el MAES, con el compromiso de cursarlo posteriormente (Barquero et al., 2024). El problema, por tanto, no es solo que el máster tenga poco peso en las oposiciones, sino que el sistema de acceso puede acabar relativizando la necesidad de una formación específica para enseñar Matemáticas.

Las soluciones propuestas convergen en tres direcciones. En primer lugar, reforzar el valor profesional de la especialidad cursada en el MAES: el CEMat propone valorar la especialidad y la calificación del máster como méritos en el acceso, mientras que Arce et al. (2024) plantean una medida más exigente, vinculando la posibilidad de presentarse a una especialidad con haberla cursado previamente en el MAES. En segundo lugar, reformar los procesos de selección para que evalúen no solo conocimiento matemático disciplinar, sino también conocimiento didáctico-matemático, incluyendo contenidos de Didáctica de la Matemática en el temario de oposiciones (Arce et al., 2024). En tercer lugar, construir una trayectoria formativa más continua, en la que el prácticum, el TFM, la inserción profesional y la actualización docente se articulen mediante comunidades de práctica, redes de centros y colaboración estable entre universidad, centros educativos y profesorado en ejercicio (Barquero et al., 2024; SEIEM, 2022). Sobre esto profundizaremos en la siguiente sección.

La coincidencia de fondo entre los documentos es clara: el MAES no debería funcionar como una pieza aislada, sino como parte de un itinerario profesional más amplio. Desde el punto de vista de la docencia en el MAES, esto no implica convertir el máster en una preparación instrumental de oposiciones, sino reforzar su papel en la construcción de una mirada profesional sobre la enseñanza de las matemáticas. Solo si el conocimiento didáctico-matemático desarrollado en el máster tiene efectos reales en el acceso y en el desarrollo profesional posterior, el MAES podrá consolidarse como una verdadera fase de profesionalización del profesorado de matemáticas.

Otras problemáticas y propuestas complementarias

Además de las tensiones anteriores, los documentos analizados señalan otras problemáticas que afectan a la calidad y coherencia del MAES. La primera tiene que ver con la expansión desigual de la oferta, especialmente en universidades privadas y modalidades no presenciales. El Libro Blanco constata una fuerte heterogeneidad territorial, institucional y de modalidades en la oferta del máster, y plantea la necesidad de criterios comunes de calidad, acreditación y supervisión, tanto para universidades públicas como privadas (CoDE, 2025). Esta cuestión es especialmente sensible cuando una parte importante de los egresados procede de universidades online de gran volumen[1], pues obliga

[1] Como indicio de la concentración de la oferta en determinadas universidades privadas online, *elDiario.es* señalaba que, en el curso 2022-2023, cuatro másteres online privados concentraban el 25% de los nuevos egresados del MAES, correspondiendo en torno al 10% del total a la UNIR. Véase: https://www.eldiario.es/catalunya/25-nuevos-profesores-salen-cuatro-masteres-online-privados-auge-inquieta-autonomias_1_11405481.html

a garantizar que la formación práctica, la tutorización, el vínculo con los centros y la especificidad de cada especialidad no queden debilitados por modelos excesivamente masificados o estandarizados.

Un segundo problema, estrechamente relacionado con el anterior, es el conocimiento de los formadores del futuro profesorado (Contreras, 2021). La expansión de modelos online de gran escala plantea interrogantes sobre su perfil; pero también en las universidades públicas resulta necesario clarificar qué criterios deben orientar la asignación de docencia en el MAES. En esta línea, el Libro Blanco propone definir criterios de idoneidad del profesorado del máster, incorporar profesorado de Secundaria en activo y crear figuras contractuales específicas que permitan estabilizar esa colaboración (CoDE, 2025). Para la especialidad de Matemáticas, esta cuestión es clave: la formación debería estar a cargo de equipos en los que convivan especialistas en Didáctica de la Matemática y profesorado de Secundaria con experiencia contrastada e implicación formativa (Arce et al., 2024).

Una tercera línea problemática se refiere a la capacidad del MAES para preparar al futuro profesorado ante los nuevos currículos competenciales. El CEMat subraya que el currículo actual exige actualizar la formación en sentidos matemáticos y aprendizaje competencial (Barquero et al., 2024). Esta actualización no puede limitarse a introducir nuevos contenidos, sino que debe incorporar dimensiones a menudo poco visibles en la formación inicial, como los factores afectivos y la inclusión educativa. La investigación en educación matemática ha mostrado que creencias, actitudes, emociones y expectativas influyen de manera relevante en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (Gómez-Chacón, 2000; Marbán y García-González, 2025). Asimismo, la educación matemática inclusiva exige entender la diversidad no como un añadido externo, sino como una condición habitual del aula y una oportunidad para repensar tareas, representaciones, apoyos y formas de participación (Marbán, 2023).

En relación con los nuevos enfoques curriculares de ESO y Bachillerato, también aparece la cuestión de la interdisciplinariedad. El Libro Blanco la presenta como un eje estructural del máster, vinculado al trabajo en equipo y a la respuesta a problemas educativos complejos (CoDE, 2025). La SEIEM comparte la necesidad de esta apertura, pero introduce una cautela importante: la interdisciplinariedad debe construirse desde una identidad epistemológica y didáctica clara de las matemáticas (Arce et al., 2024). Esta cautela resulta coherente con el cuestionamiento del uso acrítico de la etiqueta STEM, que reclama validar didácticamente las propuestas interdisciplinares para que la integración curricular no diluya el conocimiento disciplinar y didáctico específico (Toma y García-Carmona, 2021).

(DES)CONEXIÓN ENTRE TEORÍA Y PRÁCTICA EN LA FORMACIÓN INICIAL DEL PROFESORADO DE MATEMÁTICAS DE SECUNDARIA

Coordinación centros y universidad y tensiones en la mirada profesional

Entre las tensiones señaladas por los documentos recientes sobre la reforma del MAES, la desconexión entre teoría y práctica aparece como el problema estructural más destacado. No se trata únicamente de que el prácticum tenga una duración limitada, sino de que la arquitectura del máster dificulta que la formación académica, la observación de aulas, la intervención docente y la reflexión profesional funcionen como partes de un mismo proceso formativo. El Libro Blanco identifica esta fractura en varios niveles: la disparidad en la organización de las prácticas externas, la débil coordinación entre universidad, administraciones y centros educativos, la diversidad de criterios para seleccionar centros y tutores, y la insuficiente articulación entre prácticum, asignaturas y Trabajo Fin de Máster (CoDE, 2025). Esta situación contrasta con modelos internacionales de alternancia sistemática entre formación universitaria y experiencia práctica supervisada, como el mencionado caso francés (Cornu, 2015).

Desde la perspectiva específica de la formación del profesorado de matemáticas, esta desconexión resulta especialmente problemática. La SEIEM advierte que el desarrollo del conocimiento profesional del futuro docente no puede reducirse a la yuxtaposición de formación matemática,

formación psicopedagógica y estancia en centros, sino que exige integrar conocimiento matemático, conocimiento didáctico-matemático y análisis de situaciones reales de enseñanza (Arce et al., 2024; SEIEM, 2022). En matemáticas, la práctica no es un espacio neutro de aplicación de teorías generales, sino el lugar donde el futuro profesor debe aprender a mirar profesionalmente las situaciones de enseñanza y aprendizaje. Esta *mirada profesional* (*noticing*) puede entenderse como la capacidad de atender a aspectos relevantes del pensamiento matemático del alumnado, interpretarlos desde el conocimiento didáctico-matemático y decidir cómo responder mediante acciones de enseñanza fundamentadas (Sánchez-Matamoros et al., 2019). Desde esta perspectiva, interpretar producciones del alumnado, reconocer dificultades y errores, gestionar la comunicación matemática, tomar decisiones sobre tareas y evaluar aprendizajes no son habilidades accesorias, sino expresiones del conocimiento especializado que el profesor de matemáticas debe movilizar en situaciones concretas de enseñanza (Llinares, 2012). Por ello, cuando el prácticum no se articula con la formación teórica sobre dicho conocimiento, se debilita la posibilidad de desarrollar una mirada profesional sobre la enseñanza de las matemáticas.

Esta fractura se materializa, especialmente, en la débil coordinación entre universidad y centros educativos y en la insuficiente profesionalización de la tutorización. El Libro Blanco subraya que el prácticum debería actuar como eje vertebrador de la formación, pero muestra que su organización depende de acuerdos institucionales desiguales, calendarios difíciles de compatibilizar y mecanismos de coordinación a menudo insuficientes (CoDE, 2025). La SEIEM coincide en que la vinculación entre universidad y escuela sigue siendo frágil, de modo que las experiencias de aula no siempre se convierten en objetos compartidos de análisis, reflexión e investigación formativa (Arce et al., 2024; SEIEM, 2022). A ello se suma que la figura del tutor o mentor escolar, aunque decisiva, presenta carencias en su selección, formación, reconocimiento y coordinación con los tutores universitarios (CoDE, 2025; SEIEM, 2022). El problema no es solo disponer de profesorado que acoja estudiantes en prácticas, sino garantizar que pueda actuar como verdadero mediador formativo: alguien capaz de modelizar buenas prácticas, ofrecer retroalimentación fundamentada y ayudar al futuro profesor a relacionar lo observado y vivido en el aula con el conocimiento didáctico-matemático trabajado en el máster. Como consecuencia, los conocimientos desarrollados en las asignaturas pueden quedar separados de los problemas reales de la enseñanza de las matemáticas, mientras que las experiencias de aula pueden interpretarse desde una lógica artesanal de la docencia, próxima a la idea de que cada profesor dispone de sus propios recursos, rutinas o "trucos" para enseñar. Esta lectura puede vincularse con el *apprenticeship of observation* (Mewborn y Tyminski, 2006), según el cual los futuros docentes llegan a la formación con modelos de enseñanza construidos a partir de su larga experiencia previa como alumnado. El problema, por tanto, no es la experiencia práctica en sí, sino la ausencia de dispositivos que permitan analizarla con categorías profesionales.

Encuentros en el tercer espacio: propuestas para integrar teoría y práctica en la mirada profesional

Si la desconexión entre teoría y práctica constituye una de las principales limitaciones del MAES, su superación no puede reducirse a añadir más tiempo de estancia en los centros. Esta medida puede ser necesaria, pero resulta insuficiente si mantiene intacta la lógica dual que separa los espacios de producción del conocimiento: la universidad como lugar de la teoría y el centro escolar como lugar de la práctica. En este sentido, la noción de *tercer espacio* permite formular una alternativa a la oposición entre academicismo y practicismo: no se trata de sustituir la formación universitaria por una formación "basada en la escuela", sino de generar espacios híbridos, menos jerárquicos, en los que universidad y centros educativos compartan responsabilidades en la formación profesional del futuro docente. Santos y Lorenzo (2015) plantean esta vía como parte de la reconstrucción del proyecto universitario de la formación del profesorado de secundaria, mediante centros asociados, supervisión compartida, profesorado residente, mentoría y uso formativo de buenas prácticas docentes. Esta orientación es retomada y concretada por el Libro Blanco, que propone crear un "tercer espacio" de colaboración

entre universidad y centros educativos dentro del prácticum, vinculado a comunidades de práctica, mentoría reflexiva, tecnologías colaborativas y trabajo sobre problemas reales, pero también a condiciones institucionales precisas: selección y acreditación de centros de prácticas, formación y reconocimiento de tutores, grupos experimentales de tutores, coordinación estable entre universidad y centros, e incorporación de profesorado en activo a la docencia del máster (CoDE, 2025).

En la especialidad de Matemáticas, esta orientación general adquiere una concreción propia. La SEIEM propone que el prácticum se organice mediante comunidades de práctica formadas por tutores de instituto, tutores universitarios y estudiantes del máster (Arce et al., 2024; SEIEM, 2022). La *comunidad de práctica*, entendida como un grupo de personas que comparten intereses y problemas y profundizan en su conocimiento mediante una interacción continuada (Wenger et al., 2002), permite precisar el tipo de aprendizaje profesional que se pretende promover: no una socialización informal en la cultura escolar, sino una participación guiada en prácticas compartidas de diseño, análisis y revisión de la enseñanza. En el caso del profesorado de matemáticas, esto supone trabajar conjuntamente sobre la selección de tareas, la anticipación de estrategias del alumnado, la interpretación de producciones, la gestión de discusiones matemáticas, la evaluación de evidencias de aprendizaje y la reformulación de secuencias. Por ello, la formación inicial debe diseñar *entornos de aprendizaje* en los que el futuro profesorado disponga de instrumentos conceptuales y técnicos para analizar la enseñanza de las matemáticas y aprender desde ella (Llinares, 2012).

Dentro de este marco, la *lesson study* ofrece una concreción especialmente potente para institucionalizar comunidades de práctica en torno a problemas didáctico-matemáticos. No constituye solo una técnica de innovación, sino un dispositivo colaborativo centrado en el estudio sistemático de la enseñanza: un grupo identifica un problema de aprendizaje, diseña una lección o secuencia, anticipa respuestas del alumnado, implementa la "lección de investigación", observa con foco en el aprendizaje matemático, analiza evidencias y revisa el diseño (Fernández y Yoshida, 2004). Lewis et al. (2009) señalan que la lesson study incide no solo en la mejora de una lección concreta, sino también en el conocimiento y las creencias docentes, en la comunidad profesional y en los recursos de enseñanza-aprendizaje. La pertinencia de este dispositivo para la formación inicial del profesorado de matemáticas de secundaria se aprecia también en la revisión internacional de Strutchens et al. (2017), donde las experiencias de campo conectadas con cursos de didáctica, la colaboración entre supervisores universitarios, tutores de centro y futuros docentes, y el análisis de la enseñanza aparecen como dimensiones centrales de los programas estudiados. En España, se han desarrollado experiencias en la formación inicial del profesorado de matemáticas de secundaria como las de Font et al. (2023), quienes describen ciclos formativos en los que los futuros docentes analizan casos, hacen emerger criterios de idoneidad didáctica y los utilizan posteriormente en el prácticum y el TFM para valorar, rediseñar y mejorar secuencias de enseñanza. Esta línea resulta especialmente relevante porque muestra que la lesson study necesita apoyarse en marcos conceptuales que organicen la reflexión y eviten que el análisis de la práctica quede reducido a impresiones generales o valoraciones intuitivas (Font et al., 2023).

En consecuencia, la lesson study permite desplazar el prácticum desde una lógica de estancia individual hacia una lógica de indagación compartida sobre la enseñanza de las matemáticas. Su interés para el MAES reside en que concreta el tercer espacio en un entorno de aprendizaje profesional orientado al desarrollo de la mirada profesional.

Alternativas para la observación docente: análisis de vídeos

Sin sustituir la experiencia del prácticum ni la necesidad de comunidades de práctica estables, el análisis sistemático de registros de aula ofrece una vía más accesible y menos dependiente de acuerdos institucionales complejos para acercar la práctica al aula universitaria y convertirla en objeto de análisis profesional. En este marco se sitúan estrategias basadas en el uso formativo del vídeo, como la microenseñanza grabada y el análisis de *video-lessons* o videoclips de clases reales.

En la formación inicial del profesorado de matemáticas, la *microenseñanza* puede entenderse como un dispositivo en el que el futuro docente realiza una intervención breve, focalizada en aspectos concretos de la actuación docente, seguida de observación, retroalimentación y revisión de la práctica (Allen y Ryan, 1969). Cuando estas intervenciones se graban, el vídeo permite que el futuro profesor analice su propia actuación y haga visibles sus decisiones, sus formas de explicación y sus modos de gestionar la actividad matemática. En la síntesis de Hattie (2009), la microenseñanza grabada aparece entre las actuaciones con mayor tamaño de efecto sobre el aprendizaje, con un valor próximo a 0.88. Junto a ello, las *video-lessons* funcionan como casos de análisis de la enseñanza: registros audiovisuales, completos o fragmentados, de lecciones reales, que permiten aprender a interpretar la actuación docente, atender al pensamiento del alumnado y considerar alternativas de enseñanza, en la línea de los enfoques de *lesson analysis* y *video-based field experiences* descritos por Santagata y Guarino (2011). El valor del vídeo, por tanto, no reside simplemente en "ver clases", sino en hacer observable y discutible aquello que en la práctica suele quedar diluido en la inmediatez de la interacción: pausar, volver atrás, comparar interpretaciones, focalizar la atención en episodios concretos y construir evidencias compartidas para la discusión. Strutchens et al. (2017) destacan, en este sentido, el uso de video-lessons en cursos de contenido didáctico-matemático para desarrollar la mirada profesional en la formación del futuro profesorado de matemáticas de secundaria.

Ahora bien, el vídeo por sí solo no garantiza el desarrollo de la mirada profesional. Mirar una clase puede derivar fácilmente en comentarios generales sobre el estilo docente, la disciplina del grupo o el interés aparente del alumnado. Para que la observación se convierta en aprendizaje profesional, necesita apoyarse en instrumentos que ayuden a precisar qué se mira, cómo se interpreta y con qué evidencias se justifica, de modo que la mirada sobre la práctica no quede reducida a impresiones generales, sino que se fundamente en categorías compartidas de análisis (Schoenfeld, 2013). En este sentido, las *rúbricas de observación* no deben entenderse solo como herramientas de evaluación del desempeño, sino como dispositivos para orientar la atención, estabilizar un lenguaje común y hacer discutibles los juicios sobre la práctica (Joglar et al., 2021). Los instrumentos de observación funcionan así como lentes que permiten mirar con más sentido y precisión, aunque toda lente ilumina ciertos aspectos de la práctica y deja otros menos visibles (Charalambous y Praetorius, 2018).

La investigación internacional sobre instrumentos específicos de observación en matemáticas permite concretar esta función general. El marco *Mathematical Quality of Instruction* (MQI), por ejemplo, analiza la calidad matemática de la instrucción atendiendo a dimensiones como la riqueza matemática, los errores e imprecisiones, el trabajo con estudiantes y matemáticas, y la participación del alumnado en prácticas matemáticas. Charalambous y Litke (2018) muestran que este tipo de instrumento permite mirar aspectos de la enseñanza que quedarían menos visibles con rúbricas genéricas, pero también recuerdan que ningún instrumento agota la complejidad de la práctica. Por ello, no se trata de reemplazar la observación abierta por una puntuación mecánica, sino de formar a los futuros docentes para usar las rúbricas críticamente, como herramientas que organizan la discusión, fundamentan juicios y abren preguntas sobre la práctica.

En el contexto español, esta línea se ha concretado en el trabajo del grupo *SiMiS*, vinculado al Real Colegio Complutense en Harvard, que ha desarrollado POEMat.ES como una pauta de observación de lecciones videograbadas de matemáticas en secundaria adaptada al contexto español (Joglar et al., 2021). POEMat.ES se apoya en modelos del conocimiento del profesor de matemáticas y fue construida mediante revisión teórica, visionado de vídeos de aula, discusión experta y validación mediante grupos nominales y el método Delphi (Arteaga-Martínez et al., 2021; Joglar et al., 2021). La pauta se organiza en tres dimensiones —contenido matemático, didáctica del contenido matemático y gestión del aula— e incluye indicadores como uso y conversión de representaciones, definiciones, argumentación, flexibilidad matemática, conexiones, naturaleza de las tareas, contextualización, cesión de responsabilidad, adecuación del discurso o explotación de intervenciones del alumnado. Su interés para la formación inicial reside en que proporciona un

lenguaje compartido para describir la práctica y discutirla desde categorías didáctico-matemáticas, evitando que la observación quede reducida a valoraciones intuitivas o demasiado generales.

Un uso formativo de POEMat.ES se ha concretado, desde el curso 2022-2023, en la asignatura IDIIE en Matemáticas del MAES de la Universitat de València. En esta asignatura, el alumnado conoce primero la estructura de la rúbrica y sus indicadores, analiza después fragmentos de entre 7 y 10 minutos de clases reales y registra sus valoraciones mediante un cuestionario en línea. La agregación automática de las respuestas genera una matriz de puntuaciones por indicador, que se muestra al grupo para comparar tendencias —moda, media o mediana— e identificar puntos sin consenso. El valor formativo aparece precisamente en esas discrepancias: las diferencias de puntuación obligan a volver al vídeo, localizar evidencias, justificar la interpretación y contrastarla con los niveles descritos en la rúbrica. La discusión no se orienta a decidir rápidamente quién ha "puntuado bien", sino a explicitar los criterios que sostienen cada valoración, reconocer sutilezas didácticas y construir consensos razonados sobre aspectos de la práctica que no admiten una lectura inmediata o unívoca. De este modo, la rúbrica funciona como mediador para movilizar y matizar conocimiento especializado del profesor de matemáticas. Indicadores como la conversión de representaciones, la flexibilidad matemática, la naturaleza de las tareas, la cesión de responsabilidad o la explotación de intervenciones del alumnado no se trabajan como categorías abstractas, sino como problemas de interpretación situados en episodios concretos de aula. La matriz de respuestas hace visible la diversidad de miradas del grupo y la convierte en objeto de trabajo: allí donde aparecen desacuerdos se abren oportunidades para argumentar, afinar el significado de los indicadores y discutir qué evidencias permiten sostener una determinada lectura de la enseñanza. Esta dinámica reproduce, a escala de aula universitaria, la lógica de discusión, comparación de valoraciones y búsqueda de consenso que estuvo presente en la propia construcción de POEMat.ES mediante el visionado de fragmentos, la revisión de indicadores y la validación por grupo nominal y método Delphi (Arteaga-Martínez et al., 2021; Joglar et al., 2021).

Esta propuesta se inserta, además, en una línea más amplia de uso de vídeos de aula como recurso para el desarrollo profesional. El *Global Teaching InSights Video Study* de la OCDE promueve la grabación y el análisis de sesiones de clase mediante estudios de caso orientados a la discusión profesional del profesorado de matemáticas. En esta línea, experiencias recientes que combinan lesson study y análisis sistemático de vídeos de aula muestran que la grabación, visionado colectivo y discusión estructurada de clases permiten sostener procesos de desarrollo profesional incluso en contextos con limitaciones organizativas (Rodríguez-Muñiz et al., 2023). En España, Muñiz-Rodríguez et al. (2023) describen estudios de caso basados en vídeos de clases reales y subrayan su potencial para la observación guiada tanto en formación inicial como continua. Asimismo, Marbán de Frutos et al. (2024), a partir de un cuestionario basado en indicadores de POEMat.ES, muestran discrepancias entre la relevancia que distintos docentes atribuyen a determinadas prácticas y la frecuencia con que declaran implementarlas. En conjunto, estos trabajos refuerzan la idea de que observar con instrumentos específicos no solo permite describir mejor la práctica, sino también hacer visibles tensiones, diferencias de criterio y oportunidades de mejora.

Así, el análisis de vídeos no sustituye al prácticum, pero puede prepararlo y prolongarlo reflexivamente: permite convertir situaciones de enseñanza de las matemáticas en objetos compartidos de análisis, discusión y mejora, y contribuye a que la experiencia práctica se transforme en conocimiento profesional.

CONCLUSIONES

El análisis realizado muestra que las mejoras en la formación del profesorado de matemáticas de secundaria requieren reforzar su profesionalización, algo que no puede resolverse únicamente mediante cambios estructurales en el MAES, como su duración o la ampliación del prácticum. También es necesario articular de manera coherente los perfiles de acceso, las competencias

específicas, el conocimiento especializado para la enseñanza de las matemáticas, la formación de los formadores, el acceso a la profesión y el desarrollo profesional posterior. En este marco, la conexión entre teoría y práctica ocupa un lugar central: la experiencia en el aula debe transformarse en objeto compartido de análisis, discusión y mejora. Desde esta perspectiva, propuestas como el tercer espacio, las comunidades de práctica, la lesson study y el análisis de vídeos con instrumentos específicos no son añadidos metodológicos, sino dispositivos para movilizar conocimiento didáctico-matemático y desarrollar una mirada profesional sobre la enseñanza de las matemáticas.

Agradecimientos

Este trabajo se enmarca dentro del proyecto de investigación emergente CIGE/2024/64, financiado por la Generalitat Valenciana, y del grupo de investigación ADHEME.

Referencias

Adamuz, N., Arce, M., Arnau, D., Camacho, M., Climent, N., Martínez-Juste, S., Moreno, A. y Planas, N. (2026). *Documento de trabajo en elaboración sobre una propuesta de Grado en Educación Matemática, a cargo del grupo técnico creado en el contexto de la SEIEM*. SEIEM.

Allen, D. W. y Ryan, K. (1969). *Microteaching*. Addison-Wesley.

Arce, M., Arnau, D., Martínez-Juste, S. y Moreno, A. (2024). *Formación inicial del profesorado de matemáticas en la educación secundaria. Propuestas de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*. SEIEM.

Arteaga-Martínez, B., Macías-Sánchez, J., Pla-Castells, M. y Ramírez-García, M. (2021). Diseño y validación de un instrumento para observación de clases de matemáticas en Educación Secundaria: grupo nominal y método Delphi. *RELIEVE*, *27*(2), 1-17. https://doi.org/10.30827/relieve.v27i2.21812

Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching. *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Barquero, B., Carriazo, A., De León, M., Moreno, A., Muñoz, J., Planas, N. y Rodríguez-Muñiz, L. J. (2024). *Estudio diagnóstico sobre la situación en competencia matemática en España*. Comisión de Educación Comité Español de Matemáticas (CEMat).

Baumert, J., Kunter, M., Blum, W., Brunner, M., Voss, T., Jordan, A., Klusmann, U., Krauss, S., Neubrand, M. y Tsai, Y. M. (2010). Teachers' mathematical knowledge, cognitive activation in the classroom, and student progress. *American Educational Research Journal*, *47*(1), 133-180. https://doi.org/10.3102/0002831209345157

Blömeke, S., Busse, A., Kaiser, G., König, J. y Suhl, U. (2016). The relation between content-specific and general teacher knowledge and skills. *Teaching and Teacher Education*, *56*, 35-46. https://doi.org/10.1016/j.tate.2016.02.003

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L.C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M.C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, *20*(3), 236-253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Charalambous, C. Y. y Litke, E. (2018). Studying instructional quality in mathematics through different lenses: The case of the Mathematical Quality of Instruction framework. *ZDM Mathematics Education*, *50*, 445-460. https://doi.org/10.1007/s11858-018-0913-9

Charalambous, C. Y. y Praetorius, A. K. (2018). Studying instructional quality in mathematics through different lenses: In search of common ground. *ZDM Mathematics Education*, *50*(3), 355-366. https://doi.org/10.1007/s11858-018-0914-8

Conferencia de Decanas y Decanos de Educación (CoDE) (2025). *Libro Blanco del Máster en Formación del Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas*. CoDE.

Contreras, L. C. (2021). Una aproximación a un modelo de conocimiento del formador de profesores de matemáticas. *Revista Venezolana De Investigación En Educación Matemática*, *1*(1), 1-26. https://doi.org/10.54541/reviem.v1i1.12

Cornu, B. (2015). Teacher Education in France: Universitisation and professionalisation – from IUFMs to ESPEs. *Education Inquiry*, *6*(3). https://doi.org/10.3402/edui.v6.28649

Escudero, J. M. (2009). La formación del profesorado de Educación Secundaria: contenidos y aprendizajes docentes. *Revista de educación*, *350*, 79-103.

Eurydice (2024). *National Education Systems*. Comisión Europea.

Fernández, C. y Yoshida, M. (2004). *Lesson study: a Japanese approach to improving mathematics teaching and learning*. Mahwah, NJ: Erlbaum.

Font, V. (2011). Competencias profesionales en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *Unión-Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *7*(26), 9-25.

Font, V., Calle, E. y Breda, A. (2023). Uso de los criterios de idoneidad didáctica y la metodología lesson study en la formación del profesorado de matemáticas en España y Ecuador. *Revista Paradigma*, *44*, 378-397. https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2023.p378-397.id1402

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C. y Font, V. (2017). Enfoque Ontosemiótico de los Conocimientos y Competencias del Profesor de Matemáticas. *Bolema*, *31*(57), 90-113. https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a05

Gómez-Chacón, I. M. (2000). *Matemática emocional: Los afectos en el aprendizaje matemático*. Narcea.

Hattie, J. (2009). *Visible learning: A synthesis of over 800 meta-analyses relating to achievement*. Routledge.

Hill, H. C., Rowan, B. y Ball, D. L. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal*, *42*(2), 371-406. https://doi.org/10.3102/00028312042002371

Joglar, N., Ferrando, I., Abánades, M. Á., Arteaga, B. P., Barrera, V., Belmonte, J. M., Crespo, R., Fernández, I. A., Fraile, A., Hernández, E., Liñán, M. del M., Macías, J., Muñoz-Catalán, M. C., Pla-Castells, M., Ramírez, M., Segura, C., Tolmos, P. y Star, J. (2021). POEMat.ES: Pauta de observación de la enseñanza de matemáticas en educación secundaria en España. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *20*, 89-103. https://doi.org/10.35763/aiem20.4004

Lewis, C. C., Perry, R. R. y Hurd, J. (2009). Improving mathematics instruction through lesson study: A theoretical model and North American case. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *12*, 285-304. https://doi.org/10.1007/s10857-009-9102-7

Llinares, S. (2012). Formación de profesores de matemáticas. Caracterización y desarrollo de competencias docentes. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 10, 53-62.

Marbán, J. M. (2023). Educación matemática inclusiva: desafíos, compromisos y oportunidades. En S. González, Y. Morales, Á. Ruiz y P. Scott (Eds.), *Educación Matemática en las Américas 2023. Trabajos invitados de la XVI CIAEM* (pp. 227-238). Comité Interamericano de Educación Matemática.

Marbán, J. M. y García-González, M.S. (2025). La investigación sobre afectos en educación matemática como reto compartido. En E. Flores-Medrano, M. Molina, I. Sandoval y I. Polo-Blanco (Eds.), *Educación Matemática en México y España: Investigaciones y líneas de trabajo compartidas* (pp. 397-425). Editorial SOMIDEM-SEIEM. https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S2/2025/03-15

Marbán de Frutos, M., Marbán, J. M. y Maroto Sáez, A. I. (2024). Cognitive dissonances in mathematics teachers: A cross-case study. *LUMAT-B: International Journal on Math, Science and Technology Education*, *9*(2), 1-11.

Mewborn, D. S. y Tyminski, A. M. (2006). Lortie's apprenticeship of observation revisited. *For the Learning of Mathematics*, *26*(3), 30-32.

Muñiz-Rodríguez, L., Aguilar-González, Á. y Rodríguez-Muñiz, L. J. (2020). Perfiles del futuro profesorado de matemáticas a partir de sus competencias profesionales. *Enseñanza de las Ciencias*, *38*(2), 141-161. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3161

Muñiz-Rodríguez, L., Alonso, P., Rodríguez-Muñiz, L. J. y Valcke, M. (2016). ¿Hay un vacío en la formación inicial del profesorado de matemáticas de Secundaria en España respecto a otros países? *Revista de educación*, *372*, 106-132.

Muñiz-Rodríguez, L., Alonso, P., Rodríguez-Muñiz, L. J. y Valcke, M. (2017). Percepciones sobre las competencias del futuro profesorado de matemáticas en educación secundaria. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 357-366). SEIEM.

Muñiz-Rodríguez, L., Ferrando, I., Ramos, P. y Rodríguez-Muñiz, L. J. (2023). La observación de aula como herramienta de desarrollo profesional. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *19*(67), 1-12.

Rico, L. (2004). Reflexiones sobre la formación inicial del profesor de matemáticas de secundaria. *Profesorado. Revista de currículum y formación del profesorado*, *8*(1), 1-15.

Rodríguez-Muñiz, L. J., Aguilar-González, Á., Alonso-Castaño, M., García-Honrado, I., Lorenzo-Fernández, M. E. y Muñiz-Rodríguez, L. (2023). Explorando nuevas estrategias de formación del profesorado de matemáticas: un enfoque ampliado del Lesson Study para el desarrollo profesional en la Escuela Andorrana. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, *98*(37.2), 35-54. https://doi.org/10.47553/rifop.v98i37.2.99131

Ruiz, A., Bosch, M. y Gascón, J. (2009). La formación matemático-didáctica del profesorado de secundaria. De las matemáticas a enseñar a las matemáticas para la enseñanza. En González, M. J; González, M. T; Murillo, J (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los Grupos de Investigación*. XIII Simposio de la SEIEM. Santander.

Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C. y Llinares, S. (2019). Relationships among prospective secondary mathematics teachers' skills of attending, interpreting and responding to students' understanding. *Educational Studies in Mathematics*, *100*, 83–99. https://doi.org/10.1007/s10649-018-9855-y

Santagata, R. y Guarino, J. (2011). Using video to teach future teachers to learn from teaching. *ZDM Mathematics Education*, *43*(1), 133-145. https://doi.org/10.1007/s11858-010-0292-3

Santos, M. A. y Lorenzo, M. (2015). La Formación del Profesorado de Educación Secundaria: pensando en la reconstrucción del proyecto universitario. *Revista española de pedagogía*, *73*(261), 263-281.

Schoenfeld, A. H. (2013). Classroom observations in theory and practice. *ZDM Mathematics Education*, *45*(4), 607-621. https://doi.org/10.1007/s11858-012-0483-1

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational researcher*, *15*(2), 4-14. https://doi.org/10.3102/0013189X015002004

Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM) (2022). *Debate sobre el documento: 24 propuestas de reforma para la mejora de la profesión docente*. SEIEM.

Strutchens, M. E., Huang, R., Losano, L., Potari, D., Cyrino, M. C. D. C. T., Da Ponte, J. P. y Zbiek, R. M. (2017). *The mathematics education of prospective secondary teachers around the world*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-38965-3

Toma, R. B. y García-Carmona, A. (2021). «De STEM nos gusta todo menos STEM». Análisis crítico de una tendencia educativa de moda. *Enseñanza de las Ciencias*, *39*(1), 65-80. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3093

Wenger, E., McDermott, R. y Snyder, W. M. (2002). *Cultivating communities of practice: A guide to managing knowledge*. Harvard Business School Press.

COMUNICACIONES

CUESTIONARIO PARA CARACTERIZAR EL FENÓMENO DE FUGA STEM EN EDUCACIÓN SECUNDARIA

Questionnaire to characterise STEM-Leak phenomena in Secondary Education

Abaurrea, J.[a], Lasa, A.[a,b] y Rincón, Y. R.[a,b]

[a]Universidad Pública de Navarra, [b]Institute for Advanced Materials and Mathematics (INAMAT^2)

Resumen

El presente trabajo describe el proceso de diseño y validación por expertos de un cuestionario dirigido a estudiantes de Educación Secundaria que tiene por objetivo la identificación del fenómeno de fuga STEM —entendido como el abandono de los itinerarios científico-tecnológicos— durante la transición de la Educación Secundaria Obligatoria al Bachillerato, así como caracterizar los factores que pueden explicar su aparición. El cuestionario se basa en instrumentos previamente validados dentro del marco teórico de la Teoría de la Expectativa-Valor (EVT) y su diseño fue evaluado mediante una metodología Delphi modificada. Los resultados muestran un elevado grado de consenso entre los expertos en todos los bloques del cuestionario y permiten establecer una versión validada del instrumento como base para su posterior validación empírica.

Palabras clave: *Educación STEM, fuga de talento STEM, caracterización del perfil de estudiantes en Educación Secundaria, Teoría de la Expectativa-Valor (EVT), Metodología Delphi Modificada.*

Abstract

This study describes the design process and expert-panel validation of a questionnaire aimed at secondary education students with the objective of identifying the phenomenon of STEM leakage—understood as the abandonment of science and technology academic pathways—during the transition from compulsory secondary education to upper secondary education, as well as charactericing the factors that may explain its emergence. The questionnaire is based on previously validated instruments within the theoretical framework of Expectancy–Value Theory (EVT), and its design was evaluated using a modified Delphi methodology. The results show a high degree of consensus among the experts across all five blocks of the questionnaire and allow for the presentation of a fully validated version of the instrument as a basis for its subsequent empirical implementation.

Keywords: *STEM education, STEM-Leak, characterization of Secondary Education students' profiles, Expectative-Value Theory, Modified Delphi Methodology.*

INTRODUCCIÓN Y ANTECEDENTES

A pesar de la alta demanda laboral de profesionales especializados en ciencias, tecnología, ingeniería y matemáticas (STEM —acrónimo en inglés—), en muchos países faltan personas tituladas universitarias en estas disciplinas, lo que plantea la pregunta de por qué no hay más estudiantes que elijan carreras STEM (López et al., 2023).

Si se pone el foco en el alumnado, es conocida la relación existente entre los contextos sociofamiliares del alumnado y su desempeño académico (Lambert-Le Mener, 2012), así como la influencia que tiene dicho contexto en el gusto o interés que muestran por diferentes disciplinas (Cosnefroy, 2007). Además, la implantación del aprendizaje STEM implica la adopción de metodologías activas, como el trabajo por proyectos y la experimentación en el laboratorio, estrategias especialmente adecuadas para el alumnado en la etapa de la adolescencia temprana (Gras et al., 2008). Con ello, tanto el

Abaurrea, J., Lasa, A. y Rincón, Y. R. (2026). Cuestionario para caracterizar el fenómeno de fuga STEM en Educación Secundaria. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (pp. 99-106). SEIEM.

contexto sociofamiliar como las metodologías mediante las cuales aprende el alumnado pueden tener un efecto determinante en el momento de definir su *identidad* STEM.

Desde el punto de vista docente, las lagunas en la formación continua del profesorado pueden dificultar la implantación de metodologías STEM (Berciano, 2025). Por ejemplo, se constata el efecto positivo de la formación docente en la metodología Aprendizaje Basado en Proyectos, pero esto resulta claramente insuficiente si la formación no va orientada de manera específica a la coordinación del profesorado de las distintas disciplinas STEM. En este sentido, la formación docente recibida puede afectar a la calidad del *apoyo* y de la *orientación* del docente hacia el alumnado.

En un estudio previo, Lasa et al. (2022) se centran en analizar las actitudes de Docentes en Formación Inicial (DFI) hacia las disciplinas STEM. Así, se caracteriza un perfil principal de DFI claramente vocacional, que valora la importancia de la formación inicial de maestros como disciplina, y que está influenciada por un entorno sociofamiliar de alto nivel formativo del cual ha recibido la noción de la importancia del dominio de las disciplinas científicas. Además, se observa que la mitad de los DFI de la muestra que comienzan un itinerario científico-tecnológico en la Educación Secundaria Obligatoria (ESO), terminan desencantados de las ciencias experimentales y cambian su itinerario al humanístico en Bachillerato. Las conclusiones de este trabajo previo dejan abiertas nuevas preguntas de investigación, como las siguientes:

[1] El fenómeno de huida de talento del itinerario científico-tecnológico, ¿es exclusivo de la tipología de alumnado DFI y afecta únicamente a los Grados en maestro? O, por el contrario, ¿se trata de un fenómeno general que afecta al paso de ESO a Bachillerato en su conjunto?

[2] ¿Cuáles serían las causas de dicho fenómeno?

Con el fin de dar respuesta a estas preguntas, se ha diseñado un cuestionario dirigido al alumnado de Educación Secundaria[2] (ESO y Bachillerato). Este cuestionario se organiza en torno a cuatro dimensiones teóricas principales —*identidad STEM*, *estereotipos y equidad*, *apoyo y orientación*, y *redes de amistad*—, que se miden en cuatro de los cinco bloques de ítems del cuestionario. El primer bloque recoge información sociodemográfica y de trayectoria académica del estudiantado; los cuatro restantes operacionalizan cada una de las dimensiones teóricas citadas previamente mediante escalas Likert de cinco puntos. Mediante el cuestionario, en una futura recogida de datos, se pretende contrastar la existencia de abandono en las trayectorias STEM del alumnado de Educación Secundaria, así como encontrar los factores principales que promueven la fuga de estudiantes de especialidades STEM. Para la elaboración del cuestionario se han tomado como referencia instrumentos previamente validados, entre los que se encuentran *Math Identity Scale* (Cribbs y Utley, 2024) y *Sense of Belonging in STEM* (Strayhorn, 2024).

El presente trabajo tiene por objetivo describir el proceso de diseño y validación preliminar mediante panel de expertos de un cuestionario para la caracterización del fenómeno de fuga STEM en el estudiantado de Educación Secundaria, como paso previo a su futura implementación empírica. Del objetivo mencionado, deriva la siguiente pregunta de investigación: ¿cómo puede caracterizarse y medirse el fenómeno de fuga STEM en el estudiantado de Educación Secundaria?

MARCO TEÓRICO

La teoría de la Expectativa-Valor (EVT) constituye un marco teórico de referencia en el estudio de la motivación y actitudes del alumnado. Si bien es cierto que durante la adolescencia temprana el alumnado tiende a considerarse menos competente en algunas actividades y, a menudo, tiende a valorarlas menos —como ocurre, por ejemplo, con las matemáticas—, la EVT postula que la

[2] En el Sistema Educativo Español vigente, la Educación Secundaria comprende dos etapas: la Educación Secundaria Obligatoria y el Bachillerato, etapa postobligatoria orientada a la preparación de la subsiguiente Educación Superior y/o incorporación al mercado laboral (Real Decreto 217/2022).

expectativa de éxito de una persona hacia una tarea y el valor que le otorga determinan su motivación para implicarse en ella. Esto, a su vez, influye en la elección, persistencia y desempeño (Wigfield y Eccles, 2000) de las asignaturas cursadas en la especialidad STEM.

El componente de valor se forma tanto de los beneficios percibidos en la tarea —valor intrínseco, valor de logro y valor de utilidad— como de los costos o desventajas asociados a participar en ella —por ejemplo, esfuerzo requerido que no se percibe como valioso o emociones negativas que genera— (Wu y Corpus, 2023). Estos autores subrayan la relevancia del costo en este componente, y recopilan evidencias sobre cómo el costo afecta negativamente al rendimiento académico y positivamente a la procrastinación, evitación e intención de abandonar los estudios. Las disciplinas STEM son un claro ejemplo de ello, pues el costo que supone especializarse en competencias STEM se relaciona negativamente con la permanencia en estas disciplinas (Pérez et al., 2014). En cuanto al componente de expectativa de éxito, Witteveen y Attewell (2020) sostienen que expresar ambición por obtener un título o una profesión en STEM, algo que a menudo está vinculado con intereses profesionales, parece influir positivamente en la persistencia en trayectorias STEM.

A pesar de que la EVT es un referente en el análisis de componentes motivacionales, no aborda de forma directa el impacto de la identidad social —como el género, la importancia del grupo, o los lazos emocionales— en la motivación hacia una tarea o disciplina (López et al., 2023). En este sentido, a pesar de los esfuerzos de los gobiernos y diversas entidades por abordar esta problemática, las mujeres y las minorías étnicas siguen estando significativamente subrepresentadas en disciplinas STEM, siendo menos propensas a lograr graduarse en estas áreas (Costello et al., 2023; Kricorian et al., 2020). Paralelamente, la investigación interseccional evidencia que estos efectos no operan de forma aislada. De acuerdo con la investigación llevada a cabo por Ong et al. (2011), las mujeres pertenecientes a minorías étnicas o a familias con bajo nivel de estudios acumulan desventajas que se potencian mutuamente, incrementando la probabilidad de abandono de los itinerarios STEM.

Diversos estudios también destacan la influencia del entorno en las trayectorias académicas. En particular, Costello et al. (2023) señalan que el nivel de educación de las familias influye en la obtención de una titulación STEM. En esta línea, Starr et al. (2022) afirman que el alumnado cuyos progenitores no tienen estudios universitarios presenta menor probabilidad de recibir apoyo en STEM en comparación con quienes tienen progenitores con estudios universitarios y, en consecuencia, muestran mayor probabilidad de modificar su trayectoria hacia ámbitos no STEM. No obstante, cuando el alumnado recibe apoyo tanto de sus familias como del profesorado en relación con STEM, este respaldo puede fortalecer sus expectativas profesionales en estas áreas.

Por otro lado, Villa et al. (2026) muestran que el estudiantado que ha asistido a centros especializados en STEM desarrolla una comprensión más precisa y matizada de estas disciplinas, así como una identidad STEM más positiva. Finalmente, Raabe et al. (2019) señalan que la influencia de amistades y de compañeros y compañeras de clase repercute en las preferencias por determinadas materias en la Educación Secundaria. El alumnado tiende a ajustar sus preferencias a las de su grupo de amistades; además, las chicas muestran mayor probabilidad de mantener sus preferencias STEM cuando a otras chicas en su clase también les gusta STEM.

MÉTODO

El cuestionario dirigido al alumnado de ESO y Bachillerato contiene 5 bloques de ítems, y se propone una validación teórica preliminar, mediante el método Delphi modificado (Dragnic-Cindric y Fusco, 2025). Siguiendo esta metodología, cada miembro de un panel de expertos revisa de forma individual y anónima los ítems de cada bloque del cuestionario, y propone modificaciones y mejoras por escrito. Tras cada ronda, el equipo investigador sintetiza las aportaciones, incorpora los cambios pertinentes y, siguiendo el método, justifica por escrito las decisiones adoptadas y los motivos de la no incorporación de determinadas sugerencias. Esta justificación se distribuye junto con la versión revisada del cuestionario al inicio de la siguiente iteración, permitiendo que los expertos

retroalimenten el proceso de forma argumentada. Los miembros del panel no se reúnen de forma colectiva en ningún momento, sino que el consenso emerge a través de la retroalimentación individual iterada y el intercambio argumentativo documentado.

En este caso, el panel lo forman 10 profesionales vinculados a la educación y la investigación STEM, con una experiencia profesional media de 18 años, de los cuales 6 son hombres y 4 son mujeres:

- 5 investigadores en los ámbitos de Didáctica de las Matemáticas (2), Didáctica de las Ciencias Naturales (1), Análisis Matemático (1) y Métodos Cuantitativos Aplicados a la Economía y la Empresa (1).
- 5 profesores de matemáticas de Educación Secundaria, con titulación en Matemáticas, que investigan en Didáctica de las Matemáticas o que participan activamente en actividades de las Asociaciones de Profesores de Matemáticas.

Al igual que en estudios previos (Beiderbeck et al., 2021; Rincón y Munárriz, 2025), se considera que un bloque de ítems queda validado cuando el 80 % de los expertos lo acepta, atendiendo a criterios de claridad y comprensión, pertinencia de cada pregunta dentro de su sección, posibles redundancias entre ítems, y adecuación del formato de respuesta. El diseño del cuestionario responde directamente a la pregunta de investigación planteada y a las preguntas que orientarán la fase empírica.

RESULTADOS Y SU DISCUSIÓN

Tras tres iteraciones del panel de expertos, se consensúan los cinco bloques que forman el cuestionario. La Tabla 1 recoge el resumen de los índices de consenso por iteración, mientras que la Tabla 2 identifica los ítems modificados a lo largo de todas las fases de la evaluación por los expertos.

En la primera iteración se aceptan los Bloques 3 y 5 de la propuesta inicial. Aunque el Bloque 5 se considera válido por el método Delphi modificado, se atienden las sugerencias, correspondientes a la redacción, y se reformulan tres de los ítems iniciales. En concreto, se recomiendan ajustes lingüísticos menores, como la sustitución del término “afectar” por “condicionar” para evitar connotaciones negativas, así como destacar los adverbios “positivamente” y “negativamente” para facilitar la lectura.

La Tabla 1 evidencia que los dos primeros bloques generan el mayor nivel de desacuerdo. En el Bloque 1, la falta de consenso se debe principalmente al enfoque terminológico elegido, que prioriza un lenguaje informal y cercano al alumnado. En su lugar, el panel sugiere precisar la terminología empleada —aun a riesgo de ser artificial para el alumnado—, para que la información de los ítems se ajuste con precisión a la organización de los itinerarios establecidos para ESO y Bachillerato. Por otro lado, se corrigen aspectos relacionados con la propia estructura del cuestionario. Por ejemplo, la posición y el tipo de respuesta asignadas a determinados ítems no se consideran pertinentes, y se recomienda reducir tanto el número de ítems de respuesta libre como el de aquellos cuya formulación resulta excesivamente ambigua o poco acotada —denominados en el proceso de validación como preguntas abiertas—. Esta recomendación fue implementada en su totalidad, de modo que no quedan ítems de respuesta libre ni enunciados de interpretación múltiple en la versión revisada del documento.

En el Bloque 2, en cambio, el desacuerdo reside en la escasa familiaridad del panel de expertos con la terminología propia de la teoría EVT y el *Math Identity Scale*. Los expertos califican los ítems como ambiguos, confusos o difíciles de entender —señalando que formulaciones como “me considero una persona relacionada con las ciencias y las matemáticas” resultan poco claras en cuanto al sentido del término “relacionada”— y proponen reducir las redundancias entre ítems de contenido similar. En respuesta, los ítems del Bloque 2 se reformulan para hacer el lenguaje más accesible al estudiantado, preservando el constructo teórico subyacente. Por último, los expertos señalan que en el Bloque 4 se requiere una mayor precisión sobre el origen y la tipología de apoyo al que se hace

referencia en cada caso. Por consiguiente, uno de los ítems modificados es "recibo ayuda para entender mejor las ciencias y las matemáticas", que se sustituye por "recibo ayuda de mi familia para entender mejor las ciencias y las matemáticas".

Tabla 3
Porcentaje de expertos que validan cada bloque en cada iteración

Bloque	Iteración 1	Iteración 2	Iteración 3
Bloque 1	40 %	80 %	100 %
Bloque 2	40 %	60 %	100 %
Bloque 3	90 %	-	-
Bloque 4	70 %	90 %	-
Bloque 5	80 %	-	-

En la segunda iteración se obtiene la aprobación de dos bloques adicionales, de modo que quedan consensuados cuatro de los cinco bloques del cuestionario (Tabla 1). No obstante, al igual que en la primera iteración, pese a que el Bloque 1 se considera válido según el método Delphi modificado, se procede nuevamente a su revisión atendiendo a las observaciones formuladas por los expertos. Por un lado, dos expertos manifiestan desacuerdo con algunos términos empleados, por lo que se modifica la denominación de las materias de Matemáticas de 4.º de ESO, eliminando los términos "académicas" y "aplicadas" y adoptando la distinción entre Matemáticas A y B, de acuerdo con el currículo vigente (Real Decreto 217/2022, 2022). Asimismo, se añade el término "tutor/a legal" junto a "progenitores". Por otro lado, un experto propone una reestructuración de la lógica de presentación de las preguntas sobre suspensos: en lugar de recoger toda la información en un único ítem, se adopta una estructura de ramificación iterativa en la que, tras identificar si el estudiante ha suspendido alguna asignatura, se formulan preguntas sucesivas para registrar cada una de forma individualizada.

Por su parte, el Bloque 2 alcanza el 60% de validación, insuficiente para superar el umbral establecido. El desacuerdo persiste, principalmente, por dos ítems: el primero, cuya formulación original —"soy bueno/a en ciencias y las matemáticas"— se percibe como ambigua en cuanto a si alude a la competencia objetiva o a la autopercepción, y el octavo, donde la expresión "me da satisfacción" se considera de registro poco natural para el estudiantado objetivo. En respuesta, se reformulan ambos ítems adoptando un lenguaje más accesible, manteniendo el constructo teórico subyacente a ambos. Estos ajustes, junto con la justificación escrita de las decisiones adoptadas, se presentan al panel en la tercera iteración. Así, en esta última iteración los Bloques 1 y 2 alcanzan pleno consenso (100 %), completándose así la validación del instrumento en su totalidad.

La Tabla 2 presenta los ítems que se modifican tras las tres iteraciones del proceso de validación. Con el fin de facilitar la lectura, no se muestran los ítems que se mantienen sin cambios respecto a la versión inicial del cuestionario. Asimismo, en el Bloque 1 se indica entre paréntesis a quién se dirigen las preguntas y se proporciona información sobre el tipo de respuesta asociada a cada pregunta. El cuestionario completo, en dos idiomas, puede consultarse en *Google Forms* (véase el enlace adjunto[3]).

[3] Cuestionario definitivo validado tras tres iteraciones: https://forms.gle/jZYjUm9oFifXxuJ57

Tabla 2
Ítems modificados tras tres iteraciones

Bloque 1: Información general
¿Alguno de tus progenitores (o tutor/a legal) ha nacido en el extranjero?
¿Alguno de tus progenitores (o tutor/a legal) estudió en la universidad?
¿Qué tipo de itinerario formativo pretendes cursar en 4.º ESO? (se formula solo al alumnado de 3.º ESO y se le pide seleccionar dentro de una lista de itinerarios)
¿Qué tipo de itinerario formativo cursas actualmente? (se muestra una lista para 4.º ESO y otra distinta para 1.º Bachillerato)
¿Pretendes cambiar de itinerario formativo en 1.º Bachillerato? (se formula solo al alumnado de 4.º ESO y se le pide seleccionar una respuesta de una lista)
¿Has cambiado de itinerario formativo en el paso de 4.º ESO a 1.º Bachillerato? (se formula solo al alumnado de 1.º Bachillerato y se le pide seleccionar una respuesta de una lista)
Asignaturas de matemáticas y ciencias que cursas actualmente: (para cada curso se indica una lista)
Elige la asignatura de ciencias y matemáticas que mejor se te da: (para cada curso se indica una lista)
¿Has suspendido alguna vez alguna evaluación o curso completo de alguna asignatura de ciencias y matemáticas? Si has suspendido al menos una asignatura, a continuación, se te volverá a formular esta pregunta: (para cada curso se indica una lista)
¿En qué evaluación(es) y en qué curso(s) suspendiste la asignatura? (para cada curso se indica una lista)
Bloque 2: Identidad
Se me dan bien las ciencias y las matemáticas.
Estoy satisfecho/a con mi nivel de conocimiento científico-matemático.
En mi tiempo libre busco realizar actividades relacionadas con las ciencias y las matemáticas.
En las redes sociales sigo cuentas de divulgación científica.
Tengo interés por aprender más sobre ciencias y matemáticas.
Me siento relajado en las asignaturas y actividades de ciencias y matemáticas.
Espero con ilusión que lleguen las clases de ciencias y matemáticas.
Comprender ciencias y matemáticas me pone contento/a.
Me imagino a mí mismo/a en estudios o trabajos relacionados con ciencias y matemáticas.
Bloque 3: Estereotipos y equidad (se mantiene igual que en la primera versión)
Bloque 4: Apoyo y orientación
El profesorado me da apoyo académico y afectivo cuando tengo dificultades en ciencias y matemáticas. (1.º ítem)
Recibo ayuda de mi familia para entender mejor las ciencias y las matemáticas. (2.º ítem)
En mi familia hay alguien que es muy bueno/a en ciencias y matemáticas, y me inspira. (4.º ítem)
Conozco personas que trabajan en ciencias y matemáticas, y me sirven como modelo a seguir. (5.º ítem)
La orientación recibida del profesorado me ha ayudado a tomar decisiones para escoger o seguir en el itinerario de ciencias y matemáticas. (8.º ítem)
En el instituto/colegio me han explicado claramente las salidas profesionales de los estudios en ciencias y matemáticas. (9.º ítem)
Bloque 5: Redes de amistades
Si mis amigos/as hablan **positivamente** de cuestiones ligadas a ciencias y matemáticas, eso condiciona cómo las veo yo. (2.º ítem)
Si mis amigos/as hablan **negativamente** de cuestiones ligadas a ciencias y matemáticas, eso condiciona cómo las veo yo. (3.º ítem)
En la decisión de escoger/seguir cursando asignaturas de ciencias y matemáticas, me influye más el seguir con mi propio grupo de amigos/as que mi futuro formativo. (6.º ítem)

CONCLUSIONES Y CUESTIONES ABIERTAS

Los resultados del proceso de validación permiten extraer varias conclusiones relevantes para el diseño y la mejora del cuestionario. En primer lugar, el panel señala la importancia de estructurar adecuadamente el tipo de respuesta en los ítems destinados a recoger información general del alumnado. Con el fin de facilitar el análisis posterior de los datos, se recomienda reducir el número

de preguntas abiertas y priorizar formatos de respuesta cerrada mediante listas de opciones seleccionables. Asimismo, se prioriza una terminología precisa y alineada con el currículo vigente, decisión que contribuye a la claridad del instrumento y a su adecuación al contexto educativo. En este sentido, también se destaca la conveniencia de incorporar términos inclusivos, como "tutor/a legal", que permitan reflejar de forma más amplia la diversidad de situaciones familiares del alumnado.

En segundo lugar, se observa que, si bien el panel está compuesto por profesorado en activo con amplia experiencia, el lenguaje asociado a la EVT (Wigfield y Eccles, 2000) y a la escala *Math Identity Scale* (Cribbs y Utley, 2024) les es, en cierta manera, ajena y poco familiar. Aunque se trata de instrumentos utilizados y validados en la literatura de investigación, su terminología resulta poco familiar en el contexto docente. Por ello, la propuesta desarrollada en este estudio plantea una reformulación de algunas preguntas relacionadas con la *identidad matemática*, con el objetivo de hacerlas más comprensibles y accesibles para el alumnado. En tercer lugar, el proceso de revisión evidencia la importancia de que los ítems proporcionen toda la información necesaria para interpretar correctamente aquello que se pretende medir. En particular, el panel recomienda especificar con mayor claridad aspectos como el tipo de apoyo recibido por el alumnado y la persona o agente que lo proporciona.

Tras el proceso de validación, el cuestionario ha alcanzado consenso en sus cinco bloques, completándose así la validación del instrumento a nivel de panel de expertos. Posteriormente, el cuestionario se aplicará tanto en ESO como en Bachillerato, con el fin de recabar más información sobre el efecto del *entorno familiar*, la *identidad STEM*, los *estereotipos* y la *equidad*, el *apoyo* y la *orientación*, y las *redes de amistad*, en la continuidad del alumnado en itinerarios STEM. Asimismo, la recogida de datos no solo permitirá validar empíricamente el instrumento, sino que, además, facilitará la caracterización de perfiles estudiantiles y de los factores principales que promuevan la desvinculación de las especialidades STEM.

Referencias

Beiderbeck, D., Frevel, N., von der Gracht, H. A., Schmidt, S. L. y Schweitzer, V. M. (2021). Preparing, conducting, and analyzing Delphi surveys: Cross-disciplinary practices, new directions, and advancements. *MethodsX, 8*, 101401. https://doi.org/10.1016/j.mex.2021.101401

Berciano, A. (2025). Retos de la investigación sobre sentido estocástico en proyectos STE(A)M de educación secundaria. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII (*pp. 20-40). SEIEM.

Cosnefroy, L. (2007). Les sens multiples de l'intérêt pour une discipline. *Revue française de pédagogie, 159*, 93-102. https://doi.org/10.4000/rfp.1080

Costello, R. A., Salehi, S., Ballen, C. J. y Burkholder, E. (2023). Pathways of opportunity in STEM: comparative investigation of degree attainment across different demographic groups at a large research institution. *International Journal of STEM Education, 10*, 46. https://doi.org/10.1186/s40594-023-00436-5

Cribbs, J. D. y Utley, J. (2024). Mathematics identity instrument development for fifth through twelfth grade students. *Mathematics Education Research Journal, 36*, 767-789. https://doi.org/10.1007/s13394-023-00474-w

Dragnic-Cindric, D. y Fusco, J. (2025). Kay CSCL research topics for K-12 practice: A modified Delphi study with practitioners and researchers. *Computer and Education Open*, 100265. https://doi.org/10.1016/j.caeo.2025.100265

Gras, R., Suzuki, E., Guillet, F. y Spagnolo, F. (2008). *Statistical implicative analysis: Theory and applications*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-540-78983-3

Kricorian, K., Salehi, S., Ballen, C. J. y Burkholder, E. (2020). Factors influencing participation of underrepresented students in STEM fields: matched mentors and mindsets. *International Journal of STEM Education, 7*, 16. https://doi.org/10.1186/s40594-020-00219-2

Lasa, A., Iribas, H., Belletich, O. y Wilhelmi, M. R. (2022). Teacher Degree Students Attitudes towards STEM Activities in two Spanish Universities. *U. Porto Journal of Engineering*, *8*(1), 34-50. https://doi.org/10.24840/2183-6493_008.001_0005

Lambert-Le Mener, M. (2012). *La performance académique des étudiants en première année universitaire: influence des capacités cognitives et de la motivation* [Thèse]. Université de Bourgogne.

López, P., Simó, P. y Marco, J. (2023). Understanding STEM career choices: A systematic mapping. *Heliyon, 9*, e16676. https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2023.e16676

Ong, M., Wright, C., Espinosa, L. y Orfield, G. (2011). Inside the double bind: A synthesis of empirical research on undergraduate and graduate women of color in science, technology, engineering, and mathematics. *Harvard educational review*, *81*(2), 172-209. https://doi.org/10.17763/haer.81.2.t022245n7x4752v2

Pérez, T., Cromley, J. G. y Kaplan, A. (2014). The role of identity development, values, and costs in college STEM retention. *Journal of Educational Psychology, 106*(1), 315–329. https://doi.org/10.1037/a0034027

Raabe, I. J., Boda, Z. y Stadtfeld, C. (2019). The Social Pipeline: How Friend Influence and Peer Exposure Widen the STEM Gender Gap. *Sociology of Education, 92*(2), 105-123. https://doi.org/10.1177/0038040718824095

Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria. *Boletín Oficial del Estado, 76.*

Rincón, Y. R. y Munárriz, A. (2025). From math aversion to effective integration: Theoretical framework for building quantitative skills in Economics and Business students. *The International Journal of Management Education, 23*, 101193. https://doi.org/10.1016/j.ijme.2025.101193

Starr, C. R., Ramos Carranza, P. y Simpkins, S. D. (2022). Stability and changes in high school students' STEM career expectations: Variability based on STEM support and parent education. *Journal of Adolescence, 94*(6), 906-919. https://doi.org/10.1002/jad.12067

Strayhorn, T. L. (2024). Preliminary Evidence of the Reliability and Validity of a Sense of Belonging in STEM Scale for College Students. *Journal of Science Education and Technology, 33*, 84-93. https://doi.org/10.1007/s10956-023-10076-7

Villa, A. M., Monroe, X. J., Dyer, E. B., Salcido White, M., Britton, T. y Schneider, S. (2026). Identifying as a "STEM Person": Examining Students' STEM-Focused High School Experiences. *Journal for STEM Education Research*. https://doi.org/10.1007/s41979-025-00176-x

Wigfield, A. y Eccles, J. S. (2000). Expectancy-Value Theory of Achievement Motivation. *Contemporary Educational Psychology, 25*, 68-81. https://doi.org/10.1006/ceps.1999.1015

Witteveen, D. y Attewell, P. (2020). The STEM grading penalty: An alternative to the "leaky pipeline" hypothesis. *Science Education, 104*(4), 714-735. https://doi.org/10.1002/sce.21580

Wu, S. H. y Corpus, J. H. (2023). The role of perceived cost in college students' motivational experiences and long-term achievement outcomes: A mixed-methods approach. *International Journal of Educational Research Open, 4*, 100229. https://doi.org/10.1016/j.ijedro.2023.100229

DUALIDAD EJEMPLAR-TIPO EN EL ANÁLISIS Y EN LA EVALUACIÓN DE ARGUMENTOS

Argument analysis and evaluation by example-type duality

Abaurrea[a], J., Lasa, A.[a, b] y Wilhelmi, M. R[a, b].

[a]Universidad Pública de Navarra, [b]Institute for Advanced Materials and Mathematics (INAMAT^2)

Resumen

En el Enfoque ontosemiótico del conocimiento y de la instrucción matemáticos (EOS), los argumentos son un elemento primario para describir las prácticas operativas y discursivas. Su descripción y clasificación es de interés actual, pero su análisis, y sobre todo su evaluación, sigue siendo problemáticos. En este trabajo se toma como punto de partida la dualidad ejemplar-tipo y se toman elementos teóricos de la Teoría de la Argumentación para articular un marco que facilite el análisis de los argumentos empleados en la resolución de una tarea. A continuación, se analizan las respuestas dadas por una muestra de 16 docentes de secundaria en formación inicial a una tarea argumental. Se observa que los elementos dialécticos y retóricos enriquecen procesos de argumentación en una tarea de geometría plana con solución algebraica transcendente, cuya estructura lógica no es evidente de resolver.

Palabras clave: *Argumentación, EOS, lógica, dialéctica, retórica.*

Abstract

In the Ontosemiotic Approach to Mathematical Knowledge and Instruction (OSA), arguments are a primary element for describing operational and discursive practices. Its description and classification is of current interest, but its analysis, and above all its evaluation, remains problematic. This work takes as its starting point the example-type duality and theoretical elements of the Theory of Argumentation are taken to articulate a frame that facilitates the analysis of the arguments used in the resolution of a task. Finally, we use it to analyse the responses given by a sample of 16 secondary school teachers in initial training to an argumentation task. We conclude that dialectical and rhetorical elements enrich the argumentation processes, in a plane geometry task with transcendent algebraic solution whose logical structure is not obvious to solve.

Keywords: *Argumentation, OSA, logic, dialectic, rhetoric.*

INTRODUCCIÓN Y ANTECEDENTES

El Enfoque ontosemiótico del conocimiento y de la instrucción matemáticos (EOS) constituye un marco teórico fundamentado en una perspectiva de carácter antropológico (Godino, Batanero y Font, 2007). Desde este enfoque, los argumentos se entienden como enunciados cuya finalidad es explicar, comprobar o justificar la validez de proposiciones. Tanto los argumentos como las proposiciones y los procedimientos se consideran objetos matemáticos primarios, junto con el lenguaje, los conceptos-definición y las situaciones. En conjunto, estos seis tipos de objetos proporcionan una primera base para analizar la actividad operativa y discursiva que tiene lugar en el aula de matemáticas.

En términos generales, los argumentos se suelen dividir en inductivos y deductivos; sin embargo, en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, esta clasificación resulta insuficiente. En la actividad matemática también intervienen otros tipos de razonamientos, como los *abductivos, analógicos o metafóricos* (Arce y Conejo, 2023; Bosch et al., 2024; Molina et al., 2019; Rondero y Font, 2015).

Abaurrea, J., Lasa, A. y Wilhelmi, M. R. (2026). Dualidad ejemplar-tipo en el análisis y en la evaluación de argumentos. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (pp. 107-114). SEIEM.

En un contexto clásico, el *medio material* (Brousseau, 2002) empleado en la actividad suele implicar argumentos identificados como inductivos o deductivos. Sin embargo, la tecnología aporta herramientas que no se ajustan propiamente a esta dicotomía inductivo-deductivo. Un ejemplo es el uso de recursos de geometría dinámica, que va más allá del simple razonamiento inductivo basado en casos particulares, ya que permite generar rápidamente una gran cantidad de ejemplos o construir figuras que se pueden mover con lo que se generan un número ilimitado de figuras que mantienen determinadas propiedades previamente establecidas como modelo de una clase. En este contexto, la ausencia de contraejemplos durante la manipulación del modelo dinámico suele resultar suficiente para que el alumnado considere válido un determinado enunciado (Lasa y Wilhelmi, 2013; Lasa, 2015). Asimismo, hay softwares de geometría dinámica que demuestran automáticamente teoremas, estableciendo la validez lógica de una proposición al verificarla en un número limitado de casos (Botana et al., 2015).

Estos modelos de argumentación generan una estructura didáctica de carácter dialógico, en la que el profesorado analiza y debate los razonamientos junto con el alumnado, apoyándose en una *teoría implícita de referencia* (Lasa et al., 2017). De esta manera, aunque en un aula de matemáticas una propiedad se compruebe solo en un número reducido de casos, la argumentación no puede considerarse inductiva, ya que se fundamenta en una teoría implícita que respalda el razonamiento según el siguiente silogismo.

$$A \subset B, \forall x \in A, P(x) \rightarrow \forall x \in B, P(x)$$

Es decir, si para un conjunto finito A, sus elementos cumplen una cierta propiedad P, entonces la teoría implícita justifica que los elementos de B (con A contenido en B), cumplen también la propiedad P, es decir, garantiza la ausencia de contraejemplos en B.

En un estudio previo, Abaurrea y Lasa (2025) diseñan una situación didáctica que avanza desde nociones de linealidad, proporcionalidad y geometría plana, hacia una teoría implícita en trigonometría que integra elementos de covariación en la modelización algebraica de la solución. El medio material GeoGebra y la secuencia de la actividad basada en modelos de *exploración* y de *ilustración* (Lasa y Wilhelmi, 2013) tiene la potencialidad de facilitar el cambio de una teoría implícita por otra que facilite la revelación de argumentaciones falaces. Así, se encuentran medios mejor adaptados al análisis y evaluación de procesos de argumentación.

En este trabajo las cuestiones de investigación son:

[1] ¿Se puede generar un marco de *análisis* de la argumentación? En este caso, ¿cuáles serían los elementos de la argumentación susceptibles de analizar?

[2] ¿Se puede generar un marco de *evaluación* de la argumentación? En este caso, ¿difiere un modelo de análisis de un modelo de evaluación de una argumentación?

La primera hipótesis que se quiere contrastar se refiere al análisis de la argumentación, según la cual el análisis de los elementos *dialécticos*, *retóricos*, *lógicos* y *deductivos* del argumento permiten caracterizar la argumentación dentro de la dualidad ejemplar-tipo. El fundamento de base de esta hipótesis es que la dualidad ejemplar-tipo, que tiene asociados los procesos de particularización y generalización, permite la caracterización de un modelo de argumentación que tiene en cuenta no solo los elementos *lógicos* y *deductivos*, sino también los *dialécticos* y *retóricos*.

La segunda hipótesis que se quiere contrastar consiste en que una evaluación puramente *lógica* o *deductiva* (basada, por ejemplo, en la observación del nivel de algebrización mostrado durante la argumentación), genera en el profesorado sesgos negativos que llevan a considerar como incorrectas muchas argumentaciones. El origen de este sesgo es la interpretación de argumento como sinónimo de *demostración*.

Con el fin de dar respuesta a estas preguntas, se ha pilotado la actividad con una muestra de 16 docentes de secundaria en formación inicial (DFI) durante el curso 2025/2026. Se presentan a continuación los esquemas de análisis y de evaluación de la argumentación, con el objetivo de identificar elementos argumentales que permitan generar dicho marco de análisis y evaluación.

MARCO TEÓRICO

Al aplicar la dualidad ejemplar-tipo al elemento primario *argumento*, se tiene que una argumentación particular de un individuo en un contexto escolar constituye un ejemplar de un tipo de argumento. De esta manera, el funcionamiento y gestión de estos argumentos quedan supeditados a la dualidad de los procesos de particularización y generalización.

En Teoría de la Argumentación (Bermejo-Luque, 2014; Bordes, 2018), un argumento no lo constituye únicamente su categoría lógica (inductivo, deductivo, abductivo, etc.). El argumento queda también caracterizado por el empleo de elementos dialécticos, que rigen las normas según las cuales se articulan las interacciones entre los individuos que participan en el intercambio de argumentos y de elementos retóricos, que articulan el propio proceso de comunicación. Así, en el caso de una argumentación escolar, se trata de normas que rigen las interacciones entre los individuos que conforman el medio didáctico: estudiantes y docente.

Al concretar el campo de acción de la Teoría de la Argumentación a los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática, se puede dar el caso de considerar como válido únicamente aquel que contiene un cierto nivel de algebrización o de uso de lenguaje considerado *generalizado*. Se daría entonces una disfunción entre el análisis y la evaluación del argumento. Por un lado, no todo el alumnado tiene una formación matemática suficiente que le permita argumentar de manera deductiva. Por otro lado, si se pone el foco de la evaluación en la resolución algebraica del problema, esta evaluación eclipsa un análisis complejo de la propia argumentación, la cual contiene, como se ha dicho, elementos dialécticos y retóricos. Los elementos dialécticos contemplan la manera en la que el alumnado gestiona el contexto de resolución de la tarea, las relaciones entre pares y con el profesorado, las expectativas de un sujeto sobre el otro, etc. Los elementos retóricos incluyen la propia explicación del problema y su solución.

Tabla 1

Dualidad ejemplar-tipo en elementos argumentales

EJEMPLAR	↔	TIPO
Dialéctica, pragmática, retórica		Lógica estándar
Argumento como proceso		Argumento como producto
Definición funcional de argumento		Definición formal de argumento
No es una demostración		Es una demostración
Dependiente de la disciplina		Es universal

La identificación del componente lógico del argumento facilita catalogar el mismo en su *tipo*. Sin embargo, evaluar un argumento únicamente por su pertenencia a un *tipo de argumento* deriva en una evaluación de tipo dicotómica: si el argumento es deductivo y contiene un cierto nivel de algebrización, se toma por "correcto"; en caso contrario, se toma por "incorrecto". En este caso, las argumentaciones de tipo inductivo, abductivo, mediante asistencia de medios tecnológicos, etc., corren el riesgo de ser consideradas incorrectas, independientemente del análisis que se haga de los matices del argumento.

Por lo tanto, el análisis y la evaluación de un argumento se realiza sobre un ejemplar y ello obliga irremediablemente a tomar en consideración el contexto en el que el sujeto argumenta. En concreto, hay que tener en consideración que el proceso de la argumentación no es una demostración matemática estándar, al contrario, es funcional y dependiente de la disciplina en la que se trabaja. El

procedimiento se basa en elementos dialécticos que tienen que ver con las normas que rigen el proceso de enseñanza y aprendizaje, y se expresa en forma de un proceso de comunicación.

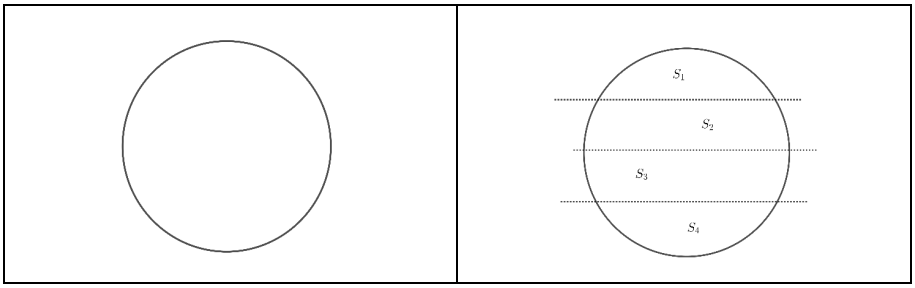
MÉTODO

Se parte de un problema de geometría plana fácil de enunciar, pero cuya resolución requiere de cierta complejidad argumentativa (Abaurrea y Lasa, 2025):

> "Se quiere partir un círculo en 4 partes de igual superficie, mediante líneas paralelas. ¿Cómo deberías trazar dichas líneas?"

Figura 1

Tarea inicial



Por simetría, una de las líneas coincide con un diámetro de la circunferencia. De la modelización algebraica de la tarea inicial, se llega a la siguiente ecuación trigonométrica, donde la incógnita representa la distancia al diámetro de la circunferencia a la que deben pasar cada una de las otras dos líneas paralelas:

$$sin\,(2x)\ + 2x = \frac{\pi}{2}$$

16 docentes de secundaria en formación inicial (DFI) contestan a un cuestionario en dos partes:

- *Parte 1*. Los DFI argumentan su respuesta mediante una secuencia de tareas en soporte de lápiz y papel. En primer lugar, realizan la división a mano alzada. A continuación, discuten el efecto de la condición "líneas paralelas", puesto que al eliminar dicha condición se obtiene una *solución de control* de la actividad mediante cuatro sectores circulares, lo que permite caracterizar los errores esperados en el alumnado de Educación Secundaria. Exploran la situación nuevamente mediante cortes de tijera en papel, y terminan por obtener esquemáticamente una resolución algebraica sobre papel.
- Parte 2. Los DFI acceden al libro GeoGebra de la situación[4] y avanzan en la argumentación con una colección de modelos dinámicos de exploración, ilustración y validación. Los modelos integran registros geométricos y expresiones simbólicas de funciones, y ponen el énfasis en las nociones de covariación que emergen del problema. Finalmente, se requiere a los DFI que valoren la pertinencia de los modelos dinámicos que asisten a la argumentación del problema.

Se procede a analizar las producciones de los DFI mediante los elementos argumentales de la dualidad ejemplar-tipo descritos en la Tabla 1, que forman las categorías del análisis cualitativo. De la clasificación de la información obtenida se obtienen elementos que permiten generar un marco de análisis y evaluación de la argumentación.

[4] Enlace al libro GeoGebra de la situación: https://www.geogebra.org/m/nctdu54z

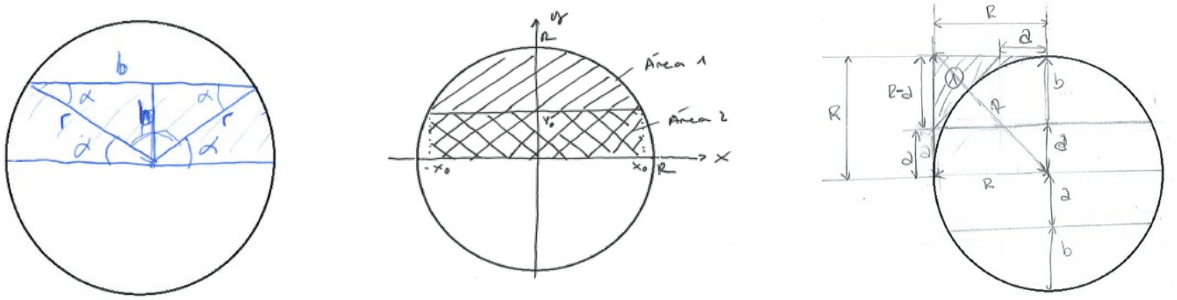
RESULTADOS Y SU DISCUSIÓN

Dos resoluciones algebraicas del problema aportadas por los DFI son correctas desde un punto de vista lógico o algebraico (Figura 2a). En ellas, se descompone la superficie comprendida entre el diámetro y la primera línea paralela en cuatro partes (dos sectores circulares y dos triángulos), y se argumenta que la suma de estas cuatro regiones debe igualar a la superficie de un cuarto de círculo. El diagrama explica en estos casos la forma de obtener el valor del ángulo α que determina, a su vez, el valor de la superficie. En tres casos, los DFI sugirieren una estrategia por integración (Figura 2b), indicando los parámetros que se deberían tener en cuenta a la hora de calcular la superficie para que esta coincida con un cuarto de círculo.

Las otras 10 propuestas (Figura 2c) sugieren diversas estrategias por descomposición en formas geométricas simples (cuadrados, triángulos o rectángulos), que permitirían obtener una solución aproximada con distintos grados de precisión. Un DFI no contesta a la cuestión y la deja en blanco.

Figura 2

Tipos de resolución del problema



(a) Descomposición por sector circular y triángulos

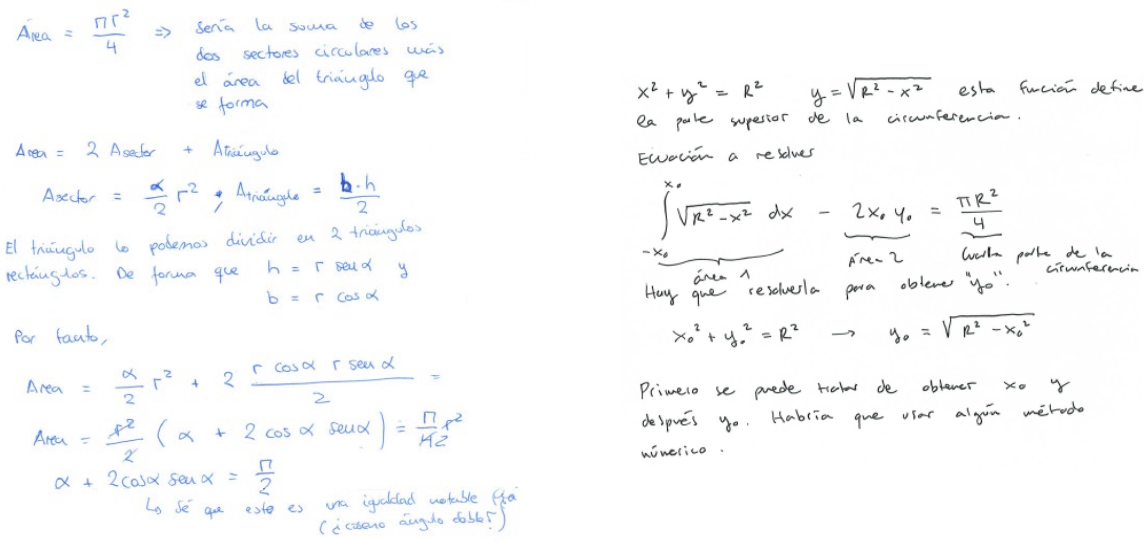
(b) Integración

(c) Descomposición por formas geométricas simples

Las resoluciones por descomposición en sectores circulares y triángulos (Figura 2a) y por integración (Figura 2b) muestran un nivel de desempeño algebraico *avanzado*, en el que destaca el uso de parámetros (Godino et al., 2015) en la modelización (Figura 3).

Figura 3

Argumentos algebraicos avanzados



(a) Descomposición por sector circular y triángulos

(b) Integración

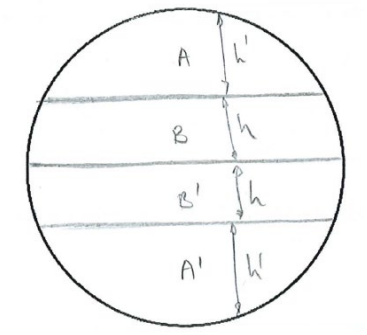
Desde un punto de vista *lógico*, las aproximaciones basadas en formas geométricas simples (Figura 2c) difícilmente se considerarían correctas. Sin embargo, los argumentos aportados por los DFI contienen asimismo elementos *dialécticos* y *retóricos*. Estos elementos permiten analizar el grado de ajuste de los argumentos a su campo de aplicación, como pueden ser, entre otros, la discusión sobre la corrección del resultado, la discusión sobre elementos curriculares, o el análisis de errores potenciales y sus causas.

Destacan los elementos argumentativos dependientes del *campo de aplicación*, en este caso, un contexto de formación inicial de docentes de secundaria. Por ello, son constantes los guiños al currículo y a la identificación de los conocimientos previos potenciales del alumnado de secundaria. Todo ello aporta un aire escolar a la argumentación, que rehúye de resultados matemáticos sofisticados. Se hace alusión a la noción de *variable didáctica* (Brousseau, 2002) para referirse a la supresión de condiciones en el enunciado, y a la vinculación de esta decisión con la activación de conocimientos previos del alumnado y a la obtención de una solución inicial de *control de la actividad*.

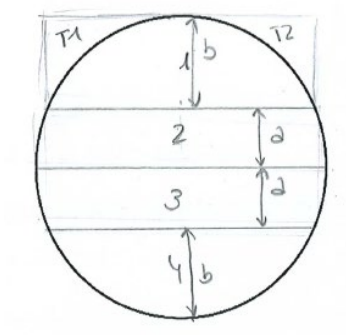
Dentro de los elementos *dialécticos*, se observa que la argumentación evoluciona en función de la comparación entre elementos geométricos básicos. Por ejemplo, en la respuesta inicial al problema aportada por los DFI a mano alzada sobre papel (Figura 4a), se argumenta que las distancias de las dos líneas paralelas a la diagonal (h), deben ser menores que las distancias de las líneas al exterior de la circunferencia (h'), es decir, h<h', en función de la curvatura del círculo. Asimismo, se proponen diversas estrategias de aproximación por figuras geométricas elementales (destacan los triángulos, los cuadrados y los rectángulos), y se observa que el proceso de descomposición de la superficie es el motor del desarrollo de la argumentación (Figura 4b). El proceso deriva en el resultado de que la franja central debe tener necesariamente una superficie igual a $\pi r^2/4$. La comparación entre formas geométrica elementales se da también al solicitar a los DFI la justificación sobre una solución incorrecta aportada por un estudiante hipotético que aplica la proporcionalidad lineal en su respuesta, en la cual se compara el círculo con un cuadrado (Figura 4c). En este caso, la comparación entre formas geométricas planas permite argumentar, por contraejemplo, el origen de los errores esperados en el alumnado.

Figura 4

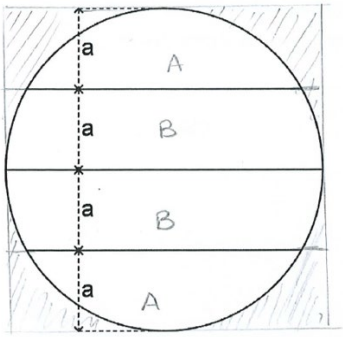
Elementos dialécticos en la argumentación



(a) "Las partes A y A' tendrán una altura (h') mayor a las alturas de B y B', porque en las partes A y A' la anchura de la circunferencia va haciéndose más pequeña más rápidamente"



(b) "La superficie de cada una de las partes será $\pi r^2/4$, ya que la superficie de un círculo es πr^2 […] Se podrían calcular las partes centrales simulando que son un rectángulo [partes 2 y 3] y un triángulo [partes 1 y 4]."

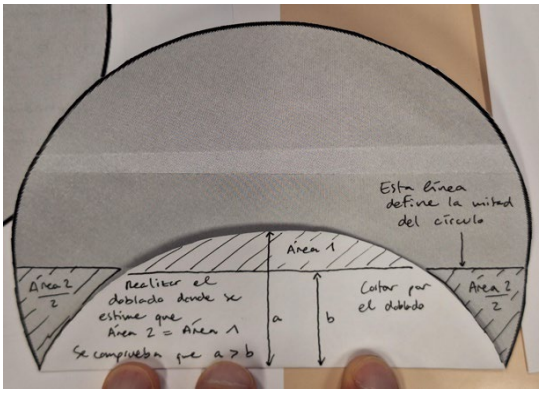


(c) "Esa respuesta sería correcta si se tratara de un cuadrado, pero como se ve en el dibujo hay parte del área del cuadrado que se queda fuera del círculo"

El recurso a la retórica aporta a un argumento elementos que captan la atención del lector y generan interés en la lectura del argumento. En la Figura 5, se observa el doblado en papel que propone un DFI para explorar la ubicación de la línea paralela al diámetro de la circunferencia, a partir de la cual se obtiene la solución al problema. El argumento permite visualizar la comparación entre superficies con cortes circulares difíciles de modelizar, pero que necesariamente deben tener misma área.

Figura 5

Elementos retóricos en la argumentación, mediante cortes de tijera en papel



CONCLUSIONES Y CUESTIONES ABIERTAS

La didáctica de la matemática avanza recientemente en la descripción y la clasificación de los diversos *tipos* de argumentos. La clasificación se realiza en función de la estructura lógica del argumento, donde la *definición formal* de argumento se considera como un producto final, similar a una demostración de carácter universal. Sin embargo, al considerar una argumentación particular como un *ejemplar*, se debe atender asimismo al *argumento como proceso*, de manera que en su análisis destacan su carácter funcional y disciplinar, en el cual se observan elementos dialécticos y retóricos. Por lo tanto, cualquier modelo para el análisis de argumentos matemáticos escolares debe tener en cuenta, además de los elementos propiamente lógicos del argumento, los elementos dialécticos y retóricos de estos, así como su adecuación al contexto de uso y a su campo de aplicación.

Una hipotética evaluación basada exclusivamente en el análisis lógico-deductivo de los argumentos empleados hubiera dado como resultado que, de las 15 propuestas argumentativas aportadas por los DFI, 10 habrían sido consideradas como incorrectas. Solamente 2 de las resoluciones algebraicas propuestas como solución al problema (aquellas que basan su argumento en la descomposición por sector circular y triángulos) y las 3 resoluciones por integración tienen el rigor de "demostración". Las otras 10 propuestas (aproximación por formas geométricas elementales, que tienen en cuenta argumentos dialécticos o retóricos) no siguen una estructura lógico-deductiva. Si la evaluación del argumento no contempla su adecuación al campo de aplicación, éstas se considerarían como incorrectas.

La visión de argumento como "producto" debe ser complementada con la visión de argumento como "proceso". Los *argumentos-tipo* son universales, pero la práctica docente requiere de argumentos accesibles y adecuados a su campo de aplicación. Estos *ejemplares* de argumento cumplen un propósito pragmático dentro de los procesos de enseñanza y aprendizaje. De hecho, son un paso necesario previo a la observación de propiedades estructurales o de generalización. En el caso de los DFI, sus argumentos buscan la manera de movilizar y de articular contenidos propiamente curriculares, y tratan de integrar en dichos argumentos nociones didácticas aplicadas a la práctica docente.

En conclusión, la lógica formal distingue entre argumentos "válidos" e "inválidos". Sin embargo, la evaluación de un argumento debe contemplar los elementos que caracterizan su campo de aplicación

y su adecuación al contexto argumentativo. Es decir, entre aquellos que permiten evolucionar los conocimientos del alumnado hacia el significado institucional pretendido, de aquellos que incurren en falacias argumentales.

Agradecimientos

Este trabajo forma parte del Proyecto de Investigación dirigido por Jóvenes Investigadores "La argumentación matemática en la era del software", código de referencia PJUPNA2025-11907, aprobada mediante Resolución n.º 2393/2024 de 15 de octubre por el Vicerrector de Investigación de la UPNA.

Referencias

Abaurrea, J. y Lasa, A. (2025). Ruptura de la linealidad mediante GeoGebra: Construcción de una teoría implícita en trigonometría. En J.M. Dos Santos (Ed.), *Actas del II Congreso Internacional de GeoGebra*.

Arce, M. y Conejo, L. (2023). Comportamientos de estudiantes para maestro al enunciar razonamientos abductivos. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo, E. y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 139–146). SEIEM. https://www.seiem.es/publicaciones

Bermejo-Luque, L. (2014). *Falacias y argumentación*. Plaza y Valdés Editores.

Bordes, M. (2018). *Las trampas de Circe: Falacias lógicas y argumentación informal*. Cátedra.

Bosch, M., Gutiérrez, A. y Llinares, S. (2024). Mapeando la investigación española en educación matemática. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 51-94). SEIEM. https://www.seiem.es/publicaciones

Botana, F., Hohenwarter, M., Janicic, P., Kovacs, Z., Petrovic, I., Recio, T. y Weitzhofer, S. (2015). Automated Theorem Proving in GeoGebra: Current Achievements. *Journal of Automated Reasoning*, *55*(1), 39-59. https://doi.org/10.1007/s10817-015-9326-4

Brousseau, G. (2002). *Theory of Didactical Situations in Mathematics: Didactique des Mathématiques*, 1970–1990. Springer. https://doi.org/10.1007/0-306-47211-2

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The Ontosemiotic approach to research in mathematics education. *ZDM Mathematics Education*, *39*, 127-135. https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1

Godino, J. D., Neto, T., Wilhelmi, M. R., Aké, L. P., Etchegaray, S. y Lasa, A. (2015). Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemiótica y antropológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *8*, 117–142. https://doi.org/10.35763/aiem.v1i8.105

Lasa, A. y Wilhelmi, M. R. (2013). Use of GeoGebra in explorative, illustrative, and demonstrative moments. *Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo*, *2*(1), 52-64. https://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/15160

Lasa, A. (2015). *Jarduera matematikoa eredu dinamikoen laguntzaz*. Udako Euskal Unibertsitatea.

Lasa, A., Wilhelmi M. R. y Abaurrea, J. (2017). El problema de la argumentación: una aproximación desde el EOS. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M.M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

Molina, O., Font, V. y Pino-Fan, L. (2019). (2019). Estructura y dinámica de argumentos analógicos, abductivos y deductivos: un curso de geometría del espacio como contexto de reflexión. *Enseñanza de las Ciencias, 37*(1), 93-116. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2484

Rondero, C. y Font, V. (2019). Articulación de la complejidad matemática de la media aritmética. *Enseñanza de las Ciencias*, *33*(2), 29–49. Disponible en: https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1386

EL CONOCIMIENTO SOBRE PROBLEMAS ARITMÉTICOS MULTIPLICATIVOS EN LA PLANIFICACIÓN ASISTIDA POR INTELIGENCIA ARTIFICIAL GENERATIVA: UN ESTUDIO DE CASO CON FUTUROS MAESTROS DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Knowledge about multiplicative arithmetic problems in GenAI-assisted lesson planning: a case study with pre-service primary school teachers

J. J. Aguilar [a] y J. L. Lupiáñez[b]

[a] The University of Texas Rio Grande Valley, [b]Universidad de Granada

Resumen

Se examina el conocimiento didáctico-matemático que once futuros maestros de Primaria evidencian al planificar una secuencia de enseñanza sobre problemas aritméticos en tres condiciones sucesivas: planificación manual, planificación asistida por inteligencia artificial generativa (IAG) con un prompt estandarizado y planificación asistida con un prompt de diseño libre. A partir de un estudio de caso colectivo y una rúbrica analítica de doce criterios basada en el modelo instruccional 5E, el análisis evidencia una mejora generalizada en la calidad formal de las planificaciones. Pero ninguna de las condiciones corrige de forma sistemática dos déficits persistentes: la ausencia de la clasificación semántica de los problemas aritméticos y la falta de integración operativa de las fases de resolución de Pólya. Los resultados sugieren que la IAG amplifica el conocimiento pedagógico del contenido que los sujetos ya poseen, pero no lo genera ni lo transforma de forma autónoma.

Palabras clave: *conocimiento didáctico-matemático, problemas multiplicativos, resolución de problemas, formación inicial de maestros, inteligencia artificial generativa.*

Abstract

This study examines the didactic-mathematical knowledge that eleven Elementary Pre-Service Teachers (EPSTs) evidence when planning a teaching sequence on multiplicative arithmetic problems under three successive conditions: manual planning, generative AI-assisted planning (GenAI) with a standardised prompt, and GenAI-assisted planning with a freely designed prompt. Drawing on a collective case study design and a twelve-criterion analytical rubric structured around the 5E instructional model, the analysis reveals a generalised improvement in the formal quality of lesson plans. However, none of the conditions corrects systematically two persistent deficits: the absence of the semantic classification of multiplicative problems and the lack of operative integration of Pólya's problem-solving phases. The findings suggest that GenAI amplifies the pedagogical content knowledge the EPSTs already possess but does not generate or transform it autonomously.

Keywords: *didactic-mathematical knowledge, multiplicative problems, problem solving, pre-service teacher education, generative artificial intelligence.*

INTRODUCCIÓN Y MARCO TEÓRICO

La planificación didáctica (Lesson plans, de aquí en adelante) constituye uno de los escenarios más reveladores del conocimiento profesional del maestro, pues exige movilizar de forma integrada el conocimiento del contenido matemático, el conocimiento sobre cómo aprenden los alumnos y el conocimiento sobre cómo organizar la enseñanza para que ese aprendizaje sea posible. La importancia de esta faceta del conocimiento profesional está más que consolidada en la literatura

Aguilar, J. J. y Lupiáñez, J. L. (2026). El conocimiento sobre problemas aritméticos multiplicativos en la planificación asistida por inteligencia artificial generativa: un estudio de caso con futuros maestros de Educación Primaria. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (pp. 115-121). SEIEM.

(Cevikbas et al., 2024; Lupiáñez y Rico, 2006). Según Ball et al. (2008), planificar activa simultáneamente tres dimensiones del conocimiento docente: el conocimiento del contenido y los estudiantes, el conocimiento del contenido y la enseñanza, y el conocimiento curricular. Esta complejidad se intensifica cuando el contenido a planificar son los problemas aritméticos multiplicativos, cuya riqueza semántica, ampliamente documentada desde los trabajos fundacionales de Vergnaud (1983) y Greer (1992), exige un conocimiento que trasciende la comprensión procedimental de la multiplicación y la división para abarcar las distintas estructuras de situación que estas operaciones representan.

La investigación sobre el conocimiento matemático para la enseñanza (MKT, por sus siglas en inglés; Ball et al., 2008) ha puesto de manifiesto de forma consistente que los EPSTs (Maestros de primaria en formación, por sus siglas en inglés) tienden a concentrar su enseñanza de la multiplicación y la división en la categoría semántica de grupos iguales (por ejemplo, cuatro bolsas con tres manzanas representan doce manzanas en total $4 \times 3 = 12$) la más simple y la más frecuente en los libros de texto, sin trabajar con la diversidad de estructuras semánticas que el pensamiento multiplicativo requiere: comparación multiplicativa, proporcionalidad, producto cartesiano y producto de medidas (Greer, 1992; Vergnaud, 1983). Esta concentración semántica refleja una comprensión limitada de lo que significa enseñar la multiplicación y la división como estructuras de razonamiento. En paralelo, la investigación sobre la resolución de problemas ha señalado que el marco clásico de Pólya (1945), articulado en cuatro fases: comprender el problema, concebir un plan, ejecutar el plan y examinar la solución—, raramente se integra de forma operativa en la planificación de los EPSTs, a pesar de ser un referente central en los programas de formación inicial (Schoenfeld, 1985) y de mantener plena vigencia en la investigación contemporánea (Jahudin y Siew, 2024).

Este estudio forma parte de un proyecto de investigación de diseño mixto más amplio, aún en curso. En el ámbito cualitativo, el proyecto comprende el análisis de las planificaciones didácticas que aquí se reporta. Por su parte, el componente cuantitativo se integra a través de encuestas aplicadas antes y después de la implementación del estudio, orientadas a evaluar el conocimiento didáctico-matemático de los EPSTs. El proyecto incluye, además, entrevistas semiestructuradas con los propios EPSTs, dirigidas a explorar los procesos de toma de decisiones durante la planificación y la percepción sobre el uso de la inteligencia artificial generativa (IAG) como herramienta de apoyo profesional. Esta comunicación se concentra específicamente en el componente cualitativo relacionado al análisis de las planificaciones didácticas únicamente, cuyo propósito es caracterizar qué conocimiento sobre los problemas aritméticos multiplicativos y sobre la pedagogía de la resolución de problemas evidencian los EPSTs en sus planificaciones, y en qué medida ese conocimiento se transforma —o no— cuando la planificación es asistida por IAG.

El uso de herramientas de IAG como instrumentos de apoyo a la planificación docente plantea preguntas de investigación de creciente relevancia para la formación de profesores (Gurl et al., 2025). Si el conocimiento pedagógico del contenido (PCK; Shulman, 1986) es la condición de posibilidad de una buena planificación, ¿qué ocurre cuando un EPST delega parte de ese proceso a una herramienta de IAG? ¿La IAG compensa las lagunas de conocimiento de los EPSTs, o las reproduce y amplifica? ¿Puede la IAG integrar marcos teóricos disciplinares específicos como la clasificación semántica de los problemas multiplicativos o las fases de Pólya, sin que los EPSTs los soliciten explícitamente? La investigación disponible sobre el uso de IAG en la formación docente, aunque aún escasa, apunta a que la calidad de las respuestas generadas por estos sistemas depende en gran medida del nivel de conocimiento del usuario (Kasneci et al., 2023; Mollick y Mollick, 2023), lo que convierte la planificación asistida por IAG en un espejo particularmente transparente del conocimiento profesional de partida de los EPSTs. A partir de estas preguntas, el objetivo general de este estudio es analizar qué conocimiento didáctico-matemático sobre los problemas multiplicativos y sobre la resolución de problemas evidencian los EPSTs en sus planificaciones, y cómo evoluciona

ese conocimiento en función del tipo de apoyo, planificación manual, IAG con prompt estandarizado o IAG con prompt libre, utilizado en cada condición.

METODOLOGÍA

Diseño del estudio y participantes

Tal y como se ha señalado, esta comunicación presenta el componente cualitativo de un proyecto de investigación de diseño mixto más amplio. El componente que aquí se reporta adopta un diseño de estudio de caso colectivo (Stake, 2006) con carácter longitudinal y comparativo. Las unidades de análisis son los lesson plans como artefacto de conocimiento profesional (Grossman et al., 2009). No se analiza la práctica de aula de los EPSTs, sino su capacidad para planificar, que constituye en sí misma una ventana al PCK (Shulman, 1986) en el dominio de los problemas aritméticos multiplicativos. La elección del estudio de caso colectivo responde a la naturaleza del objeto de estudio: comprender cómo el conocimiento didáctico-matemático de los EPSTs se manifiesta y transforma a través de tres versiones sucesivas de la planificación didáctica.

Los EPSTs que participaron en el estudio (once en total) estuvieron matriculados en una asignatura de Didáctica de la Matemática en una universidad del sur de los Estados Unidos durante el otoño de 2025. Del grupo, diez eran mujeres y uno era hombre, con un rango de edad entre 20 y 22 años. La selección fue intencional (Patton, 2015), atendiendo a criterios de disponibilidad para participar en las tres fases del estudio y de representatividad de los perfiles de formación matemática presentes en el grupo. Los EPSTs son también los informantes del componente de entrevistas del proyecto más amplio, lo que permitirá triangular en fases posteriores los datos de planificación con las reflexiones de los propios EPSTs sobre sus decisiones de diseño.

El contenido de la tarea de planificación era desarrollar un "lesson plan" sobre problemas aritméticos multiplicativos para 3.º de Educación Primaria. Se debía seguir el modelo 5E e integrar los estándares curriculares del estado de Texas. Lo anterior fue trabajado previamente en clase mediante dos marcos teóricos centrales: la clasificación semántica de los problemas multiplicativos (Greer, 1992; Vergnaud, 1983) y las fases de resolución de problemas de Pólya (1945). La recolección de datos respondió a tres momentos sucesivos. En el primero (Lesson plan 1 o LP1), los EPSTs elaboraron su lesson plan de forma manual y sin apoyo tecnológico, lo que permitió valorar el conocimiento profesional de partida. En el segundo momento (Lesson plan 2 o LP2), el lesson plan fue elaborado con IAG mediante un prompt estandarizado e idéntico para todos los EPSTs. El prompt fue desarrollado en clase como parte de una tarea grupal (ver Figura 1), lo que permitió examinar el efecto de la IAG sobre una base de conocimiento compartida. En el tercer momento (LP3), cada EPST diseñó libremente su propio prompt a partir del ya utilizado en LP2, lo que permitió evaluar la capacidad de los EPSTs para usar la IAG de forma pedagógicamente informada. En cuanto a las herramientas de IAG utilizadas en LP2 y LP3, cuatro EPSTs emplearon Claude Sonnet 4 (Anthropic), cuatro emplearon Copilot con GPT-4o (Microsoft) y tres emplearon ChatGPT con GPT-4o (OpenAI)[2]. Las versiones específicas de los modelos corresponden a las disponibles para usuarios generales durante el otoño de 2025.

Figura 1

Prompt traducido utilizado por todos los EPSTs en la LP2.

Tradución al Español: Soy un experiementado maestro 3er grado de que desea elaborar un plan didactico deatallado para la clase de matemáticas, basado en el modelo 5E, con la intención de desarrollar habilidades en la resolución de problemas aritméticos. Incluya los estándares TEKS correspondientes a la multiplicación y división de tercer grado. Incluya adaptaciones para estudiantes con necesidades especiales y estudiantes del idioma inglés. Incluya las ideas erróneas comunes. Incluya los materiales y recursos manipulativos que puedan utilizarse en las actividades correspondientes. Además, incluya una evaluación previa (pretest), una evaluación posterior (post-test), así como evaluaciones formativas y sumativas.

Instrumentos y procedimiento de análisis

En total se recolectaron 33 LPs producidos por los once EPSTs en los tres momentos. Para analizar los lesson plans, se utilizó una rúbrica analítica adaptada y validada mediante juicio de expertos en Didáctica de la Matemática, con una experiencia combinada superior a 30 años en la formación de maestros. La rúbrica consta de doce criterios organizados en dos bloques. El Bloque I recoge siete criterios referidos a los componentes generales de un lesson plan como formato y organización, materiales y apéndices, integración tecnológica, alineación con estándares y objetivos, evaluación del alumnado, diferenciación e inclusión, y discurso matemático. El Bloque II contiene cinco criterios correspondientes a las fases del modelo 5E (Bybee et al., 2006): Engage (activación del conocimiento previo y generación de curiosidad), Explore (exploración guiada por el alumnado), Explain (formalización conceptual mediada por el docente), Elaborate (transferencia a situaciones nuevas y de mayor demanda cognitiva) y Evaluate (evaluación integrada del aprendizaje). Cada criterio se evalúa en una escala de cuatro niveles: 0 (Inicio), 1 (En desarrollo), 2 (Competente) y 3 (Ejemplar), con descriptores conductuales específicos para cada combinación de criterio y nivel. La puntuación total máxima es de 36 puntos.

El análisis siguió un procedimiento en tres niveles. En el primer nivel, los dos investigadores evaluaron de manera independiente cada uno de los 33 lesson plans aplicando la rúbrica, acompañando cada puntuación de una justificación escrita con evidencia textual extraída del propio LP y conectada con el descriptor correspondiente de la rúbrica. Los casos en que existía discrepancia de más de un punto en algún criterio se resolvieron mediante discusión hasta alcanzar un acuerdo. En el segundo nivel, se realizó un análisis evolutivo de la trayectoria de cada EPST a lo largo de los tres momentos, con foco en la integración de las fases de Pólya y en la presencia o ausencia de la clasificación semántica de los problemas propuestos. En el tercer nivel, se efectuó un análisis comparativo transversal de todos los lesson plans de los once EPSTs.

RESULTADOS

Heterogeneidad inicial y efecto de la inteligencia artificial generativa

En respuesta a la primera pregunta de investigación ¿qué conocimiento didáctico-matemático evidencian los EPSTs en sus lesson plan manuales?, el análisis de los lesson plans (LP1) evidencia una marcada disparidad de conocimiento profesional de partida, con puntuaciones totales que oscilan entre 5 y 22 puntos de los 36 posibles. Esta dispersión no es atribuible a diferencias en la exposición teórica ya que todos los EPSTs cursaron los mismos contenidos. Es posible que las diferencias se deban a la capacidad de traducir ese conocimiento teórico en decisiones de diseño concretas, lo que la investigación identifica como una de las dimensiones centrales del PCK (Shulman, 1986). Solo dos EPSTs alcanzan en LP1 el nivel competente en la mayoría de los criterios de la rúbrica. Uno de ellos integra en su LP1 las cuatro fases de Pólya de forma operativa, vinculando explícitamente cada fase del 5E con el paso correspondiente del proceso de resolución de problemas. El otro cita literatura especializada en Didáctica de la Matemática y diseña un sistema de evaluación que trata la multiplicación y la división como operaciones inversas desde el mismo contexto, lo que revela una comprensión relacional del contenido coherente con los postulados de Vergnaud (1983).

La transición de LP1 a LP2 produce el mayor salto cualitativo de los EPSTs, en respuesta a la segunda pregunta de investigación ¿cómo cambia la calidad de los lesson plan cuando se introduce el apoyo de la IAG? La media del grupo pasa de 12,5 a 20,8 puntos de 36, con todos los EPSTs alcanzando al menos el nivel “en desarrollo” en todos los criterios. La IAG actúa como una herramienta que reduce la heterogeneidad del grupo: los EPSTs con menor conocimiento de partida experimentan los mayores avances, mientras que los de mayor conocimiento evidencian ganancias más modestas o, en un caso singular, un retroceso. Este es el hallazgo más llamativo de los LP2. El EPST con mayor puntuación en LP1 (22 puntos) obtiene en LP2 tan solo 16 puntos, siendo la única trayectoria regresiva de todos los EPSTs. La IAG genera un lesson plan formalmente correcto pero que no

preserva los elementos pedagógicos más valiosos de la LP1 de este EPST: la integración de Pólya, la diversidad semántica de los problemas propuestos y la orientación hacia las presentaciones del propio alumnado en la fase Explain. Este caso ilustra con claridad la irregularidad del efecto de la IAG en función del nivel de conocimiento profesional de partida de los EPSTs.

El análisis de LP3 revela que la libertad para diseñar el prompt no garantiza por sí sola una mejora respecto a LP2. La media del grupo asciende a 23,5 puntos sobre 36, pero este incremento no es homogéneo: sólo los EPSTs que utilizan el diseño del prompt como un ejercicio de reflexión pedagógica activa, evidenciada en la especificidad de las exigencias didácticas incorporadas al prompt, logran superar de forma sustancial la calidad de su LP2. Los dos EPSTs con mayor puntuación en el LP3 (36 y 33 puntos respectivamente) elaboraron prompts en los que detallaron el tipo semántico de los problemas a incluir, las fases de Pólya como estructura metodológica, el nivel de demanda cognitiva de las tareas y las acomodaciones específicas para la neurodiversidad en el aula. En los demás casos, los LP3 de los EPSTs son equivalente a su LP2 o presenta mejoras menores. Este resultado sugiere que la competencia para escribir prompts pedagógicamente informados es, en sí misma, una dimensión del conocimiento docente que los EPSTs deben desarrollar de forma explícita en su formación inicial.

Los déficits persistentes: clasificación semántica y fases de Pólya

El hallazgo más consistente y transversal, que responde a la tercera pregunta de investigación, relativa a qué conocimiento específico no transfiere al lesson plan, es la ausencia de la clasificación semántica de los problemas multiplicativos en los lesson plans de los EPSTs a lo largo de las tres condiciones (LP1, LP2 y LP3). De las cinco categorías semánticas de problemas multiplicativos (Greer, 1992; Vergnaud, 1983) —igualación o grupos iguales, comparación multiplicativa, proporcionalidad, producto cartesiano y producto de medidas—, la totalidad de los problemas propuestos en los 33 lesson plans pertenece a la categoría de igualación. La comparación multiplicativa y el producto de medidas aparecen de forma implícita en algunos casos, pero sin que ningún EPST los identifique ni trabaje explícitamente como tipos diferenciados. La categoría de producto cartesiano está ausente en todos los LPs de los EPSTs. Esta concentración en la categoría más simple es coherente con los resultados de Mulligan y Mitchelmore (1997), quienes documentaron la tendencia de los EPSTs a enseñar los tipos de problemas con los que ellos mismos aprendieron en la escuela.

El segundo déficit persistente es la falta de integración operativa de las fases de Pólya (1945) en el diseño de las actividades. De los 33 lesson plans analizados, solo tres presentan una integración funcional de las cuatro fases: una durante el desarrollo del LP1 y dos en el LP3. En los 30 casos restantes, las fases de Pólya están ausentes o aparecen mencionadas sin articulación metodológica con las decisiones de diseño. Este resultado contrasta con el hecho de que las fases de Pólya fueron trabajadas explícitamente en clase como marco central de la resolución de problemas y formaban parte de la consigna de la tarea. La persistencia de este déficit a lo largo de los tres momentos apunta a la existencia de una brecha entre el conocimiento declarativo del marco y el conocimiento procedimental necesario para que los EPSTs lo traduzcan en decisiones de diseño concretas (Llinares, 2013), brecha que ni la exposición teórica ni el uso de la IAG consiguen cerrar de forma sistemática.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Los resultados del estudio permiten articular tres conclusiones de relevancia (no generalizables) para la investigación en la formación de EPSTs. En relación con la primera pregunta de investigación, el análisis evidencia que la IAG actúa como una herramienta de apoyo cuyo efecto sobre la calidad de los lesson plan varía en función del nivel de conocimiento profesional de partida de los EPSTs. Para los EPSTs con menor evidencia de PCK, la IAG produce mejoras sustanciales en la estructura, la coherencia y la formalidad de los lesson plans. Para los EPSTs con mayor evidencia de PCK, la IAG tiende a generar una respuesta homogénea que no preserva los elementos pedagógicos más valiosos de su lesson plan manual (LP1). Este resultado matiza las perspectivas más optimistas sobre el uso

de la IAG como herramienta de formación docente y señala la necesidad de considerar el perfil de conocimiento de los EPSTs como variable moduladora de su efecto, aunque se tendrían que llevar a cabo estudios más profundos.

En relación con la segunda pregunta de investigación, los déficits en la clasificación semántica de los problemas multiplicativos y en la integración de Pólya se muestran resistentes al uso de la IAG cuando éste no es activado explícitamente por los EPSTs en el diseño de su prompt. Este resultado tiene implicaciones directas para el diseño curricular de la formación inicial: la exposición teórica al marco de Pólya (1945) no es condición suficiente para que los EPSTs lo trasladen a sus decisiones de planificación. Se requieren oportunidades de práctica reflexiva guiada que conecten explícitamente el marco teórico con el diseño de actividades (Llinares, 2013; Martín-Díaz et al., 2023), así como el desarrollo de lo que podría denominarse competencia de prompting pedagógico: la capacidad de los EPSTs para traducir su propio conocimiento didáctico-matemático en instrucciones precisas para una herramienta de IAG.

En relación con la tercera pregunta de investigación, los resultados apuntan a que la IAG amplifica el conocimiento pedagógico del contenido que los EPSTs ya poseen, pero no lo genera ni lo transforma de forma autónoma. Los EPSTs que obtienen los mejores resultados en LP3 son precisamente aquellos que ya evidenciaban en LP1 un conocimiento más sólido sobre la enseñanza de los problemas multiplicativos, y que son capaces de traducir ese conocimiento en prompts de alta especificidad didáctica. En este sentido, los resultados concuerdan con estudios similares llevados a cabo por Kasneci et al. (2023) y Mollick y Mollick (2023), quienes señalan que el potencial de la IAG en contextos educativos depende en última instancia de la calidad del conocimiento que el usuario aporta a la interacción. Las entrevistas y el componente cuantitativo del proyecto más amplio permitirán profundizar en los mecanismos que subyacen a estos resultados y en las condiciones bajo las cuales la IAG puede constituir una herramienta genuinamente transformadora del conocimiento profesional de los EPSTs.

Agradecimientos

Este trabajo se ha desarrollado dentro del marco del proyecto de generación del conocimiento «Proyectos de Educación STEAM y aprendizaje escolar», PID2021-128261NB-I00, financiado por MICIU/AEI/10.13039/501100011033 y por FEDER, UE.

Referencias

Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Bresser, R., Melanese, K. y Sphar, C. (2009). *Supporting English language learners in math class, Grades K-2.* Math Solutions.

Bybee, R. W., Taylor, J. A., Gardner, A., Van Scotter, P., Powell, J. C., Westbrook, A. y Landes, N. (2006). *The BSCS 5E instructional model: Origins and effectiveness.* BSCS.

Cevikbas, M., König, J. y Rothland, M. (2024). Empirical research on teacher competence in mathematics lesson planning: Recent developments. *ZDM – Mathematics Education*, *56*(1), 101–113. https://doi.org/10.1007/s11858-023-01487-2

Cohen, J. (1960). A coefficient of agreement for nominal scales. *Educational and Psychological Measurement, 20*(1), 37-46. https://doi.org/10.1177/001316446002000104

Greer, B. (1992). Multiplication and division as models of situations. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 276-295). Macmillan.

Grossman, P., Compton, C., Igra, D., Ronfeldt, M., Shahan, E. y Williamson, P. W. (2009). Teaching practice: A cross-professional perspective. *Teachers College Record, 111*(9), 2055-2100. https://doi.org/10.1177/016146810911100905

Gurl, T. J., Markinson, M. P. y Artzt, A. F. (2025). Using ChatGPT as a lesson planning assistant with preservice secondary mathematics teachers. *Digital Experiences in Mathematics Education*, *11*, 114–139. https://doi.org/10.1007/s40751-024-00162-9

Jahudin, J. y Siew, N. M. (2024). The effects of Polya's problem solving with digital bar model on the algebraic thinking skills of seventh graders. *Problems of Education in the 21st Century*, *82*(3), 390–409. https://doi.org/10.33225/pec/24.82.390

Kasneci, E., Sessler, K., Küchemann, S., Bannert, M., Dementieva, D., Fischer, F., Gasser, U., Groh, G., Günnemann, S., Hüllermeier, E., Krusche, S., Kutyniok, G., Michaeli, T., Nerdel, C., Pfeffer, J., Poquet, O., Sailer, M., Schmidt, A., Seidel, T. y Kasneci, G. (2023). ChatGPT for good? On opportunities and challenges of large language models for education. *Learning and Individual Differences, 103,* artículo 102274. https://doi.org/10.1016/j.lindif.2023.102274

Landis, J. R. y Koch, G. G. (1977). The measurement of observer agreement for categorical data. *Biometrics, 33*(1), 159-174. https://doi.org/10.2307/2529310

Lincoln, Y. S. y Guba, E. G. (1985). *Naturalistic inquiry.* SAGE.

Llinares, S. (2013). El desarrollo de la competencia docente "mirar profesionalmente" la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. *Educar em Revista, 50,* 117-133. https://doi.org/10.1590/S0104-40602013000400009

Lupiáñez, J. L. y Rico, L. (2006). Análisis didáctico y formación inicial de profesores: competencias y capacidades en el aprendizaje de los escolares. En P. Bolea, M. J. González y M. Moreno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)* (pp. 225–236). Instituto de Estudios Altoaragoneses y Universidad de Zaragoza.

Martín-Díaz, J. P., Codes, M., Pascual, M. I., Contreras, L. C. y Climent, N. (2023). La tarea profesional de definir desde el modelo MTSK. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 347-354). SEIEM.

Mollick, E. y Mollick, L. (2023). *Using AI to implement effective teaching strategies in classrooms.* SSRN. https://doi.org/10.2139/ssrn.4391243

Mulligan, J. T. y Mitchelmore, M. C. (1997). Young children's intuitive models of multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(3), 309-330. https://doi.org/10.2307/749783

Patton, M. Q. (2015). *Qualitative research and evaluation methods: Integrating theory and practice* (4.ª ed.). SAGE.

Pólya, G. (1945). *How to solve it: A new aspect of mathematical method.* Princeton University Press.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving.* Academic Press.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14. https://doi.org/10.3102/0013189X015002004

Stake, R. E. (2006). *Multiple case study analysis.* Guilford Press.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 127-174). Academic Press.

Wood, D., Bruner, J. S. y Ross, G. (1976). The role of tutoring in problem solving. *Journal of Child Psychology and Psychiatry, 17*(2), 89-100. https://doi.org/10.1111/j.1469-7610.1976.tb00381.x

Yin, R. K. (2018). *Case study research and applications: Design and methods* (6.ª ed.). SAGE.

FLEXIBILIDAD Y COMPRENSIÓN DEL ÁREA: UNA TRAYECTORIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAJE PARA LOS PRIMEROS CURSOS DE SECUNDARIA

Flexibility and understanding of area: a hypothetical learning trajectory for the early years of secondary education

Areny, M., Caviedes, S. y Rojas, F.

Universitat Autònoma de Barcelona

Resumen

Este estudio presenta el diseño teórico de una progresión hipotética de aprendizaje que fundamenta una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje para la medición de áreas, orientada a favorecer el desarrollo conceptual y la flexibilidad matemática. A lo largo de cuatro niveles, se describe el tránsito desde la percepción y la acción manipulativa hacia formas de razonamiento que permiten justificar el área como magnitud estructurada e invariante. La flexibilidad, en sus dimensiones procedimental y representacional, se incorpora como eje articulador al conectar distintos significados parciales del área. El diseño propuesto ofrece una base teórica y metodológica para planificar experiencias que promuevan una comprensión flexible y estructural del área en la educación secundaria.

Palabras clave: *trayectoria hipotética de aprendizaje, flexibilidad, significados parciales del área*

Abstract

This study presents the theoretical design of a hypothetical learning progression that underpins a Hypothetical Learning Trajectory for area measurement, aimed at fostering conceptual development and mathematical flexibility. Across four levels, it describes the transition from perception and manipulative action towards forms of reasoning that allow area to be justified as a structured and invariant magnitude. Flexibility, in its procedural and representational dimensions, is incorporated as an articulating axis by connecting different partial meanings of area. The proposed design provides a theoretical and methodological basis for planning learning experiences that promote a flexible and structural understanding of area in secondary education.

Keywords: *hypothetical learning trajectory, flexibility, partial area meanings*

INTRODUCCIÓN

El aprendizaje del área constituye un eje fundamental en la educación matemática, al articular de manera integrada la geometría, la medida y el álgebra (Freudenthal, 1983; Kospentaris et al., 2011). Sin embargo, diversos estudios evidencian que los estudiantes de los primeros cursos de secundaria (12-14 años) suelen reducir la medición de superficies a la aplicación mecánica de fórmulas, sin reconocer las propiedades y relaciones estructurales que las sustentan, ni movilizar estrategias adecuadas para descomponer y recomponer figuras (Caviedes 2024; Zacharos, 2006; Lehmann, 2023). Estas limitaciones reflejan una comprensión fragmentada del concepto de área y la necesidad de diseñar trayectorias de aprendizaje que integren el desarrollo conceptual con el uso flexible de estrategias y representaciones. En este contexto, la presente comunicación propone una progresión hipotética de aprendizaje para una trayectoria hipotética de aprendizaje (THA) sobre la medición de áreas para estudiantes de 12 a 14 años. La propuesta se apoya en los significados parciales del área

Areny Perelló, M., Caviedes Barrera, S. y Rojas Sateler, F. (2026). Flexibilidad y comprensión del área: Una trayectoria hipotética de aprendizaje para los primeros cursos de secundaria. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (pp. 122-129). SEIEM.

(Caviedes et al., 2023) y en la incorporación de la flexibilidad como principio articulador del aprendizaje matemático.

MARCO TEÓRICO

Trayectoria hipotética de aprendizaje para la medición de áreas

El constructo de THA, introducido por Simon (1995), describe un modelo de planificación instruccional basado en la anticipación del aprendizaje del estudiante. Una THA integra tres componentes: un objetivo de aprendizaje, una secuencia de tareas matemáticas y una hipótesis sobre los procesos de desarrollo conceptual de los estudiantes (Simon y Tzur, 2005). Desde esta perspectiva, la THA constituye tanto una herramienta de diseño como un marco de análisis del aprendizaje, que permite al docente anticipar los razonamientos de los estudiantes, caracterizar niveles de comprensión y planificar intervenciones instruccionales ajustadas al progreso observado. Los trabajos de Sarama y Clements (2009) ampliaron esta noción al proponer el modelo de Learning Trajectories, que articula tres elementos equivalentes: la meta matemática, la secuencia de niveles de pensamiento o desarrollo y un conjunto de actividades coherentes con dichos niveles. En el caso particular del área, estos autores muestran que el aprendizaje implica pasar de la identificación del atributo superficial al reconocimiento de la necesidad de unidades congruentes y, posteriormente, a la coordinación de medidas lineales mediante relaciones multiplicativas (Clements et al., 2018; Sarama y Clements, 2009).

La extensión de estas trayectorias hacia la educación secundaria exige considerar que los estudiantes, al llegar a los primeros cursos de la ESO, ya dominan ciertos procedimientos aritmético-algebraicos, pero aún presentan limitaciones conceptuales en torno a la noción de área. En particular, suelen concebirla como un dato asociado a fórmulas y no como una magnitud que se conserva bajo transformaciones isométricas ni como una relación entre dimensiones (p.ej., Caviedes et al., 2023a; 2023b; Freudenthal, 1983; Zacharos, 2006). Esta desconexión entre el razonamiento geométrico y el métrico justifica la necesidad de construir trayectorias hipotéticas que integren tanto los aspectos estructurales del concepto como las habilidades de razonamiento que permiten movilizarlos en contextos diversos. El estudio de Caviedes et al. (2023a) proporciona un marco particularmente relevante para este propósito. Los autores identifican tres significados parciales del área que emergen del análisis de las producciones de estudiantes de secundaria al resolver tareas. Estos significados no constituyen etapas sucesivas en sentido estricto, sino configuraciones semióticas y conceptuales que reflejan distintas formas de organización del conocimiento del área.

El primer significado parcial (PM_1) concibe el área como el espacio delimitado por una línea cerrada. En este caso, la atención se centra en la figura como objeto perceptual y en su interior como porción de espacio ocupada, sin referencia explícita a unidades de medida. La comprensión se apoya en la percepción visual y en acciones que permiten comparar de manera cualitativa, pero no cuantificar. El segundo significado (PM_2) define el área como el número de unidades bidimensionales que cubren una superficie. Aquí el área se asume como una magnitud medible, lo que requiere comprensión de la conservación, la congruencia y la aditividad. La iteración de unidades y la relación entre la medida y el tamaño de la unidad se convierten en los fundamentos del razonamiento. Este significado implica un salto cualitativo respecto al anterior, ya que introduce la idea de cuantificación y la posibilidad de justificar la equivalencia de áreas mediante procesos de descomposición, recomposición e isometrías respecto de las unidades. El tercer significado parcial (PM_3) comprende el área como el producto de dos dimensiones lineales, lo que supone la integración de relaciones multiplicativas y la comprensión simbólica del proceso de medida. Aquí se requiere una coordinación de razonamientos geométricos y algebraicos que permitan justificar relaciones de proporcionalidad y equivalencia; el área deja de ser un resultado numérico derivado de un procedimiento para convertirse en una relación estructural entre magnitudes.

Estos tres significados parciales describen un continuo de desarrollo conceptual que puede enriquecer la trayectoria de aprendizaje del área propuesta por Sarama y Clements (2009). El tránsito entre ellos implica reorganizaciones conceptuales y semióticas, es decir, pasar de la percepción a la medición, de la medición al razonamiento estructural y, finalmente, a la formalización.

La flexibilidad como elemento integrador en la THA del área

La noción de experticia adaptativa (Hatano e Inagaki, 1984) concibe la competencia experta como la capacidad de aplicar procedimientos con comprensión y de ajustarlos o justificarlos de manera versátil, más allá de su ejecución precisa y eficiente. De este modo, la flexibilidad matemática puede entenderse como un rasgo central del desempeño experto, pues implica movilizar múltiples representaciones y procedimientos, y seleccionar los más adecuados a las demandas de la tarea y al contexto de resolución (Schoenfeld, 1985; Hickendorff, 2022; Star, 2007). Esta conceptualización ha llevado a proponer que la flexibilidad presenta dimensiones interdependientes. Por ejemplo, Heinze et al. (2009) describen la flexibilidad procedimental o estratégica como la disponibilidad de un repertorio diverso de procedimientos de resolución y la capacidad de seleccionar entre ellos en función de la tarea. En esta misma línea, Xu et al. (2017) distinguen entre flexibilidad procedimental potencial (conocimiento de distintas estrategias) y práctica (habilidad para emplearlas); no obstante, en este estudio se considerarán conjuntamente bajo la dimensión de flexibilidad procedimental. Por su parte, la flexibilidad representacional alude a la capacidad de emplear y traducir entre diferentes sistemas de representación, geométrico, numérico, simbólico o gráfico, para construir y comunicar significado (Duval, 2017; Heinze et al., 2009). Ambos tipos de flexibilidad convergen en la resolución de tareas complejas, donde los estudiantes deben articular razonamientos geométricos y métricos, y justificar sus decisiones de manera fundamentada.

En el caso específico del área, la flexibilidad procedimental y representacional adquiere un papel central, ya que la medición de superficies exige coordinar representaciones espaciales, unidades de medida y relaciones multiplicativas. Al respecto, Lehmann (2023) evidencia que los estudiantes de primeros cursos de secundaria enfrentan dificultades persistentes al calcular el área de figuras compuestas, especialmente al seleccionar estrategias de descomposición y recomposición. El autor señala que muchos estudiantes logran aplicar correctamente fórmulas parciales, pero no coordinan esas operaciones con la estructura geométrica de la figura original, lo que revela una falta de flexibilidad procedimental. En este contexto, la flexibilidad no se reduce al mero cambio de procedimiento, sino que supone una coordinación dinámica entre significados parciales del área, entendidos como diferentes formas de conceptualizar y operar con el objeto matemático (Caviedes, 2023a). En particular, la transición del significado PM_1 (el área como espacio delimitado), al PM_2 (el área como número de unidades bidimensionales), requiere que los estudiantes identifiquen los límites de la comparación perceptual e incorporen explícitamente la unidad de medida. Este tránsito activa una flexibilidad procedimental y representacional, en tanto exige articular conocimiento conceptual y procedimental y reorganizar el sistema de referencia: dejar de pensar la figura como totalidad visual para considerar la unidad como elemento generador de la magnitud. Análogamente, el paso del significado PM_2 al PM_3 (el área como producto de magnitudes lineales) exige una flexibilidad procedimental y representacional, pues los estudiantes deben articular los procedimientos de recubrimiento o conteo con las relaciones geométrico-numéricas que fundamentan la fórmula, y coordinar traducciones entre representaciones geométricas, numéricas y algebraicas. En esta fase, las isometrías cumplen una función articuladora (Caviedes et al., 2023b), ya que facilitan la visualización de equivalencias, sostienen la justificación de la conservación del área y median entre las representaciones. Esta articulación progresiva ayuda a consolidar un sistema de significados más coherente y facilita que los estudiantes transiten con mayor seguridad entre diferentes modos de abordar las tareas, favoreciendo una comprensión que integra procedimientos, representaciones y principios geométricos.

MÉTODO

El diseño de la THA se enmarca en una tesis doctoral desarrollada bajo una Investigación Basada en el Diseño (IBD) (Cobb et al., 2003). En este trabajo se presenta la fase previa a la implementación: la construcción teórica de la progresión de aprendizaje y de las transiciones entre sus niveles, con el propósito de fundamentar un modelo progresivo que articule los significados parciales del área con el desarrollo de la flexibilidad matemática. La flexibilidad se concibe como un eje transversal que estructura dichas transiciones. El proceso metodológico comprende tres fases:

Fase 1. Revisión de literatura y diagnóstico de dificultades: Se revisaron estudios que documentan dificultades persistentes en la enseñanza y el aprendizaje del área, las cuales convergen en una misma problemática: la conceptualización del área como magnitud suele quedar subordinada a un tratamiento operativo centrado en fórmulas. En primer lugar, diversos trabajos evidencian una instrumentalización de las fórmulas, ya que los estudiantes tienden a identificar, hallar o calcular el área con elegir y aplicar una expresión conocida, con escasa atención a las condiciones geométricas que la hacen pertinente, al significado de sus términos o a la plausibilidad del resultado (Huang, 2017; Zacharos, 2006). Esta orientación favorece respuestas correctas solo en configuraciones prototípicas y, en cambio, se debilita ante variaciones de la figura, cambios de orientación o ausencia de medidas explícitas, situaciones en las que el razonamiento debería apoyarse en relaciones geométricas y no únicamente en sustituciones numéricas.

En segundo lugar, se reportan dificultades específicas vinculadas con la conservación del área. Al respecto, algunos estudios señalan que muchos estudiantes no reconocen que el área permanece invariante cuando una figura se transforma mediante descomposición y recomposición, o cuando se realizan modificaciones que alteran la apariencia sin cambiar la superficie total (Kamii y Kysh, 2006). En estos casos, los juicios suelen apoyarse en rasgos perceptivos (por ejemplo, “más alargada”, “más ancha”, “ocupa más espacio”) o en magnitudes lineales asociadas (perímetro, longitud de lados), lo que conduce a interpretaciones inconsistentes de equivalencia de áreas (Kordaki, 2003; Kospentaris et al., 2011). Esta fragilidad conceptual afecta, además, la capacidad de justificar, pues aun cuando se acepta que dos figuras tienen la misma área, con frecuencia no se dispone de argumentos geométricos que articulen aditividad, descomposición y recomposición, o comparación por unidades (Caviedes et al., 2023b).

En tercer lugar, la investigación señala limitaciones para seleccionar y coordinar estrategias ante figuras planas compuestas. Frente a configuraciones no estándar, los estudiantes suelen recurrir a particiones arbitrarias o a procedimientos parciales que no garantizan una cobertura exhaustiva ni una descomposición aditiva correcta (Caviedes et al., 2023a); también se observan omisiones, solapamientos o la elección de descomposiciones que incrementan la complejidad en lugar de reducirla (Lehmann, 2023). Esta dificultad no se limita a no saber qué hacer, sino que refleja problemas para coordinar representaciones, procedimientos y ser flexibles entre ellos, es decir, para decidir qué partes conviene conservar, qué recomposiciones son válidas y qué relaciones geométricas permiten transferir un método conocido a una situación nueva.

Lo anterior respalda la necesidad de diseñar una progresión hipotética de aprendizaje que incorpore de forma explícita oportunidades para desarrollar flexibilidad procedimental y representacional en torno al área: (i) justificar fórmulas a partir de transformaciones y descomposiciones controladas, (ii) reconocer e identificar la conservación del área en configuraciones variadas, y (iii) elegir, comparar y validar estrategias de resolución para figuras planas compuestas, articulando representaciones geométricas y argumentos de conservación.

Fase 2. Construcción de los niveles hipotéticos: Partiendo de los niveles propuestos por Sarama y Clements (2009) y las aportaciones de Caviedes et al. (2023a), la Tabla 1 muestra que cada nivel de la progresión representa una forma cualitativamente distinta de comprender y operar con el área.

Tabla 1

Niveles de progresión de la THA sobre el área para estudiantes de 12-14 años. (Adaptada de Sarama y Clements, 2009)

Nivel	Acciones del estudiante y elementos matemáticos	Tipo de flexibilidad
Nivel 1: Conservación perceptiva y acción manipulativa inicial (PM1- área como espacio delimitado)	*Acciones observables:* El estudiante compara de manera directa y verifica la conservación del área mediante isometrías, recorte y reorganización. Justifica la equivalencia o diferencia entre superficies a partir de expresiones como "ocupan lo mismo", "coinciden al superponerlas" o "se puede formar la misma figura con las mismas partes". *Elementos matemáticos asociados:* superficie delimitada, congruencia, comparación directa conservación, transformaciones isométricas.	*Procedimental:* Conoce y usa acciones manipulativas para explorar conservación y equivalencia. *Representacional:* Identifica la misma extensión de superficie en distintas configuraciones de una misma superficie.
Nivel 2: Cuantificación y estructuración de la medida (PM2- área como número de unidades congruente)	*Acciones observables:* El estudiante recubre superficies con una unidad constante sin huecos ni solapamientos. Cuenta unidades para determinar y comparar áreas, descompone y recompone figuras para facilitar el recubrimiento y suma o resta partes para determinar el área de figuras compuestas. *Elementos matemáticos asociados:* unidad bidimensional, congruencia, recubrimiento, iteración de la unidad, acumulación y aditividad, conservación, transitividad, relación inversamente proporcional entre unidad de medida y cuantificación de la superficie.	*Procedimental:* Alterna entre recubrimiento, conteo y descomposición, según la tarea. *Representacional:* Coordina representaciones de recubrimiento (cuadrículas o unidades iteradas) con el registro numérico (conteo).
Nivel 3: Estructuración espacial y uso explícito de isometrías (PM2- área como número de unidades congruente)	*Acciones observables:* El estudiante organiza unidades cuadradas en filas y columnas, utiliza multiplicación para estructurar el área y descompone figuras en rectángulos, triángulos u otras partes conocidas. Utiliza isometrías para justificar que el área total se conserva. Justifica sus procedimientos mediante relaciones entre partes de la figura y cálculos numéricos. *Elementos matemáticos asociados:* estructuración rectangular, unidad cuadrada, transformaciones isométricas, comparación indirecta, conservación, congruencia transitividad, acumulación y aditividad.	*Procedimental:* Selecciona y combina procedimientos geométricos y numéricos (suma reiterada, multiplicación, descomposición, recomposición). *Representacional:* Traduce y convierte entre representaciones geométricas (arreglo de filas/columnas), numéricas (sumas y/o productos).
Nivel 4: Justificación estructural y articulación de significados (PM3- área como producto de dos dimensiones lineales)	*Acciones observables:* El estudiante selecciona y aplica fórmulas de área según las características de la figura. Justifica la validez de una fórmula mediante descomposiciones, recomposiciones, equivalencias y/o estructuraciones rectangulares. Determina áreas de figuras compuestas o no prototípicas combinando procedimientos de naturaleza diferente. *Elementos matemáticos asociados:* Área como magnitud bidimensional, dimensiones lineales, base, altura, unidad cuadrada estándar, expresión algebraica, congruencia, conservación, acumulación y aditividad, transitividad.	*Procedimental:* Selecciona, adapta y justifica procedimientos geométricos y numérico-algebraicos según la estructura de la figura y la demanda de la tarea. *Representacional:* Coordina registros geométrico, numérico y algebraico para calcular, comunicar y justificar.

Fase 3. Tránsito entre niveles: La progresión supone una reconstrucción de la comprensión del área como magnitud, en la que cada nivel incorpora, reorganiza y amplía los significados parciales previos (Caviedes et al., 2023a; Clements et al., 2018). Dicha reconstrucción está mediada por la flexibilidad procedimental y representacional (Heinze et al., 2009; Rittle-Johnson y Schneider, 2015), ya que el avance entre niveles requiere seleccionar y adaptar procedimientos, así como coordinar distintas representaciones de la superficie y su medida. Dado que esta comunicación corresponde a la fase previa a la implementación, los tránsitos se formulan como hipótesis de aprendizaje que deberán contrastarse mediante el análisis de las producciones y justificaciones de los estudiantes.

Nivel 1 → Nivel 2: El paso del nivel 1 al nivel 2 supone el tránsito del significado PM_1 al inicio del PM_2. Se espera que el estudiante deje de depender exclusivamente de juicios perceptivos sobre las figuras y empiece a usar una unidad constante para cubrir la superficie (Clements et al., 2018; Sarama y Clements, 2009). La flexibilidad procedimental se manifiesta cuando el estudiante incorpora procedimientos de cuantificación (recubrimiento, conteo) a las acciones manipulativas iniciales. La flexibilidad representacional se evidencia cuando pasa de interpretar la superficie como una configuración perceptiva a representarla mediante unidades bidimensionales y registros numéricos. Las familias de tareas asociadas son comparación directa de superficies, recubrimiento con unidades congruentes, análisis de recubrimientos incorrectos y comparación de áreas mediante una unidad bidimensional común. Se consideran tareas de recubrimiento de una misma superficie con unidades de distinto tamaño o forma, con el propósito de discutir la conveniencia de la unidad cuadrada, así como tareas de estimación del área de superficies irregulares o de contorno no poligonal mediante conteo de unidades completas y fraccionadas.

Nivel 2 → Nivel 3: El tránsito del nivel 2 al nivel 3 implica pasar de la cuantificación por recubrimiento y conteo a una organización más estructurada de la medida (PM_2 - inicio PM_3). Se espera que el estudiante deje de contar unidades una a una y comience a organizarlas en filas y columnas, use sumas reiteradas o multiplicaciones, descomponga figuras en partes conocidas y emplee isometrías para justificar la conservación del área. También se espera que establezca comparaciones indirectas y equivalencias transitivas entre superficies. La flexibilidad procedimental (Rittle-Johnson y Schneider, 2015) se manifiesta cuando se seleccionan y combinan las acciones anteriores. La flexibilidad representacional (Duval, 2017; Heinze et al., 2009) se evidencia al coordinar el uso de cuadrículas o unidades iteradas, particiones geométricas, recomposiciones y registros numéricos. Las familias de tareas asociadas son figuras compuestas, arreglos rectangulares, descomposición y recomposición, comparación indirecta mediante una unidad bidimensional o figura auxiliar, y justificación de equivalencias mediante isometrías. Específicamente, se contemplan tareas en las que el estudiante debe fraccionar la unidad cuadrada para medir superficies que no admiten un recubrimiento exacto con unidades completas, como triángulos o figuras compuestas, así como tareas en las que debe relacionar la base y la altura de un triángulo con las del rectángulo que lo contiene para justificar fórmulas de áreas sencillas.

Nivel 3 → Nivel 4: El tránsito del nivel 3 al nivel 4 implica pasar del área como número de unidades congruentes, estructurada mediante arreglos y transformaciones, al área como producto de dos dimensiones lineales (consolidación PM_3). Se espera que el estudiante seleccione fórmulas según las características de la figura y justifique su validez mediante descomposiciones, recomposiciones, equivalencias o estructuraciones rectangulares. La flexibilidad procedimental se expresa cuando se adaptan y justifican procedimientos geométricos, numéricos y algebraicos según la demanda de la tarea. La flexibilidad representacional se evidencia cuando se coordinan registros geométricos, numéricos y algebraicos para calcular, comunicar y justificar (Duval, 2017). Las familias de tareas asociadas son justificación de fórmulas para rectángulos, romboides y trapecios por descomposición y recomposición. Por ejemplo, obtener el área del trapecio a partir de un corte horizontal que permite reorganizar la figura y relacionar sus bases con la altura. Se incluyen tareas de transformación de

figuras en configuraciones equivalentes, cálculo de áreas de figuras compuestas o no prototípicas e inicio de generalización verbal o prealgebraica, sin exigir todavía una expresión simbólica formal.

CONCLUSIONES

La progresión hipotética para una THA, propuesta en esta comunicación, se concibe como una estructura que integra teoría y práctica, orientada a describir la progresión del pensamiento geométrico y métrico y a fundamentar el diseño de intervenciones didácticas basadas en evidencia (Simon y Tzur, 2012). Integra los aportes de Sarama y Clements (2009) sobre el desarrollo del pensamiento de los estudiantes, la propuesta de Simon (1995) para la construcción y validación de trayectorias hipotéticas, y los significados parciales del área caracterizados por Caviedes et al. (2023a) para interpretar el desarrollo de estudiantes en los primeros cursos de secundaria. En este contexto, la flexibilidad se asume como una dimensión organizadora del aprendizaje del área, en tanto orienta la selección, articulación y justificación de estrategias y representaciones (Heinze et al., 2009; Star, 2007; Rittle-Johnson y Schneider, 2015), por ejemplo, mediante descomposición, recubrimiento o recomposición de superficies equivalentes. Con ello, la propuesta se alinea con la evidencia que muestra que la comprensión del área no se deriva solo de la fluidez procedimental, sino de la coordinación entre conservación de la superficie, estructuración espacial y cuantificación (Freudenthal, 1983; Kospentaris et al., 2019; Lehmann, 2023; Caviedes et al., 2023a, 2023b). Así, la progresión se presenta como un instrumento que ofrece una base teórico-práctica para diseñar experiencias que promuevan el razonamiento geométrico y métrico en secundaria y para consolidar la comprensión del área como magnitud estructurada e invariante. Asimismo, esta progresión puede tener implicaciones para la formación del profesorado al funcionar como un instrumento teórico que permite interpretar evidencias de aprendizaje. Concretamente, su uso puede materializarse mediante el análisis de producciones reales de alumnado, guiado por la identificación de indicadores observables a cada nivel, el reconocimiento de desajustes entre procedimientos y significados del área, y el diseño de intervenciones de enseñanza más ajustadas con la investigación.

Agradecimientos

PID2023-149580NB-I00 (MCIN/AEI/10.13039/501100011033 y FEDER UE).

Referencias

Caviedes, S., de Gamboa, G. y Badillo E. (2023a). Mathematical objects that configure the partial area meanings mobilized in task solving. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 54*(6), 1092–1111. https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1991019

Caviedes, S., De Gamboa, G. y Badillo Jiménez, E. R. (2023b). Conexiones matemáticas en la resolución de una tarea de área por estudiantes de 13-14 años. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 187–194). SEIEM.

Caviedes, S., De Gamboa, G. y Badillo, E. (2024). Mathematical connections involved in area measurement processes. *Research in Mathematics Education, 26*(2), 237-257. https://doi.org/10.1080/14794802.2024.2370333

Clements, D. H., Sarama, J., Van Dine, D. W., Barrett, J. E., Cullen, C. J., Hudyma, A., Dolgin, R., Cullen, A. y Eames, C. L. (2018). Evaluation of three interventions teaching area measurement as spatial structuring to young children. *The Journal of Mathematical Behavior*, *50*, 23-41. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.12.004

Cobb, P., Confrey, J., DiSessa, A., Lehrer, R. y Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational researcher, 32*(1), 9-13. https://doi.org/10.3102/0013189X032001009

Duval, R. (2017). *Understanding the mathematical way of thinking-The registers of semiotic representations*. Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-56910-9

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures.* Springer.

Hatano, G. y Inagaki, K. (1986). Two courses of expertise. In H. W. Stevenson, H. Azuma, y K. Hakuta (Eds.), *Child development and education in Japan* (pp. 262–272). Henry Holt y Co.

Heinze, A., Star, J. R. y Verschaffel, L. (2009). Flexible and adaptive use of strategies and representations in mathematics education. *ZDM Mathematics Education, 41*, 535–540. https://doi.org/10.1007/s11858-009-0214-4

Hickendorff, M. (2022). Flexibility and adaptivity in arithmetic strategy use: What children know and what they show. *Journal of Numerical Cognition*, *8*(3), 367–381. https://doi.org/10.5964/jnc.7277

Huang, H. M. E. (2017). Curriculum interventions for area measurement instruction to enhance children's conceptual understanding. *Int J of Sci and Math Educ, 15*(7), 1323-1341. https://doi.org/10.1007/s10763-016-9745-7

Kamii, C. y Kysh, J. (2006). The difficulty of "length× width": Is a square the unit of measurement? *The Journal of Mathematical Behavior, 25*(2), 105-115. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2006.02.001

Kordaki, M. (2003). The effect of tools of a computer microworld on students' strategies regarding the concept of conservation of area. *Educational Studies in Mathematics, 52*(2), 177-209. https://doi.org/10.1023/A:1024065107302

Kospentaris, G., Spyrou, P. y Lappas, D. (2011). Exploring students' strategies in area conservation geometrical tasks. *Educational Studies in Mathematics, 77*(1), 105-127. https://doi.org/10.1007/s10649-011-9303-8

Lehmann, T. H. (2023). Learning to measure the area of composite shapes. *Educational Studies in Mathematics, 112*(3), 531-565. https://doi.org/10.1007/s10649-022-10191-z

Rittle-Johnson, B. y Schneider, M. (2015). Developing conceptual and procedural knowledge in mathematics. *In Oxford handbook of numerical cognition* (pp. 1102–1118). Oxford University Press. https://doi.org/10.1093/oxfordhb/9780199642342.013.014

Sarama, J. y Clements, D. H. (2009). *Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children*. Routledge.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving.* Academic Press.

Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education 26*(2), 114-145. I: https://doi.org/10.5951/jresematheduc.26.2.0114

Simon, M. A. y Tzur, R. (2012). Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: An elaboration of the hypothetical learning trajectory. In D.H. Clements y J. Sarama (Eds.), *Hypothetical learning trajectories* (pp. 91-104). Routledge. https://doi.org/10.4324/9780203063279

Star, J. R. y Newton, K. J. (2009). The nature and development of experts' strategy flexibility for solving equations. *ZDM, 41*(5), 557-567. https://doi.org/10.1007/s11858-009-0185-5

Xu, L., Liu, R. D., Star, J. R., Wang, J., Liu, Y. y Zhen, R. (2017). Measures of potential flexibility and practical flexibility in equation solving. *Frontiers in Psychology, 8*, 1368. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2017.01368

Zacharos, K. (2006). Prevailing educational practices for area measurement and students' failure in measuring areas. *The Journal of Mathematical Behavior, 25*(3), 224-239. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2006.09.003

SENTIDOS SOBRE PENSAMIENTO FUNCIONAL EN LA FORMACIÓN DE UN GRUPO DE PROFESORAS DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Sense-making about functional thinking in the professional development of a group of primary school teachers

Bastías, K.[a], Moreno, A.[a] y Cruz, M. F.[b, c]

[a]Universidad de Granada, [b]Universidad de Córdoba, [c]Universidad Nacional del Litoral

Resumen

Este estudio se enmarca en una investigación sobre la formación continua del profesorado en pensamiento algebraico, y tiene como objetivo describir los sentidos que docentes de educación primaria atribuyen al pensamiento funcional antes y durante el diseño de tareas de modelización matemática. Se lleva adelante un estudio de caso en el marco de una investigación cualitativa. Para producir y analizar la información, se diseña y desarrolla un curso dirigido a profesores en Chile, donde se promueven aspectos teóricos y prácticos vinculados, al pensamiento funcional y la modelización matemática. Los resultados muestran que, inicialmente, el pensamiento funcional era entendido como la búsqueda de una regla general, mientras que, durante el diseño y desarrollo de la tarea, las participantes comenzaron a centrarse en las cantidades variables y en las relaciones de dependencia entre ellas. Se concluye que en los sujetos estudiados la modelización matemática ha favorecido la construcción de nuevos sentidos sobre el pensamiento funcional.

Palabras clave: *educación primaria, formación del profesorado, modelización matemática, pensamiento algebraico, pensamiento funcional.*

Abstract

This study forms part of a research project on the continuing professional development of teachers in algebraic thinking and aims to describe the meanings that primary school teachers attribute to functional thinking before and during the design of mathematical modelling tasks. A case study is being conducted within the framework of qualitative research. To generate and analyse the data, a course aimed at teachers in Chile was designed and delivered, promoting theoretical and practical aspects related to functional thinking and mathematical modelling. The results show that, initially, functional thinking was understood as the search for a general rule, whereas, during the design and development of the task, the participants began to focus on the variable quantities and the relationships of dependence between them. It is concluded that, for the subjects studied, mathematical modelling has facilitated the construction of new understandings of functional thinking.

Keywords: *algebraic thinking, functional thinking, mathematical modelling, primary education, teacher education.*

INTRODUCCIÓN

La investigación sobre el pensamiento algebraico constituye actualmente un campo de especial interés en el ámbito internacional (e. g., Ellis y Özgür, 2024; Torres et al., 2021). En los últimos años, este interés se ha intensificado debido a la influencia de la corriente *early algebra,* que promueve la

Bastías, K., Moreno, A. y Cruz, M. F. (2026). Sentidos sobre pensamiento funcional en la formación de un grupo de profesoras de educación primaria. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (pp. 130-137). SEIEM.

incorporación de aspectos algebraicos en los currículos de distintos países (e. g., Australia, Chile, España, Estados Unidos y Singapur) desde la etapa de educación infantil (Alsina et al., 2024).

En este contexto, la modelización matemática constituye una estrategia de enseñanza propicia para el desarrollo del pensamiento algebraico, ya que favorece la atención a las relaciones entre cantidades, la formulación de estructuras generalizables y el análisis de la variación y la dependencia entre variables (Anhalt et al., 2021). Las propuestas que incorporan modelización pueden promover el desarrollo del pensamiento algebraico en general y del pensamiento funcional en particular. Actualmente, la modelización matemática como estrategia de enseñanza constituye un campo de interés en diversas investigaciones que analizan sus implicaciones para la práctica pedagógica, aunque su desarrollo en el ámbito de la educación primaria sigue siendo más limitado (Borromeo Ferri, 2018; Huincahue et al., 2018).

En este marco, resulta fundamental reflexionar sobre la formación del profesorado de educación primaria en álgebra temprana y, en particular, sobre las posibilidades de promover el trabajo algebraico mediante propuestas de modelización matemática, dado que su implementación depende en gran medida de las interpretaciones y decisiones docentes. En este contexto, el presente estudio se sitúa en un curso de formación continua orientado al uso de la modelización matemática para promover el desarrollo del pensamiento funcional en sus estudiantes de educación primaria. Desde esta perspectiva, el objetivo del estudio es describir los sentidos que docentes de educación primaria atribuyen al pensamiento funcional antes y durante el diseño de tareas de modelización matemática.

ELEMENTOS TEÓRICOS Y ANTECEDENTES

La construcción de sentido en torno a una noción (en este caso, el pensamiento funcional) constituye actualmente un foco relevante de investigación. En el ámbito de la educación matemática, se ha señalado que el razonamiento y la construcción de sentido son hábitos de pensamiento que deberían estar presentes en toda actividad matemática (Keazer y Menon, 2015/2016). En este marco, la construcción de sentido no solo implica comprender un concepto a partir de conocimientos previos, sino también producir respuestas, interpretar situaciones y dotar de significado a aquello que interpela al sujeto en un contexto determinado (Stillman et al., 2020). Desde esta perspectiva, el sentido puede variar entre personas e incluso modificarse en un mismo sujeto a lo largo del tiempo (Cruz, 2023).

Cañadas y Molina (2016) señalan que el pensamiento funcional es “un componente del pensamiento algebraico basado en la construcción, descripción, representación y razonamiento con y sobre las funciones y los elementos que las constituyen” (p. 210). Entre estos, la variable destaca como un elemento fundamental de la función, representando una cantidad que adopta diversos valores dentro de un conjunto numérico determinado (Cañadas et al., 2016). Kaput (2008) caracteriza este tipo de pensamiento como el estudio de las relaciones de covariación entre magnitudes y la generalización de dichas relaciones. Al respecto, Morales et al. (2018) señalan que identificar la covariación implica comprender cómo los cambios en la variable independiente afectan a la dependiente.

Este tipo de pensamiento involucra cuatro prácticas que favorecen su desarrollo: la generalización, entendida como la construcción, por parte del estudiante, de una certeza matemática general a partir de las relaciones de un conjunto de datos; la representación, que se realiza a través de palabras, símbolos, tablas o gráficos, y que varía según el nivel educativo del estudiante y su experiencia matemática; la justificación, que constituye una práctica esencial para validar conjeturas y apoyar la construcción de generalizaciones; y el razonamiento, que permite buscar argumentos para justificar ideas matemáticas y demostrar la veracidad de conjeturas. El estudiantado, al razonar en el contexto de una situación, establece conexiones entre las características del problema (Blanton, 2008).

Esteley y Cruz (2021), en un estudio con futuras profesoras de matemática, muestran que la producción de sentidos sobre la modelización se favorece cuando la experiencia de producir modelos se articula con la reflexión simultánea sobre el proceso de modelización matemática y sus

subprocesos. Resultados similares se muestran en Cruz et al. (2025). Asimismo, desde la formación del profesorado, Borromeo Ferri (2018) destaca la importancia de reflexionar sobre los propios procesos de aprendizaje para comprender cómo enseñar este proceso y llevarlo a la práctica docente.

El trabajo con modelización matemática promueve el desarrollo de un ciclo que se inicia con un problema del mundo real, el cual se simplifica para construir un modelo; dicho proceso exige formular supuestos e identificar los factores relevantes. A partir del trabajo matemático sobre ese modelo se obtienen resultados que posteriormente se interpretan y validan, junto con el proceso en su conjunto, considerando la posibilidad de reelaborar algunas de sus partes o incluso reiniciarlo por completo (Kaiser, 2020). Como señala Schliemann et al. (2022), el desarrollo del razonamiento matemático en la generalidad del estudiantado dependerá de cómo piensen sobre las relaciones entre las cantidades mientras participan en situaciones contextualizadas. Moreno et al. (2021) señalan que la modelización matemática permite establecer un puente entre las matemáticas escolares y la resolución de problemas reales, favoreciendo que el estudiantado perciba su aplicabilidad fuera del aula. En este estudio, esta potencialidad se vincula con el desarrollo del pensamiento funcional, al propiciar la identificación de cantidades variables y relaciones de dependencia.

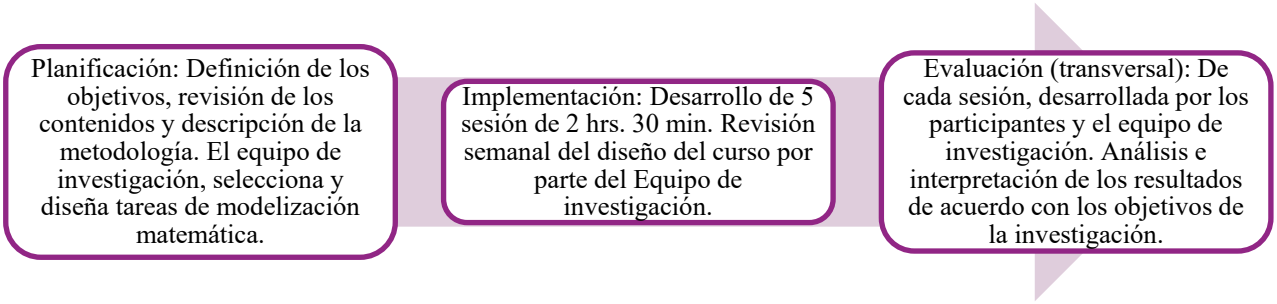
ELEMENTOS METODOLÓGICOS

Este estudio de caso, de naturaleza cualitativa, se centra en registros escritos y orales de dos profesoras de matemáticas de educación primaria (5º y 6º básico) chilenas (P1 y P2), quienes participaron en un proceso de formación continua sobre pensamiento funcional y modelización matemática. El objetivo del curso fue fortalecer las competencias docentes para el diseño y la implementación de tareas de modelización matemática orientadas al desarrollo del pensamiento funcional en sus estudiantes. El proceso se estructuró en cinco sesiones de carácter teórico-práctico.

A continuación, presentamos un esquema (Figura 1) del diseño del curso:

Figura 1

Síntesis del diseño del proceso formativo



Al inicio de la primera sesión se realizó un cuestionario escrito con preguntas abiertas vinculadas a los temas de estudio: pensamiento funcional (2 preguntas) y modelización matemática (2 preguntas). Posteriormente, durante las dos primeras sesiones, la dinámica de trabajo comprendió la resolución de tareas de modelización dirigidas a promover el pensamiento funcional, así como la reflexión y el análisis teórico de dichas temáticas. La tercera sesión se dedicó al diseño y reflexión de una tarea de modelización matemática orientada al desarrollo del pensamiento funcional en estudiantes de 5º y 6º de educación primaria. Las sesiones finales se centraron en la reflexión sobre la implementación con el estudiantado y reformulación de dichas tareas.

Para esta comunicación, se analiza el contraste entre los datos del cuestionario escrito realizado en la primera sesión, específicamente las preguntas N°3 y N°4, y los registros de audio de la tercera sesión, en la que el profesorado diseña la tarea de modelización matemática que posteriormente implementa

con sus estudiantes de educación primaria. El rigor ético se resguardó mediante el consentimiento informado de las docentes.

Tabla 1

Datos de análisis sesión 1 y 3

Primera sesión	Tercera sesión
Cuestionario inicial (pregunta escrita N°3) ¿Qué ideas les surgen cuando escuchan la expresión "pensamiento funcional"? ¿La asocian con una experiencia concreta o contenido escolar? (pregunta escrita N°4) Desde su punto de vista, ¿cómo describirían el pensamiento funcional y por qué creen que puede ser importante en el aprendizaje matemático? Registro escrito.	Diseño de una tarea de modelización matemática dirigida a estudiantes de 5° y 6° de primaria. Registros de audio (transcripciones) de las interacciones desarrolladas entre las docentes.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

El análisis de los resultados se centró en contrastar los sentidos atribuidos al pensamiento funcional por las docentes en dos momentos del proceso formativo: (1) las respuestas escritas al inicio del curso y (2) las interacciones producidas durante el diseño y desarrollo de una tarea de modelización matemática en la tercera sesión.

En el cuestionario inicial, en la pregunta N°3, las participantes respondieron: *"Pensamos en funciones, análisis de los datos, al traducir el lenguaje natural o cotidiano al lenguaje matemático"*. En la pregunta N°4, señalaron: *"transitar desde lo concreto al lenguaje abstracto y viceversa, y generalizar, (buscar una regla). Porque permite al estudiante que comprenda desde otra perspectiva"*. Estas respuestas sitúan el pensamiento funcional, principalmente, en la generalización, entendida como la búsqueda de una regla que describa un patrón. Esta perspectiva coincide con Blanton (2008), quien caracteriza la generalización como la construcción de una certeza matemática expresada mediante distintas representaciones. No obstante, la formulación de las docentes sugiere una comprensión aún incipiente del concepto, centrada en el tránsito entre representaciones concretas y simbólicas y vinculada a una visión tradicional del álgebra, donde la generalización se reduce a obtener una fórmula y no a buscar regularidades en la relación entre las variables implicadas, como establece Morales et al. (2018).

Durante la tercera sesión, se desarrolla una conversación (transcripción) entre las participantes mientras diseñan una tarea de modelización matemática situada en el contexto de una celebración escolar, en la que se plantea la compra de bebidas para quienes asistirán a ella. En este proceso, anticipan posibles decisiones y preguntas del estudiantado en torno a aspectos como el tamaño de las botellas, el tipo de bebida o el número de participantes, lo que supone transformar el problema planteado en un contexto real e iniciar su traducción hacia un modelo matemático (Moreno et al., 2021). Estas discusiones, ponen de manifiesto que comienzan la fase de simplificación (Kaiser, 2020). Se evidencia que las docentes comienzan a identificar cantidades variables, como el número de participantes, el volumen de bebida, la cantidad de vasos y el coste asociado, así como en cantidades constantes como la capacidad de las botellas y de los vasos que se comprarán. Como señala Schliemann et al. (2022), el modo en que piensen estas variables, las constantes y las relaciones entre ellas, determinará la generalidad.

1. P1: Igual me parece interesante, pero me gustó más la idea de lo de bebestible. ¿Sabes por qué? Porque en la torta ya sabemos que van a ser de 20 a 25 personas, pero si lo dejamos como ambiguo, los

niños igual se van a preguntar, ¿De cuánto van a ser las bebidas? ¿De 3 litros? ¿De 2 litros? ¿De un litro y medio? […]

2. P2: ¿Cuántos van a ser los vasos? ¿De cuántos mililitros?
3. P1: Claro, claro. Y a todos les gustará, no sé cómo... Pensemos solo en las bebidas. Entonces, algunos van a pasar como el tema de galletas. Claro, pero no todos toman bebidas. A algunos les gusta el jugo, a otros les gusta el agua. Entonces quizás a los adultos, los adultos van a querer tomar café. Entonces igual tienen como harto para pensar, me gustó esa idea de la bebida. Que se puede hacer. Igual lo podría hacer en mi escuela, que también les pedimos bebidas, pero la verdad es que no. Eso no lo dan. Entonces podríamos hacer que nos sirvan a las dos. […]
4. P1: En la Escuela de San Diego se está organizando la actividad de finalización de semestre. La escuela se hará cargo de la compra de bebidas para todos los participantes de las convivencias por curso ¿Cuántas bebidas deberá comprar la dirección de la escuela? ¿Cuánto dinero deberá invertir la escuela para esta compra? […]

Asimismo, las docentes identifican posibles relaciones entre estas cantidades, aunque inicialmente no las expresan de manera formalizada. Por ejemplo, al plantear preguntas sobre cuántas bebidas deben comprarse o cuánto dinero será necesario invertir, configuran un escenario que permite analizar la covariación entre cantidades, característica central del pensamiento funcional (Kaput, 2008). En este sentido, la tarea diseñada abre oportunidades para establecer relaciones generales, como el consumo por persona multiplicado por el número de participantes, lo que involucra prácticas de generalización y justificación propias del pensamiento funcional (Blanton, 2008). Además, se observa que las docentes recuperan experiencias previas, como la tarea de las galletas, para avanzar en sus reflexiones.

Posteriormente, las profesoras deciden resolver la tarea diseñada. En este contexto, la siguiente conversación evidencia cómo avanzan en la identificación de variables clave al transitar por distintas fases del ciclo de modelización, mientras intentan resolver la tarea que ellas mismas están elaborando. En particular, durante la etapa de simplificación, identifican la necesidad de determinar el número total de participantes y el volumen de bebida requerido. En este punto, la cantidad de participantes comienza a operar como una variable independiente, mientras que la cantidad total de bebida necesaria depende de esta.

5. P2: Ya. Entonces, tratemos de resolver esto. Ya, partimos entonces con la simplificación.
6. P1: Ya, simplificación. Lo más importante, descartar distractores.
7. P2: Es que no veo que haya tantos distractores, es que es como muy concreto de lo que se va a comprar.
8. P1: Lo que pasa es que ahí es lo mismo que nos pasó a nosotros, porque tenemos que sacar y ver cuántos participantes, cuál es la cantidad total de participantes.
9. P2: Entonces, vamos a buscar a los participantes, el valor de la bebida, los ml por vaso […] o sea, y el litro de la bebida. Ya, ¿qué les colocamos? ¿qué le colocas tu?
10. P1: Pero además dice cuántas bebidas, entonces se comprarán bebidas de tres.
11. P2: Por eso, es que aquí le puse más o menos, como en general, los participantes, porque hay que ver quiénes van a participar, si apoderados, profesores, asistentes, estudiantes. Lo segundo, el valor de la bebida, que eso va a depender de los litros de las botellas que se compran. Generalmente siempre se compra como la de tres litros, pero hay que ver ahí. El tamaño del vaso, porque igual, por ejemplo, generalmente las bebidas siempre vienen para 200 ml. Yo me compré un lecherito, porque yo tomo leche, y tomo 200 ml de leche. Que no te alcanza ni a ser la taza completa, o un vaso es como un poquito menos de los 200. Entonces generalmente los vasos cuando se venden son de 250 ml, o un poquito más. No son, porque 200 ml de verdad que es poquito.

12. P1: Aquí también podemos colocar cantidad de bebida del participante, si asistieran los apoderados […] también podemos colocar así, tamaño de los vasos y capacidad de la bebida.
13. P2: ¿Cuánto rinde? […]
14. P1: ¿Cuánto rinde?
15. P2: Por litro.
16. P1: ¿Cuánto rinde?
17. P2: Por botella.
18. P1: ¿Cuántos vasos rinde?

En el desarrollo de la tarea, P1 y P2 analizan el consumo individual por participante. La incorporación de la fase de simplificación por parte de P2 muestra que la tarea sigue una estructura sistemática basada en el ciclo de modelización matemática. Este enfoque permite abordar la tarea como una instancia de enseñanza y aprendizaje, en sintonía con Moreno et al. (2021), Cruz (2023) y Cruz et al. (2025). A la vez, las participantes identifican variables clave del problema, en coherencia con la fase de simplificación. Tal como señalan Blanton et al. (2011), la primera relación establecida sitúa las cantidades variables de manera conjunta, considerando la cantidad total de participantes como variable independiente, dado que el volumen total de bebida necesario depende de este número.

Posteriormente, las docentes incorporan nuevos elementos al modelo al considerar la capacidad de los envases y el tamaño de los vasos. Al establecer que un vaso contiene aproximadamente 250 ml, introducen una relación proporcional entre el volumen de bebida y la cantidad de vasos que se pueden servir. Este proceso implica una progresiva abstracción desde el contexto real hacia un modelo matemático, en línea con lo descrito por Kaiser (2020) en el ciclo de modelización.

A continuación, las participantes profundizan en el análisis al considerar el consumo promedio por participante. El episodio que se reproduce a continuación muestra cómo, en este momento, se explicita la necesidad de generalizar la relación entre el volumen de bebida y el número de vasos. Las docentes determinan que un litro de bebida permite servir aproximadamente cuatro vasos, lo que conduce a establecer que tres litros producen doce vasos.

19. P2: ¿Cuántos vasos vamos a calcular por niño?
20. P1: Eso. Va a ver que pensar en un vaso por niños.
21. P2: ¿Un vaso?
22. P1: Porque no todos toman.
23. P2: Pero aquí hay que generalizar, pensar en todo. Acuérdate que en la validación viene en esas preguntas.
24. P1: Ya, ya. Pensemos en dos vasos, entonces, por participantes, por niño […] En tres litros nos alcanzan 12 vasos.
25. P2: Ya.
26. P1: Porque en un litro hay cuatro vasos.

Las participantes establecen una relación de proporcionalidad entre el volumen de bebida y el número de vasos. Al determinar que se obtienen cuatro vasos por cada litro (y, en consecuencia, doce vasos por cada tres litros), definen un modelo lineal de proporcionalidad, en el que la cantidad de litros actúa como variable independiente y la cantidad de vasos como variable dependiente. Esta estructura permite deducir que, al aumentar el volumen de bebida, se incrementa proporcionalmente el número de vasos, lo que finalmente determina los litros necesarios para la celebración. En este diálogo se construye una generalización a partir de las relaciones identificadas en las cantidades del contexto, manifestando la práctica de generalización descrita por Blanton (2008) y Torres et al. (2021).

Además, dicha generalización se expresa inicialmente mediante lenguaje verbal, lo que resulta coherente con las formas de representación características de los niveles de educación primaria.

En conjunto, estos resultados muestran que, durante el proceso de diseño y resolución de la tarea de modelización matemática, las docentes comienzan a articular su conocimiento matemático con la identificación de variables y el análisis de relaciones de covariación. De este modo, la modelización matemática se configura como un espacio que favorece la construcción de nuevos sentidos en torno al pensamiento funcional y su posible desarrollo en la educación primaria.

CONCLUSIONES

El análisis realizado permitió identificar una modificación en los sentidos atribuidos al pensamiento funcional por parte de las docentes a lo largo del proceso formativo. Inicialmente, este se entendía principalmente como la búsqueda de una regla general y como el tránsito entre lo concreto y lo abstracto, mostrando una comprensión aún restringida del concepto. Sin embargo, durante el diseño y desarrollo de la tarea de modelización matemática, las participantes comenzaron a centrar su atención en las cantidades variables de la situación y en las relaciones de dependencia entre ellas, aproximándose a una comprensión más relacional del pensamiento funcional.

Asimismo, se destaca el valor de una experiencia formativa que articula distintos momentos: reflexionar sobre el pensamiento funcional y la modelización matemática, trabajar con tareas abiertas de modelización que promuevan la identificación de variables y el análisis de relaciones, y diseñar propuestas para su implementación en el aula. Este proceso parece favorecer una apropiación progresiva de ideas vinculadas al pensamiento funcional y una transformación en los sentidos que las profesoras le atribuyen, en línea con Cruz (2023) y Cruz et al. (2025). Además, estos resultados coinciden con Borromeo Ferri (2018), quien destaca la importancia de reflexionar sobre los propios procesos de aprendizaje para comprender cómo enseñar modelización matemática y llevarla a la práctica docente.

Como aportación, el estudio evidencia que un proceso de formación continua que articula pensamiento funcional y modelización matemática puede contribuir a que el profesorado amplíe sus concepciones sobre el trabajo algebraico escolar. No obstante, estos hallazgos deben interpretarse de forma situada, ya que se trata de un estudio de caso con un número reducido de participantes y centrado en un momento específico del proceso formativo.

Como proyección, resulta relevante indagar cómo estos sentidos construidos durante la formación se sostienen o transforman posteriormente en la práctica de aula. En conjunto, los resultados sugieren que la modelización matemática puede enriquecer la formación del profesorado y favorecer el desarrollo del pensamiento funcional en los primeros niveles educativos.

Agradecimientos

Este trabajo se ha realizado con el apoyo de los Proyectos PID2020-113601GB-I00, financiado por la Agencia Estatal de investigación (AEI) de España y PID 2024-157106NB-100; financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033. Y FENDER, UE.

Referencias

Alsina, Á., Pincheira, N. y Delgado-Rebolledo, R. (2024). The professional practice of designing tasks: how do pre-service early childhood teachers promote mathematical processes in early algebra? *ZDM - Mathematics Education*, 56, 1197-1210. https://doi.org/10.1007/s11858-024-01636-1

Anhalt, C. O., Cortez, R. y Aguirre, J. M. (2021). Mathematical modeling thinking: A construct for developing mathematical modeling competency. In J. M. Suh, C. Anhalt, y R. Cortez (Eds.), *Exploring mathematical modeling with young learners* (pp. 45-66). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-63900-6_3

Blanton, M. L. (2008). *Algebra and the elementary classroom: Transforming thinking, transforming practice*. Heinemann.

Blanton, M., Levi, L., Crites, T. y Dougherty, B. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in Grades 3-5*. NCTM.

Borromeo Ferri, R. (2018). *Learning How to Teach Mathematical Modeling in School and Teacher Education*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68072-9

Cañadas, M. C., Brizuela, B. M. y Blanton, M. (2016). Second graders articulating ideas about linear functional relationships. *The Journal of Mathematical Behavior, 41,* 87-103. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.10.004

Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruíz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209-218). Comares

Cruz, M. F. (2023). *Sentidos, validaciones y definiciones al interior de una vivencia de formación de futuras profesoras en matemática mediada por un escenario de modelización matemática en el contexto de una universidad pública argentina*. Universidad Nacional de Córdoba. https://rdu.unc.edu.ar/handle/11086/548249

Cruz, M. F., Esteley, C. y Moreno, A. (2025). Sentidos producidos sobre validación en la formación inicial docente en el marco de tareas de modelización matemática. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. 493). SEIEM.

Ellis, A. B. y Özgür, Z. (2024). Trends, insights, and developments in research on the teaching and learning of algebra. *ZDM–Mathematics Education*, *56*(2), 199-210. https://doi.org/10.1007/s11858-023-01545-9

Esteley, C. y Cruz, M. F. (2021). *Producción de sentidos sobre modelización: el caso de un grupo de futuras profesoras, 30 (2), 269-296.* https://doi.org/10.48489/quadrante.23937

Huincahue, J., Borromeo-Ferri, R. y Mena-Lorca, J. (2018). El conocimiento de la modelación matemática desde la reflexión en la formación inicial de profesores de matemática. *Enseñanza de las Ciencias, 36*(1), 99-115. https://ensciencias.uab.cat/article/view/v36-n1-huincahue-borromeo-mena

Kaiser, G. (2020). Mathematical Modelling and Applications in Education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (2ª ed.) (pp. 553-561). Springer.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? En J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). Nueva York, NY: Lawrence Erlbaum Associates.

Keazer, L. M. y Menon, R. S. (2015/2016). Reasoning and sense making begins with the teacher. *The Mathematics Teacher, 109 (5),* 342–349. https://doi.org/10.5951/mathteacher.109.5.0342

Morales, R., Cañadas, M. C., Brizuela, B. M. y Gómez, P. (2018). Relaciones funcionales y estrategias de alumnos de primero de Educación Primaria en un contexto funcional. *Enseñanza de las Ciencias, 36*(3), 59-78. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2472

Moreno, A., Marín, M. y Ramírez-Uclés, R. (2021). Errores de profesores de matemáticas en formación inicial al resolver una tarea de modelización. *PNA*, *15*(2), 109–136. https://doi.org/10.30827/pna.v15i2.20746

Schliemann, A. D., Carraher, D. W. y Teixidor-i-Bigas, M. (2022). Teacher development structured around reasoning about functions. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *20*(4), 793-816. https://doi.org/10.1007/s10763-021-10169-y

Stillman, G. A., Kaiser, G. y Lampen, C.E. (Eds.). (2020). *Mathematical modelling education and sense-making*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-37673-4

Torres, M. D., Moreno, A. y Cañadas, M. C. (2021). Generalization process by second grade students. *Mathematics, 9*(10). https://doi.org/10.3390/MATH9101109

ESTRATEGIAS DE ESTUDIANTES DE SECUNDARIA EN LA ESTIMACIÓN Y USO DE LA PROPORCIÓN MUESTRAL

Secondary school students' strategies in estimating and using the sample proportion

Begué, N.[a], Ramos-Pérez, H.[b], Gea, M. M.[b] y Stuardo-Aguayo, A.[b]

[a]Universidad de Zaragoza, [b]Universidad de Granada

Resumen

La inferencia estadística se fundamenta en el muestreo para obtener información sobre la población. Este trabajo tiene como objetivo analizar estrategias y dificultades de 104 estudiantes de educación secundaria al estimar y aplicar la proporción muestral. Los resultados muestran que solamente dos estudiantes resuelven correctamente la tarea, sin observar una mejora según el curso, con una mayor frecuencia de razonamientos aditivos. El análisis de las respuestas que aplican razonamiento proporcional muestra una diversidad de estrategias siendo las más frecuentes: la razón, la regla de tres y la fracción como operador. Sin embargo, su cálculo generalmente erróneo se debe a una comprensión incorrecta de la estructura multiplicativa, además de una comprensión insuficiente del contexto de las tareas de remuestreo, lo que explica el reducido número de respuestas correctas.

Palabras clave: *proporción muestral, estimación, razonamiento proporcional, estrategias*

Abstract

Statistical inference relies on sampling to obtain information about a population. The aim of this study is to analyse the strategies and difficulties encountered by 104 secondary school students when estimating and applying the sample proportion. The results show that only two students solved the task correctly, with no improvement observed across year groups, and a higher frequency of additive reasoning. Analysis of the responses that apply proportional reasoning reveals a variety of strategies, the most frequent being: ratio, the rule of three, and fractions as operators. However, their generally incorrect calculations stem from a misunderstanding of the multiplicative structure, as well as an insufficient grasp of the context of the resampling tasks, which explains the low number of correct answers.

Keywords: *sample proportion, estimation, proportional reasoning, strategies*

INTRODUCCIÓN

La inferencia estadística es fundamental para la construcción del conocimiento a través de la toma de datos, lo que nos permite obtener información de la población de la que se construyen las muestras (Begué et al., 2019). Burrill y Biehler (2011) resaltan el papel del muestreo como una idea estocástica fundamental, siendo una de sus finalidades el obtener información de una característica de la población; por lo que su comprensión es un elemento clave para alcanzar la alfabetización estadística (Ben-Zvi et al., 2015).

El marco curricular estatal introduce el estudio del muestreo con la enseñanza del sentido estocástico en educación primaria (MEFP, 2022a), que se profundiza en la etapa de ESO (MEPF, 2022b). Al considerar en nuestro estudio la proporción en una población, tenemos en cuenta que el razonamiento proporcional se viene forjando desde segundo ciclo de educación primaria y en tercer ciclo se incorpora con un saber básico dentro de la enseñanza del sentido numérico (MEFP, 2022a). Para educación primaria se propone el desarrollo de estrategias de resolución para el trabajo de situaciones en las que opera la proporcionalidad directa como la igualdad de razones, la reducción a la unidad,

Begué, N., Ramos-Pérez, H., Gea, M. M. y Stuardo-Aguayo, A. (2026). Estrategias de estudiantes de secundaria en la estimación y uso de la proporción muestral. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (pp. 138-145). SEIEM.

entre otros. Durante la etapa de secundaria se trabaja en estas relaciones y se profundiza en la proporcionalidad inversa (MEFP, 2022b, p. 41732), de ahí nuestro interés por considerar una muestra de estudiantes en todos los niveles de la ESO, que comprende los cursos de 1º a 4º (12 a 15 años). Por tanto, el objetivo de nuestro estudio se centra en analizar las estrategias y dificultades de estudiantes de Educación Secundaria Obligatoria (ESO) al estimar la proporción y el total poblacional, conocida una proporción muestral, y manejar estos conceptos para estimar una nueva proporción muestral.

MARCO TEÓRICO

Tomamos como fundamento el marco del Enfoque Ontosemiótico (EOS), en torno al conocimiento e instrucción matemática (Godino, 2024), cuyo eje vertebrador es el significado asociado a un objeto matemático, que se construye por medio de la actividad matemática. Se distingue entre el significado institucional, que considera aquellas prácticas matemáticas que pueden darse en un entorno académico al resolver una situación-problema, mientras que el significado personal tiene lugar en las prácticas matemáticas ligadas al individuo cuando enfrenta la situación-problema. Así, el proceso de enseñanza y aprendizaje da espacio a que tenga lugar el acoplamiento entre el significado personal e institucional. En nuestro estudio nos enfocamos en la comprensión que sucede cuando se aproximan el significado personal e institucional, que podemos evaluar a través del análisis de las prácticas personales cuando se demanda la resolución de una situación-problema (Godino, 2024).

Antecedentes

Los trabajos previos centrados en la comprensión de la proporción muestral en la etapa de secundaria, relacionados con nuestro estudio, se describen a continuación.

En cuanto a la comprensión, Shaughnessy et al. (2004) informan del uso de tres concepciones en torno a la muestra por estudiantes: a) aditiva, cuando no se conciben las muestras como subconjuntos disjuntos de la población, b) proporcional, cuando se asume la representatividad muestral; y c) distribucional, cuando se estima considerando la variabilidad en la distribución muestral. En su estudio analizan la comprensión de 272 estudiantes (10-19 años) en una situación de muestreo en la que se demanda estimar la proporción de caramelos al tomar muestras de distinto tamaño (n=10 y 100) y si esperan que se obtengan los mismos resultados al tomar una nueva muestra. La mayoría de los estudiantes sobreestimaron la variabilidad de la distribución muestral, independientemente del tamaño de la muestra.

Begué (2019) analiza la percepción de la variabilidad y representatividad muestral en estudiantes españoles de secundaria (13-14 años y 15-16 años) y bachillerato (17-18 años), observando la dificultad que presentan para alcanzar un razonamiento distribucional del muestreo (Shaughnessy et al., 2004). El instrumento que aplica permite analizar la comprensión de la proporción muestral, considerando sucesos equiprobables y no equiprobables y variando el tamaño muestral. Los resultados muestran que los estudiantes presentan más dificultades para identificar la variabilidad en muestras de tamaño mayor, ya que tienden a sobreestimar la variabilidad. Con respecto a la estimación de la proporción muestral, los estudiantes realizan estimaciones más apropiadas en experiencias con sucesos equiprobables (lanzamiento de una moneda) que no equiprobables (lanzamiento de chinchetas o a canasta en baloncesto).

Solo Ruiz-Reyes (2020) aplica un instrumento a estudiantes de secundaria con el que analiza la comprensión de la proporción muestral. El 51,4% estimó correctamente la proporción de peces marcados en un estanque. Sin embargo, se muestra un razonamiento proporcional y algebraico insuficiente al responder a las preguntas posteriores, pues los porcentajes de respuestas correctas disminuyeron. Solo un 39,2% estimó correctamente el total poblacional, mientras que solo el 38,5% estimó el valor esperado de peces marcados en una nueva muestra.

Nuestro estudio completa estas líneas de investigación, al aplicar un mismo instrumento a toda la etapa de secundaria (11 a 14 años). Además, el trabajo analiza las estrategias de los procesos de resolución que aplican, según su razonamiento proporcional.

MÉTODO

El método de investigación en nuestro estudio es cualitativo y descriptivo (León y Montero, 2015; Sampieri, 2018). Analizamos las respuestas abiertas de una muestra intencionada (por la accesibilidad a la misma) de 104 estudiantes de secundaria, en un mismo centro educativo durante el curso académico 2022-2023, ya que una de las autoras era profesora en el centro en el que se implementa la herramienta. Los estudiantes comprenden la edad entre los 11 a 16 años en la distribución de: 30 estudiantes en 1º ESO, 32 en 2º ESO, 17 en 3º ESO y 25 en 4º ESO.

Las variables que se analizan son la corrección de la respuesta y la estrategia empleada. El método de análisis que aplicamos es inductivo y sistemático, propio del análisis de contenido (Neuendorf, 2018), pues incorpora nuevas categorías de las que previamente se han identificado en la literatura, cuando es necesario; y se completa el análisis con un estudio estadístico de carácter descriptivo, que informa de las frecuencias y porcentajes de cada categoría en la muestra considerada. La fiabilidad en la codificación se garantiza por la triangulación que se aplica entre las autoras del trabajo, según el listado de categorías considerado.

Instrumento de evaluación

El instrumento corresponde al ítem utilizado por Ruiz-Reyes (2020) y Gómez-Torres (2014), quienes lo adaptaron de Fischbein y Gazit (1984). El primer apartado pide estimar la proporción poblacional y el segundo apartado pide estimar el total poblacional, por tanto, se exige aplicar el razonamiento proporcional considerando el dato de la proporción muestral indicado en el enunciado (Figura 1). El último apartado pide estimar la composición de una nueva muestra.

Figura 1

Instrumento de evaluación

Ítem 1. En un estanque hay peces, pero el dueño no sabe cuántos hay. Toma 200 peces, les pone una marca y los devuelve al estanque. Al día siguiente, el dueño toma 250 peces del estanque y encuentra que 25 de ellos están marcados y el resto no:

a. ¿Qué proporción aproximada de peces del estanque están marcados?
b. ¿Cuál es el número aproximado de peces en el estanque?
c. Si el dueño toma ahora 100 peces más del estanque, ¿cuántos aproximadamente estarán marcados?

RESULTADOS

Estimación de la proporción poblacional

A continuación, se describen las distintas categorías empleadas al clasificar las respuestas en el análisis del primer apartado del ítem. Con respecto a los estudiantes que aplican un proceso de resolución que justifica la respuesta numérica a la pregunta, se observan dos tipos:

Respuestas que aplican razonamiento proporcional. Estas respuestas se fundamentan en la estructura multiplicativa entre las cantidades indicadas en la tarea para dar un valor numérico empleando distintas representaciones: verbal, fraccionaria o porcentaje.

Respuestas que aplican razonamiento aditivo. Son respuestas incorrectas, que aplican una relación aditiva entre cantidades para estimar la proporción poblacional, por lo que se reinterpreta la situación con una estructura aditiva, según los cálculos realizados, como se muestra en la respuesta de E69.

E69: 200-25=175 son los que peces que están marcados, pero no aparecieron.

Por último, identificamos tres categorías de respuestas que no siguen un proceso de resolución claro:

Sin estrategia. Son respuestas que proporcionan un valor numérico sin soporte procedimental, por lo que no se puede comprender cómo se ha obtenido el valor propuesto.

Imprecisa. Otros estudiantes responden sin coherencia o bien omiten datos que permitan entender las estrategias que se aplican. Por ejemplo, E2 permite suponer que haya realizado la resta 250-25 y luego haya sumado 200, pero no indica los cálculos; además, explica con cierta incoherencia el total.

E2: 225 están marcados, porque hay 25 marcados y los demás no.

Imposible proporcionar respuesta. Se trata de una categoría de respuesta minoritaria, aunque importante para considerar, porque evidencia una dificultad específica relacionada con la inferencia al manejar el azar y la incertidumbre (Begué et al., 2019), como se observa en E23.

E23: No se sabe porque todavía no los han contado todos.

En la Tabla 1 se muestra el bajo porcentaje de respuestas que aplican una estrategia correcta o *razonamiento proporcional* (28,8%) y de estas respuestas, aproximadamente el 40% proporcionan una estimación correcta del estadístico. Además, aunque se observa una mejora del resto de cursos con 1ºESO, el porcentaje de estudiantes que estima correctamente, independientemente de si se aplica o no una estrategia, no aumenta conforme se avanza en el curso escolar y representa el 13,5% del total de estudiantes, siendo un valor bajo. La situación tampoco mejora al observar el porcentaje de respuestas correspondientes a las categorías *razonamiento aditivo* y *no responde,* porque aumentan desde 3ºESO y 4ºESO. También, cabe destacar la distribución prácticamente uniforme de respuestas incorrectas *sin estrategia*. Aun así, el porcentaje de respuestas *imprecisas* desciende conforme se avanza en el curso.

Tabla 1

Frecuencia y porcentaje de respuestas al apartado a según el proceso de resolución y curso

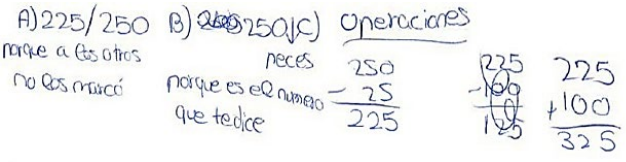
Proceso de resolución	1ºESO	2ºESO	3ºESO	4ºESO	Total
Razonamiento proporcional (correcta)	1(3,3)	4(12,5)	3(17,6)	4(16,0)	12(11,5)
Razonamiento proporcional (otros valores)	4(13,3)	6(18,8)	3(17,6)	5(20,0)	18(17,3)
Razonamiento aditivo	3(10,0)	3(9,4)	3(17,6)	4(16,0)	13(12,5)
Sin estrategia (correcta)	0	1(3,13)	0	1(4,0)	2(1,9)
Sin estrategia (otros valores)	8(26,7)	8(25,0)	4(23,5)	6(24)	26(25,0)
Imprecisa	9(30,0)	7(21,9)	1(5,8)	1(4,0)	18(17,3)
"Imposible dar un valor"	1(3,3)	0	0	0	1(1,0)
No responde	4(13,3)	3(9,4)	3(17,6)	4(16,0)	14(13,5)

Completamos nuestro análisis considerando las respuestas que aplican razonamiento proporcional, que no se ha considerado en estudios previos. De manera sistemática e inductiva, propia del análisis de contenido, clasificamos los procedimientos que se aplican, encontrando las siguientes categorías:

Razón. Se expresa la relación multiplicativa de dos cantidades a través de la construcción de la razón, expresada como fracción con significado parte-todo. Solamente tres de las once respuestas que se identifican bajo esta categoría proporcionan un resultado correcto (E48). La mayoría de las respuestas incorrectas se apoyan en el apartado b para la identificación de las cantidades, donde aplican un razonamiento aditivo sobre los datos del enunciado (Figura 2).

Figura 2

Respuesta incorrecta que aplica la razón de E55



E48: a) 25/250; b) 250x8=2000; c) 18

Ecuación de proporcionalidad. Los estudiantes expresan una igualdad entre razones. Solamente se identifican dos estudiantes que siguen esta estrategia. La Figura 3 muestra la respuesta de E67 que establece la proporción para informar de la relación a través del porcentaje. Sin embargo, en la respuesta de E15 (Figura 4), la primera razón es errónea y además se identifica un error en el cálculo analítico al considerar la cancelación de términos.

Figura 3

Respuesta correcta que aplica la ecuación de proporcional de E67

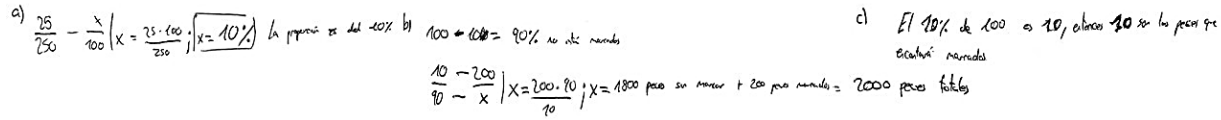
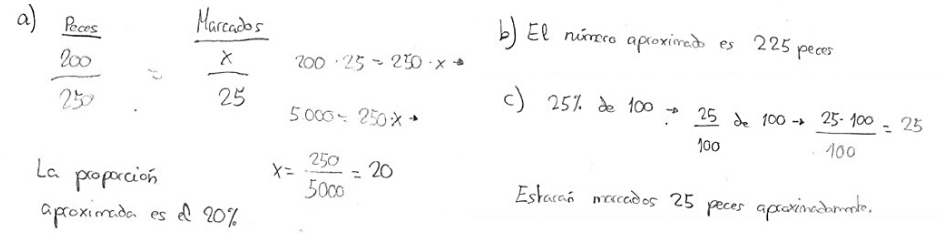


Figura 4

Respuesta incorrecta que aplica la ecuación de proporcional de E15

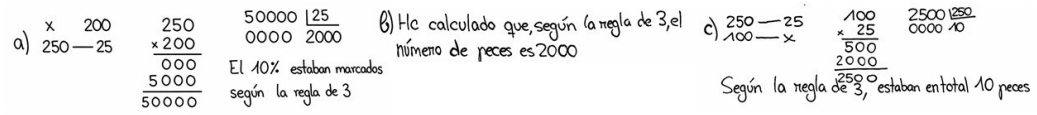


a) La proporción aproximada es el 20%. b) El número aproximado es 225 peces. c) Estarán marcados 25 peces.

Regla de tres. Seis estudiantes aplican una estrategia derivada de la proporcionalidad, pero sin establecer la ecuación de proporcionalidad. La mitad de los que se identifican en esta categoría estiman correctamente la proporción poblacional (Figura 5). Las respuestas incorrectas aplican estrategias aditivas sobre los datos del enunciado, como muestra E8.

Figura 5

Respuesta correcta que aplica la regla de tres de E5

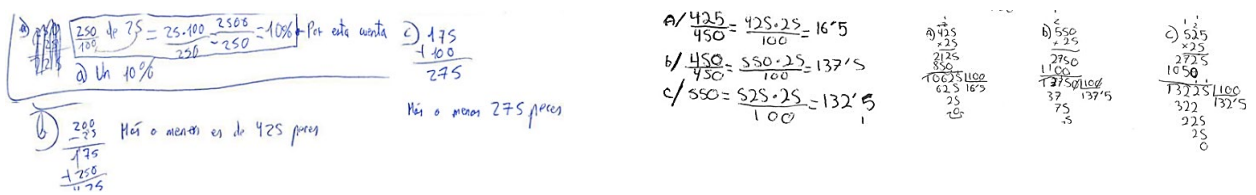


E8: a. el 45%. El 425 es el 100% 200 es igual al 45%. b. 425 a 250 le restamos 25 y a 225 le sumamos 200 es igual a 425.

Fracción como operador. Se identifican tres respuestas en las que se construye la razón que actúa como operador sobre una cantidad. Estas respuestas presentan muchos errores de cálculo (Figura 6a). El estudiante E3 aplica la fracción $\frac{25}{100}$ como operador (Figura 6b), sin dotar de significa su cálculo.

Figura 6

Respuestas que aplican la fracción como operador

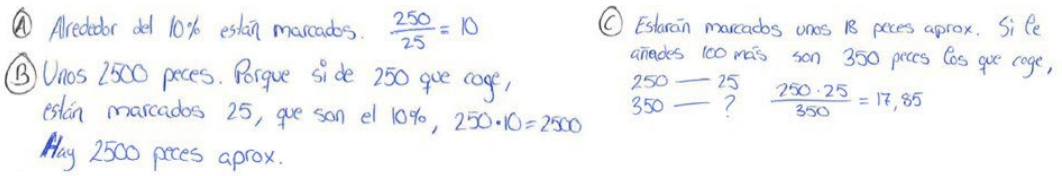


a. E50 b. E3

Confusión de la idea de porcentaje con relación multiplicativa entre dos cantidades. Se identifican tres respuestas en la que el resultado de dividir el número total de peces con respecto al número de peces marcados informa del porcentaje (Figura 7). La estimación es correcta, pero muestra errores sobre la comprensión del porcentaje.

Figura 7

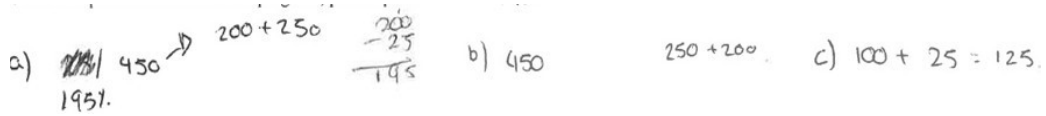
Respuesta de E78



Confusión de la cantidad con porcentaje. Son respuestas en las que el estudiante considera que la cantidad informa del porcentaje, como se observa en la respuesta de E57 (Figura 8), quien realiza una serie de operaciones aritméticas para informar del número de peces marcados y, finalmente, incluye de manera acrítica el símbolo del porcentaje. Este error se presenta en algunas de las estrategias anteriores, identificándose en 6 estudiantes.

Figura 8

Respuesta de E57



Estimaciones del total poblacional

El análisis de respuestas al segundo apartado sigue el criterio del apartado anterior. Por tanto, la clasificación de las estrategias emplea las categorías previamente identificadas, adaptadas a la tarea solicitada. Cabe destacar que no se identifican las categorías: *Sin estrategia* e *Imposible dar un valor*.

Respuestas que aplican un razonamiento proporcional. Son respuestas que aplican operaciones de estructura multiplicativa para estimar el número de peces que constituyen la población.

Respuestas que aplican razonamiento aditivo. Son respuestas incorrectas en las que se estima la proporción poblacional aplicando operaciones aditivas (Figuras 6a y 8).

Sin estrategia. Son respuestas que proporcionan un valor sin un procedimiento de cálculo que justifique el valor numérico. En este caso, las 29 respuestas que representa el 27,9% del total de la muestra (Tabla 2) no proporcionan una respuesta numérica correcta.

Imprecisa. Son respuestas en las que la resolución no se sustenta en operaciones a través de las cuales se justifique la respuesta numérica.

E10: 545 porque ha cogido muchos peces y a lo mejor hay unos pocos en el estanque.

Tabla 2

Frecuencia y porcentaje de respuestas al apartado b según el proceso de resolución y curso

Proceso de resolución	1ºESO	2ºESO	3ºESO	4ºESO	Total
Razonamiento proporcional (N=2000)	1(3,3)	1(3,1)	1(5,8)	0	3(2,9)
Razonamiento proporcional (otros valores)	1(3,3)	0	2(11,8)	1(4,0)	4(3,8)
Razonamiento aditivo	15(50,0)	16(50,0)	5(29,4)	12(48)	48(46,2)
Sin estrategia (otros valores)	5(16,7)	12(37,0)	5(29,4)	7(28)	29(27,9)
Imprecisa	4(13,3)	3(9,4)	1(5,8)	1(4,0)	9(8,7)
No responde	4(13,3)	0	3(17,6)	4(16)	11(10,6)

La Tabla 2 muestra que aproximadamente la mitad aplican un razonamiento aditivo para estimar el total poblacional que toma valores similares para todos los cursos a excepción de 3ºESO. Le siguen las respuestas "sin estrategia" con una presencia similar en todos los cursos, salvo en 2ºESO. Disminuyen las respuestas que siguen un razonamiento proporcional. A continuación, se completa este análisis según la corrección en la respuesta analizando la estrategia seguida.

Con respecto a las respuestas clasificadas como razonamiento proporcional, las tres estudiantes que estiman correctamente han sido consistentes con la estrategia para el primer apartado (Figuras 3 y 5) y E48. Los cuatro estudiantes que proporcionan un valor incorrecto se apoyan en distintas estrategias: dos aplican la regla de tres (Figura 7), mientras que los otros dos aplican la fracción como operador (Figura 6b) y la ecuación de proporcionalidad, respectivamente.

Estimaciones de un valor esperado

El análisis de las respuestas del tercer apartado se clasifica según el procedimiento que justifica el resultado numérico aportado (Tabla 3), dando lugar a las mismas categorías que se identifican para el primer apartado. En la Tabla 3 se observa que aumenta el número de respuestas que siguen un razonamiento proporcional, aunque el número de respuestas correctas es escaso, representando el 2,9% de la muestra. Aproximadamente una cuarta parte de la muestra sigue un razonamiento aditivo, mientras que un porcentaje similar proporciona un valor numérico sin un proceso de resolución que lo justifique.

Tabla 3

Frecuencia y porcentaje de respuestas al apartado c según el proceso de resolución y curso

Proceso de resolución	1ºESO	2ºESO	3ºESO	4ºESO	Total
Razonamiento proporcional (correcta)	1(3,3)	0	1(5,9)	1(4,0)	3(2,9)
Razonamiento proporcional (otros valores)	4(13,3)	3(9,4)	3(17,6)	1(4,0)	11(10,6)
Razonamiento aditivo	7(23,3)	12(37,5)	0	6(24,0)	25(24,0)
Sin estrategia (correcta)	0	0	0	1(4,0)	1(1,0)
Sin estrategia (otros valores)	6(20,0)	10(31,3)	7(41,2)	5(20,0)	28(26,9)
Imprecisa	6(20,0)	4(12,5)	3(17,6)	4(16,0)	17(16,3)
"Imposible dar un valor"	0	1(3,1)	0	1(4,0)	2 (1,9)
No responde	6(20,0)	2(6,3)	3(17,6)	6(24,0)	17(16,3)

Las estrategias de las respuestas que siguen un razonamiento proporcional muestran que los tres estudiantes responden correctamente son dos son consistentes a la estrategia aplicada en el primer apartado (Figuras 5) a excepción de E67 (Figura 3). De las 11 respuestas incorrectas bajo este procedimiento, se identifican dos estrategias: la aplicación de la fracción como operador en seis respuestas (Figuras 4 y 6b), mientras que los otros aplican la regla de tres (Figura 7).

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Nuestro estudio refleja las dificultades observadas en la comprensión del muestreo cuando se pone en juego el razonamiento proporcional, como ya se identificaba en los estudios previos con estudiantes de secundaria (Begué et al., 2019; Ruiz-Reyes, 2020) y amplía estos estudios al analizar las estrategias. El cálculo de la proporción muestral pone en juego un razonamiento propio, que forman parte del significado institucional fijado por el currículo. Sin embargo, la mayoría de los estudiantes sigue un razonamiento aditivo, lo que limita la posibilidad de alcanzar un nivel de razonamiento distribucional (Shaughnessy et al., 2004). Así es que, nuestros resultados no muestran una mejora con respecto al curso. El número de respuestas correctas es muy bajo, ya que solamente dos estudiantes responden correctamente al ítem. Por tanto, a pesar de que esta tarea es una oportunidad para el profesorado, porque involucra el razonamiento proporcional desde un contexto estadístico, este trabajo informa sobre los errores relacionados con la comprensión del porcentaje y de la estructura multiplicativa, poniendo en valor la necesidad de abordar un trabajo adecuado de la proporcionalidad en educación secundaria. Es decir, que se dote de significado a las cantidades y la

relación entre éstas, evitando el uso de técnicas mecanicistas que dificulten que se alcance el sentido estocástico esperado (MEFP, 2022b).

Una limitación del trabajo y una futura línea de trabajo serían analizar el razonamiento proporcional que los estudiantes ponen en juego en tareas de proporcionalidad, como problemas de comparación y de valor faltante, con el objetivo de profundizar en la comprensión de las dificultades de los estudiantes y en cómo se manifiestan en tareas que implican el muestreo.

Agradecimientos

Esta publicación es parte del proyecto *PID2022-139748NB-I00*, financiado por MICIU/AEI/10.13039/501100011033 y por FEDER, UE. Las autoras forman parte del grupo FQM-126 de la Junta de Andalucía en la Universidad de Granada.

Referencias

Begué, N., Batanero, C., Ruiz, K. y Gea, M. M. (2019). Understanding sampling: a summary of the research. *Boletín de estadística e investigación operativa – BEIO, 35*(1), 49-78.

Begué, N. (2019). *Comprensión del muestreo y la distribución muestral en estudiantes de educación secundaria obligatoria y bachillerato* [Tesis Doctoral]. Universidad de Granada.

Ben-Zvi, D., Bakker, A. y Makar, K. (2015). Learning to reason from samples. *Educational Studies in Mathematics*, *88*(3), 291-303. https://doi.org/10.1007/s10649-015-9593-3

Burrill, G. y Biehler, R. (2011). Fundamental statistical ideas in the school curriculum and in training teachers. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education – A joint ICMI/IASE Study*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-1131-0_10

Fischbein, E. y Gazit, A. (1984). Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions? *Educational Studies in Mathematics*, *15*(1), 1-24. https://doi.org/10.1007/BF00380436

Godino, J. D. (2024). *Enfoque ontosemiótico en educación matemática. Fundamentos, herramientas y aplicaciones*. McGraw Hill-Aula Magna.

Gómez-Torres, E. (2014). *Evaluación y desarrollo del conocimiento matemático para enseñar la probabilidad en futuros profesores de educación primaria* [Tesis Doctoral]. Universidad de Granada.

León, O. G. y Montero, I. (2015). *Métodos de investigación en Psicología y Educación. Las tradiciones cuantitativa y cualitativa*. McGraw Hill.

Ministerio de Educación y Formación Profesional – MEFP. (2022a). Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. *Boletín Oficial del Estado*, *52*, 24386-24504.

Ministerio de Educación y Formación Profesional – MEFP. (2022b). Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria. *Boletín Oficial del Estado*, *76*, 41571- 41789.

Neuendorf, K. A. (2018). Content analysis and thematic analysis. En P. Brough (Ed.), *Advanced research methods for applied psychology: Design, Analysis and Reporting* (1st ed.) (pp. 211–223). Routledge. https://doi.org/10.4324/9781315517971

Ruiz-Reyes (2020). *Comprensión del muestreo por alumnos chilenos de educación secundaria* [Tesis Doctoral]. Universidad de Granada.

Sampieri, R. H. (2018). *Metodología de la investigación: las rutas cuantitativa, cualitativa y mixta.* McGraw Hill México.

Shaughnessy, J.M., Ciancetta, M. y Canada, D. (2004). Types of student reasoning on sampling tasks. En M.J. Heines y A.B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol.4, pp. 177-184). International Group for the PME.

INTERDISCIPLINARIEDAD ENTRE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS: UN ANÁLISIS DE PROGRAMACIONES DIDÁCTICAS

Interdisciplinarity between Natural Sciences and Mathematics: an analysis of teaching plans

Carvajal, S.[a,b], Barquero, B.[a], Martínez de Albéniz, V.[b]

[a]Universitat de Barcelona, [b]IESE Business School, Barcelona

Resumen

En el marco de las reformas curriculares recientes, la LOMLOE en España establece un currículo competencial que promueve el desarrollo integrado de áreas. Desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico, este estudio analiza las programaciones didácticas de 763 centros gallegos de Educación Primaria, en los que Ciencias Naturales o Matemáticas se desarrollan como áreas diferenciadas, y las compara con el caso de un centro gallego que organiza estas mismas áreas de dos modos: como áreas diferenciadas en tres cursos y de forma interdisciplinar en otros tres. A partir del análisis a través de grafos de coocurrencia y métricas de centralidad, los resultados muestran que, cuando se trabajan por separado, cada disciplina mantiene un núcleo claramente definido. De lo contrario, en las programaciones interdisciplinares, el núcleo se reorganiza: algunos saberes pierden protagonismo y otros pasan a conectar los bloques de distintas áreas.

Palabras clave: *interdisciplinariedad, ciencias naturales, matemáticas, teoría antropológica de lo didáctico, programaciones didácticas.*

Abstract

Within the basis of recent curricular reforms, the LOMLOE in Spain establishes a competency-based curriculum that promotes an integrated development of subject areas. From the perspective of the Anthropological Theory of the Didactic, this study analyses the teaching plans from 763 primary schools in Galicia, where Natural Sciences or Mathematics are implemented as distinct subject areas, and compares them with the case of a Galician school that organises these same areas in two ways: as separate subjects in three grades and in an interdisciplinary manner in the other three. Using co-occurrence graphs and centrality metrics, the results show that when the subjects are taught separately, each discipline maintains a clearly defined structural core. By contrast, in interdisciplinary teaching plans, the core becomes reorganised: some contents lose centrality, while others come to connect blocks from different subject areas.

Keywords: *interdisciplinarity, natural sciences, mathematics, anthropological theory of the didactic, teaching plans.*

INTRODUCCIÓN

En las últimas décadas, diversas reformas curriculares han promovido una reorganización del currículo orientada al desarrollo de competencias y a la organización de la enseñanza en torno a situaciones de aprendizaje. En el contexto español, la Ley Orgánica 3/2020 (LOMLOE) refuerza esta orientación e incorpora estas situaciones como propuestas que integran distintos elementos curriculares —competencias específicas, criterios de evaluación y saberes básicos— en el diseño de secuencias didácticas. Aunque el currículo mantiene su organización en áreas disciplinares, este

Carvajal, S., Barquero, B. y Martínez de Albéniz, V. (2026). Interdisciplinariedad entre Ciencias Naturales y Matemáticas: un análisis de programaciones didácticas. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (pp. 146-153). SEIEM.

enfoque abre la posibilidad de articular saberes de distintas áreas dentro de una misma propuesta de enseñanza, favoreciendo propuestas interdisciplinares.

Desde la perspectiva de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), estas transformaciones pueden interpretarse como un desplazamiento desde un *paradigma de visita de obras* —en el que la enseñanza se organiza alrededor de objetos de saber previamente delimitados— hacia un *paradigma de cuestionamiento del mundo*, en el que los saberes emergen en el proceso de indagación a partir de cuestiones que dan lugar a procesos de investigación (Chevallard, 2015). En este contraparadigma, la enseñanza debería alejarse de estructuras centradas en la progresión lineal de saberes y pasar a organizarse en torno al estudio de situaciones y de preguntas que movilicen saberes diversos.

Diversos trabajos han señalado que este proceso de concreción curricular sitúa al profesorado como un agente clave en la interpretación y transformación del currículo prescrito cuando este se concreta en el currículo planificado. En particular, Beltrán-Pellicer et al. (2023) muestran que la implementación curricular implica que los docentes tomen decisiones sobre la organización y el tratamiento de los elementos curriculares, lo que puede generar tensiones entre la autonomía del profesorado y el grado de prescripción curricular, así como la necesidad de orientaciones externas para la toma de decisiones didácticas. Sin embargo, la presencia de orientaciones normativas no garantiza que la concreción curricular se traduzca en transformaciones estructurales en su implementación. En investigaciones previas sobre comparativas curriculares y reformas curriculares, se ha señalado que el currículo prescrito y el currículo implementado constituyen entidades y niveles analíticos distintos que no necesariamente coinciden, ya que las orientaciones normativas pueden concretarse de formas diversas en los distintos niveles de concreción curricular (Mullis, 2019).

La introducción de las situaciones de aprendizaje interdisciplinares plantea la cuestión de si estas propuestas modifican realmente la organización de los saberes o si, por el contrario, las jerarquías disciplinares continúan estructurando el currículo. Investigaciones previas han descrito el fenómeno del *confinamiento temático* (Barbé et al., 2005), que pone de manifiesto la tendencia de los saberes a permanecer vinculados a ámbitos temáticos específicos, limitando las conexiones entre distintos dominios. En este contexto, resulta pertinente analizar si las propuestas interdisciplinares transforman estos patrones o si los saberes siguen organizándose según las mismas lógicas disciplinares.

Desde la perspectiva de la transposición didáctica (Chevallard, 1985), el conocimiento escolar puede analizarse a partir de las transformaciones que experimentan los saberes, desde que son creados, hasta convertirse en objetos de enseñanza y aprendizaje. En este proceso, el saber producido en las disciplinas científicas se transforma en saber a enseñar, es decir, en el conjunto de saberes que las instituciones educativas reorganizan y adaptan para su enseñanza en los sistemas escolares. En este sentido, las programaciones didácticas se analizan, desde la TAD, como una operacionalización del saber a enseñar tal y como este toma forma en la planificación docente. Recientemente, diversos trabajos han desarrollado herramientas de análisis de redes para estudiar la organización de saberes curriculares en contextos educativos. Estas representaciones permiten analizar las relaciones entre distintos saberes curriculares. Sayama (2018) propone representaciones en red para mapear la secuenciación de saberes en programas de cursos universitarios, mientras que Tuzón et al. (2025) reconstruyen redes de saberes a partir del currículo prescrito en Bachillerato. No obstante, estas aproximaciones se centran principalmente en el currículo prescrito, dejando abierta la cuestión de cómo se reorganizan los saberes cuando estos se concretan en programaciones y unidades didácticas elaboradas por los centros educativos.

En este contexto, el presente estudio aborda las siguientes preguntas de investigación (PI):

PI1: ¿Cómo se estructura la organización de los saberes cuando Matemáticas y Ciencias Naturales se desarrollan como áreas independientes?

PI2: ¿Qué cambios en la presencia y distribución de los saberes matemáticos y científicos se producen cuando ambas áreas se integran en unidades didácticas compartidas?

PI3: ¿Cómo se reconfiguran los patrones de aislamiento temático cuando ambas áreas se integran en unidades didácticas compartidas?

Para abordar estas preguntas, el presente estudio analiza las programaciones didácticas de Educación Primaria correspondientes al curso 2024–2025 de 763 centros gallegos que desarrollan Ciencias Naturales o Matemáticas como áreas diferenciadas, considerando una programación por materia y curso en cada centro, lo que permite caracterizar la organización de los saberes en cada disciplina. Asimismo, se analiza el caso de un centro que organiza estas mismas áreas de dos modos distintos: como asignaturas independientes en tres cursos y de forma interdisciplinar en otros tres. Esta doble configuración permite comparar cómo se estructuran los saberes cuando las áreas se desarrollan separadamente y cómo se reconfiguran cuando se combinan en unidades didácticas compartidas.

METODOLOGÍA

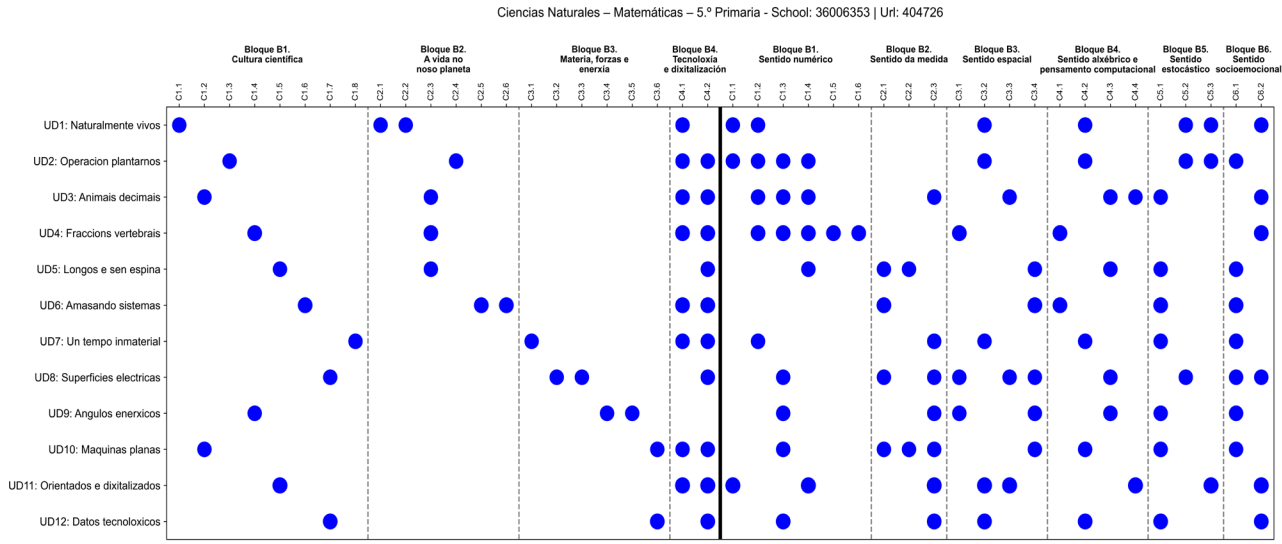
Las programaciones didácticas como unidad de análisis

El análisis se centra en Galicia, una comunidad autónoma del noroeste de España. Desde el verano de 2024, la Xunta ha establecido que todos los centros públicos y concertados publiquen sus programaciones didácticas en un repositorio abierto de datos. Estas se organizan como una secuencia de unidades didácticas previstas para cada materia y curso a lo largo del año académico y se elaboran mediante una plantilla estandarizada alineada con el currículo gallego establecido en el Decreto 155/2022. La plantilla oficial utilizada por los centros puede consultarse en el repositorio institucional de la Xunta (PROENS): https://www.edu.xunta.gal/proens/.

El presente estudio se centra en dos secciones de esta plantilla: (3.1) *Listado de unidades didácticas*, que recoge la secuencia de unidades didácticas de cada programación con su descripción, número de sesiones y temporalización; y (3.2) *Distribución curricular en las unidades didácticas*, que vincula los saberes de cada bloque curricular con las unidades en las que se trabajan. La Figura 1 muestra esta estructura con una programación interdisciplinar de Ciencias Naturales y Matemáticas de 5.º de Primaria.

Figura 1

Matriz de saberes y unidades didácticas en Ciencias Naturales-Matemáticas (5.º de Educación Primaria)



Las filas corresponden a las unidades didácticas y las columnas a los distintos saberes asociados a los bloques curriculares. Cada punto señala que un determinado saber se aborda en una unidad concreta.

Esta representación permite visualizar cómo los distintos saberes aparecen asociados dentro de las unidades didácticas, constituyendo la base para identificar relaciones de coocurrencia entre ellos.

En total, se analizaron 7 880 programaciones didácticas de Educación Primaria. El detalle por curso y asignatura se recoge en la Tabla 1.

Tabla 1

Distribución de las programaciones didácticas analizadas por curso y asignatura

Asignatura	**1.º**	**2.º**	**3.º**	**4.º**	**5.º**	**6.º**	**Total**
Ciencias Naturales	672	666	645	650	645	639	3 917
Matemáticas	678	680	646	665	641	653	3 963
Total	**1 350**	**1 346**	**1 291**	**1 315**	**1 286**	**1 292**	**7 880**

Junto al análisis de las programaciones de Ciencias Naturales y Matemáticas de los centros gallegos analizados, se examina también el caso de un centro que organiza ambas áreas de dos modos distintos. Se trata del CEIP de Vilaverde-Mourente, un centro público de Educación Infantil y Primaria situado en el municipio de Pontevedra. En este centro, las dos áreas se desarrollan como áreas diferenciadas en 1.º, 2.º y 4.º de Educación Primaria, mientras que en 3.º, 5.º y 6.º se organizan de forma combinada en una misma secuencia didáctica. Esta doble configuración permite comparar la organización de los saberes cuando se organizan como áreas diferenciadas —tanto dentro del propio centro como en relación con el patrón general observado en los centros gallegos— y analizar cómo se reconfiguran cuando ambas áreas se integran en propuestas de enseñanza comunes.

Elaboración y análisis de redes de co-ocurrencia

A partir de la matriz descrita en la sección anterior se construyeron redes de coocurrencia entre saberes, en las que cada nodo representa un saber curricular y las aristas indican la copresencia de dos saberes dentro de una misma unidad didáctica. Las relaciones de coocurrencia permiten representar qué saberes tienden a aparecer conjuntamente en las programaciones. El peso de las aristas corresponde a la proporción de unidades didácticas en las que dos saberes aparecen conjuntamente. Este procedimiento se aplicó tanto al centro analizado como al conjunto de centros gallegos. En el primer caso, las redes se construyeron a partir de la programación correspondiente a cada curso. En el segundo, se generaron redes agregadas por curso y área, en las que el peso de cada arista corresponde al promedio de las coocurrencias observadas en las programaciones de los distintos centros.

Sobre estas redes se calcularon métricas de centralidad para caracterizar la posición estructural de cada saber, en particular la fuerza ponderada (F, suma de los pesos de sus conexiones) y la centralidad de intermediación (b, que identifica saberes que actúan como puente entre diferentes partes de la red). Estas métricas permiten identificar tanto los saberes más conectados dentro de la red como aquellos que desempeñan funciones de articulación entre distintos conjuntos de saberes. En las representaciones gráficas, el tamaño de los nodos es proporcional a la fuerza ponderada de cada saber, mientras que los nodos con mayor centralidad de intermediación se destacan mediante un borde más grueso. En las redes disciplinares, dada su elevada densidad de conexiones, la centralidad de intermediación es próxima a cero en la mayoría de los saberes, por lo que en la discusión solo se reportan los valores de fuerza ponderada; en las redes interdisciplinares se reportan ambas métricas.

RESULTADOS

Ciencias Naturales en las programaciones de Educación Primaria

El análisis de las programaciones de Ciencias Naturales muestra una organización curricular muy similar cuando el área se organiza como disciplina escolar sola, tanto en el conjunto de programaciones analizadas de los centros gallegos como en el centro específico considerado en este estudio. Esta regularidad puede observarse comparando, por ejemplo, el grafo correspondiente a la media gallega de 1.º de Primaria, que constituye un caso representativo de este patrón estructural, con el grafo del centro analizado para este mismo curso (Figuras 2 y 3).

Figura 2

Red de saberes de Ciencias Naturales en 1.º de Primaria (media gallega)

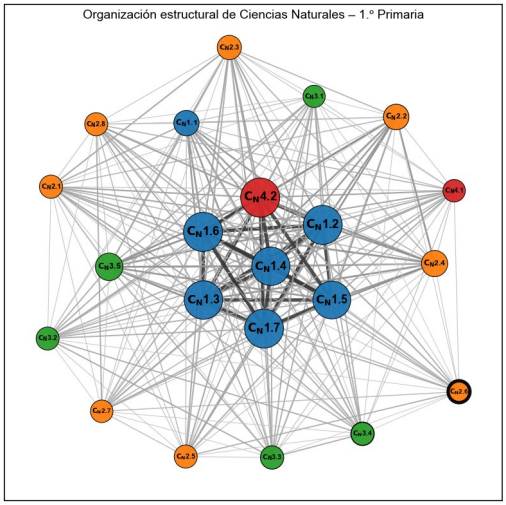
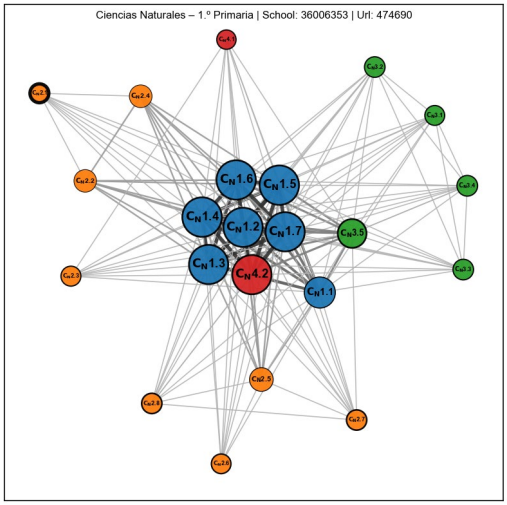


Figura 3

Red de saberes de Ciencias Naturales del CEIP de Vilaverde-Mourente en 1.º de Primaria



En la red agregada de los centros gallegos, el núcleo central se forma por saberes del Bloque B1: Cultura científica —vinculados a la indagación ($C_N1.2$: F = 8,89; $C_N1.3$: F = 8,74), la experimentación ($C_N1.4$: F = 8,51; $C_N1.5$: F = 8,43) y el registro y comunicación de resultados ($C_N1.6$: F = 8,94; $C_N1.7$: F = 8,87)— junto con la presencia sistemática de $C_N4.2$: F = 8,98 del Bloque B4: Tecnología y digitalización, relativo a proyectos de diseño y pensamiento computacional. En el centro analizado se observa una configuración del núcleo equivalente, en la que estos siete saberes alcanzan el valor máximo de fuerza ponderada (F = 9,83 en todos ellos). Este mismo patrón se repite en los grafos correspondientes a 2.º y 4.º de Primaria del centro analizado, lo que indica que la arquitectura curricular del área se mantiene prácticamente invariable entre centros y cursos.

Las diferencias respecto a la media gallega se limitan al grado de presencia de algunos saberes del Bloque B2: La vida en nuestro planeta —como el cuidado del entorno ($C_N2.4$: F = 4,05 frente a 2,83 en el centro analizado)— y del Bloque B3: Materia, fuerzas y energía —relacionados con el uso responsable de los materiales ($C_N3.5$: F = 4,51 en la media gallega y 5,50 en el centro analizado).

Matemáticas en las programaciones de Educación Primaria

El análisis de las programaciones de Matemáticas muestra una organización estructural diferente. Mientras que en Ciencias Naturales el núcleo se organiza principalmente en torno a saberes del Bloque B1: Cultura científica y a $C_N4.2$: Proyectos de diseño y pensamiento computacional del Bloque B4: Tecnología y digitalización, en Matemáticas el núcleo combina de forma sistemática el Bloque B6: Sentido socioemocional con distintos sentidos matemáticos, lo que favorece su presencia transversal en la red con independencia del saber matemático trabajado. Esta configuración se observa

al comparar el grafo correspondiente a la media gallega de 2.º de Primaria, con el del centro analizado para este mismo curso (Figuras 4 y 5).

Figura 4

Red de saberes de Matemáticas en 2.º de Primaria (media gallega)

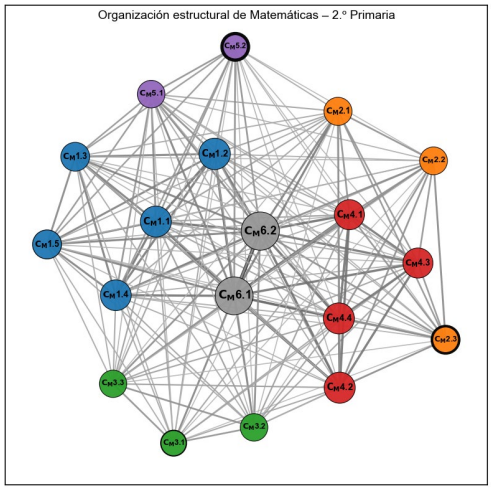
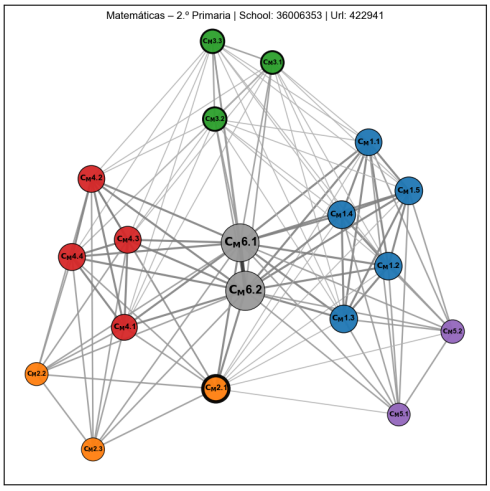


Figura 5

Red de saberes de Matemáticas del CEIP de Vilaverde-Mourente en 2.º de Primaria



En la red agregada de los centros gallegos, el núcleo estructural se articula en torno al Bloque B6 – Sentido socioemocional ($C_M6.1$: F = 7,72; $C_M6.2$: F = 7,40), acompañado por saberes del Bloque B1: Sentido numérico ($C_M1.1$: F = 5,51; $C_M1.2$: F = 5,26), que ocupa una posición central en la red, y por saberes del Bloque B4: Sentido algebraico y pensamiento computacional ($C_M4.1$: F = 5,17; $C_M4.2$: F = 5,16). El Bloque B2: Sentido de la medida mantiene también una presencia significativa ($C_M2.1$: F = 4,45), mientras que los bloques B3: Sentido espacial ($C_M3.2$: F = 3,99) y B5: Sentido estocástico ($C_M5.1$: F = 4,29) continúan integrados en la red con un peso estructural menor. En el centro analizado se observa una configuración del núcleo equivalente ($C_M6.1$, $C_M6.2$: F = 8,33; saberes de B1: F = 4,33; saberes de B4: F = 4,00).

La comparación con la media gallega muestra una diferencia relevante en la configuración del núcleo. Mientras en las redes agregadas el núcleo se organiza consistentemente en torno al Bloque B6: Sentido socioemocional, el Bloque B1: Sentido numérico y el Bloque B4: Sentido algebraico y pensamiento computacional, en el centro analizado el sentido socioemocional mantiene una posición central en todos los cursos, pero el sentido numérico y el sentido algebraico y pensamiento computacional no siempre aparecen simultáneamente. En algunos cursos, otros sentidos matemáticos adquieren mayor peso, generando distintas configuraciones del núcleo entre cursos.

Un centro que alterna áreas diferenciadas y propuestas interdisciplinares

La organización de los saberes cambia en los cursos en los que el CEIP de Vilaverde-Mourente desarrolla propuestas interdisciplinares que integran Ciencias Naturales y Matemáticas (3.º, 5.º y 6.º de Primaria). En la red disciplinar, el núcleo lo ocupan apenas dos saberes, los socioemocionales $C_M6.1$: Creencias, actitudes y emociones y $C_M6.2$: Trabajo en equipo, mientras el resto de saberes permanecen más periféricos. En la red del centro que combina ambas áreas, en cambio, se amplía el número de saberes que ocupan una posición central. En concreto, tres saberes matemáticos que eran periféricos en la red disciplinar de Matemáticas —$C_M1.3$: Sentido de las operaciones (F = 3,80 → 6,34), $C_M2.3$: Estimación y relaciones (F = 3,72 → 6,00) y $C_M5.1$: Organización y análisis de datos (F = 3,69 → 5,58)— aumentan su fuerza ponderada al integrarse con Ciencias Naturales, y pasan a ocupar el núcleo de la red interdisciplinar.

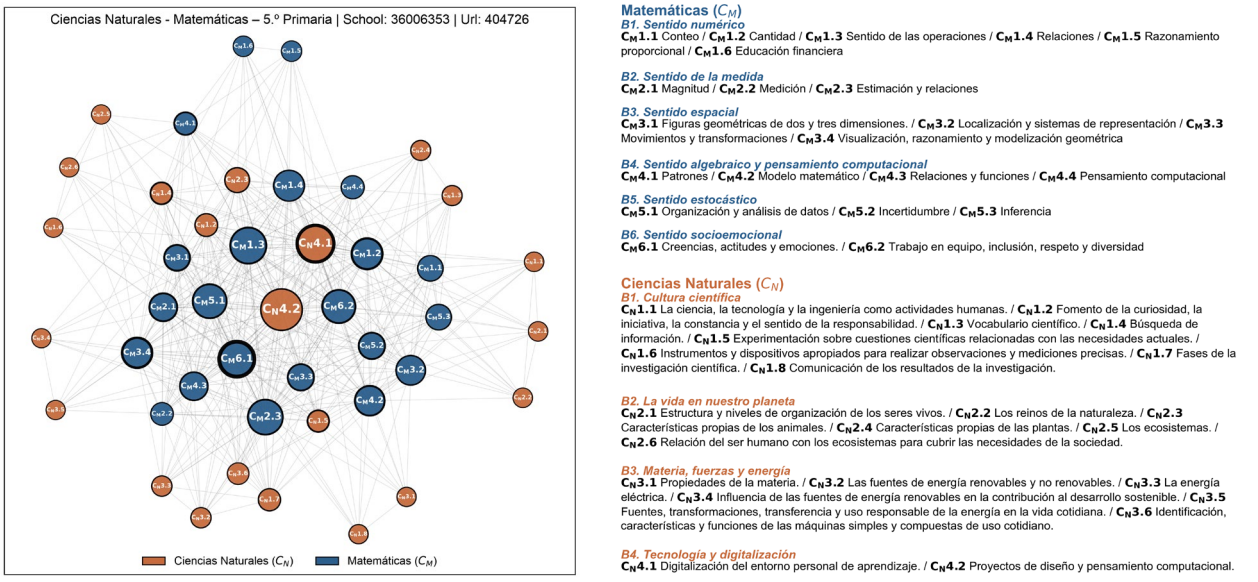
Por otro lado, el Bloque B1: Cultura Científica —que lidera el peso de Ciencias Naturales como área disciplinar— pierde de forma marcada su centralidad y pasa a la periferia de la red combinada. Sin embargo, aunque sus saberes dejan de estar tan conectados dentro de su propia área, empiezan a funcionar como puente entre saberes de Matemáticas y de Ciencias Naturales. De hecho, en la red interdisciplinar todos los saberes llegan a conectar en algún momento dos partes distintas de la red, es decir, todos los saberes tienen intermediación positiva, frente a solo el 67 % en Matemáticas y el 33 % en Ciencias Naturales. Y son sobre todo los saberes matemáticos los que asumen ese papel: dos de cada tres veces que un saber actúa de puente es un saber matemático, frente al tercio restante que corresponde a Ciencias Naturales.

El sentido de la medida ya desempeñaba un papel articulador dentro de las propias programaciones de Matemáticas, conectando entre sí otros saberes matemáticos; al integrarse con Ciencias Naturales, ese papel se mantiene y se refuerza. El estudio de las magnitudes y el problema de su medición —$C_M2.1$: Magnitude (b = 0,029 → 0,026), $C_M2.2$: Medición (b = 0,000 → 0,009) y $C_M2.3$: Estimación e relacións (b = 0,000 → 0,023)— pasan a conectar también con saberes de Ciencias Naturales, para analizar fenómenos, interpretar datos o modelizar relaciones en sistemas naturales.

La Figura 6 muestra el caso de 5.º de Primaria, que constituye un ejemplo representativo de esta reorganización de la red de saberes.

Figura 6

Red de saberes de Ciencias Naturales-Matemáticas del CEIP de Vilaverde-Mourente en 5.º de Primaria



CONCLUSIONES

Los resultados de este estudio permiten avanzar en la comprensión de cómo se organiza el currículo cuando Ciencias Naturales y Matemáticas se desarrollan como áreas diferenciadas y de qué transformaciones se producen cuando ambas se integran en propuestas interdisciplinares. En el conjunto de centros gallegos analizados, la organización disciplinar muestra una arquitectura estable, en la que cada área mantiene un núcleo estructural claramente definido y relativamente constante entre cursos. En los cursos en los que ambas áreas se integran en unidades didácticas compartidas, la red se reorganiza y son, sobre todo, los saberes matemáticos los que ocupaban posiciones centrales y los que conectan la mayor parte de saberes de la red. Los saberes matemáticos dejan así de organizarse principalmente siguiendo lógicas internas de la disciplina y adquieren un papel instrumental en la construcción y articulación de saberes de otras áreas.

En particular, el sentido de la medida adquiere un papel relevante articulando saberes de distintas áreas. El estudio de las magnitudes y el problema de su medición se conectan con saberes de ambas áreas para analizar fenómenos, interpretar datos o modelizar relaciones en sistemas naturales. Este hallazgo resulta coherente con investigaciones previas. En particular, Aguayo y Montoro (2021) muestran que, mientras en Matemáticas la medida se trabaja principalmente mediante sistemas de unidades, equivalencias y operaciones, en Ciencias Naturales se introduce vinculada al estudio de propiedades de la materia —en relación con el estudio de magnitudes como las de masa, volumen o densidad— y al uso de instrumentos de medida para investigar fenómenos físicos.

Desde la perspectiva de la TAD, este cambio puede interpretarse como un desplazamiento en la forma de organizar el conjunto de saberes disciplinares. En un paradigma de *visita de obras*, los saberes se estructuran según la lógica interna de cada disciplina. Cuando determinados saberes matemáticos se activan como instrumentos para abordar fenómenos científicos, su posición en la red refleja que la organización del estudio ya no responde exclusivamente a esa lógica interna, sino a la necesidad de articular saberes en torno al estudio de situaciones compartidas. Este desplazamiento constituye una condición para una enseñanza más próxima al paradigma de *cuestionamiento del mundo*.

Por último, el uso de redes de co-ocurrencia y métricas de centralidad sobre un número elevado de programaciones permite identificar relaciones entre saberes que no siempre resultan visibles en análisis descriptivos de menor escala.

Referencias

Aguayo, C. G. y Montoro, A. B. (2021). Coherencia en la enseñanza de la medida en ciencias y matemáticas: Un análisis comparativo. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 109–116). SEIEM.

Barbé, J., Bosch, M., Espinoza, L. y Gascón, J. (2005). Didactic restrictions on the teacher's practice: The case of limits of functions in Spanish high schools. *Educational Studies in Mathematics, 59,* 235–268. https://doi.org/10.1007/s10649-005-5889-z

Beltrán-Pellicer, P., Martínez-Juste, S. y Muñoz-Escolano, J. M. (2023). Explorando el hueco entre el currículo pretendido y el implementado: Percepciones de docentes en formación y en activo. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 97–112). SEIEM.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique: Du savoir savant au savoir enseigné*. La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (2015). Teaching mathematics in tomorrow's society: A case for an oncoming counter paradigm. En S. Cho (Ed.), *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 173–187). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-12688-3_13

Decreto 155/2022, de 15 de septiembre, por el que se establecen la ordenación y el currículo de la educación primaria en la Comunidad Autónoma de Galicia. (2022). *Diario Oficial de Galicia*, 183, 26 de septiembre de 2022. https://www.xunta.gal/dog/Publicados/2022/20220926/AnuncioG0655-190922-0001_es.html

Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación (2020). *Boletín Oficial del Estado*, 340, 122868–122953. https://www.boe.es/eli/es/lo/2020/12/29/3

Mullis, I. V. S. (2019). Introduction. En I. V. S. Mullis y M. O. Martin (Eds.), *TIMSS 2019 assessment frameworks* (pp. 1–12). TIMSS & PIRLS International Study Center, Boston College. https://timssandpirls.bc.edu/timss2019/frameworks/download-center/

Sayama, H. (2018). Mapping the curricular structure and contents of network science courses. *Network Science, 6*(3), 294–314. https://doi.org/10.1017/nws.2018.17

Tuzón, P., Salvà Salvà, A. y Fernández-Gracia, J. (2025). Complex networks approach to curriculum analysis and subject integration: A case study on physics and mathematics. *Physical Review Physics Education Research, 21*, 010161. https://doi.org/10.1103/PhysRevPhysEducRes.21.010161

EXPLORACIÓN DEL CURRÍCULUM PROBABILÍSTICO EN LA NUEVA ESCUELA MEXICANA

Exploration of the probabilistic curriculum in the New Mexican School

Castro, E. S.

Universidad de Sonora

Resumen

En este trabajo se exploran los contenidos probabilísticos y materiales didácticos asociados en las directrices del currículum mexicano, en los niveles de primaria, secundaria y bachillerato. Utilizando una aproximación cualitativa, los contenidos se inspeccionan a través de las ideas estocásticas fundamentales, se identifican los materiales sugeridos en cada nivel educativo, los contextos utilizados y su relación con los contenidos probabilísticos. Los resultados preliminares exhiben un tratamiento gradual de las ideas fundamentales a medida que los estudiantes transitan por el currículum escolar, así como un énfasis en la experimentación probabilística en contextos diversos. En bachillerato se identifican varios recursos didácticos para la enseñanza de las ideas fundamentales, como el uso de simuladores y paradojas, mientras que en los niveles primaria y secundaria ocurre lo opuesto.

Palabras clave: *currículum, educación probabilística, ideas estocásticas fundamentales, Nueva Escuela Mexicana.*

Abstract

This study explores probabilistic content and associated teaching materials in the Mexican curriculum guidelines for primary, secondary, and high school levels. Using a qualitative approach, the content is examined through the lens of fundamental stochastic ideas, identifying materials at each educational level, the contexts in which they are used, and their relationship to probabilistic content. Preliminary results show a gradual approach to fundamental ideas as students progress through the school curriculum, as well as an emphasis on probabilistic experimentation in diverse contexts. In high school, several teaching resources are identified for teaching fundamental ideas, such as the use of simulators and paradoxes, while in primary and secondary levels the opposite occurs.

Keywords: *curriculum, probabilistic education, fundamental stochastic ideas, New Mexican School.*

CONTEXTO Y OBJETIVO DEL ESTUDIO

La investigación sobre el estado, naturaleza y evolución del currículum probabilístico nacional es escasa, pero se cuenta con antecedentes que revelan tendencias y problemáticas importantes en diversos sistemas educativos. Por ejemplo, Langrall (2018) evidenció cómo es que el estudio de la probabilidad fue desplazado en el currículum sistema educativo estadounidense a partir del 2000, retrasando su enseñanza hasta quedar compactada en el nivel secundaria (12 a 15 años). En contraposición, Vásquez y Alsina (2014) identificaron en Chile, Estados Unidos y España una tendencia hacia la introducción temprana de la probabilidad mediante experiencias con el azar y el lenguaje probabilístico, subrayando la necesidad de fortalecer la formación docente en los aspectos disciplinar y didáctico. Posteriormente, Vásquez (2022) analizó los currículos de Australia, Singapur y Nueva Zelanda, detectando una presencia incipiente y de enfoque intuitivo en educación infantil, que se formaliza y orienta hacia la alfabetización probabilística en la educación primaria. Por su parte,

Castro, E. S. (2026). Exploración del currículum probabilístico en la nueva escuela mexicana. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (pp. 154-161). SEIEM.

en el contexto español, Batanero (2005) documentó la coexistencia de cuatro enfoques de la probabilidad en la escuela secundaria (12 a 16 años), advirtiendo sobre el riesgo de restringir la enseñanza únicamente al enfoque frecuentista. Recientemente, Elgueda-Ibarra et al. (2024) analizaron la evaluación de competencias específicas basadas en los saberes básicos de probabilidad en la secundaria española, señalando una desconexión entre saberes y competencias, así como disparidades entre los sistemas autónomos.

En México, los análisis curriculares muestran retos estructurales y conceptuales. Sánchez (2009) evaluó la escuela secundaria mexicana (12 a 14 años) mediante el marco de las Ideas Estocásticas Fundamentales (IEF) de Heitele (1975) y la alfabetización probabilística de Gal (2004); aunque halló casi todas las IEF, detectó la ausencia del enfoque frecuentista, crucial para vincular los conceptos fundamentales de la probabilidad. En el nivel medio superior, Elizarraras (2024) analizó el bachillerato mexicano usando las IEF y recursos semióticos, concluyendo que los aprendizajes esperados adolecen de definiciones ambiguas y falta de orientación didáctica, además de exhibir errores conceptuales en libros de texto respecto al enfoque frecuentista. Inscrito en esta línea de investigación, el presente trabajo tiene como objetivo ofrecer resultados iniciales sobre el currículum probabilístico en la reforma de la Nueva Escuela Mexicana (NEM) para los niveles de primaria, secundaria y bachillerato. El estudio se conduce bajo las siguientes preguntas de investigación: *¿Cuáles IEF están consideradas en el currículum de educación básica y del nivel bachillerato? ¿Qué materiales o recursos se sugieren para su enseñanza?*

MARCO CONCEPTUAL

El trabajo se centra en el currículum intencionado (Mullis, 2019), entendido como aquel constituido por documentos oficiales en los que se identifican las expectativas en cuanto a habilidades, competencias y conocimientos en cierta disciplina, que los estudiantes deben alcanzar cuando se ha desarrollado e implementado el currículum. El análisis curricular es complejo, pues involucra a un sistema con muchas aristas y actores diversos; para este ejercicio, se abordan los componentes curriculares de contenidos y materiales. Según el modelo curricular de Niss (2016), el primero refiere a las áreas temáticas, conceptos, teorías, resultados, métodos, técnicas y procedimientos de referencia disciplinar involucrados en la enseñanza y el aprendizaje; el segundo refiere a los materiales y recursos educativos, incluidos libros de texto, artefactos, manipulativos y sistemas digitales empleados en la enseñanza y el aprendizaje.

MÉTODO

Se utiliza una metodología cualitativa de carácter documental (Marín y Noboa, 2013); permite examinar cómo se estructuran y secuencian los conceptos de azar e incertidumbre en los programas oficiales del currículum mexicano. Al contrastar estos documentos con marcos teóricos, se identifican sesgos o vacíos en la enseñanza de la probabilidad, garantizando una base científica para actualizar el currículum. Así, los insumos se constituyen de documentos oficiales expedidos por la Secretaría de Educación Pública (SEP), en los que se describe el programa curricular de cada nivel y grado educativo. En el caso de primaria y secundaria, se analizaron el programa sintético y los libros de texto oficiales (disponibles en https://educacionbasica.sep.gob.mx/catalogo-de-libros-de-texto-gratuitos-ciclo-escolar-2024-2025/); en primaria, se revisaron los insumos correspondientes al quinto y sexto grado (SEP, 2024a), pues solo en estos se incluyen contenidos probabilísticos; en el segundo caso, se analizaron los correspondientes a los tres grados escolares (SEP, 2024b). No hay libros de texto oficiales para el nivel bachillerato, por lo que se analiza el programa de estudios de la materia de probabilidad y estadística (SEP, 2023a y 2023b).

Para el componente de contenidos, los tópicos prescritos en el currículum se caracterizaron según las IEF propuestas por Heitele (1975), es decir, se clasificaron en las categorías de *normando las expresiones de nuestra creencia*, *el campo de la probabilidad*, *combinación de probabilidades – regla de la suma*, *combinación de probabilidades – regla del producto*, *equidistribución y simetría*,

combinatoria, *modelo de urna y simulación*, *variable estocástica*, *ley de los grandes números (LGN)* y *muestra*. Para el componente de materiales, los documentos fueron inspeccionados para identificar recursos o materiales sugeridos para la enseñanza de contenidos probabilísticos, las formas sugeridas para utilizarlos, los contextos de las actividades para los estudiantes, y la correspondencia de su contenido con las IEF identificadas en el currículum.

Como procedimiento de análisis, se realizaron codificaciones axiales en dos etapas. Primero, respecto a las categorías de contenidos y materiales; segundo, a partir de las IEF y los aspectos de los materiales referidos, respectivamente. A manera de ejemplo, considérese el siguiente extracto asociado a la categoría de contenidos, para estudiantes del primer grado de secundaria: "[El estudiante]compara cualitativamente dos o más eventos a partir de sus resultados posibles, usa relaciones como: 'es más probable que…', 'es menos probable que…'" (SEP, 2024b, p. 62). El texto se enfoca en el paso de la intuición subjetiva a la cuantificación del grado de creencia, por lo que se asocia a la subcategoría de normando las expresiones de nuestra creencia. El uso de frases como 'es más probable que' representa la base del pensamiento probabilístico antes de llegar al cálculo numérico, por lo que se asocia también a la subcategoría del campo de la probabilidad, ya que el estudiante comienza a distinguir entre lo posible y lo probable, estableciendo un orden dentro del espacio muestral (resultados posibles). Finalmente, los hallazgos se discuten y contrastan con tendencias internacionales para la educación probabilística, además de señalar algunas implicaciones clave del planteamiento curricular.

RESULTADOS

La Tabla 1 muestra de forma resumida la presencia de las IEF según el nivel escolar. La marca "X" representa que la idea se presenta, en los documentos curriculares, a través de diferentes elementos relacionados que aparecen de forma explícita; "P" representa una presencia parcial de la idea, es decir, con ambigüedades o insuficiencia de elementos relacionados en los documentos curriculares.

Tabla 4

Presencia de IEF según niveles escolares

IEF	Primaria	Secundaria	Bachillerato
1. Normando las expresiones de nuestra creencia	X	X	-
2. El campo de la probabilidad	X	X	X
3. Regla de la suma	-	X	X
4. Independencia	-	P	X
5. Equidistribución y simetría	-	P	X
6. Combinatoria	-	X	X
7. Modelado de urna y simulación	P	P	P
8. Variable estocástica	-	-	X
9. LGN	-	P	P
10. Muestra	X	X	X

IEF en primaria

Predomina un enfoque cualitativo orientado a normar las expresiones de creencia, donde la transición de la intuición a la cuantificación se apoya en una escala de verosimilitud (evento seguro, imposible, probable). El campo de la probabilidad se introduce mediante la distinción entre azar y determinismo, utilizando herramientas de representación como tablas de doble entrada y diagramas de árbol para identificar el espacio muestral. No obstante, la idea de modelo de urna y simulación se presenta de forma incipiente; aunque se promueve el registro de frecuencias relativas, la ausencia de dispositivos físicos de experimentación (urnas) limita la capacidad de los estudiantes para modelar eventos compuestos o tomar decisiones basadas en la aleatoriedad.

IEF en secundaria

La secundaria marca la transición hacia la institucionalización de los enfoques clásico y frecuentista. Se profundiza en el campo de la probabilidad al incorporar la estructura algebraica de los eventos (complementarios, excluyentes e independientes). La combinación de probabilidades surge a través de las reglas de la suma y el producto, aunque esta última se aborda de forma parcial debido a la omisión de la probabilidad condicional. Se pretende que los estudiantes "identifiquen diversos procedimientos de conteo y resuelvan problemas" (SEP, 2024b, p. 62), abriendo paso a la combinatoria como antesala para el cálculo de probabilidades bajo el enfoque clásico de la probabilidad. Respecto a la equidistribución y simetría, el currículum se limita a la noción de "juego justo" basada en la equiprobabilidad, omitiendo el análisis de la simetría física de los dispositivos como sustento del modelo laplaciano. Se establece que el estudiantado debe "realiza[r] experimentos aleatorios y registra[r] los resultados en una tabla de frecuencia como la transición de la probabilidad frecuencial a la teórica" (SEP, 2024b, p. 62), exhibiendo así que la LGN aparece de forma implícita, como un principio de regularidad en la transición entre ambos enfoques que carece de un tratamiento explícito sobre la estabilidad de las frecuencias relativas.

IEF en bachillerato

En este nivel se asume la consolidación de las intuiciones previas, desplazando la idea de normar creencias por la de variable aleatoria. El estudiantado debe utilizar la regla de la suma y del producto para "emplearlos en la determinación de probabilidades condicionales" (SEP, 2023b, p.43), completando así la idea de combinación de probabilidades al integrar la condicionalidad, ejemplificada en dilemas clásicos como la paradoja de Monty Hall. La combinatoria adquiere un rol instrumental para el cálculo bajo el enfoque clásico, en tanto se vincula la equidistribución con una "perspectiva histórica y humanista sobre los orígenes de la probabilidad" (SEP, 2023b, p.43), permitiendo así a los estudiantes conectar la propensión de los eventos con la naturaleza de los objetos. Sin embargo, se observa un "salto" epistemológico: la variable aleatoria se introduce abruptamente asociada al modelo normal para fines de inferencia (pruebas de hipótesis), sin una etapa previa de significación conceptual o el uso del modelo binomial como puente didáctico más accesible.

Materiales para la enseñanza de las IEF en primaria y secundaria

Los niveles primaria y secundaria no se rigen bajo la estructura del modelo curricular basado en asignaturas, sino por campos formativos. El modelo pedagógico para estos niveles es el de trabajo por proyectos (SEP, 2024a y 2024b), los cuales deben tener una acentuación interdisciplinar, con visión humanista y social. Los libros de texto son el material didáctico más robusto, dirigidos tanto a profesores como estudiantes; contienen proyectos prototípicos, actividades modelo para estudiantes y formas sugeridas para desarrollarlos. En primaria, hay tres libros por grado escolar, uno enfocado en proyectos para el aula, otro para la escuela y otro para el entorno comunitario. En secundaria, hay un libro de proyectos por cada grado escolar, en el que se intercalan proyectos de los tres entornos. Las actividades que se derivan de su desarrollo contemplan momentos de trabajo individual y en equipo, incluyen situaciones de reflexión, búsqueda de información, recopilación de datos, aplicación de técnicas de análisis de datos y una autovaloración de los conocimientos desarrollados.

Lo anterior implica que las IEF contempladas en el programa curricular de primaria y secundaria deben ser abordadas dentro de las actividades de uno varios proyectos. Desafortunadamente, no se encontraron proyectos enfocados en contenidos probabilísticos para el nivel primaria, una omisión e incongruencia grave respecto a los aprendizajes contemplados en el programa curricular, que tiene como consecuencia inmediata no poder determinar, desde el punto de vista curricular, la forma en la que las IEF de este nivel deben ser atendidas. En contraparte, hay tres proyectos enfocados en contenidos probabilísticos en el nivel secundaria, uno por cada grado escolar. En ellos se procura la experimentación probabilística, para lo cual se sugieren el uso de monedas y dados. Los contextos que se abordan son situaciones relacionadas con la salud pública, el clima y el mundo natural; también

se promueve la idea de riesgo como concepto dual a la probabilidad. En las actividades de los proyectos destaca el tratamiento de la probabilidad como herramienta para la modelación, en donde interesa predecir la ocurrencia de eventos asociados a ciertos riesgos. Por ejemplo, en el proyecto para estudiantes del tercer grado, los estudiantes deben diseñar experimentos aleatorios que les ayuden a comprender como diferentes niveles de vacunación llevan a una mayor o menor propagación de cierta enfermedad, registrando frecuencias de ocurrencia y estableciendo relaciones con el modelo probabilístico usado para generar los datos experimentales. En resumen, los proyectos de secundaria se corresponden principalmente con la IEF de modelo de urna y simulación.

Otro aspecto importante se deriva del planteamiento de la NEM en cuanto a la figura del *codiseño*. En primaria, los libros de texto están plenamente desarrollados, describen con detalle problemáticas, proyectos y actividades específicas como guía para el trabajo del profesor y los estudiantes. En secundaria ocurre lo opuesto; se plantean problemáticas y el desarrollo de proyectos en términos de etapas generales, con mínimas especificaciones sobre las actividades y problemas disciplinarios a resolver por parte de los estudiantes. De acuerdo con la figura del codiseño, se pretende que los profesores, trabajando de manera inter y multidisciplinaria, tomen acuerdos sobre las actividades específicas, contextos, contenidos disciplinares y la profundidad con la que serán abordados durante las sesiones de clase (SEP, 2024a y 2024b).

Materiales para la enseñanza de las IEF en bachillerato

El currículum del bachillerato también se enmarca en los principios de la NEM, pero el modelo curricular preserva la estructura tradicional de una materia-una disciplina (SEP, 2023b). La pedagogía sugerida para abordar todo contenido matemático acentúa procesos cognitivos y de razonamiento matemático (SEP, 2023b), por lo que se busca entonces promover el aprendizaje de las IEF a través de un enfoque de razonamiento probabilístico y de modelación probabilística, sin comprometerse a la realización de proyectos como medio exclusivo o preferente para lograrlo. El currículum incluye "anotaciones didácticas" para abordar tanto contenidos estadísticos como probabilísticos. Para la idea de modelo de urna y simulación, se sugiere que el estudiante "tenga una primera aproximación al pensamiento probabilístico desde una perspectiva frecuencial", para lo cual sugiere el uso de simulaciones utilizando hojas de cálculo, "un software más sofisticado como R" (SEP, 2023b, p.42), así como fichas, dados y monedas.

Para la idea de combinación de probabilidades, se recomienda el uso de paradojas y contextos de la salud, el control de calidad, y otros relacionados para la enseñanza del enfoque subjetivo de la probabilidad. Se sugiere enfatizar en el desarrollo histórico de la probabilidad y la importancia que tuvo (o tiene) la hipótesis de equiprobabilidad, lo cual se corresponde con la IEF de equidistribución y simetría. Para complementar la idea de combinación de probabilidades (independencia), se sugiere acudir nuevamente a contextos de las ciencias médicas, particularmente al tratamiento de la noción de riesgo relativo en epidemiología y en medicina. Para la idea de variable aleatoria, se sugiere el uso de applets para hacer cálculos de probabilidades bajo la curva normal y enfatizar en la intuición del estudiantado durante el tratamiento del tópico. Finalmente, el programa recomienda utilizar una plataforma digital, que es de libre acceso, para la enseñanza de contenidos estocásticos (http://www.rossmanchance.com/applets/); ofrece diversos applets para la enseñanza de la estadística inferencial y la probabilidad, que se apoyan en el uso de simulaciones aleatorias y el enfoque frecuentista de la probabilidad, lo cual amplia las posibilidades para atender la idea de modelo de urna y simulación en simultáneo a otras. Sin embargo, no se identificaron comentarios o reflexiones dirigidas al docente sobre las potencialidades y limitaciones del uso de este recurso en sus prácticas de enseñanza de la probabilidad. Las ideas del campo de la probabilidad, la regla de la suma y la LGN no se acompañan de anotaciones didácticas.

DISCUSIÓN

En el nivel primaria se abordan cuatro de las diez IEF, en tanto el estudio de la probabilidad se restringe al enfoque intuitivo y la experimentación (Batanero, 2005), como ocurre en los casos de España, Chile y otros países. En secundaria se incluye la casi totalidad de las IEF en el currículum, orientándose su tratamiento principalmente hacia el enfoque clásico y frecuentista de la probabilidad. Se corrobora que el sistema educativo mexicano coincide con el modelo estadounidense (Langrall, 2018), es decir, concentra la enseñanza de las IEF en edades que van de los 12 a los 16 años aproximadamente, con el nivel bachillerato siendo el más denso y cargado de contenidos, resultado que coincide también con la investigación de Elizarraras (2024). La idea de modelo de urna y simulación es particularmente importante tanto en primaria como en secundaria, dado el peso otorgado a la experimentación probabilística y el enfoque frecuentista de la probabilidad. No obstante, el programa curricular no contempla trabajo alguno con la noción de simetría, omisión que resulta significativa, dado que Heitele (1975) le otorga un gran peso teórico y epistémico en su planteamiento. A su vez, se ha documentado el trabajo escolar exitoso con la noción de simetría en niños de estas edades y previos (ver, por ejemplo, Ghandi, 2018), lo que confirma que su incorporación al currículum es posible y conveniente.

El tratamiento de la idea de variable aleatoria, incluida en el currículum de bachillerato, presenta retos significativos. Ruiz et al. (2011) evidencian que el concepto de variable aleatoria es retador, pero el currículum no le destina un espacio propio dentro de los contenidos probabilísticos a enseñarse. A su vez, algunos educadores e investigadores en educación probabilística apoyan iniciar el trabajo con modelos probabilísticos a través del estudio del modelo binomial (ver por ejemplo, Batanero y Borovcnik, 2016), que es de carácter matemático más simple y ampliamente presente en diversas situaciones estocásticas. Destaca que, al igual que en el currículum de secundaria, el tratamiento de las IEF es alternado y no sigue un criterio epistémico (ver, por ejemplo, Saldanha y Liu, 2014).

En general, puede decirse que los materiales educativos promueven un tratamiento de las IEF orientado a la modelación probabilística (ver, por ejemplo, Pfannkuch y Ziedins, 2014), en los que se trabajan contextos apropiados para el desarrollo de la alfabetización probabilística (Gal, 2004) y se promueve la idea de riesgo como concepto dual a la probabilidad (Borovcnik y Kapadia, 2018). No obstante, la falta de proyectos sobre probabilidad en primaria y secundaria revela posibles retos de diseño que recaen en el profesorado, quienes al implementar el currículum, tienen la tarea de confeccionar proyectos multidisciplinarios en los que se aborden las IEF partiendo de conocimientos disciplinares y didácticos limitados para la enseñanza de la probabilidad (ver por ejemplo, Fernandes y Gea, 2018). Resalta que los libros de texto no incluyan proyectos relacionados con los juegos de azar, algo que epistemológicamente suena mal orientado (Batanero, 2005; Saldanha y Liu, 2014). Otro material importante que se omite en los recursos para la enseñanza de las IEF, particularmente en primaria y secundaria, son los recursos tecnológicos para la enseñanza de contenido estocástico, aspecto que contraviene la opinión de educadores probabilísticos (Batanero y Borovcnik, 2016).

CONCLUSIONES

Respecto a la pregunta, ¿cuáles ideas fundamentales de la probabilidad están consideradas en el currículum de educación básica y del nivel bachillerato? Se aprecia una incorporación gradual de las IEF a medida que los estudiantes avanzan en el currículum, siendo los estudiantes de bachillerato aquellos que deben hacer frente a prácticamente todas. Este trabajo amplía resultados previos realizados en el contexto mexicano; destacan, a lo largo del currículum, las ideas de muestra y la de modelo de urna y simulación, resultado que contrasta con la investigación de Sánchez (2009), quién demostró que la simulación y el enfoque frecuentista de la probabilidad estaban ausentes del programa curricular de secundaria. Los resultados también apoyan la conclusión de Elizarraras (2024) respecto al reto de atender todas las IEF en el nivel bachillerato, dada su complejidad y el poco tiempo lectivo disponible (aproximadamente 16 semanas de clase).

Respecto a la pregunta, ¿qué materiales se sugieren para la enseñanza de las IEF?, este ejercicio de revela grandes retos para el alcance de la coherencia entre los componentes curriculares analizados, particularmente en primaria y secundaria, ya que prácticamente ninguna IEF se materializa en las propuestas de proyectos y actividades dirigidas a los estudiantes. En contraparte, en el nivel bachillerato se aprecia un esfuerzo mayor por armonizar los contenidos probabilísticos con su pedagogía, en donde sí se especifican varios recursos sugeridos para la enseñanza de las IEF. Aunque su inclusión es valiosa, los profesores de este nivel adolecen de lineamientos para hacerlas operativas, y también de libros de texto oficiales que ejemplifiquen el tipo de tareas y situaciones probabilísticas que los estudiantes deben resolver. Esto es particularmente necesario para orientar al profesorado sobre cómo es que las IEF pueden abordarse desde una perspectiva de razonamiento y modelación probabilística, que es el enfoque sugerido para su enseñanza.

Como reflexiones finales, el análisis presentado en este reporte contribuye a expandir el foco de investigación que suele tomarse en el análisis curricular en materia de educación probabilística. La tradición que impera en esta área es enfocarse en el análisis de problemas que se presentan en libros de texto oficiales, que es sin duda un elemento valioso para el análisis del sistema curricular en cuanto al fenómeno de la educación probabilística. El trabajo aquí presentado, si bien se ha limitado al análisis de dos componentes curriculares particulares, aporta una perspectiva valiosa por apuntar a mirar el currículum de forma más integral (Niss, 2016), incidiendo en aspectos pocos trabajados (Elgueda-Ibarra et al., 2024). También se reconocen limitaciones importantes del trabajo, siendo una de las principales la necesidad de profundizar en el análisis teórico del componente curricular de materiales. Conviene, por ejemplo, retomar el marco de Gal (2004) sobre alfabetización probabilística, para generar una caracterización más robusta de los materiales o recursos incluidos en el currículum. Por tanto, futuros trabajos derivados de este ejercicio serían la profundización en el análisis de los componentes curriculares aquí seleccionados y de los restantes (actividades para estudiantes, formas de evaluación del conocimiento probabilístico, etcétera). En particular, resulta imperativo investigar cómo es que el profesorado mexicano implementa el currículum probabilístico de la NEM y cuál es su impacto en el aprendizaje del estudiantado.

Referencias

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *RELIME*, *8*(3), 247-264.

Batanero, C. y Borovcnik, M. (2016). *Statistics and probability in high school*. Sense Publishers. https://doi.org/10.1007/978-94-6300-624-8

Borovcnik, M. y Kapadia, R. (2018). Reasoning with Risk: Teaching Probability and Risk as Twin Concepts. En C. Batanero y E. J. Chernoff (Eds.), *Teaching and Learning Stochastics, Advances in Probability Education Research* (pp. 3-22). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-72871-1_1

Elgueda-Ibarra, M., Gea, M. M. y Stuardo-Aguayo, A. (2024). Criterios de evaluación para la probabilidad en el currículo de Educación Secundaria Obligatoria española. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 576). SEIEM.

Elizarraras Baena, S. (2024). Alcances y limitaciones curriculares para el desarrollo del pensamiento estocástico en estudiantes mexicanos de bachillerato. *Revista de Educación Estadística*, *3*, 1-17. https://doi.org/10.29035/redes.3.1.3

Fernandes, J. A. y Gea, M. M. (2018). Conhecimento de futuros professores dos primeiros anos escolares para ensinar probabilidades. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *14*, 15-30. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i14.213

Gal, I. (2004). Towards "probability literacy" for all citizens: Building blocks and instructional dilemmas. En G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 43-70). Kluwer Academic Publishers.

Ghandi, H. (2018). Understanding Children's Meanings of Randomness in Relation to Random Generators. En C. Batanero y E. J. Chernoff (Eds.), *Teaching and Learning Stochastics: Advances in Probability Education Research* (pp. 181-200). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-72871-1_11

Heitele, D. (1975). An epistemological View on Fundamental Stochastic Ideas. *Educational Studies in Mathematics*, *6*, 187-205.

Langrall, C. (2018). The status of probability in the elementary and lower secondary school mathematics curriculum: The rise and fall of probability in school mathematics in the United States. En C. Batanero y E. J. Chernoff (Eds), *Teaching and Learning Stochastics: Advances in Probability Education Research* (pp. 39-50). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-72871-1_3

Marín, A. y Noboa, A. (2013). *Conocer lo Social: Estrategias, técnicas de construcción y análisis de datos*. Fragua.

Mullis, I. V.S. (2019). Introduction. En I. Mullis y M. Martin (Eds.), *TIMSS 2019 Assessment Framework* (pp. 1-12). TIMSS & PIRLS International Study Center.

Niss, M. (2016). Mathematical standards and curricula under the influence of digital affordances: Different notions, meanings and roles in different parts of the world. En M. Bates y Z. Usiskin (Eds.). *Digital curricula in school mathematics* (pp. 239-250). Information Age Publishing. https://doi.org/10.1108/978-1-68123-413-720251021

Pfannkuch, M. y Ziedins, I. (2014). A modelling perspective on probability. En E. J. Chernoff y B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic thinking, Presenting plural perspectives* (pp. 101-116). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-72871-1_6

Ruiz, B., Batanero, C. y Arteaga, P. (2011). Vinculación de la Variable Aleatoria y Estadística en la Realización de Inferencias Informales por parte de Futuros Profesores. *Bolema*, *24*(39), 431-449.

Saldanha, L. y Liu, Y. (2014). Challenges of Developing Coherent Probabilistic Reasoning: Rethinking Randomness and Probability from a Stochastic Perspective. En E. J. Chernoff y B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic Thinking, presenting plural perspectives* (pp.367-396). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-7155- 0_20

Sánchez, E. (2009). La probabilidad en el programa de estudio de matemáticas de la secundaria en México. *Educación Matemática*, *21*(2), 39-77.

Secretaría de Educación Pública. (2024a). *Programa de Estudio para la Educación Primaria: Programa Sintético de la Fase 5*. https://educacionbasica.sep.gob.mx/wp-content/uploads/2024/06/Programa_Sintetico_Fase_5.pdf

Secretaría de Educación Pública. (2024b). *Programa de Estudio para la Educación Primaria: Programa Sintético de la Fase 6*. https://educacionbasica.sep.gob.mx/wp-content/uploads/2024/06/Programa_Sintetico_Fase_6.pdf

Secretaría de Educación Pública. (2023a). *Programa de estudios del Recurso Sociocognitivo Pensamiento Matemático I*. https://dgb.sep.gob.mx/storage/recursos/2025/09/nfhyrKiRiF-Pensamiento-Matematico-I.pdf

Secretaría de Educación Pública. (2023b). *Progresiones de aprendizaje del recurso sociocognitivo Pensamiento matemático*. https://desarrolloprofesionaldocente.sems.gob.mx/convocatoria1_2023/docs/Documento%20progresiones%20-%20Pensamiento%20matem%C3%A1tico.pdf

Vásquez, C. (2022). Caracterización de la estadística y la probabilidad en el currículo de educación infantil y primaria. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 579-587). SEIEM.

Vásquez, C. y Alsina, A. (2014). Enseñanza de la Probabilidad en Educación Primaria. Un Desafío para la Formación Inicial y Continua del Profesorado. *Números*, *85*, 5-23.

CONEXIONES INTRAMATEMÁTICAS EN TAREAS QUE INVOLUCRAN LA CONSERVACIÓN DE ÁREA

Intra-mathematical connections in tasks requiring area conservation

Caviedes, S., De Gamboa, G., Ribot-Llobet, E. y Badillo, E.

Universitat Autònoma de Barcelona

Resumen

El objetivo de este estudio fue identificar las conexiones intramatemáticas que establecen futuros maestros de primaria al justificar la conservación del área. Para esto, se adoptó un enfoque mixto que integra análisis de contenido y análisis de coocurrencias. Los resultados muestran que la conservación del área se construye mediante la coordinación de múltiples conexiones, especialmente a través de la relación concepto–procedimiento y la justificación. Si bien los procedimientos equivalentes y los cambios de representación se emplean con frecuencia, la justificación emerge cuando estos se vinculan explícitamente con las relaciones matemáticas que sustentan la conservación. Se concluye que comprender la conservación del área requiere integrar conexiones representacionales, procedimentales y justificativas, lo que subraya la importancia de promover en la formación docente tareas que favorezcan dicha articulación.

Palabras clave: *conexiones intramatemáticas, conservación del área, futuros maestros de primaria.*

Abstract

This study aimed to identify the mathematical connections established by prospective primary teachers when justifying area conservation. For this purpose, a mixed-method approach was adopted, combining content analysis and co-occurrence analysis. The results show that area conservation is constructed through the coordination of multiple connections, particularly the articulation between concept–procedure relationships and justification. While equivalent procedures and changes of representation are frequently used, justification emerges only when these are explicitly connected to the underlying mathematical relationships. The findings suggest that understanding area conservation requires integrating representational, procedural, and justificatory connections, highlighting the need to design teacher education tasks that foster such coordination.

Keywords: *intramathematical connections, area conservation, pre-service primary teacher.*

INTRODUCCIÓN

El área constituye un objeto de gran riqueza fenomenológica en la realidad; sin embargo, su enseñanza suele empobrecerse cuando se reduce de manera temprana a fórmulas (Freudenthal, 1983; Kospentaris et al., 2011). Para Freudenthal (1983), comprender el área implica tratarla como una magnitud y promover formas de comparación y justificación que no se limiten al cálculo numérico. En este sentido, adquieren especial relevancia los procedimientos de descomposición y recomposición (break-and-make), es decir, transformar una figura en otra mediante cortes y reordenamientos de partes, sin solapamientos ni huecos, permite sostener que el área total permanece inalterada (Lehman, 2023). Este tipo de razonamiento aporta sentido geométrico a las fórmulas al vincularlas con transformaciones justificadas, en lugar de presentarlas como reglas aisladas. Freudenthal advierte, además, que una dificultad persistente en la construcción del concepto de área es la confusión con magnitudes lineales, en particular, con el perímetro, lo que refuerza la necesidad de tareas que movilicen explícitamente argumentos de conservación basados en recomposición de figuras.

Caviedes, S., De Gamboa, G., Ribot-Llobet, E. y Badillo, E. (2026). Conexiones intramatemáticas en tareas que involucran la conservación de área. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (pp. 162-169). SEIEM.

En concordancia con lo anterior, la conservación del área constituye una propiedad clave para que los estudiantes comprendan el significado geométrico del área más allá de procedimientos mecánicos (Kospentaris et al., 2011; Sari et al., 2023). Comprender, por ejemplo, que un paralelogramo puede transformarse en un rectángulo, permite a los estudiantes visualizar y justificar geométricamente la fórmula correspondiente para su cálculo. Estrategias similares pueden aplicarse a otras figuras, como triángulos o trapecios. A pesar de su relevancia, la conservación del área no es una propiedad intuitiva y a menudo suscita dificultades tanto en alumnos como en futuros maestros (FM) (Caviedes et al., 2024, 2021). Por ejemplo, estudios como el de Kamii y Kysh (2006) han mostrado que los alumnos de primaria y secundaria presentan dificultades al reconocer que dos configuraciones distintas, aunque estén formadas por las mismas piezas, tienen la misma área, especialmente cuando la apariencia global de las figuras varía. Estas dificultades están frecuentemente asociadas con una dependencia de representaciones prototípicas y de características superficiales de las formas (Caviedes et al., 2023) y no desaparecen con la edad (Kospentaris et al., 2011).

Hong y Runnalls (2020) han observado que los FM tienen una preferencia por figuras prototípicas, como rectángulos o triángulos acutángulos, mientras que figuras más irregulares o con ángulos obtusos les generan confusión. En particular, identificar adecuadamente la base y la altura en este tipo de figuras constituye un desafío considerable según los autores. Estas dificultades se intensifican cuando las figuras no incluyen medidas explícitas, situación en la que los FM tienden a descomponer la figura en partes más pequeñas para calcular áreas por separado. Sin embargo, Hong y Runnalls (2020) sostienen que este procedimiento frecuentemente complica la resolución de tareas en lugar de simplificarlas, ya que no promueve una visión global de la figura ni una comprensión conceptual del área. Al respecto, los autores señalan que es fundamental que la formación docente incluya un enfoque más riguroso y específico en torno a la conservación del área. Involucrar a los FM en tareas matemáticas ricas, como reconocer características geométricas clave en figuras no prototípicas o razonar sobre el área sin depender de datos numéricos, puede resultar beneficioso. En este contexto, la presente comunicación tiene por objetivo identificar las conexiones intramatemáticas que establecen FM cuando justifican la equivalencia y conservación de áreas.

MARCO TEÓRICO

En la literatura se distinguen, de manera amplia, dos grandes tipos de conexiones: intramatemáticas y extramatemáticas. Las primeras se construyen dentro del propio ámbito de las matemáticas, al vincular representaciones, definiciones, conceptos, procedimientos o proposiciones en un contexto matemático (De Gamboa et al., 2023), mientras que las segundas remiten a relaciones con contextos no matemáticos. De Gamboa et al. (2023) señalan, además, que las conexiones intramatemáticas pueden organizarse en dos categorías: conexiones intramatemáticas de tipo conceptual y conexiones intramatemáticas vinculadas a procesos. Las conexiones de tipo conceptual se refieren a relaciones entre distintos objetos matemáticos asociados a un mismo concepto, mientras que las conexiones relacionadas con procesos enfatizan explícitamente procesos transversales a la actividad matemática (por ejemplo, heurísticas de resolución de problemas). Dado que este estudio se interesa por las conexiones que se establecen al resolver tareas de área que involucran la conservación del área, se consideran únicamente las conexiones intramatemáticas de tipo conceptual, centradas en la articulación entre distintas relaciones de un mismo objeto matemático.

Según De Gamboa et al. (2023) este tipo de conexiones puede, además, clasificarse en diferentes subtipos: la conexión de Representación Equivalente (ER) se refiere a la conexión entre dos representaciones del mismo objeto dentro del mismo registro, como sucede con dos representaciones gráficas o geométricas de una figura. La conexión de Representación Alterna (AR) implica la relación entre representaciones del mismo objeto en registros diferentes, como cuando se pasa de una representación geométrica a una expresión en lenguaje algebraico. Otras conexiones relevantes son la de Procedimiento Equivalente (EP), que alude a la conexión entre dos procedimientos distintos que permiten resolver la misma tarea, por ejemplo, utilizar una fórmula o contar unidades para calcular

el área. Finalmente, la conexión de Procedimiento (P) relaciona un concepto con un procedimiento y la de Justification (J) se define como la conexión entre dos proposiciones (premisa-conclusión), usada para justificar el uso de un procedimiento o propiedad. Estas categorías permiten analizar cómo FM movilizan y articulan representaciones, procedimientos y justificaciones al enfrentar tareas que involucran la conservación del área.

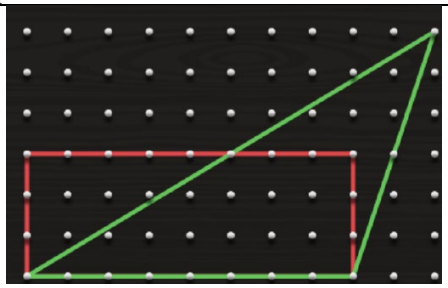
MÉTODO

Este estudio se enmarca en un paradigma interpretativo y adopta un enfoque mixto (Cohen et al., 2017). Participaron 68 FM de tercer curso del Grado en Educación Primaria de una universidad española. La recogida de datos se realizó en el curso 2025–2026 a lo largo de dos sesiones (1 h teórica y 2 h práctica cada una), orientadas al desarrollo de conocimiento matemático y didáctico para el establecimiento de conexiones. Los participantes fueron informados de los objetivos del estudio y firmaron un consentimiento informado con los detalles de su participación y del estudio mismo.

Los FM trabajaron en grupos (3–4 integrantes). En la primera sesión analizaron conexiones curriculares y resolvieron una tarea sobre equivalencia de áreas con cinco preguntas asociadas. En la segunda, analizaron respuestas de estudiantes y propusieron estrategias y tareas de intervención. Por razones de extensión, en este trabajo se analiza únicamente una tarea de la primera sesión y una de las preguntas que la integraban (Tabla 1). Es importante señalar que este estudio se enmarca en una propuesta de investigación basada en diseño (Cobb et al., 2003), en el que la validez se construye iterativamente mediante ciclos de (re)diseño, implementación y análisis. Por ello, los resultados de esta primera aplicación no son concluyentes, sino orientados a la mejora progresiva de la propuesta.

Tabla 1

Tarea propuesta a los FM en la sesión 1

Enunciado de la tarea	**Representación de la tarea**
La distancia entre puntos de la cuadrícula es 1 unidad. ¿Cómo podrías comparar el área del triángulo con la del rectángulo? Justifica tu respuesta utilizando dos procedimientos diferentes: uno que involucre transformaciones geométricas y otro que involucre cálculos.	 (Adaptado de Mamona-Downs y Papadopoulos, 2006)

Análisis

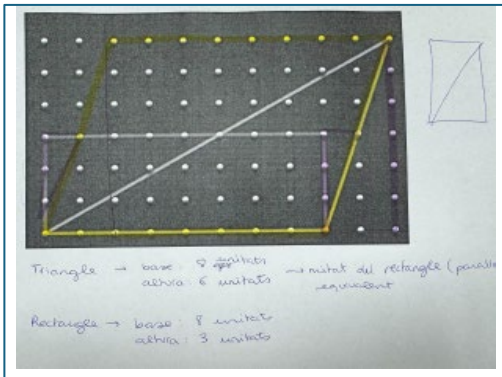
Se llevó a cabo un análisis de contenido (Cohen et al., 2017) mediante un proceso de codificación deductivo, estructurado en dos fases. En la primera fase, se identificaron los procedimientos, representaciones y justificaciones que los FM movilizaban en la resolución de la tarea. Para ello, se emplearon como referencia los indicadores propuestos por Caviedes et al. (2023). En la segunda fase, se identificaron las conexiones intramatemáticas de acuerdo con la tipología de De Gamboa et al. (2023). La aplicación de estas categorías requirió precisar criterios de codificación para interpretar evidencias en producciones que combinaban transformaciones geométricas, cálculos numéricos y justificaciones sobre la conservación del área. Con el fin de analizar cómo se articulan simultáneamente distintas categorías en las producciones de los FM, se realizó un análisis de coocurrencias, entendido como la identificación de relaciones que se producen cuando dos o más categorías aparecen conjuntamente en una misma respuesta (Gómez, 2009). Este tipo de análisis

permitió observar patrones de asociación entre tipos de conexiones intramatemáticas, proporcionando una visión estructural del establecimiento de ellas. Primero, se construyó una matriz de presencia–ausencia y, posteriormente, se utilizó el lenguaje de programación Python, que permitió procesar los datos y visualizar la frecuencia y distribución de coocurrencias en forma de grafos. A continuación, se ejemplifica el análisis con las resoluciones de dos grupos de FM.

En la Figura 1, al describir que el triángulo se duplica para formar un paralelogramo y que este puede reorganizarse hasta coincidir con un rectángulo, el G10 relaciona la equivalencia de superficies con el procedimiento geométrico de descomposición y recomposición de figuras mediante isometrías. Esta coordinación permite inferir el establecimiento de una conexión de procedimiento (P), ya que la equivalencia se construye al vincular el procedimiento de descomposición y recomposición con la conservación del área como magnitud. Posteriormente, cuando el grupo afirma que el paralelogramo es el doble del rectángulo y que el triángulo es la mitad del paralelogramo, introduce un segundo procedimiento (EP). Al coordinar configuraciones distintas (triángulo, paralelogramo, rectángulo), el grupo establece una conexión de representación equivalente (ER), relacionando representaciones diferentes del mismo objeto dentro del registro geométrico.

Figura 1

Proceso de resolución del grupo 10 (G10)



Cuando duplicamos y reflejamos el triángulo a lo largo de su diagonal, formamos un paralelogramo. Una vez que tenemos el paralelogramo, podemos reorganizarlo para que coincida con un rectángulo... podemos ver que el rectángulo ocupa la mitad de nuestro paralelogramo... podemos recortar las partes que no coinciden con el rectángulo y reorganizarlas para que encajen. Con estos dos procedimientos, podemos observar que el área de ambas figuras es la misma.... El área de un rectángulo se calcula como base × altura. En el caso del triángulo, el área es (base × altura) ÷ 2. Por lo tanto, si estamos calculando con cuadritos, los cálculos se verían así: (8×6)/2 = 24 y 8×3 = 24).

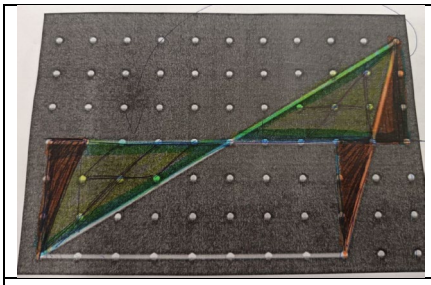
La introducción de las expresiones simbólicas (8×6) /2=24 y 8×3=24 establece una correspondencia explícita entre las representaciones geométricas y su expresión numérica. Esta coordinación entre el registro geométrico y el numérico permite inferir el establecimiento de una conexión de representación alterna (AR), al relacionarse representaciones del mismo objeto en registros diferentes. La coordinación entre estas dos formas de resolución (equivalencia / cálculo) lleva asociado el establecimiento de una conexión (EP), ya que se relacionan dos procedimientos distintos que conducen a la misma solución. Finalmente, cuando el grupo concluye que ambas expresiones dan el mismo resultado y que, por ello, el triángulo y el rectángulo tienen la misma extensión de superficie, se articula una relación entre premisas (equivalencias geométricas y cálculos simbólicos) y una conclusión (validez del resultado). Esta estructura premisa–conclusión permite inferir una conexión (J), ya que el procedimiento se valida por distintas representaciones y vías de resolución.

La resolución del G14 (Figura 2) se construye a partir de la descomposición del triángulo en varias partes que posteriormente son reorganizadas para completar el rectángulo. Al describir que una de las piezas se traslada y que otra se rota 180° para ocupar la región restante, los FM relacionan la idea de equivalencia de superficies con el procedimiento geométrico de descomponer y recomponer figuras mediante transformaciones isométricas. Esta coordinación entre una magnitud y una secuencia de acciones que permite conservarla y compararla permite inferir el establecimiento de una

conexión de tipo (P), ya que el significado de la equivalencia no se enuncia de forma declarativa, sino que se construye a través del propio procedimiento. A continuación, cuando señalan que las piezas recompuestas coinciden exactamente con la parte restante del rectángulo, el grupo coordina dos configuraciones geométricas distintas que representan la misma extensión de superficie. En este punto, una misma cantidad de superficie es expresada mediante dos configuraciones geométricas diferentes. Esta coordinación dentro del mismo registro permite inferir el establecimiento de una conexión (ER), al tratarse de representaciones geométricas equivalentes de un mismo objeto.

Figura 2

Proceso de resolución del grupo 14 (G14)



Si dividimos el triángulo en diferentes partes, podemos reorganizarlas dentro del rectángulo para comprobar si encajan. El triángulo pequeño (naranja) puede trasladarse hacia la izquierda, completando el lado del rectángulo, y el triángulo amarillo necesita una rotación de 180°, tomando como centro de rotación el vértice izquierdo del triángulo... El triángulo pequeño tiene una base de1 unidad y una altura de 3 unidades; el triángulo grande tiene una base de 4 unidades. La parte del rectángulo que necesita ser rellenada tiene una base de 5 unidades y una altura de 3 unidades.... necesitamos un triángulo pequeño con altura 3 y base 1, que es el mismo que ya tenemos tras el primer corte... Coinciden exactamente con las dimensiones… por completar.

Al introducir medidas concretas y relacionarlas con las piezas obtenidas, los FM relacionan la configuración geométrica con su descripción numérica (aunque comenten error de conteo). Aquí, el objeto ya no se presenta únicamente en el registro geométrico, sino también en el simbólico. Esto permite inferir el establecimiento de una conexión (AR), al coordinar representaciones del mismo objeto en sistemas diferentes. El grupo muestra, además, que la región formada por la recomposición de las dos piezas puede describirse con las mismas dimensiones que la parte del rectángulo que queda por completar, de modo que el área se obtiene tanto por reorganización geométrica como por relaciones y cálculo a partir de las dimensiones. La coordinación entre estas dos vías de resolución permite inferir una conexión (EP), al tratarse de procedimientos distintos que conducen al mismo resultado. Finalmente, cuando afirman que las dimensiones “coinciden exactamente” y que por ello las piezas completan el rectángulo, se establece una relación entre una condición geométrica y una conclusión sobre la validez del resultado. Esta relación premisa–conclusión permite inferir el establecimiento de una conexión (J), ya que el procedimiento queda legitimado a partir de la coherencia entre las configuraciones obtenidas y sus dimensiones.

RESULTADOS

La Tabla 2 presenta la distribución de las conexiones intramatemáticas identificadas. Los resultados muestran que la conexión (P) es la más frecuente, presente en los 14 grupos. Esto indica que la mayoría de los FM aplican procedimientos que explicitan, al menos parcialmente, la relación entre los conceptos/representaciones implicadas (base, altura, duplicación, mitad, figura poligonal) y las operaciones realizadas. La conexión (J = 9) se manifiesta cuando los participantes establecen relaciones condicionales o causales que vinculan la acción realizada con la invariancia de la magnitud. Por su parte, la conexión (EP = 8) indica que un poco más de la mitad de los grupos movilizan dos procedimientos distintos para abordar la tarea, lo cual se solicitaba de manera explícita en el enunciado de la Tarea. Asimismo, la conexión (AR=7) evidencia que aproximadamente la mitad de los participantes coordinan registros distintos (geométrico y numérico) para construir su respuesta. La conexión (ER = 7) indica que varios grupos utilizan transformaciones dentro del mismo registro,

simetrías, rotaciones y/o traslaciones, para ilustrar la conservación sin recurrir necesariamente al cálculo. Así, la Tabla 2 muestra que, si bien la mayoría de los FM logra articular la acción procedimental con los conceptos implicados, no todos integran de manera sistemática cambios de registro o comparaciones y/o validaciones mediante procedimientos diferentes.

Tabla 2

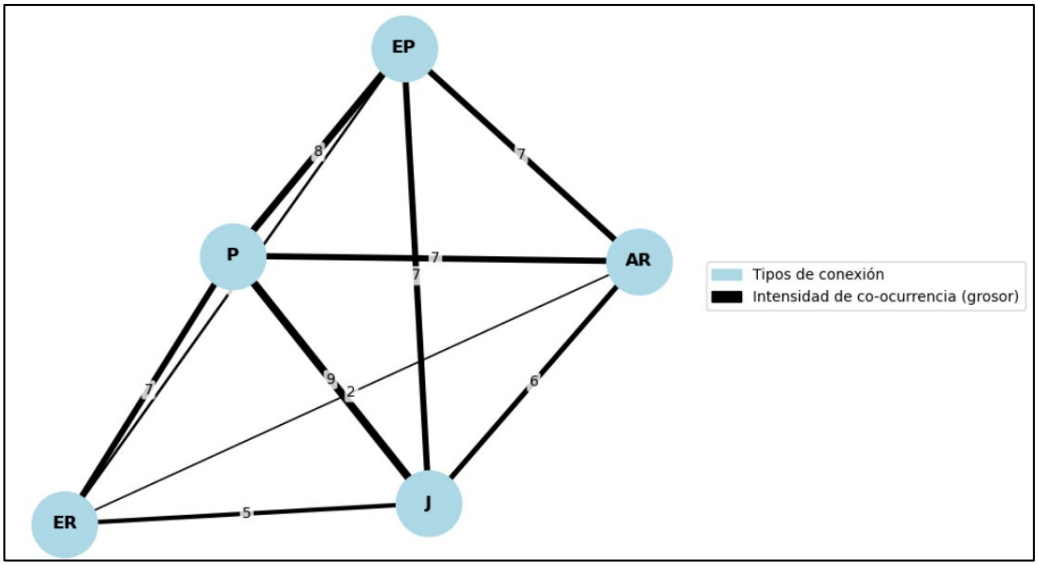
Tipos de conexiones identificadas por grupo

Tipo de conexión	Total	Grupos
Procedimiento equivalente (EP)	8	G2, G3, G4, G9, G10, G12, G13, G14
Representación Alternativa (AR)	7	G2, G3, G9, G10, G12, G13, G14
Representación equivalente (ER)	7	G1, G4, G5, G7, G8, G13, G14
Procedimiento (P)	14	G1, G2, G3, G4, G5, G6, G7, G8, G9, G10, G11, G12, G13, G14
Justificación (J)	9	G3, G4, G7, G8, G9, G10, G12, G13, G14

La Figura 3 ilustra las relaciones de coocurrencia entre los distintos tipos de conexiones intramatemáticas movilizadas por los grupos al justificar la equivalencia y conservación de áreas. Cada nodo corresponde a un tipo de conexión intramatemática (EP, AR, ER, P, J) y las aristas indican el número de grupos en los que dichas conexiones aparecen simultáneamente. El grosor de las aristas es proporcional a la intensidad de la coocurrencia, mientras que la posición relativa de los nodos refleja su proximidad relacional dentro del sistema de conexiones.

Figura 3

Coocurrencias entre conexiones intramatemáticas identificadas.



La estructura de coocurrencias muestra que la relación más intensa del sistema es (P–J = 9), lo que indica que la justificación se establece principalmente cuando los FM explicitan la relación entre el procedimiento utilizado y los conceptos involucrados en la Tarea. Así, la validación de la conservación del área no se sustenta sólo en la coincidencia de resultados, sino en la explicitación de cómo se opera sobre la figura y por qué esas operaciones preservan la magnitud.

Las coocurrencias (EP–P = 8) y (EP–AR = 7) sugieren que el uso de procedimientos equivalentes suele ir acompañado tanto de una explicitación conceptual de las operaciones realizadas como con cambios de representación. Esto significa que, cuando los FM utilizan dos o más procedimientos diferentes tienden a relacionar las acciones geométricas o numéricas con la estructura de la figura y, en varios casos, con el cambio de registro. De este modo, se infiere que la equivalencia procedimental no es una constatación empírica, sino una construcción que permite a los FM fundamentar el vínculo entre la acción operativa y la estructura del objeto geométrico. En la misma línea, la coocurrencia (AR – P = 7) sugiere que el cambio de registro opera frecuentemente en coordinación con la explicitación procedimental. En este sentido, la representación alterna no funciona de manera autónoma, sino integrada en procedimientos que indican cómo se construye o valida la conservación.

Las coocurrencias (EP–J = 7) y (AR–J = 6) indican que tanto los procedimientos equivalentes y los cambios de representación pueden contribuir a la justificación cuando se vinculan explícitamente con la conservación del área. Sin embargo, la justificación se articula con mayor fuerza cuando los procedimientos se hacen explícitos, más que cuando simplemente se comparan en diferentes registros.

Por su parte, la conexión ER presenta coocurrencias con (P = 7) y con (J = 5), y algunas más débiles con (EP = 3) y (AR = 2). Esto sugiere que, aunque varios grupos usan representaciones geométricas equivalentes para visualizar la conservación del área, estas no suelen articularse con otros procedimientos alternativos ni con cambios de registro. Es decir, la conexión ER parece funcionar principalmente dentro del registro geométrico, como apoyo visual a la conservación, pero con menor frecuencia se integra en cadenas más complejas que combinen distintos procedimientos o registros.

Lo anterior revela una estructura interconectada cuyo eje principal es procedimental-justificativo. En esta Tarea, la conservación del área se construye a través de la explicitación de las operaciones realizadas sobre la figura y de la articulación conceptual que permite comprender por qué dichas transformaciones no alteran la magnitud. Las representaciones y los procedimientos equivalentes contribuyen a esta construcción, pero su papel adquiere mayor consistencia cuando se integran en una cadena que culmina en la validación justificativa.

CONCLUSIONES

Los resultados muestran que la justificación de la conservación del área se construye, principalmente, a través de la explicitación de la relación entre concepto/representación y procedimiento. La fuerte coocurrencia entre P y J indica que la validación de la conservación emerge cuando los FM explicitan cómo operan sobre la figura y vinculan dicha acción con los conceptos involucrados (base, altura, duplicación, mitad). La justificación no aparece como un añadido discursivo posterior, sino como el resultado de una explicitación conceptual del procedimiento. Así, la comprensión de la conservación del área se apoya en la articulación entre acción geométrica y fundamentación conceptual.

El uso de procedimientos equivalentes, así como la coordinación de registros no son suficientes por sí solos para consolidar la comprensión de la conservación. Aunque EP y AR amplían el campo de análisis y permiten reinterpretar la tarea desde perspectivas diversas, la conservación del área se consolida cuando, por ejemplo, las transformaciones realizadas se explican en términos de la magnitud que permanece constante (Caviedes et al., 2023, 2024). En este sentido, la comprensión no depende solo de mostrar procedimientos o representaciones equivalentes, sino de fundamentarlas. Similarmente, las equivalencias dentro del mismo registro (ER) favorecen la visualización de la invariancia, pero no aseguran una comprensión de la conservación si no se integran en un entramado procedimental y justificativo que explicite por qué la magnitud permanece constante.

El aporte de este trabajo se sitúa, por lo tanto, en tres niveles. En un nivel teórico, permite caracterizar la conservación del área como una construcción relacional que requiere coordinar conexiones procedimentales, representacionales y justificativas, complemetando resultados de investigación previa (Hong y Runnalls, 2020). En un nivel metodológico, el análisis de coocurrencias permite

identificar no solo qué conexiones movilizan los FM, sino cómo estas se articulan entre sí y cuáles actúan como ejes de validación, especialmente la relación y estructura procedimiento y justificación dentro de un sistema complejo (De Gamboa et al., 2024). En un nivel formativo, los resultados ofrecen criterios para diseñar y analizar tareas en la formación inicial de maestros. En este sentido, no basta con solicitar procedimientos distintos o cambios de representación, sino que es necesario promover justificaciones que vinculen las transformaciones realizadas con la conservación del área.

Agradecimientos

PID2023-149580NB-I00 (MCIN/AEI/10.13039/501100011033 y FEDER UE).

Referencias

Caviedes, S., De Gamboa, G. y Badillo, E. (2021). Una aproximación al conocimiento especializado sobre área en estudiantes para maestro. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 213 – 220). SEIEM.

Caviedes, S., De Gamboa, G. y Badillo, E. (2023). Preservice Teachers' Knowledge Mobilized in Solving Area Tasks. *Journal on Mathematics Education*, *14*(1), 35-54. https://doi.org/10.22342/jme.v14i1.pp35-54

Caviedes, S., De Gamboa, G. y Badillo, E. (2024). Mathematical connections involved in area measurement processes. *Research in Mathematics Education*, 26(2), 237-257. https://doi.org/10.1080/14794802.2024.2370333

Cobb, P., Confrey, J., DiSessa, A., Lehrer, R. y Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational researcher, 32*(1), 9-13. https://doi.org/10.3102/0013189X032001009

Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2017). *Mixed methods research. In Research methods in education* (pp. 31-50). Routledge.

De Gamboa, G., Caviedes, S. y Badillo, E. (2024). El papel de las conexiones intramatemáticas en el aprendizaje de los números decimales. *Avances de investigación en educación matemática: AIEM,* (25), 131-149. https://doi.org/10.35763/aiem25.6399

De Gamboa, G., Badillo, E. y Font, V. (2023). Meaning and structure of mathematical connections in the classroom. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 23*(2), 241-261. https://doi.org/10.1007/s42330-023-00281-2

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures.* Reidel Publishing Company.

Gómez, E. E. (2009). Una nota metodológica sobre los análisis cualitativos. El análisis de las relaciones entre los elementos: el análisis de las frecuencias y coocurrencias. *Theoria, 18*(1), 57-67.

Hong, D. S. y Runnalls, C. (2020). Examining preservice teachers' responses to area conservation tasks. *School Science and Mathematics, 120*(5), 262-272. https://doi.org/10.1111/ssm.12409

Kamii, C. y Kysh, J. (2006). The difficulty of "length× width": Is a square the unit of measurement?. *The Journal of Mathematical Behavior, 25*(2), 105-115. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2006.02.001

Kospentaris, G., Spyrou, P. y Lappas, D. (2011). Exploring students' strategies in area conservation geometrical tasks. *Educational Studies in Mathematics, 77*(1), 105-127. https://doi.org/10.1007/s10649-011-9303-8

Mamona-Downs, J. y Papadopoulos, I. (2006). The problema-solving element work relate to the concept of area. En J. Novotná, H. Moraova, M. Krátká y N. Stehl líková (Eds.), *Proceedings of the 30 Conference of the International Group for the psychology of Mathematics Education* (pp. 121-128). PME

Sari, Y. M., Fiangga, S., El Milla, Y. I. y Puspaningtyas, N. D. (2023). Exploring Students' Proportional Reasoning in Solving Guided-Unguided Area Conservation Problem: A Case of Indonesian Students. *Journal on Mathematics Education, 14(*2), 375-394. https://doi.org/10.22342/jme.v14i2.375-394

¿CÓMO SE ARTICULA EL CONOCIMIENTO DE LA PRÁCTICA MATEMÁTICA DE GENERALIZAR EN LA GESTIÓN DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS?

How is the knowledge of the mathematical practice of generalising articulated in the orchestration of problem solving?

Chico, A.[a], Pinto, E[b], Piñeiro, J. L.[c], Climent, N.[a], Montes, M.[a] y Gómez, I.[a]

[a]Universidad de Huelva, [b]Universidad de O'Higgins, [c]Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación

Resumen

En este trabajo nos centramos en analizar el conocimiento especializado del profesor movilizado para gestionar la resolución de un problema de generalización. Para ello, nos aproximamos desde la perspectiva del modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas -MTSK- al análisis del conocimiento que Andrea, un maestro de primaria, moviliza al realizar una clase de resolución de problemas. El análisis se centra en el conocimiento del maestro sobre aspectos de la generalización y gestión de la enseñanza. Los resultados muestran cómo el conocimiento del profesor orienta la discusión en el aula, desde la familiarización con el problema en una generalización cercana, hasta el establecimiento y revisión de relaciones funcionales.

Palabras clave: *generalización, resolución de problemas, conocimiento del profesor, MTSK*

Abstract

In this work, we focus on analysing the specialised teacher's knowledge mobilised to manage the resolution of a generalisation problem. To this end, we use the Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model to analyse the knowledge mobilised by Andrea, a primary school teacher, while managing a problem-solving session in a multilevel rural classroom. The analysis focuses on Andrea's knowledge regarding aspects of generalisation and instructional orquestation. The results show how the teacher's knowledge guides the classroom discussion, moving from problem familiarisation in near generalisation to the establishment and validation of functional relationships.

Keywords: *generalisation, problem solving, teacher knowledge, MTSK*

INTRODUCCIÓN

El conocimiento del profesor ha sido objeto de reflexión por parte de la comunidad de investigadores en educación matemática desde hace más de 40 años (e. g., Shulman, 1986). En la última década, se han desarrollado múltiples esfuerzos en pro de comprender, en detalle, las características del conocimiento que los docentes movilizan al enseñar tanto tópicos matemáticos específicos (e. g. Álvarez-Candano et al., 2024), como prácticas matemáticas (Delgado-Rebolledo y Zakaryan, 2020). Ponemos el foco en educación primaria y en el estudio de prácticas matemáticas por la mayor dificultad para encontrar situaciones de aula en las que se evidencia conocimiento de la práctica matemática de profesorado (Flores-Medrano et al., 2022), frente a otros subdominios.

En particular, generalizar como práctica matemática constituye un elemento clave del pensamiento matemático y un impulsor relevante de su desarrollo (Mason, 2008). Generalizar supone una manera fundamental de pensar matemáticamente, en tanto posibilita reconocer regularidades, identificar patrones y elaborar afirmaciones que van más allá de situaciones específicas (Blanton 2008; Pinto y

Chico, A., Pinto, E., Piñeiro, J. L., Climent, N., Montes, M. y Gómez, I. (2026). ¿Cómo se articula el conocimiento de la práctica matemática de generalizar en la gestión de la resolución de problemas en el aula? En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (pp. 170-177). SEIEM.

Cañadas, 2021). Asimismo, generalizar se encuentra estrechamente vinculada con la práctica de resolver problemas (Mason, 2008), ya que resolver problemas implica reconocer métodos, identificar qué elementos permanecen invariantes y extender procedimientos a nuevas clases de situaciones. Desde el punto de vista curricular, promover procesos de generalización implica abordar las ideas matemáticas con distintos niveles de complejidad, lo que favorecería que estudiantes con diversos perfiles de conocimientos matemáticos amplíen y profundicen sus ideas más allá de un contenido puntual y de un uso exclusivo de representaciones simbólico-algebraica.

En este trabajo nos centramos en comprender el conocimiento que moviliza un maestro, durante una clase de resolución de problemas de generalización. Así, nuestra pregunta de investigación es: ¿Cómo se articula el conocimiento de la práctica de generalización en la gestión de la resolución de problemas? Para abordarla, el objetivo de investigación es caracterizar el conocimiento especializado que moviliza un maestro sobre la práctica de generalizar al enseñar resolución de problemas. Por tanto, esta comunicación ofrece una oportunidad para generar tareas para la formación de profesorado de Primaria para el desarrollo de dicho conocimiento (en el sentido de Climent et al. (2024) que utilizan episodios de aula para desarrollar conocimiento especializado), que resulta especialmente complejo en la formación inicial de profesorado de Primaria (Arce y Conejo, 2025).

ENSEÑANZA DE LA GENERALIZACIÓN DESDE LA PERSPECTIVA DEL MTSK

En el marco del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK por sus siglas en inglés), el Conocimiento de la Práctica Matemática (KPM, en adelante), como uno de sus subdominios (Carrillo et al., 2018), describe el conocimiento del profesor de elementos sintáctico-matemáticos, integrando prácticas matemáticas como definir, resolver problemas, generalizar, o demostrar, entre otros (Delgado-Rebolledo y Zakaryan, 2020). Este subdominio, y el conocimiento profesional asociado a él está poco abordado en la investigación en educación matemática, en comparación con elementos semánticos (Climent y Montes, 2022).

La gestión de la resolución de problemas orientada a la generalización de patrones requiere que el profesorado movilice conocimiento especializado, tanto sobre la práctica de generalizar (Melhuish et al., 2020) como sobre la enseñanza de la resolución de problemas (Chico, 2024). Particularmente, si nos situamos desde la perspectiva del MTSK (Chico, 2024), la propia categorización del modelo induce al conocimiento de la práctica matemática para resolver problemas (KPM) y el conocimiento sobre su enseñanza (KMT). No obstante, podríamos plantearnos que el docente requiere de conocimiento sobre distintos tipos de registros (KoT) para abordar la resolución, o sobre diferentes contenidos matemáticos y cómo enlazarlos para aumentar o disminuir su complejidad (KSM). Además, hemos de considerar la necesidad de que el docente conozca las potencialidades del problema que selecciona para ser resuelto en el aula (KMT) y las posibles dificultades que pueden manifestar los estudiantes al abordarlo (KFLM). En consecuencia, en este trabajo nos centramos en la práctica de generalizar (KPM) y en el uso dado a las representaciones para la enseñanza durante una clase de resolución de problemas.

Dadas las particularidades de la enseñanza para el desarrollo del pensamiento algebraico a través de la resolución de problemas, esta comunicación se apoya, además de aspectos del conocimiento especializado del profesor, en los componentes de la actividad de generalizar propuestos por Blanton (2008): explorar, conjeturar, comprobar-revisar y generalizar. Asimismo, desde la perspectiva del pensamiento funcional (en la que se abordan tareas orientadas a la generalización de relaciones funcionales), se presta especial atención a las estrategias que sigue el estudiantado al generalizar, ampliamente documentadas por Blanton et al. (2015): conteo, estrategia recursiva particular, estrategia recursiva general, función particular y función general. Además, dado que la diversidad en que el estudiantado de primaria expresan generalizaciones (Pinto y Cañadas, 2021) utilizando diferentes representaciones (por ejemplo, manipulativas, simbólico-numérica, simbólico-algebraica, verbales, tabulares) refleja distintos modos de pensar, es necesario que el profesorado conozca la

gestión de diferentes representaciones (KMT) y su papel en la enseñanza para los procesos de generalización del estudiantado (KMT).

MARCO METODOLÓGICO

Este trabajo se encuadra en un estudio de caso (Bassey, 1999), desarrollado desde un paradigma interpretativo. El contexto de aula es el de una clase multinivel en un colegio rural de Huelva, en el que imparte clase Andrea, un profesor con 2 años de experiencia, vinculado a contextos de formación continua, que no tenía formación específica previa sobre problemas de generalización, o su enseñanza. El aula está conformada por 7 estudiantes de edades comprendidas entre los 9 y 12 años. La racionalidad de esta elección tiene relación con que las aulas multigrado, al tener diversidad de perfiles estudiantiles, provee un escenario idóneo para focalizar en prácticas matemáticas por sobre contenidos específicos que suelen estar ligados a ciclos particulares.

En esta comunicación mostraremos resultados derivados de la implementación de una sesión, en la que el profesor gestiona la resolución de un problema de generalización, "el problema de la Arqueóloga" (Chico, 2024). El problema involucra dos variables: altura de la escalera y el número de cajones que la componen, ambas vinculadas a través de la relación funcional $f(x)=x(x+1)/2$ (Figura 1). Para resolverlo, se propone utilizar material TEACCH (Figura 2), diseñado considerando la enseñanza estructurada y el componente visual en el aprendizaje (Schoppler et al., 2013): cuadrados de goma Eva, una tabla plastificada (que invita a recoger datos sobre cada escalera, su altura y número de cajones usados) y pictogramas con las escaleras de distintos números de peldaños.

Figura 1

Enunciado del problema

> *Una arqueóloga quiere limpiar los esqueletos de los dinosaurios de un museo. No tiene una escalera, pero ha encontrado varias cajas, todas del mismo tamaño, que puede apilar para alcanzar las distintas alturas de los dinosaurios. Cada caja es de 1 metro de alto, y puede apilarlas como muestra la imagen- ¿Cuántas cajas necesita para alcanzar la altura del Velociráptor (2m), del Estegosaurio (4m), del Gigantoráptor (8m), y del T-Rex (10m)?*

Figura 2

Material proporcionado con el enunciado del problema



La sesión se dividió en tres momentos: inicial, trabajo individual, y puesta en común. Esta secuencia fue decidida por el profesor, a quien previamente se le había presentado el problema, sus objetivos y el material TEACCH, discutiendo su potencial y la importancia de presentarlos gradualmente.

Posterior a la videograbación, realizamos la transcripción de la sesión y llevamos a cabo un análisis de contenido de las intervenciones del docente, considerando las siguientes subdominios:

- *Subdominio KPM*, a través del conocimiento de: (a) componentes involucrados en el proceso de generalización (Blanton, 2008): explorar, generalizar ideas matemáticas, comprobar-revisar y generalizar; estrategias de generalización (Blanton et al., 2015): conteo, estrategia recursiva particular, estrategia recursiva general, función particular y función general.

- *Subdominio KMT*, a través del conocimiento de las diferentes representaciones empleadas en la enseñanza de la generalización: manipulativa, verbal (oral o escrita), simbólica (numérica o algebraica), tabular, pictórica o gráfica (Pinto y Cañadas, 2021).

Entendemos que el conocimiento movilizado al gestionar la resolución de problemas de generalización necesariamente supone otros subdominios, sin embargo, en este trabajo nos centramos en estos dos, tanto por cuestiones de espacio como por focalizar en un subdominio que necesita empíricamente mayor comprensión. El análisis fue desarrollado en paralelo por tres de los autores, resolviendo los casos de disensión a través de la discusión. Los otros tres autores actuaron como validadores de dicho resultado.

RESULTADOS

Los resultados han sido organizados conforme a los tres momentos que considero la sesión, en los cuales presentaremos la manera en que emerge KPM (a través de indicadores de conocimiento y estrategias de generalizar) y KMT (a través de las representaciones utilizadas en la enseñanza).

El momento inicial, de lectura y apropiación de la tarea por el estudiantado, comienza con una lectura en común del enunciado, que Andrea fragmenta para facilitar su comprensión. En este momento prima el registro verbal, mediante el que el maestro introduce términos que evocan a la representación pictórica de la situación ("*Que hay escaleras, que hay cajones, ¿no? que los puede apilar*"). Apoyándose en el concepto visual de la escalera, el docente coordina una discusión inicial sobre la transición entre la bidimensionalidad de las representaciones pictóricas y la tridimensionalidad de las cajas que utiliza la arqueóloga para construir su escalera, utilizando las piezas de goma eva como recurso tangible, facilitando la representación de la situación. Emergen evidencias de conocimiento KMT (uso de representaciones para la enseñanza), al integrar representaciones manipulativa y verbal del enunciado, haciendo un paralelismo entre ellas. A medida que avanza la lectura, se desglosan las premisas del problema, clarificando tanto la configuración de la escalera como las dimensiones de los dinosaurios, apareciendo los primeros indicios de conocimiento sobre la exploración (KPM, componentes de la generalización).

Tras la presentación y lectura conjunta del problema, inicia la resolución individual del problema. El docente reparte las piezas de goma eva e invita a construir con las piezas "*la escalera para alcanzar el primer dinosaurio*" (altura 2 m). Se propicia de este modo que, mediante el trabajo con casos particulares con material manipulativo, el estudiantado se involucre en una fase de exploración del problema representando el problema, donde prime la estrategia del conteo (mostrando conocimiento sobre KPM en componentes y estrategias de la generalización, y uso de representaciones concretas para la enseñanza de la generalización, KMT). Además, en este mismo momento muestra de nuevo conocimiento sobre el componente de comprobación-revisión al llamar la atención, tras la construcción de la escalera de altura 2, sobre una respuesta previa de un alumno: "*Vamos a hacer una pregunta a Hugo, que antes fue muy rápido. Tú ahora, viendo esto, ¿crees que antes te equivocaste?*". Andrea invita a que vayan construyendo escaleras sucesivas y observando la altura de cada escalera:

> A: Venga, pues id construyendo escaleras. Id anotando con el boli o lápiz al lado del folio de las preguntas. [...] a ver qué vamos viendo.
>
> A: Vale, mirad, yo ahora os aconsejo que quien haya construido la figura, no mováis la figura de la mesa y con el lápiz, vayáis poniendo por aquí, en la mesa, con lápiz o encima o debajo, el número de metros que va alcanzando. [...] Ve anotando aquí. ¿Qué altura alcanza aquí? ¿Qué altura alcanza aquí? ¿Qué altura alcanza aquí? ¿Qué altura alcanza? [refiriéndose a los diferentes ejemplos que los estudiantes han construido con goma Eva sobre sus mesas].

En lo anterior observamos cómo da pautas para la fase de exploración ("*a ver qué vamos viendo*", "*ve anotando aquí*") y así facilitar la formulación de conjeturas sobre la altura en cada término. Andrea centra su discurso en casos particulares con números menores que 10, introduciendo, junto con el uso del material manipulativo, la representación algebraica, desde un registro verbal cuando mesa a mesa va discutiendo las estrategias que sus estudiantes le exponen. Esto permite a Andrea poner en valor los distintos escalones, que posteriormente relacionará con los términos concretos y con la regla de recursión. Andrea evidencia, de nuevo, KPM vinculado a los componentes de la generalización y KMT sobre el uso de materiales para ayudar al estudiantado a generalizar. Es posible que espere propiciar alguna estrategia de generalización recursiva (particular o general), al ir observando regularidades al pasar de un término a otro siguiente, si bien esto no es más que un indicio.

Tras lo anterior, el maestro proporciona el organizador tabular y las representaciones pictóricas de escaleras, sugiriendo que anoten ahora en la tabla, dando consignas claras que invitan a la generalización recursiva sobre la diferencia en el número de cajones entre uno y el siguiente, teniendo como ayuda implícita la identificación anterior de la posición de las posiciones de la secuencia ("*Quien tenga el organizador relleno, que lo mire con ojitos investigadores* [...] *a ver qué ves de éste a éste, desde éste al otro*… (va señalando ejemplos en el organizador)"). Su conocimiento de uso de materiales (KMT), componentes y estrategias (KPM) en relación con la generalización parece pretender apoyar el avance en el proceso de resolución del estudiantado.

Durante la resolución individual, Andrea proporciona ayudas, en algunas de las cuales se aprecia cómo propone comprobar una conjetura contrastando con lo que ocurre con términos concretos representados con el material manipulativo y apoyando el avance hacia una generalización funcional particular (KPM, componentes y estrategias; KMT, uso de representaciones para la enseñanza). Es el caso de un estudiante que formula una conjetura a partir de completar cada escalera (de altura n) con la complementaria para formar un cuadrado n x n. Andrea induce a observar la relación entre la altura que alcanza la escalera y el número de cuadrados que faltan para el cuadrado n x n, proponiendo comprobar la conjetura de E1 para los casos 3, 4, 5, y ayudando a formular la conjetura:

A (Andrea): En el de tres. Digo, el área del cuadrado es tres por tres, pero no está el cuadrado completo. Me faltan tres. Que realmente coincide con la altura que tú has buscado. Y ahora digo yo: Vamos a ver si hay una relación. Venga, en el de cuatro.

E1: Cuatro por cuatro. 16.

A: La altura es cuatro. Tengo. …Tendría 16 cubos y el cuadrado completo. ¿Pero, cuántos me faltan?

E1: ¿Faltan? Seis... Seis.

A: Y antes me faltaban tres. […] Sigue. Aunque tú hayas encontrado la otra fórmula. […] Venga, el de 5.

E1: En el cinco. Cinco por cinco, 25. Vale.

A: ¿Y cuántas hay?

E1: Hay 15. Faltan Diez.

A:Vale. ¿Cómo lo haces? Sigue tú.

Cuando, más adelante, E2 está seguro de su conjetura, le invita a formular la generalización funcional (tanto particular, apoyada en ejemplos concretos, como general, en la que se pretende que el estudiante verbalice una forma de generalizar) reforzando desligarse de la recursividad, lo que lo sitúa en un componente de generalización. Para ello plantea términos no consecutivos y ejemplos mayores

que diez que rompen con la secuencia de la tabla organizadora o la construcción mediante la goma Eva, mostrando KPM (componentes y estrategias de generalización):

A: Vale, tú ya puedes hacer el siguiente, ¿a que sí? y el siguiente... Pero ahora yo te digo una cosa para que tú lo pienses. [...] ¿Tú me podrías decir directamente la que tiene esta altura (10 metros)? ¿Directamente? ¿O tienes que ir una a una? Piénsalo

Con otros alumnos, la intervención pretende afianzar la generalización recursiva, basada en términos con cantidades menores que 10, gestionando la transición de un nivel recursivo particular a un nivel recursivo general, como en el fragmento que sigue, en el que el patrón se ejercita sobre un registro verbal, concluyendo con el planteamiento del reto hacia la generalización funcional (KPM, componentes y estrategias de generalización; KMT, uso de representaciones para la enseñanza):

A: Tú sumas el número de metros, ¿no? (E3 asiente). Entonces, si te digo, dime rápidamente el de nueve metros. ¿Cuántos tiene?

E3: Pues, eeem…son… 45.

A: Dime el de 10 (da una palmada).

E3: 55.

A. Dime el de 11 (da una palmada).

E2: Súmale 11.

E3: Emmm… 66.

A: Ahora en vez de el de 12, dime el de 28.

Vemos como Andrea busca que los estudiantes pasen de un término al siguiente. Esto lo realiza fomentando que avance a la identificación la regla de pasar de uno al siguiente, dejando menos tiempo para el cálculo, llegando a que E2 verbalice la concreción de la regla (*súmale 11*).

En este momento encontramos un predominio de la representación pictórica, aunque Andrea recurre al uso de los tres recursos de manera combinada para discutir algunas estrategias de los estudiantes. Por ejemplo, se apoya en las filas y columnas de la tabla organizadora para solventar algunos errores de conteo (pictórica-tabular); anima a los estudiantes a buscar la escalera complementaria utilizando las piezas cuadradas (pictórica-manipulativa); y sugiere complementar la resolución numérica y algebraica de los estudiantes con dibujos de las escaleras complementarias (pictórica-numérica-algebraica). Se observan así indicios de conocimiento de enseñanza de la matemática al facilitar el uso paralelo de representaciones (KMT, uso de representaciones para la enseñanza).

La puesta en común inicia con la exposición de dos estudiantes en la pizarra. En este momento de la resolución, Andrea parece ser consciente de que los estudiantes han alcanzado el nivel funcional, reconociendo las variables del problema y las relaciones entre ellas, sin necesidad de apoyarse en la secuencia (KPM, estrategias de generalización). Prueba de ello es que decide con los estudiantes qué valor quieren que el alumno de la pizarra halle *(¿Qué número le proponemos a E1 para que nos adivine el número de cuadrado?* […] *E1 va a adivinar, supuestamente, porque no sabemos si va a estar bien, el número de cajones para limpiar un dinosaurio de 114 metros*).

En esta etapa de la resolución, Andrea gestiona la discusión parafraseando los razonamientos, animando a los estudiantes a dibujar las escaleras, simples y con su complementaria, y se apoya en estos elementos gráficos para discutir los resultados atendiendo a las dos variables del problema, tanto de términos cercanos, empleados principalmente para ayudar al resto de estudiantes a seguir el hilo

de la resolución *(A ver, haz el de tres, para que la gente lo entienda*), momento caracterizado por la aparición del lenguaje algebraico (KMT, uso de representaciones para la enseñanza).

A: Te voy a hacer una pregunta [a E3] para que tú te plantees si eso está bien. Que no lo sé. Halla el de altura cuatro metros con esa fórmula, con esa relación que tú has encontrado. Cuatro metros.

A: [a E4] 114.

E4: 12996…Según la fórmula [que él había escrito y explicado para N=4, a partir de considerar la mitad del cuadrado más la diagonal], lo que tenemos que hacer es 12996-114/2 +114.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

La sesión analizada ha permitido evidenciar conocimiento de la práctica matemática de un maestro de Primaria, referido a conocimiento sobre los componentes de generalización (Blanton, 2008) y estrategias al abordar tareas que involucran relaciones funcionales (Blanton et al., 2015). Una primera aportación de este trabajo radica en que, dada la escasez de situaciones de este tipo (Flores-Medrano et al., 2022), el KPM es un conocimiento útil en la práctica profesional, si su movilización promueve el desarrollo determinadas prácticas matemáticas escolares. Asimismo, este trabajo resalta que la enseñanza de la generalización en los primeros años de escolaridad posee rasgos específicos que aún no han sido estudiados de manera sistemática y profunda, y que los contextos rurales y en aulas multinivel pueden ser un escenario óptimo para su estudio.

En esta comunicación mostramos cómo un docente articula conocimiento de la práctica matemática de generalizar (KPM) y conocimiento sobre uso de representaciones para la enseñanza (KMT) para potenciar el aprendizaje de dicha práctica en el estudiantado. En esa coordinación se observa el conocimiento del profesor sobre combinaciones de estrategias, componentes y uso de representaciones en la enseñanza que son especialmente potentes. A través de la *exploración*, como un componente de la generalización en términos de Blanton (2008), el maestro se apoya fundamentalmente en el uso de representaciones manipulativas y pictóricas, al igual que en el inicio que se abordan las *conjeturas*, para potenciar estrategias de generalización de conteo y recursivas.

Para propiciar el tránsito de estrategias recursivas hacia las funcionales (primero particulares), en las fases de conjetura y comprobación-revisión, el maestro propone el uso de representaciones tabulares junto con las pictóricas. Finalmente, asocia las estrategias de generalización funcionales (particulares para dar paso a las generales) al registro verbal, gráfico, simbólico (numérico y algebraico), en términos cualesquiera. De este modo, su conocimiento recoge la necesidad de que la enseñanza este focalizada a que el estudiantado desarrolle un uso flexible de múltiples representaciones para fomentar una comprensión matemática profunda. En particular, en el conocimiento relativo a la práctica matemática de generalizar (Brizuela y Earnest, 2017), que permitiría potenciar un razonamiento funcional más allá del recursivo centrado en lo puramente aritmético (Blanton y Kaput, 2005). De esta manera, el razonamiento del estudiantado desarrollado serviría de base para desarrollar un pensamiento funcional más complejo en etapas educativas posteriores a la Primaria.

Consideramos que el análisis sobre el conocimiento especializado necesario para llevar al aula situación como esta puedan servir de sostén para comprender mejor las necesidades formativas del profesorado en relación con la gestión de la práctica de generalizar y para generar tareas formativas que faciliten su aprendizaje profesional.

Agradecimientos

Proyecto PID2021-122180OB-I00 (Gobierno de España), Proyecto PID2024-158877NB-I00 financiado por MICIU/AEI /10.13039/501100011033/FEDER, UE. Centro de Investigación COIDESO (U. de Huelva). Grupo DESYM (HUM-168). Red MTSK, auspiciada por la AUIP.

Referencias

Álvarez-Cándano, C., Giadas, P. y Alonso-Castaño, M. (2024). El conocimiento matemático de maestros en formación en el diseño y adaptación de problemas de probabilidad para alumnado con TEA. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 550). SEIEM.

Arce, M. y Conejo, L. (2025). Análisis de razonamientos abductivos por docentes en formación: un estudio exploratorio. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. 124-131). SEIEM.

Bassey, M. (1999). *Case study research in educational settings*. Open University Press.

Blanton, M. (2008). *Algebra and the elementary classroom: Transforming thinking, transforming practice*. Heinemann.

Blanton, M. L., Brizuela, B. M., Gardiner, A. M., Sawrey, K. y Newman-Owens, A. (2015). A learning trajectory in 6-year-olds' thinking about generalizing functional relationships. *Journal for Research in Mathematics Education*, *46*(5), 511-558. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.46.5.0511

Brizuela, B. M. y Earnest, D. (2017). Multiple notational systems and algebraic understandings: The case of the "best deal" problem. En J. Kaput, D. Carraher y M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 273-302). Routledge

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M. Á., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco-Mora, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialized knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Educatio*n, *20*(3), 236-253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Chico, A. (2024). *Formación del profesorado para la enseñanza de la resolución de problemas a alumnado TEA-1 desde la perspectiva inclusiva*. Tesis Doctoral. Universidad de Huelva

Climent, N., Contreras, L. C., Montes, M. y Ribeiro, M. (2024). The MTSK model as a tool for designing tasks for teacher education. *ZDM–Mathematics Education*, *56*(6), 1123-1135. https://doi.org/10.1007/s11858-024-01605-8

Climent, N. y Montes, M. (2022). El modelo MTSK: antecedentes y estructura. En J. Carrillo, M. A. Montes, y N. Climent (Eds.), *Investigación sobre el conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): 10 años de camino* (pp. 27-34). Dykinson.

Delgado-Rebolledo, R. y Zakaryan, D. (2020). Relationships between the knowledge of practices in mathematics and the pedagogical content knowledge of a mathematics lecturer. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *18*(3), 567-587. https://doi.org/10.1007/s10763-019-09977-0

Flores-Medrano, E., Gómez-Arroyo, D., Aguilar-González, A. y Muñiz-Rodríguez, L. (2022). What knowledge do teachers need to predict the mathematical behavior of students? *Mathematics*, *10*(16), 1-22. https://doi.org/10.3390/math10162933

Mason, J. (2008). Making use of children's powers to produce algebraic thinking. En J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 57-94). Lawrence Erlbaum Associates.

Melhuish, K., Thanheiser, E. y Guyot, L. (2020). Elementary school teachers' noticing of essential mathematical reasoning forms: justification and generalization. *Journal of Mathematics Teacher Education, 23(1),* 35-67. https://doi.org/10.1007/s10857-018-9408-4

Pinto, E. y Cañadas, M. C. (2021). Generalizations of third and fifth graders within a functional approach to early algebra. *Mathematics Education Research Journal, 33*(1), 113-134. https://doi.org/10.1007/s13394-019-00300-2

Schoppler, E., Mesibov, G. y Hearsey, K. (2013). Structured teaching in the TEACCH system. En E. Schoppler y G. Mesibov (Eds.), *Learning and cognition in autism: Current issues in autism* (pp. 243-268). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4899-1286-2_13

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

IMPACTO DE UN CICLO FORMATIVO DE GAMIFICACIÓN EN FUTUROS DOCENTES DE MATEMÁTICAS DE SECUNDARIA

Impact of a gamification training cycle on preservice secondary school mathematics teachers

Cortés, A.[a], Breda, A.[a], Sánchez, A.[a] y Giacomone, B.[b]

[a]Universitat de Barcelona, [b]Università degli Studi della Repubblica di San Marino

Resumen

Este estudio analiza la evolución de la subcompetencia de análisis y valoración de la idoneidad didáctica en futuros docentes de secundaria a partir de secuencias didácticas gamificadas descritas en Trabajos de Fin de Máster. Se comparan dos cohortes: promociones previas a un ciclo formativo en gamificación y reflexión didáctica sobre su uso (2020-2023) y la promoción del ciclo (2024-2025). Los extractos que evaluaban la idoneidad de las secuencias didácticas gamificadas se categorizaron según los niveles L_0-L_3 basados en el Modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas. Los resultados muestran un incremento significativo de la subcompetencia tras el ciclo (U de Mann-Whitney, $p = 0,038$) apareciendo el nivel L_3 solo en la cohorte del ciclo. Ambas cohortes aplicaron la gamificación sobre todo a contenidos de Geometría y Funciones. Los hallazgos indican que el ciclo favorece una reflexión más fundamentada sobre la idoneidad didáctica.

Palabras clave: *Gamificación, Formación docente, Criterios de Idoneidad Didáctica, Competencia reflexiva*

Abstract

This study analyses the development of the sub-competency of analysis and evaluation of didactic suitability in preservice secondary school teachers, based on gamified didactic sequences described in Master's theses. Two cohorts were compared: cohorts prior to a training cycle on gamification and didactic reflection on its use (2020-2023) and the cohort from the cycle (2024–2025). Excerpts assessing the suitability of gamified didactic sequences were categorised by levels L_0–L_3, based on the Didactic–Mathematical Knowledge and Competencies model. Results show a significant increase in the sub-competence after the cycle (Mann-Whitney U test, $p = 0.038$), with level L_3 appearing only in the cycle cohort. Both cohorts mainly applied gamification to Geometry and Functions content. Findings suggest the cycle promotes more well-founded reflection on didactic suitability.

Keywords: *Gamification, Teacher training, Didactic suitability criteria, Reflective competency*

INTRODUCCIÓN

La gamificación es una metodología activa de enseñanza que ha ido ganando popularidad recientemente, tal y como se comprueba en el estado del arte realizado por Swacha (2021), donde se observó que la producción científica en el campo de la gamificación en la educación comenzó a ser considerable a partir de 2013 y ha mantenido el crecimiento según datos de Scopus y Web of Science. Aun así, los futuros docentes (FD) reportan una baja formación en gamificación y confusión con otras metodologías (López et al., 2021; Cortés et al., 2026c), por lo que emerge la necesidad de formar a los FD en gamificación, debido a la similitud que tienen habilidades utilizadas en ciertos juegos con habilidades usadas en la resolución de problemas (Antequera-Barroso et al., 2022), y promover, en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, la autonomía (Fuentes-Cabrera et al., 2020) y el desarrollo de la toma de decisiones (Fuentes-Riffo, et al. 2023) entre otras competencias.

Cortés, A., Breda, A., Sánchez, A. y Giacomone, B. (2026). Impacto de un ciclo formativo de gamificación en futuros docentes de matemáticas de secundaria. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (pp. 178-185). SEIEM.

Este estudio analiza la subcompetencia de análisis y valoración de la idoneidad didáctica (competencia reflexiva) de los FD a partir de los documentos de sus Trabajos de Fin de Máster (TFM). En estos trabajos, los FD utilizan los criterios de idoneidad didáctica (CID) para valorar su propia práctica. Nuestro análisis se centra en evaluar la profundidad de dichas reflexiones cuando se refieren al uso de gamificación, clasificándolas según los niveles de desarrollo de la subcompetencia (L_0-L_3) propuestos en el marco del Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas (CCDM).

En estudios anteriores (Cortés et al., 2026a; Cortés et al., 2026c) se halló que hay una baja proporción de FD que utilizan la gamificación en sus secuencias didácticas. Además, cuando se emplea esta metodología, en la mayoría de los casos se trata de actividades puntuales, y solo en unos pocos se gamifica la secuencia didáctica en su totalidad. No obstante, también se encontró que el uso de la gamificación favorece la idoneidad didáctica en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en educación secundaria (Cortés et al., 2024; Cortés et al., 2026b).

El objetivo del estudio es analizar la evolución de la subcompetencia de análisis y valoración de la idoneidad didáctica en FD de matemáticas que elaboran secuencias didácticas completamente gamificadas. Para ello, se comparan dos cohortes de TFM: promociones previas a un ciclo formativo (CF) —entendido como un proceso de diseño e investigación-acción que integra instrucción, implementación y reflexión— sobre gamificación y su uso reflexivo, y la promoción que participó en dicha formación. Asimismo, se exploran las áreas matemáticas abordadas en las secuencias, para identificar posibles patrones y su relación con la implementación de esta metodología activa.

MARCO TEÓRICO

Gamificación

En este estudio se utiliza la definición de Deterding et al. (2011) para entender qué es la gamificación, quienes la describen como el uso de elementos del diseño de juegos en contextos no lúdicos, sin implicar el uso de juegos completos. Torres-Toukoumidis y Romero-Rodríguez (2019) señalan que no toda actividad con aspecto lúdico se considera gamificación. El uso de actividades manipulativas o de tecnologías con estética de juego no constituye gamificación si no incorpora estructuralmente elementos del diseño de juegos y se limita a presentar de forma diferente actividades tradicionales.

Para comprender qué son los elementos del diseño de juegos que debe incorporar una actividad de gamificación Werbach y Hunter (2015) proponen un modelo compuesto por tres niveles de elementos del diseño de juego que deben estar presentes en cualquier experiencia gamificada: a) las dinámicas, entendidas como los aspectos generales que orientan la motivación de los participantes y constituyen el nivel más abstracto; b) las mecánicas, que son los procesos básicos que impulsan la acción y favorecen la implicación; y c) los componentes, manifestaciones concretas de las dinámicas y mecánicas, que representan los elementos visibles y constituyen el nivel menos abstracto.

Siguiendo a Torres-Toukoumidis y Romero-Rodríguez (2019), la gamificación no debe confundirse con actividades lúdicas aisladas, sino que requiere una integración estructurada de elementos propios del juego. En este trabajo, esta idea se operacionaliza bajo el concepto de secuencia didáctica completamente gamificada, entendida como aquella en la que los elementos de juego (narrativas, sistemas de clasificación, etc.) articulan la totalidad del proceso de enseñanza-aprendizaje —desde la introducción de los conceptos hasta su evaluación— y no se emplean como un recurso puntual.

Modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas

La idoneidad didáctica, en el marco del Enfoque Ontosemiótico, se define como el grado en que el proceso de enseñanza y aprendizaje logra articular los significados personales construidos por el alumnado con los significados institucionales previstos, considerando el contexto y los recursos disponibles. Se trata de un constructo multidimensional compuesto por seis criterios, desarrollados mediante componentes e indicadores que permiten evaluar el proceso educativo (Font et al., 2010).

En el marco del Enfoque Ontosemiótico, Pino-Fan et al. (2015) proponen un modelo para caracterizar el conocimiento didáctico–matemático del profesorado, integrando aportes de distintos enfoques sobre el conocimiento docente en matemáticas. Este modelo, inscrito en el marco de CCDM, organiza el saber del profesorado en tres dimensiones: matemática, didáctica y metadidáctico–matemática, articulando el dominio del contenido, los procesos de enseñanza y la reflexión sobre la práctica. Posteriormente, Pino-Fan et al. (2023) distinguen dos competencias: la competencia matemática y la competencia en análisis e intervención didáctica. Esta última se relaciona con las subcompetencias: análisis de la actividad matemática, gestión de las interacciones, uso de recursos y el análisis y valoración de la idoneidad didáctica. El presente estudio se centra en la subcompetencia de análisis y valoración de la idoneidad didáctica en secuencias didácticas completamente gamificadas.

La competencia reflexiva del profesorado se expresa antes, durante y después de la clase, mediante procesos de planificación, ajuste en función de la respuesta del alumnado y valoración para mejorar la práctica. Estas reflexiones consideran la idoneidad didáctica de la implementación y se orientan a su mejora. Para ello, el modelo propone los CID como herramienta sistémica para optimizar la enseñanza de las matemáticas. La Tabla 1, adaptada de Godino et al. (2013), sintetiza estos criterios.

Tabla 1

CID, descripción y componentes. Fuente: Adaptado de Godino et al. (2013).

Criterio	Descripción	Componentes
Epistémico	Valora si las matemáticas que se enseñan son matemáticas de calidad	-Errores en el contenido. -Ambigüedades en las explicaciones. -Riqueza de procesos matemáticos utilizados. -Representatividad de la complejidad del objeto matemático.
Cognitivo	Valora, antes de iniciar el proceso de enseñanza-aprendizaje, si el tema a impartir se adapta a lo que los estudiantes ya saben y, tras este proceso, si el aprendizaje conseguido se aproxima a lo pretendido	-Conocimientos previos de los estudiantes. -Adaptación curricular a las diferencias individuales. -Nivel de aprendizaje alcanzado por los estudiantes. -Alta demanda cognitiva de las actividades propuestas.
Interaccional	Valora si la interacción resuelve las dudas o dificultades de los estudiantes	-Interacción entre profesor y estudiante. -Interacción entre estudiantes. -Nivel de autonomía fomentado en los estudiantes. -Uso de evaluaciones formativas durante el proceso de enseñanza-aprendizaje.
Mediacional	Valora la adecuación de los recursos materiales y temporales utilizados en el proceso de enseñanza y aprendizaje	-Disponibilidad y calidad de los recursos materiales. -Número de estudiantes, horarios y condiciones del aula. -Gestión del tiempo durante las actividades de enseñanza-aprendizaje.
Afectivo	Valora la implicación del estudiante (intereses y motivación) durante el proceso de enseñanza y aprendizaje	-Intereses y necesidades de los estudiantes. -Actitudes mostradas por los estudiantes. -Emociones expresadas por los estudiantes durante el proceso de aprendizaje.
Ecológico	Valora la adaptación del proceso instruccional al proyecto educativo escolar, a las directrices curriculares, a las condiciones del entorno social y profesional, etc.	-Adaptación al currículo establecido. -Conexiones intra e interdisciplinares en el contenido. -Utilidad social y laboral de los contenidos enseñados. -Nivel de innovación didáctica aplicada en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Los componentes de los CID se fundamentan en tendencias actuales de la educación matemática, en los principios del National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000) y en resultados ampliamente aceptados por la investigación. Por tanto, los CID se consolidan como herramienta

consensuada para estructurar la reflexión docente en programas de formación (Breda et al., 2018), incluida la del profesorado de secundaria (Cortés et al., 2026a; Hidalgo-Moncada et al. 2022).

En este estudio, los CID cumplen una doble función: por un lado, apoyan el desarrollo de la reflexión y la mejora de la competencia de análisis de la idoneidad didáctica en FD del Máster de Profesorado (Burgos et al., 2020); por otro, se usan como herramienta analítica, para examinar las reflexiones de los FD descritas en sus TFM, así como ya se hizo en estudios anteriores (Ledezma et al., 2023).

METODOLOGÍA

Para este estudio se hizo una revisión exhaustiva de todos los TFM del curso 2020-2021 hasta el 2022-2023 y el curso 2024-2025 del Máster Universitario en Formación de Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas (Especialidad en Matemáticas). Si bien no hay un repositorio institucional accesible para consultar los TFM, se pueden consultar previa solicitud a los autores. De todos los TFM, solo se seleccionaron aquellos que presentaban secuencias didácticas completamente gamificadas. La revisión de los TFM se realizó haciendo especial énfasis en los apartados que describen y justifican el uso de las actividades implementadas o propuestas para la mejora de la implementación de una secuencia didáctica, de ahí se extrajeron las justificaciones que referenciaban la gamificación.

Para analizar la evolución de la subcompetencia de análisis y valoración de la idoneidad didáctica en los FD, se distinguieron dos cohortes de TFM: 318 TFM realizados antes del CF en gamificación (cursos 2020-2021 a 2022-2023), de los cuales solo 4 presentaron secuencias didácticas gamificadas; y 30 TFM elaborados por participantes que cursaron dicho ciclo (2024-2025) de los cuales 5 presentan secuencias didácticas completamente gamificadas. Esta diferenciación permite comparar si, tras el CF, mejoró la calidad de las justificaciones sobre el uso de la gamificación en sus secuencias didácticas. Cabe destacar que la segunda cohorte solo contempla los TFM de los FD participantes del CF y no la totalidad del alumnado, lo que explica la reducción de la muestra.

El CF de 18 horas en gamificación, descrito en Cortés et al. (2026c) y Cortés et al. (2026b), se implementó en los bloques de Recursos manipulativos y TAC, y se centró en el diseño técnico de secuencias gamificadas (narrativa, retos y herramientas digitales). En esta fase, la reflexión de los FD tiene un carácter intuitivo y se basa en conocimientos previos. El marco de los CID se introduce en un bloque posterior mediante una secuencia que incluye el análisis de casos y la construcción de criterios de idoneidad. Por ello, el estudio analiza cómo los FD integran de forma autónoma ambos aprendizajes en sus TFM para fundamentar la idoneidad de sus propuestas.

El estudio adopta un diseño cuasiexperimental con comparación entre cohortes, ya que se exploran posibles efectos asociados a un CF en gamificación diseñado e implementado por los autores, sin asignación aleatoria. También, se registró el área matemática trabajada en cada TFM (funciones, geometría, álgebra…) para identificar posibles patrones de contenido en las secuencias gamificadas.

En este estudio, los TFM no permiten realizar un análisis longitudinal sobre la reflexión, dado que la mayoría de las justificaciones que aparecen se sitúan en momentos concretos, sobre todo a posteriori, lo que podía sesgar la evaluación si se tenía en consideración la fase del proceso de instrucción como criterio para asignar el nivel tal y como se contempla en Pino-Fan et al. (2023). En Cortés et al., (2026c) se propuso una adaptación, eliminando dicho criterio. La adaptación permite analizar cada argumento de manera independiente, atendiendo a su profundidad reflexiva sin penalizarlo por el momento en que fue formulado. La tabla incorpora tres dimensiones: el tipo de análisis (descriptivo, explicativo o evaluativo), la profundidad del análisis (superficial, media o profunda) y el nivel de desarrollo del argumento (L_0–L_3), definido según su articulación con los CID y el modelo CCDM.

Tabla 2

Niveles de desarrollo de la subcompetencia de análisis y evaluación de la idoneidad didáctica. Adaptado de Pino-Fan et al. (2023, p. 1425).

Ln	Descripción	Tipo de análisis	Profundidad del análisis
L_0	Ausencia de justificación. Se menciona la gamificación, pero no se explica por qué se usa.	El análisis es superficial y ambiguo, no describe, explica ni valora el proceso didáctico ni el periodo de clase.	Narrativa superficial (escrita o discursiva). La narración no explica lo que ocurrió durante la clase.
L_1	Justificación centrada en elementos superficiales (motivación, diversión o estética del juego) sin conexión con el aprendizaje matemático.	Descriptivo Describe lo que ocurrió durante la clase o el proceso de estudio.	Narrativa que captura los elementos esenciales del periodo de clase analizado. Cualquiera que lea la narración tiene una idea de lo que ocurrió en el episodio.
L_2	Justificación parcial que vincula la gamificación con la mejora del aprendizaje de forma implícita o genérica, usando algunos componentes de los CID pero sin un análisis sistémico.	Explicativo Intenta responder: por qué ocurrió lo que ocurrió durante la clase (relacionado con un fenómeno, conflicto, error, etc.).	Una narrativa completa y comprensible, que implica un análisis detallado, intentando seguir un modelo (p. ej. si se describe una actividad matemática, se utilizan componentes de la configuración epistémica para identificar algunas prácticas, objetos y procesos primarios; usados explícita o implícitamente).
L_3	Justificación profunda que utiliza los CID y/o el modelo CCDM para evaluar cómo los elementos del juego potencian criterios específicos (epistémico, cognitivo, etc.) y propone mejoras fundamentadas.	Valorativo Incluye elementos de los dos niveles anteriores y responde a la pregunta: ¿qué se puede o debe mejorar durante el periodo de clase y por qué?	Análisis experto de la narrativa según el uso sistemático de un modelo (p. ej. se realiza una descripción detallada de la actividad matemática, se identifican exhaustivamente las prácticas, objetos primarios y procesos, los significados de las nociones utilizadas; sistemas de normas que condicionaron las interacciones y aprendizajes; o los criterios de elegibilidad explícitamente).

Con el fin de garantizar la transparencia del proceso de codificación, se incluyen ejemplos representativos de los niveles L_1, L_2 y L_3. Los extractos muestran cómo se aplicaron los criterios de la Tabla 2 para identificar justificaciones descriptivas, explicativas y valorativas.

Tabla 3

Ejemplo de categorización de los extractos.

Nivel	Extracto (resumido)	Justificación de la codificación
L_1	"La actividad motivó al alumnado…"	Describe sin explicar causas ni relacionar con CID.
L_2	"La colaboración aumentó porque…"	Explica relaciones causa-efecto sin modelo.
L_3	"La tarea mejora la idoneidad epistémica pues…"	Usa CID explícitamente; aporta valoración y mejora.

Tras la categorización de las justificaciones según el nivel de desarrollo de la subcompetencia (variable ordinal), se compararon ambas cohortes mediante la prueba no paramétrica U de Mann-Whitney con contraste unilateral y nivel de significación $\alpha = 0{,}05$, al plantearse como hipótesis alternativa que la cohorte que participó en el CF presentaría niveles superiores de desarrollo.

RESULTADOS

El análisis de las áreas matemáticas abordadas en los TFM muestra que, tanto en los cursos previos al CF como en el del CF, la Geometría es el área más frecuente en las secuencias gamificadas. La Tabla 4 revela que en los cursos previos al CF se trabajaron cuatro áreas distintas Álgebra, Funciones, Geometría y Sucesiones, cada una formada por un único TFM. En cambio, en el curso del CF se observa una concentración en Geometría (4 de 5 TFM), junto con una única unidad centrada en

Funciones. La concentración de propuestas en Geometría y Funciones indica que la implementación de la gamificación en esta muestra se vincula predominantemente con bloques de contenido de carácter visual o de modelización. Si bien los datos no permiten determinar si esta elección responde a una preferencia deliberada de los FD o a la naturaleza de los materiales curriculares disponibles, se observa una recurrencia en estas áreas frente a otras que no presentan representación.

Tabla 4

Número de TFM con secuencias completamente gamificadas según la cohorte y el área de las matemáticas

	Área de las matemáticas				
Cohorte	**Álgebra**	**Funciones**	**Geometría**	**Sucesiones**	**Total general**
Antes del CF	1	1	1	1	4
CF		1	4		5
Total general	1	2	5	1	9

Cabe destacar que a pesar de que la cohorte del CF solo comprende un grupo de un curso, esta presenta una secuencia didáctica completamente gamificada más que la cohorte de los cursos previos. Considerando que la primera cohorte incluye 318 TFM y la segunda 30, y pese a esta reducción muestral, el número de secuencias gamificadas aumentó de 4 a 5. Esto supone un incremento del 1,2 % al 16,6 %, lo que sugiere que la formación incentiva la adopción de la metodología.

Tras la categorización de los extractos de los TFM según los niveles de desarrollo de la subcompetencia de análisis y valoración de la idoneidad didáctica (L_0–L_3), se identificaron diferencias claras entre las dos cohortes analizadas. En los TFM de los cursos previos al CF, las justificaciones se concentraron fundamentalmente en los niveles L_1 y L_2, con un predominio de descripciones narrativas o explicaciones parciales vinculadas de manera implícita a los CID. En esta cohorte no se identificaron justificaciones del nivel L_3. Hay que destacar también que no hay justificaciones que muestren un nivel L_0 en ninguno de las dos cohortes, esto puede deberse a que en los TFM se exige que los FD describan y justifiquen las decisiones metodológicas de sus propuestas, por lo que incluso los trabajos con análisis más superficiales tienden a incluir alguna descripción de lo que se hizo, algún motivo vinculado a la motivación del alumnado o alguna referencia genérica a ventajas percibidas de la gamificación aunque no mencionen el nombre la metodología explícitamente, esto ubica automáticamente esos fragmentos en L_1, no en L_0.

Tabla 5 *Distribución de extractos por niveles (L_0–L_3) y cohorte*

Cohorte	**L_0**	**L_1**	**L_2**	**L_3**	**Total General**
Antes del CF	0	12	8	0	20
CF	0	10	11	6	27

En los TFM de la cohorte del CF se observó una distribución más amplia y situada en niveles superiores. Aunque L_1 y L_2 siguieron presentes, apareció de forma notable el nivel L_3 (22,2% de los extractos), caracterizado por análisis evaluativos estructurados mediante los componentes de los CID y del modelo de CCDM. La presencia de L_3 constituye un indicador cualitativo de mayor nivel de desarrollo de análisis y valoración de la idoneidad didáctica de sus propuestas.

Para analizar si esta diferencia reflejaba un patrón firme y no atribuible al azar, se aplicó la prueba no paramétrica U de Mann–Whitney con contraste unilateral, tomando como unidad cada extracto y considerando la hipótesis alternativa de que la cohorte del CF presentaría niveles superiores. Los resultados mostraron una diferencia significativa a favor del grupo formado en gamificación ($U = 345.5$, p-valor = 0,038). La media ordinal del nivel de los extractos se incrementó de 1,45 en los cursos previos (equivalente a un nivel próximo a L_1) a 1,85 en el curso del CF (equivalente a un nivel entre L_1 y L_2), lo que supone un incremento aproximado de 0,40 niveles a favor de la cohorte del CF. El incremento observado de 0,40 niveles se traduce en una transición desde justificaciones

descriptivas, centradas en la motivación, hacia análisis explicativos que fundamentan el uso de la gamificación a partir de los componentes de los CID y que sirven de base para propuestas de rediseño. Además, desde el punto de vista cualitativo, la emergencia del nivel L_3 solo en la cohorte del CF refuerza la interpretación de una mejora en la capacidad de justificar y valorar la idoneidad didáctica de las secuencias gamificadas desde una perspectiva fundamentada en los CID y el modelo CCDM.

CONCLUSIONES

Los resultados de este estudio muestran que la implementación de un CF específico en gamificación se asocia a una mejora en la subcompetencia de análisis y valoración de la idoneidad didáctica en FD de matemáticas de secundaria. Mientras que en los TFM de cursos previos predominan justificaciones de nivel L_1 y L_2, la cohorte participante del CF presenta una mayor proporción de análisis valorativos estructurados, mostrando un uso más fundamentado de los CID. La aparición del nivel L_3 solo en esta cohorte refuerza la interpretación de una mejora cualitativa en la capacidad reflexiva de los FD.

El análisis estadístico mediante la prueba U de Mann–Whitney confirma esta tendencia, mostrando diferencias significativas entre ambas cohortes. Asimismo, los resultados indican que la formación no modifica de manera sustancial la distribución del área matemática, ya que tanto antes como después del CF la gamificación se aplica principalmente en contenidos con fuerte componente visual o contextualizable, como la Geometría y las Funciones.

En conjunto, el estudio sugiere que la formación en gamificación que recibieron los FD contribuyó a fomentar la competencia reflexiva en el diseño e implementación de secuencias gamificadas. Futuros trabajos podrían profundizar en cómo evolucionan esta competencia en otros contextos formativos y con una muestra más amplia de secuencias didácticas totalmente gamificadas.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido elaborado en el marco del proyecto PID2021-127104NBI00(MICIU/AEI/10.13039/501100011033) "FEDER Una manera de hacer Europa" y con la ayuda PRE2022-104951 por MICIU/AEI /10.13039/501100011033 y el FSE+.

Referencias

Antequera-Barroso, J. A., Revuelta-Domínguez, F.-I. y Guerra Antequera, J. (2022). Similarities in Procedures Used to Solve Mathematical Problems and Video Games. *Education Sciences*, *12*(3), 172. https://doi.org/10.3390/educsci12030172

Breda, A., Font, V. y Pino-Fan, L. R. (2018). Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: El caso del constructo idoneidad didáctica. *Bolema: Boletim de Educac.o Matematica*, 32(60), 255‑278. https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n60a13

Burgos, M., Castillo, M. J., Beltrán-Pellicer, P., Giacomone, B. y Godino, J. D. (2020). Análisis didáctico de una lección sobre proporcionalidad en un libro de texto de primaria con herramientas del enfoque ontosemiótico. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 34*(66), 40–68. https://doi.org/10.1590/1980-4415v34n66a03

Cortés, A., Breda, A. y Sánchez, A. (2024). Gamificación en la enseñanza secundaria de matemáticas: Análisis de secuencias didácticas en trabajos de fin de máster de futuros docentes. En F. M. Sirignano, R. Martínez-Roig y A. López Padrón (Eds.), *Enseñanza y aprendizaje en la era digital desde la investigación y la innovación* (pp. 65-75). Editorial Octaedro.

Cortés, A., Breda, A., Sánchez, A. y Font, V. (2026a). Didactic suitability criteria to organise mathematics teachers' reflection aimed at improving instructional processes in mathematics: The case of gamification and game-based learning. En C. Fernández, S. Llinares y B. H. Choy (Eds.), *Innovations in initial mathematics teacher education*. Springer

Cortés, A., Breda, A., Sánchez, A., Font, V., Sala-Sebastià, G., Inglada, N., Falcó, P. J. y Diez-Palomar, J. (2026b). Gamificación y aprendizaje basado en juegos: una propuesta didáctica para la formación de

docentes de matemáticas en secundaria. *Revista del Congrés Internacional de Docència Universitària i Innovació (CIDUI)*, 7. https://doi.org/10.60940/CIDUIV1N7ID9900629

Cortés, A., Breda, A., Sánchez, A. y Verón, M. A. (2026c). Preservice Secondary School Teachers' Knowledge and Competencies When Reflecting on the Incorporation of Gamification in the Teaching of Mathematics. *Education Sciences*, *16*(1), 20. https://doi.org/10.3390/educsci16010020

Deterding, S., Dixon, D., Khaled, R. y Nacke, L. (2011). From game design elements to gamefulness: Defining «gamification». *Proceedings of the 15th International Academic MindTrek Conference: Envisioning Future Media Environments*, 9-15. https://doi.org/10.1145/2181037.2181040

Font, V., Planas, N. y Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Journal for the Study of Education and Development, 33*(1), 89‑105.

Fuentes-Cabrera, A., Parra-González, M. E., López-Belmonte, J. y Segura-Robles, A. (2020). Learning mathematics with emerging methodologies-The escape room as a case study. *Mathematics*, *8*(9). https://doi.org/10.3390/math8091586

Fuentes-Riffo, K., Salcedo-Lagos, P., Sanhueza-Campos, C., Pinacho-Davidson, P., Friz-Carrillo, M., Kotz-Grabole, G. y Espejo-Burkart, F. (2023). The Influence of Gamification on High School Students' Motivation in Geometry Lessons. *Sustainability*, *15*(21). https://doi.org/10.3390/su152115615

Godino, J. D., Batanero, C., Rivas, H. y Arteaga, P. (2013). Componentes e indicadores de idoneidad de programas de formación de profesores en didáctica de las matemáticas. Suitability components and indicators of teachers' education programs in mathematics education. *Revista Eletrônica de Educação Matemática*, *8*(1). https://doi.org/10.5007/1981-1322.2013v8n1p46

Hidalgo-Moncada, D., Díez-Palomar, J. y Vanegas, Y. (2022). Percepción y reflexión de futuros profesores de matemáticas sobre acciones que promueven un aprendizaje autorregulado en el aula. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 335-343). SEIEM.

Ledezma, C., Hidalgo-Moncada, D., Vargas, J. P. y Font, V. (2023). Reflexiones de futuros profesores sobre la inclusión de la modelización matemática en los contextos de enseñanza virtual y presencial. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 315–322). SEIEM

López, P., Rodrigues-Silva, J. y Alsina, Á. (2021). Brazilian and Spanish Mathematics Teachers' Predispositions towards Gamification in STEAM Education. *Education Sciences*, *11*(10), 618. https://doi.org/10.3390/educsci11100618

NCTM. (2000). Principles and standards for school mathematics. *National Council of Teachers of Mathematics.*

Pino-Fan, L. R., Assis, A. y Castro, W. F. (2015). Towards a methodology for the characterization of teachers' didactic-mathematical knowledge. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *11*(6), 1429‑1456.

Pino-Fan, L. R., Castro, W. F. y Font, V. (2023). A macro tool to characterize and develop key competencies for the mathematics teachers' practice. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *21*(5), 1407‑1432.

Swacha, J. (2021). State of Research on Gamification in Education: A Bibliometric Survey. *Education Sciences*, *11*(2), 69. https://doi.org/10.3390/educsci11020069

Torres-Toukoumidis, A. L. y Romero-Rodríguez, L. M. (2019). Gamificación, Simulación, Juegos Serios y Aprendizaje Basado en Juegos. En *Juegos y Sociedad: Desde la Interacción a la Inmersión para el cambio social* (pp. 113-120). Mcgraw Hill.

Werbach, K. y Hunter, D. (2015). *The gamification toolkit: Dynamics, mechanics, and components for the win.* University of Pennsylvania Press.

FENÓMENOS DIDÁCTICOS VINCULADOS AL ÁLGEBRA ESCOLAR EN LA TRANSICIÓN DE LA EDUCACIÓN PRIMARIA A LA SECUNDARIA: EL CASO DE INNOVAMAT

Didactic phenomena linked to school algebra in the transition from primary to secondary education: Innovamat's case

Cortés Roca, C.[a,b], Bosch Casabó, M. [b] y Florensa Ferrando, I.[c]

[a]Innovamat. Editorial de Educación Matemática, [b]Universidad de Barcelona, [c]Escola Universitària Salesiana de Sarrià.

Resumen

Presentamos un proyecto de doctorado industrial que se está desarrollando en colaboración con Innovamat, una empresa de recursos y software educativo matemático. La investigación se sitúa en la Teoría Antropológica de lo Didáctico y toma como punto de partida los fenómenos didácticos vinculados al estudio del álgebra en la transición primaria-secundaria identificados en este enfoque. Se propone analizar cómo se manifiestan estos fenómenos en las propuestas didácticas de Innovamat y qué tipo de cambios podrían modificarlos. Presentamos aquí el planteamiento general de la investigación y algunos resultados preliminares del primer estudio desarrollado.

Palabras clave: *Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), álgebra escolar, fenómenos didácticos, proceso de algebrización, modelización matemática.*

Abstract

We present an industrial doctoral project being developed in collaboration with Innovamat, a company specialising in educational resources and software for mathematics. The research is based on the Anthropological Theory of Didactics and takes as its starting point the didactic phenomena linked to the study of algebra in the transition from primary to secondary school, identified in this approach. The aim is to analyse how these phenomena manifest themselves in Innovamat's didactic proposals and what kind of changes could modify them. Here, we present the general approach of the research and some preliminary results from the first study carried out.

Keywords: *Anthropological Theory of the Didactic, school algebra, didactic phenomena, algebrisation process, mathematical modelling.*

CONTEXTO Y JUSTIFICACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

Presentamos una tesis industrial desarrollada en colaboración con Innovamat, una empresa educativa centrada en proporcionar recursos educativos de matemáticas, propuestas de instrucción y apoyo al profesorado en los niveles de preescolar, primaria y secundaria, basándose en una infraestructura tecnológica específica. La investigación se fundamenta en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), considerando las propuestas de Innovamat como un ámbito empírico altamente relevante para profundizar en el análisis de las condiciones que influyen en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Nos centramos en el análisis de los fenómenos didácticos vinculados al álgebra escolar identificados por la investigación desde hace muchos años, como la "aritmetización" del álgebra escolar y las dificultades de trabajar el álgebra como herramienta de modelización (Bolea, 2002; Chevallard, 1989; Ruiz Munzón, 2010). El objetivo principal de la investigación consiste en analizar cómo se manifiestan estos fenómenos en las actividades matemáticas de los alumnos que han seguido sistemáticamente las propuestas de instrucción de Innovamat a lo largo de su formación matemática.

Cortés Roca, C., Bosch Casabó, M. y Florensa Ferrando, I. (2026). Fenómenos didácticos vinculados al álgebra escolar en la transición de la educación primaria a la secundaria: El caso de Innovamat. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (pp. 186-193). SEIEM.

La elección del dominio del álgebra viene motivada por dos factores principales. En primer lugar, la importancia de este tema en el desarrollo de la TAD desde los estudios de Chevallard sobre los procesos de transposición didáctica (1985). Este trabajo originó una extensa trayectoria de investigación del equipo español de la TAD. En esta línea de investigación, se han identificado y caracterizado a fondo diversos fenómenos didácticos robustos, particularmente relacionados con la concepción imperante del álgebra como una aritmética generalizada en los sistemas escolares actuales. El segundo factor motivador es la introducción del álgebra como contenido nuevo en la educación primaria española en la última propuesta curricular (Generalitat de Catalunya, 2022; LOMLOE, 2020), conceptualizada específicamente en términos de "sentido algebraico". Esta importante demanda curricular ha impulsado a Innovamat a desarrollar nuevas propuestas educativas, recurriendo a trabajos de investigación sobre *early algebra* como (NCTM, 2000), entre otros. Por lo tanto, lo consideramos un dominio actual, altamente relevante y suficientemente delimitado para servir como un enfoque inicial apropiado para la investigación doctoral.

MARCO TEÓRICO

Nuestra investigación se sitúa en los estudios de transposición didáctica (Chevallard, 1985), centrándose en los recursos proporcionados por una institución en la noosfera (Innovamat) y en sus efectos en el saber enseñado. Siguiendo a Bosch y Gascón (2006), utilizaremos los modelos epistemológicos de referencia (MER) propuestos por investigadores anteriores para emanciparnos de las perspectivas de las instituciones que intervienen en el proceso de transposición didáctica y adoptar una posición externa. Específicamente, en el álgebra elemental, la transposición didáctica ha provocado avances significativos en el saber por enseñar a lo largo de sucesivas reformas educativas. Sin embargo, su función fundamental como herramienta de modelización sigue siendo en gran medida incompleta, lo que genera retos sustanciales para los estudiantes en la transición entre niveles educativos. Para analizar estos retos, Ruiz-Munzón (2010) propone un modelo epistemológico de referencia (MER) integral que describe el proceso de algebrización a través de tres niveles progresivos. El punto de partida son los programas de cálculo aritmético (PCA) o secuencias de cálculos con números, que recogen todos los sistemas y problemas de la aritmética elemental. El nivel 0 corresponde a la ejecución directa de los programas. El primer nivel del proceso de algebrización aparece cuando se requiere formular de forma escrita o simbólica los PCA previo a su ejecución, lo que supone cierta materialización o simbolización de los procesos de resolución. El segundo nivel aparece con la consideración de relaciones entre PCA con argumentos idénticos y la manipulación de ambos PCA. El tercer nivel abarca el trabajo con fórmulas algebraicas sin limitar el número de variables, ni distinguir entre incógnitas y parámetros (Gascón et al., 2017). La progresividad en los niveles se traduce en actividades con mayor nivel de generalización. En nuestro estudio, hemos insertado este MER en el marco más amplio de los procesos de modelización (Barquero, 2019; Bolea, 2002; García, 2007) y sus distintas fases: el trabajo en el sistema inicial, la construcción del modelo, el trabajo en el modelo, así como la interpretación de las producciones de dicho trabajo en el sistema inicial.

OBJETIVO DE INVESTIGACIÓN

La propuesta educativa de Innovamat se fundamenta en principios didácticos generales descritos en su Libro Blanco institucional (2025), basados en el socioconstructivismo, los enfoques de resolución de problemas y el aprendizaje por competencias. Estos principios generales pueden especificarse a través de una variedad de enfoques. Cuando se concretan en organizaciones matemáticas específicas, el desarrollo de las propuestas de Innovamat se basa en modelos epistemológicos particulares que definen los componentes, la estructura y la función del contenido matemático en juego. Asumimos que estos modelos, que proporcionan criterios para diseñar y estructurar las propuestas, permanecen en gran medida implícitos o solo parcialmente descritos. Dada su misión institucional, también suponemos que los modelos epistemológicos asumidos por Innovamat deben mantener cierta proximidad con los modelos dominantes que prevalecen en las instituciones educativas donde interviene, particularmente la educación primaria y secundaria española. Propuestas

significativamente distantes de las concepciones dominantes se enfrentarían a una difícil aceptación o a una implementación muy costosa debido a su complejidad ecológica.

Podemos formular la pregunta principal de nuestra investigación de la siguiente manera: ¿Qué fenómenos didácticos identificados por la investigación pueden asociarse con las propuestas educativas de Innovamat relativas al álgebra escolar en la transición primaria-secundaria?

Presentamos en esta comunicación el primer estudio empírico de la investigación, con algunos resultados preliminares. Nuestro objetivo es caracterizar la propuesta de Innovamat considerando los niveles del proceso de algebrización.

METODOLOGÍA

El estudio parte de una muestra de actividades de Innovamat sobre el sentido algebraico desde 5º de Primaria (EP) hasta 2º de la Educación Secundaria Obligatoria (ESO) en España. Se centra en la clasificación sistemática de estas actividades basada en el MER. La muestra incluye todas las actividades de "Práctica reproductiva" y "Tareas de evaluación" propuestas en estos niveles educativos vinculadas al sentido algebraico. Para 2º de la ESO solo se incluyen las del tramo de expresiones algebraicas, excluyendo así las actividades de funciones y ecuaciones. Cada unidad de ánalisis corresponde una actividad o tarea con sus subapartados. La muestra consta de 77 tareas (11 comunes a varios cursos), con 65 tareas (74%) de 2º de la ESO, 10 tareas (11%) de 1º de la ESO, 7 tareas (8%) de 6º de EP y 6 (7%) de 5º de EP.

Las tareas se clasifican en cuatro categorías que reflejan distintos momentos del proceso de enseñanza-aprendizaje según el Libro Blanco (2025) de Innovamat:

- *Actividades de construcción del conocimiento*: Son aquellas tareas en las que el alumnado es el protagonista del aprendizaje y descubre los conceptos matemáticos de manera guiada, a través del razonamiento, la argumentación y la manipulación.
- *Actividad de práctica productiva*: Son tareas dentro de las sesiones de clase en las que, a partir de una pregunta abierta, presenta al alumnado un contexto y una finalidad que requiere practicar para "producir" una respuesta.
- *Práctica reproductiva*: Tareas de práctica sistemática, frecuentemente en formato digital, enfocadas en la consolidación de técnicas vistas antes en clase.
- *Evaluación* (ConMAT): Preguntas de evaluación diseñadas para validar la comprensión del modelo y su interpretación.

El diseño de estas tareas se basa en la interpretación de Innovamat de las orientaciones curriculares en España sobre el sentido algebraico y los principios didácticos de Innovamat que conducen a la propuesta de trayectorias de aprendizaje y el trabajo de procesos (Libro Blanco, 2025).

Para poder analizar las actividades desde el punto de vista de la modelización matemática, hemos creado distintas variables, todas categóricas:

- Tipo de tarea (Modelización). Indica el momento del proceso de modelización: construir, trabajar, interpretar o validar el modelo, hacer el proceso entero de modelización, trabajar en el sistema, o asociar modelos con sistemas dados.
- Tipo de modelo (Modelización). Indica si el modelo es una expresión algebraica, una expresión numérica, una tabla de valores, lenguaje natural u otros.
- Tipo de sistema (Modelización). Tipo de sistema en el que se formula el problema en contexto real o matemático. En este estudio utilizamos una clasificación propia pendiente de validar.
- Nivel de Algebrización (Álgebra). Indica el nivel 0, 1, 2 o 3 del proceso de algebrización.
- Tipo de técnicas (Álgebra). Herramientas que se requieren al trabajar con el modelo.
- Tipo de PCA (Álgebra). Detalla la estructura del modelo, como lineal, potencias, productos o sumas de términos.

- Tipo de argumentos (Álgebra). Determina si los argumentos del PCA son números, números y letras, números y distintas letras, diferentes letras o cantidades de magnitud.
- Tipo de letras (Álgebra). Tipo de letras que aparecen en el problema.
- Tipo de coeficientes (Álgebra). Dominio numérico del PCA: naturales, enteros, racionales.
- Relación entre PCA (Álgebra). Relación entre PCA: equivalencia, igualdad o desigualdad.

El análisis de los datos se ha llevado a cabo mediante un enfoque mixto (cualitativo-cuantitativo) estructurado en tres fases secuenciales, fundamentadas en la TAD y los dos procesos de modelización y algebrización. La categorización ha sido llevada a cabo de forma independiente por los tres autores, discutiendo las discrepancias a posteriori hasta llegar a un consenso.

Fase I: Categorización de tareas

En esta fase, cada una de las 77 actividades ha sido sometida a un análisis detallado para identificar sus componentes, manteniendo la estructura de los tipos de tareas propuesta por Innovamat. Primero se desglosan las tareas según su propósito didáctico (Construcción, Práctica productiva, Reproductiva o Evaluación). El segundo proceso es la codificación mediante una matriz de doble entrada donde cada tarea se codifica según las dos variables definidas anteriormente: el nivel de algebrización (0-3) y las características del PCA (Estructura, Argumentos, Coeficientes y Relación).

Fase II: Análisis del proceso de modelización (MER)

Para asociar las tareas con las fases del proceso de modelización, se analiza la dialéctica entre el Sistema (S) y el Modelo (M) con la variable "Tipo de tarea de modelización" y sus valores:

> 0. Trabajar en S: cuando la tarea no requiere la construcción de ningún modelo, solo la ejecución de una secuencia de cálculos.
> 0.5. Asociar S con M (tránsito S → M): cuando la tarea presenta un sistema y propone un conjunto de modelos para asignar al sistema, sin que se requiera manipular los modelos.
> 1. Construir M (tránsito S → M): cuando se presenta un sistema y se pide la construcción de un modelo, generalmente a partir de algunos elementos previos que facilitan el proceso de modelización (como la identificación y designación de una variable del sistema).
> 2. Trabajar en M: cuando la tarea presenta un sistema y requiere la manipulación de expresiones algebraicas (simplificación, ejecución, sustitución, etc.).
> 3. Interpretar M (tránsito M → S): cuando se requiere interpretar los resultados del trabajo del modelo en el sistema inicial o validar la asociación sistema-modelo a partir de la interpretación de estos resultados.
> 4. Proceso entero: Es el ciclo completo, se construye del modelo, se trabaja y se interpretarlo.

Fase III: Sistematización y análisis estadístico

Una vez categorizadas las tareas de la muestra, se procede al tratamiento de los datos para extraer conclusiones sobre la arquitectura curricular del conjunto de actividades de la propuesta Innovamat:

- Análisis descriptivo: Frecuencias de los niveles de algebrización y sistemas por curso (desde 5º EP hasta 2º ESO). Esto permite observar la progresión longitudinal del contenido algebraico.
- Relación entre categorías: Se cruzan las variables “Categoría de la actividad” y “Curso” con el “Tipo de tarea (Modelización)” para ubicar los tipos de tareas en la progresión de los cursos y verificar si las actividades de construcción de conocimiento promueven más el ciclo entero de modelización que las otras.
- Análisis cuantitativo de los tipos de valores numéricos y tipos de letras predominantes, la cantidad de letras diferentes, así como el número de variables de los modelos de PCA.

RESULTADOS PRELIMINARES

La Tabla 1 recoge la distribución de tareas por curso (algunas aparecen asignadas a más de uno) y nivel de algebrización. No aparecen tareas de nivel 2 y 3 porque hemos eliminado de la muestra las tareas relacionadas con la resolución de ecuaciones y la representación de funciones.

Tabla 1

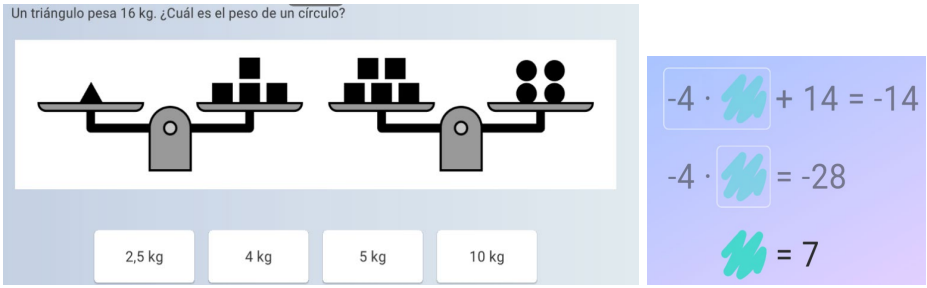
Cantidad de tareas por curso y nivel de algebrización

Curso	Tareas al nivel 0	Tareas al nivel 1
5º, 6º de EP	11	0
1º de la ESO	2	8
2º de la ESO	5	60

El análisis cuantitativo inicial revela un patrón de escalada en la formalización simbólica. Mientras que en los últimos cursos de Primaria el alumnado trabaja exclusivamente en contextos donde el lenguaje algebraico está ausente, la entrada en la ESO supone una inmersión masiva en tareas que requieren la identificación y manipulación de estructuras (Nivel 1). Se concentra el esfuerzo de algebrización en 2º de la ESO, donde el 92% de las actividades exigen que el alumnado trascienda el cálculo aritmético para operar con PCA representados simbólicamente. La Figura 1 presenta un ejemplo de tarea de nivel 0 (cuya resolución se puede hacer paso a paso mediante cálculos aritméticos) y de nivel 1 (que incluye la tarea $-4x + 14 = -14$ y la manipulación escrita de un PCA).

Figura 1

Ejemplo de tareas del nivel 0 de algebrización (izquierda) y de nivel 1 (derecha)



Los tipos de sistemas que se proponen modelizar en las tareas son variados (Tabla 2). Incluyen situaciones matemáticas y extramatemáticas, con un predominio de patrones geométricos o visuales y de situaciones formadas por secuencias de cálculos aritméticos en forma verbal o numérica.

Tabla 2

Cantidad de tareas por tipo de sistema

Tipo de sistema	Cantidad de tareas
Patrones geométricos (o visuales)	17
Situaciones aritméticas (PCA verbales o numéricos, sin contexto)	12
Situaciones cotidianas (contexto extramatemático)	7
Patrones numéricos	5
Balanzas y pesas	4
Bolsas y fichas algebraicas	4
Diagrama de flujo	2
Figuras geométricas	1

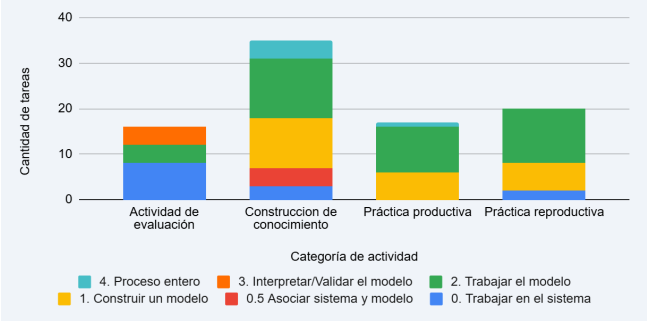
La mayoría de PCA presentes o requeridos en las tareas son lineales, con forma simplificada $ax + b$, El análisis de los valores numéricos revela una clara jerarquía. Los PCA con coeficientes enteros y en el rango de (-10, 10) son los predominantes, estando presentes en el 49% de las tareas analizadas. A estos les siguen los PCA construidos solo con números naturales entre 0 y 30, con una presencia

del 26%. Los PCA que incluyen también números racionales aparecen en un 10% de los casos, marcando los estadios de mayor complejidad aritmética dentro de la muestra. El resto de casos corresponde a PCA con números naturales mayores a 30 o enteros con valor absoluto mayor a 10.

Al cruzar la categoría de la actividad con el tipo de tarea de modelización, se observa una diferencia significativa en la complejidad del tránsito entre el sistema (S) y el modelo (M). Esta relación permite validar la hipótesis de que las actividades de construcción son las que promueven un ciclo de modelización más completo (Figura 2). Por el contrario, en las actividades de práctica reproductiva, predomina el trabajo del modelo (manipulación de PCA escritos).

Figura 2

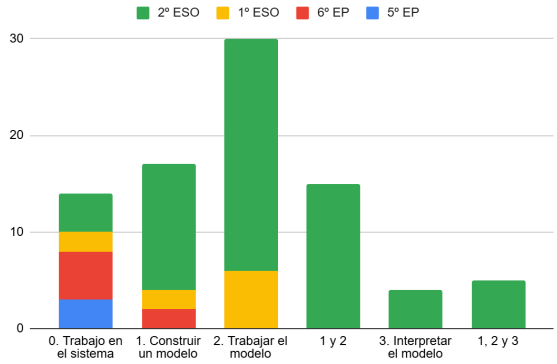
Cantidad de tareas por categoría de actividad



Respecto a las etapas del proceso de modelización, se observa un predominio del trabajo en el modelo, seguido por tareas de construcción de modelos de sistemas de distintos tipos, con pocas tareas de interpretación o que incluyan procesos completos de modelización (Figura 3). El reparto por cursos muestra el trabajo prealgebraico llevado a cabo en 5º y 6º de Primaria, con tareas de familiarización con los sistemas que posteriormente se algebrizan total o parcialmente. También se observa la progresión entre los cursos, hasta llegar a un trabajo más sistemático en 2º de la ESO.

Figura 3

Cantidad de tareas según la etapa del proceso de modelización



En muchos casos, la construcción del modelo viene guiada por la propuesta de las variables por considerar o de un modelo inicial por transformar. Esto conlleva cierta estereotipación en la escritura de los tipos de modelos propuestos, con un predominio de la letra *n* (43% de los casos, generalmente para indicar un número natural cualquiera o el paso en una secuencia) y de la letra *x* (38% de los casos). En tres tareas se utilizan las letras *a* y *b*, y hay cuatro ejercicios en línea donde aparecen las letras del alfabeto de forma aleatoria. En cuanto al tipo de símbolos utilizados en la construcción de los modelos, se observa también un claro predominio de las letras *n* y *x*. En el caso de 5º y 6º de Primaria, la notación más utilizada es una mancha que cubre el número que se debe encontrar (Figura 1).

PRIMERAS CONCLUSIONES Y DESARROLLOS FUTUROS

Los resultados presentados corresponden al análisis preliminar de la categorización de tareas que Innovamat propone dentro del sentido algebraico en 5º y 6º de Primaria y 1º de la ESO, así como las actividades del tramo "Expresiones algebraicas" de 2º de la ESO. Constituyen, en conjunto, lo más representativo de la propuesta relativa al álgebra temprana de Innovamat y, en este sentido, las consideramos como informativas para un primer estudio exploratorio de esta propuesta. Permiten dar una visión de conjunto del tratamiento que se da a los distintos elementos del proceso de modelización algebraica. Los modelos que estamos utilizando para el análisis de la propuesta (proceso de modelización algebraica y niveles de algebrización) son modelos ajenos a los principios que utiliza Innovamat para el diseño y desarrollo de su propuesta. En este sentido, y a pesar de las dificultades metodológicas que supone la categorización de las tareas con principios ajenos a su construcción, la técnica de análisis debería permitirnos identificar qué elementos tienen un papel predominante y cuáles quedan relegados a un rol menor, para considerar en un segundo momento las consecuencias de estas decisiones en las actividades concretas del alumnado. En relación con los fenómenos didácticos relativos al álgebra elemental identificados por la TAD, podemos empezar a identificar algunos aspectos, mientras que otros requieren un estudio más detallado.

Se confirma el predominio de tareas de trabajo del modelo desconectadas del proceso de modelización, confirmándose el fenómeno de la ausencia del álgebra como proceso de modelización. Es posible que este predominio esté relacionado con restricciones debidas a la categoría de la actividad (práctica, evaluación con ítems cerrados, etc.). Sin embargo, indica cierta reminiscencia de la identificación del álgebra elemental con la manipulación de expresiones descontextualizadas. Ahora bien, y a diferencia de las propuestas más tradicionales, se incluye aquí una variedad de tareas de construcción de modelos. Estas tareas también incorporan diversos tipos de sistemas por modelizar, tanto matemáticos, como figurativos o relacionados con la vida económica y social, aunque las propuestas de modelos mantienen un formato matemático estándar en la elección de las letras (casi exclusivamente la n y la x), más alejado de las estrategias de modelización propias de las ciencias experimentales o sociales.

Debemos acordar a estos primeros resultados un carácter hipotético, pendientes de contrastar con las actividades de clase de 5º y 6º de Primaria que están en proceso de desarrollo y no se han podido incorporar a este estudio. También debemos considerar como una limitación metodológica el hecho de asignar el mismo peso a las tareas de "Práctica reproductiva" y "Evaluación", propuestas para ser llevadas a cabo por el alumnado en trabajo autónomo, que a las tareas de "Práctica productiva" o de "Construcción de conocimiento", propuestas para el trabajo en clase guiado por el o la docente. El presente estudio cuantitativo ha permitido identificar los principales tipos de tareas relativas al saber algebraico en el ciclo superior de Primaria e inicio de la ESO. Esta primera caracterización debería ahora completarse con un segundo análisis praxeológico de la propuesta formativa de Innovamat para poder identificar las actividades centrales de cada bloque o tema y asignarles un peso mayor que a las tareas propuestas como práctica individual complementaria. De esta forma se podrá obtener una descripción de la propuesta de Innovamat desde la perspectiva de la TAD en términos del proceso de modelización algebraica e identificar puntos potenciales de desarrollo. Tendríamos así una primera caracterización de la *praxis didáctica* de la propuesta de Innovamat.

A partir de aquí, la investigación debería abordar el estudio del *logos didáctico* de la propuesta, es decir, de las elaboraciones y fundamentos teóricos que la sustentan. Para ello, se prevé el desarrollo del estudio en dos líneas complementarias. Por un lado, ampliar el estudio empírico basado en los materiales de Innovamat con entrevistas a los responsables del diseño de las tareas para identificar los principios didácticos y metodológicos de la propuesta. En segundo lugar, se debería relacionar nuestra caracterización de la propuesta de Innovamat con otros modelos existentes en la comunidad de educación matemática sobre el álgebra temprana, tanto en España (Cañadas, 2023) como a nivel

internacional (Narváez et al., 2025). De esta forma, se podría completar la descripción del modelo implícito de la propuesta basado en la TAD con el de otros enfoques más próximos a los principios utilizados por Innovamat. Finalmente, de forma más general, consideramos que este proyecto representa un enfoque metodológico innovador para el estudio de los fenómenos didácticos en el marco de una tesis industrial que se propone combinar significativamente la investigación teórica rigurosa con la aplicación práctica en contextos educativos reales.

Agradecimientos

Investigación realizada en el marco del convenio 2025 DI 00019 entre Innovamat y la Universidad de Barcelona del Programa de Doctorados Industriales de la AGAUR - Generalitat de Catalunya.

Referencias

Barquero, B. (2019). Una perspectiva internacional sobre la enseñanza y aprendizaje de la modelización matemática. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 19–22). SEIEM. https://www.seiem.es/acta/xxiii-2019-valladolid/

Bolea, P. (2002). *El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares.* Tesis doctoral. Universidad de Zaragoza.

Bosch, M. y Gascón, J. (2006). Twenty-Five Years of the Didactic Transposition. *ICMI Bulletin, 58*, 51–65. https://www.mathunion.org/fileadmin/ICMI/files/Publications/ICMI_bulletin/58.pdf

Cañadas, M. C. (2023). Una panorámica de las investigaciones sobre pensamiento numérico y pensamiento algebraico. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo, P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 3-9). SEIEM. https://www.seiem.es/acta/actas-xxvi-seiem-logrono-2023/

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné.* La Pensée sauvage.

Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Deuxième partie. Perspectives curriculaires : la notion de modélisation. *Petit x, 19*, 43-72.

España (2020). Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. *Boletín Oficial del Estado*, (340). https://www.boe.es/eli/es/lo/2020/12/29/3

García, F. J. (2007). El álgebra como instrumento de modelización. Articulación del estudio en las relaciones funcionales en la educación secundaria. En M. Camacho, P. Flores y P. Bolea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XI* (pp. 71-92). SEIEM. https://www.seiem.es/acta/actas-xi-2007-la-laguna/

Gascón, J., Bosch, M. y Ruiz-Munzón, N. (2017). El problema del álgebra elemental en la teoría antropológica de lo didáctico. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 25-47). SEIEM. https://www.seiem.es/acta/xxi-2017-zaragoza/

Generalitat de Catalunya (2022). *Currículum 175/2022. Educació primària.* XTEC. https://xtec.gencat.cat/ca/curriculum/primaria/curriculum-175-2022/

Innovamat (2025). *Llibre blanc de l'aprenentatge de les matemàtiques: Fonaments teòrics de la proposta d'Innovamat*. Innovamat. https://www.innovamat.com/wp-content/uploads/2025/04/Llibre-blanc-aprenentatge-matematiques-Innovamat.pdf

Narváez, R., Adamuz-Povedano, N. y Cañadas, M. C. (2025). Análisis bibliométrico sobre pensamiento algebraico en educación infantil y primaria en Scopus. *AIEM, 27,* 43-65. https://doi.org/10.35763/aiem27.5825

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. NCTM. https://www.nctm.org/

Ruiz-Munzón, N. (2010). *La introducción del álgebra elemental y su desarrollo hacia la modelización funcional.* Tesis doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona. https://ddd.uab.cat/record/285092

LA LÓGICA AUSENTE: EVOLUCIÓN DE LOS CONTENIDOS LÓGICOS EN EL CURRÍCULO DE MATEMÁTICAS DE EDUCACIÓN PRIMARIA EN ESPAÑA (SIGLO XXI)

The absent logic: the evolution of logical reasoning in the spanish primary mathematics curriculum (21st Century)

Dolz, A.[a,b], Sánchez-Pascuala, L.[b], Sáez-Maestro, E.[b] y Rubio-Sánchez, A.[b]

[a]Universidad Complutense de Madrid, [b]CUNEF Universidad

Resumen

La lógica y el razonamiento lógico matemático constituyen un componente fundamental del pensamiento matemático. En los últimos años han adquirido una renovada relevancia, especialmente con la incorporación del pensamiento computacional en los currículos educativos. Este trabajo analiza la aparición de esta área de las matemáticas en el currículo de Educación Primaria en España durante el siglo XXI mediante un análisis comparativo de los tres marcos legislativos españoles de esta etapa: LOE (2006), LOMCE (2013) y LOMLOE (2020). Los resultados muestran que la lógica no aparece como contenido curricular explícito, aunque permanece integrada de forma implícita en diversos procesos tanto matemáticos como competenciales. El auge de las nuevas tecnologías y del pensamiento computacional reabre el debate sobre la presencia y la relación de estas estructuras en la educación matemática básica.

Palabras clave: *currículo de matemáticas, lógica, razonamiento lógico matemático, pensamiento computacional, educación primaria.*

Abstract

Logic and logical-mathematical reasoning constitute a fundamental component of mathematical thinking. In recent years, they have gained renewed relevance, particularly with the incorporation of computational thinking into educational curricula. This paper analyses the presence of this area of mathematics in the Primary Education curriculum in Spain during the 21st century through a comparative analysis of the three legislative frameworks governing this stage: LOE (2006), LOMCE (2013), and LOMLOE (2020). The results show that logic does not appear as an explicit curricular content, although it remains implicitly integrated into various mathematical and competence-based processes. The rise of new technologies and computational thinking has reopened the debate on the presence and relationship of these structures in basic mathematics education.

Keywords: *mathematics curriculum, logic, logical–mathematical reasoning, computational thinking, primary education.*

INTRODUCCIÓN

La lógica es uno de los fundamentos estructurales del pensamiento matemático. Más allá de su formulación como disciplina formal dentro de la matemática, esta se manifiesta en una serie de prácticas cognitivas presentes en la actividad matemática escolar, como clasificar, relacionar, inferir, reconocer patrones, justificar o analizar condiciones (Díaz-Godino et al., 2003). Estas acciones aparecen de manera recurrente en el currículo de Educación Primaria y sustentan procesos de razonamiento que permiten al alumnado organizar información, establecer relaciones y construir conceptos matemáticos (Inhelder y Piaget, 1958).

Dolz, A., Sánchez-Pascuala, L., Sáez-Maestro, E. y Rubio-Sánchez, A. (2026). La lógica ausente: evolución de los contenidos lógicos en el currículo de matemáticas de educación primaria en España (siglo XXI). En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (pp. 194-201). SEIEM.

Desde el desarrollo cognitivo, diversos autores han señalado el papel central de las estructuras lógico-matemáticas en la construcción del pensamiento matemático. Inhelder y Piaget (1958) ya identificaron estas estructuras como base del razonamiento formal, mientras que investigaciones posteriores han mostrado que el desarrollo del razonamiento lógico se relaciona con el rendimiento matemático en etapas educativas posteriores (Dolz et al., 2026; Nunes et al., 2007; Rubio-Sánchez et al., 2023). En el ámbito de la educación matemática, Canals (2001) subraya que la comprensión de relaciones y estructuras precede a la adquisición de técnicas formales, situando el razonamiento lógico en el núcleo de la actividad matemática escolar.

Desde estas perspectivas, la lógica puede entenderse no solo como un contenido formal de la matemática escolar, sino también como un conjunto de formas de razonamiento integradas en distintos procesos matemáticos. Esta distinción resulta especialmente relevante a la hora de llevar a cabo un análisis curricular, ya que permite diferenciar entre la aparición explícita de determinados contenidos y su presencia transversal en competencias, prácticas y procesos de razonamiento.

En las últimas décadas, el interés por estas estructuras ha adquirido una nueva relevancia con la incorporación del pensamiento computacional en las políticas educativas y en el currículo escolar (diSessa, 2018). En este sentido, la relación entre lógica, matemáticas y pensamiento computacional plantea interrogantes relevantes acerca de cómo el currículo incorpora y organiza estas estructuras de razonamiento (Santaengracia et al., 2024). En el caso español, la presencia curricular de la lógica ha variado a lo largo del tiempo, oscilando entre su explicitación formal, especialmente durante el periodo de influencia de la Matemática Moderna, y su integración transversal en otros contenidos matemáticos (Rico et al., 2011). En el marco de las reformas educativas del siglo XXI, el currículo de matemáticas ha experimentado diversas transformaciones asociadas a enfoques competenciales y a nuevas demandas formativas vinculadas al desarrollo tecnológico (Coll Salvador y Martín Ortega, 2025; Rico et al., 2011; Santaengracia et al., 2024).

En la literatura reciente se identifican diversas líneas relacionadas con nuestro objeto de estudio. Por un lado, algunos trabajos recientes han abordado el desarrollo del nuevo marco curricular de Matemáticas y sus implicaciones para la enseñanza y la formación del profesorado (Contreras, 2022; Moreno, 2022), así como análisis comparativos de constructos específicos, como el sentido numérico, en distintas normativas educativas (Jiménez-Rubiano et al., 2025). Por otro, numerosas investigaciones han estudiado formas de razonamiento matemático escolar desde perspectivas como el pensamiento algebraico temprano, la algebrización o la argumentación (Callejo et al., 2016; Rubio-Sánchez et al., 2023). Más recientemente, distintos trabajos han analizado la incorporación del pensamiento computacional al currículo de Matemáticas y sus implicaciones para el diseño de tareas y la formación docente (Palop et al., 2022; Santaengracia et al., 2024). Sin embargo, continúa siendo escasa una lectura específicamente centrada en la evolución del estatuto curricular de la lógica en Educación Primaria.

En este sentido, nuestro estudio aporta una perspectiva todavía poco desarrollada, al analizar comparativamente los tres marcos legislativos españoles del siglo XXI y examinar cómo la lógica desaparece progresivamente como contenido explícito mientras determinadas estructuras inferenciales reaparecen integradas en competencias, procesos y formulaciones vinculadas al pensamiento matemático y computacional. De este modo, la desaparición nominal de determinados contenidos lógicos en el currículo no implica necesariamente la desaparición funcional de formas de razonamiento lógico en la actividad matemática escolar.

Esta situación plantea un problema relevante para la Didáctica de la Matemática, ya que la no aparición de la lógica como contenido explícito del currículo contrasta con la permanencia de formas de razonamiento lógico en numerosos procesos matemáticos escolares. En un contexto orientado al desarrollo de competencias y al pensamiento computacional, resulta pertinente analizar qué implicaciones puede tener esta transformación para la construcción del conocimiento matemático

escolar, la selección de tareas y prácticas de aula, la formación del profesorado y la relación entre currículo prescrito y desarrollo competencial en la educación matemática.

MARCO LEGISLATIVO DEL SIGLO XXI EN EL ÁREA

El currículo de Educación Primaria en España durante el siglo XXI ha estado regulado por tres marcos legislativos principales que se establecerán a continuación. Estas reformas han configurado el marco normativo actual del sistema educativo español y han introducido diferentes orientaciones pedagógicas en la organización del currículo de matemáticas (Rico et al., 2011). Todo ello en un contexto marcado por la progresiva consolidación del modelo descentralizado del sistema educativo y por la creciente influencia de enfoques internacionales centrados en el desarrollo de competencias (Coll Salvador y Martín Ortega, 2025).

El primer marco legislativo analizado es la *Ley Orgánica de Educación (LOE)*, aprobada en 2006, que reorganizó el currículo escolar tras más de una década de aplicación de la LOGSE. El currículo de Educación Primaria quedó concretado en el Real Decreto 1513/2006, que estableció las enseñanzas mínimas para esta etapa. En segundo lugar, estudiaremos la *Ley Orgánica para la Mejora de la Calidad Educativa (LOMCE)*, aprobada en 2013, que introdujo modificaciones en el marco curricular de la ley anterior (LOE) sin sustituir completamente su estructura normativa. Con la entrada de esta ley, el currículo básico de Educación Primaria quedó establecido en el Real Decreto 126/2014. Por último, estudiaremos el marco curricular actualmente vigente, que deriva de la *Ley Orgánica de Modificación de la LOE (LOMLOE),* aprobada en 2020, cuyo desarrollo para la Educación Primaria se concreta en el Real Decreto 157/2022.

METODOLOGÍA

En este contexto, el objetivo de este trabajo es analizar cómo las sucesivas reformas curriculares españolas del siglo XXI han reorganizado la presencia de la lógica y de las estructuras de razonamiento lógico en el currículo de matemáticas de Educación Primaria, centrándose en los tres marcos legislativos anteriores: LOE (Real Decreto 1513/2006), LOMCE (Real Decreto 126/2014) y LOMLOE (Real Decreto 157/2022). Más concretamente, se pone el foco en el desplazamiento desde contenidos explícitos hacia formas implícitas integradas transversalmente en procesos competenciales.

En este trabajo, la lógica no se entiende únicamente como un contenido formal asociado a la matemática escolar, sino también como un conjunto de formas de razonamiento presentes en distintos procesos matemáticos. Por ello, el análisis curricular realizado no se limita a la identificación de contenidos explícitamente vinculados a la lógica o a la teoría de conjuntos, sino también a la presencia transversal de estructuras de razonamiento lógico integradas implícitamente en competencias, prácticas y procesos matemáticos (Díaz-Godino et al., 2003).

En primer lugar, se ofrece un análisis de los currículos educativos pertenecientes a los marcos legislativos que han regulado el currículo español en el siglo XXI con especial atención a la presencia explícita e implícita de estructuras inferenciales vinculadas al razonamiento lógico matemático. Para ello, se consideraron especialmente relevantes las referencias curriculares vinculadas a relaciones, patrones, argumentación, formulación de conjeturas, resolución de problemas y secuenciación de procedimientos. Tras este proceso, se propone una lectura interpretativa de cómo estas estructuras se han desplazado desde formulaciones curriculares explícitas hacia una integración transversal en procesos matemáticos.

Finalmente, el estudio pone en relación esta evolución curricular con la incorporación reciente del pensamiento computacional en las políticas educativas, abriendo una reflexión sobre la coherencia entre las competencias que se pretende desarrollar y la explicitación de sus fundamentos conceptuales en la educación matemática escolar (Santaengracia et al., 2024).

ANÁLISIS Y RESULTADOS CURRICULARES

Ley Orgánica de Educación (LOE, 2006)

La Ley Orgánica de Educación (LOE), aprobada en 2006, reorganizó el currículo escolar tras más de una década de aplicación de la LOGSE. El currículo de Educación Primaria quedó concretado en el Real Decreto 1513/2006, que estableció las enseñanzas mínimas para esta etapa. Una de las principales novedades de esta ley fue la introducción del enfoque competencial mediante las llamadas competencias básicas, concebidas como aprendizajes fundamentales que el alumnado debía adquirir a lo largo de la escolaridad obligatoria. En el área de matemáticas, el currículo se estructuró en cuatro bloques de contenido distribuidos en tres ciclos, con un énfasis particular en el desarrollo de la alfabetización numérica, entendida como la capacidad para utilizar los números y sus relaciones en la interpretación y resolución de situaciones diversas. En continuidad con el currículo derivado de la ley anterior LOGSE, (no estudiada en esta comunicación por pertenecer al periodo del siglo XX) no aparecen de forma explícita los contenidos de lógica formal y teoría de conjuntos en el currículo, dando paso a una organización de los contenidos más orientada hacia el uso funcional de las matemáticas y su aplicación en contextos cotidianos.

Ley Orgánica para la Mejora de la Calidad Educativa (LOMCE, 2013)

Esta reforma mantuvo el enfoque competencial introducido en la LOE, pero reforzó el papel de la evaluación mediante la incorporación de los denominados estándares de aprendizaje evaluables, que buscaban concretar de manera más precisa los resultados de aprendizaje esperados. En el área de matemáticas, la estructura general de los contenidos se mantuvo en gran medida, aunque se incorporó un bloque específico denominado “Procesos, métodos y actitudes en matemáticas”, orientado al desarrollo de estrategias de resolución de problemas, argumentación y razonamiento matemático. Al igual que en la LOE, no aparecen contenidos explícitos de lógica o teoría de conjuntos; sin embargo, algunos estándares de aprendizaje incluyen referencias indirectas a procesos de razonamiento como la identificación de patrones, el establecimiento de relaciones o la formulación de conjeturas.

Ley Orgánica de Educación (LOMLOE, 2020)

Esta reforma mantiene el enfoque competencial e introduce una reorganización curricular basada en competencias específicas, criterios de evaluación y saberes básicos. Asimismo, el currículo incorpora de manera más explícita la relación entre matemáticas, ciencia y tecnología a través de la competencia matemática y competencia en ciencia, tecnología e ingeniería (STEM), así como la inclusión del pensamiento computacional dentro del marco de la competencia digital. En el área de matemáticas, los contenidos se organizan nuevamente en tres ciclos y se presentan mediante bloques de saberes básicos que enfatizan la resolución de problemas y el aprendizaje contextualizado mediante situaciones de aprendizaje. Dentro de esta organización destaca el bloque denominado “Sentido algebraico”, en el que se introducen elementos relacionados con la identificación de patrones, el establecimiento de relaciones y la descomposición de problemas en secuencias de pasos, procesos estrechamente vinculados con estructuras de razonamiento lógico. No aparecen contenidos referentes a la lógica de forma explícita.

Comparativa

En conjunto, el análisis comparativo de estas tres reformas (LOE (2006), la LOMCE (2013) y la LOMLOE (2020)) muestra una evolución hacia un currículo cada vez más orientado al desarrollo de competencias y al uso de carácter aplicado del conocimiento matemático. La lógica y la teoría de conjuntos no aparecen como contenidos explícitos, aunque efectivamente diversos elementos relacionados con el razonamiento lógico matemático continúan presentes de manera transversal en los procesos matemáticos y de especial relevancia en el marco del pensamiento computacional introducido por la LOMLOE.

En resumen, en la LOE (2006) predomina una organización por bloques centrada en la alfabetización numérica y el uso funcional; en la LOMCE (2013) se refuerza el componente evaluativo mediante estándares y se explicita un bloque vertebrador de "procesos, métodos y actitudes"; y en la LOMLOE (2020) se consolida un marco competencial donde los saberes se agrupan por "sentidos", integrándose de forma explícita el pensamiento computacional dentro del sentido algebraico.

Tabla 5

Comparativa curricular de la presencia de estructuras lógicas en el currículo de Matemáticas de Educación Primaria (LOE, LOMCE y LOMLOE)

Dimensión de análisis	LOE (2006)	LOMCE (2013–2014)	LOMLOE (2020–2022)
Organización general del currículo	4 bloques: Números y operaciones; Medida; Geometría; Tratamiento de la información, azar y probabilidad. La resolución de problemas actúa como eje transversal.	5 bloques: Procesos, métodos y actitudes en matemáticas; Números; Medida; Geometría; Estadística y probabilidad.	Organización por competencias específicas, criterios de evaluación y saberes básicos agrupados en "sentidos".
Estructura evaluativa	Contenidos y criterios de evaluación distribuidos por ciclos. Introducción del marco de competencias básicas.	Introducción de los estándares de aprendizaje evaluables que concretan los resultados esperados.	Evaluación basada en competencias específicas y criterios asociados al perfil de salida del alumnado.
Presencia explícita de lógica o teoría de conjuntos	No aparece como contenido específico en el currículo.	No aparece como contenido explícito.	No aparece como contenido nominal, aunque se incorporan elementos vinculados al razonamiento lógico.
Procesos lógicos implícitos en el currículo	Se mencionan procesos como identificación de relaciones, análisis de situaciones y resolución de problemas.	Estándares incluyen identificación de patrones, reconocimiento de relaciones, formulación de conjeturas y uso de contraejemplos.	El bloque "Sentido algebraico" incorpora patrones, relaciones, modelización y descomposición de problemas.
Relación con pensamiento computacional	No aparece explícitamente, aunque algunos procesos de razonamiento matemático pueden relacionarse con él.	No aparece de forma explícita, pero se desarrollan habilidades relacionadas con patrones, inferencias y resolución de problemas.	Aparece explícitamente el pensamiento computacional, integrado en el bloque de sentido algebraico y vinculado a algoritmos, secuencias e instrucciones.

DISCUSIÓN

Síntesis de resultados

El presente trabajo contribuye a la investigación en Didáctica de la Matemática al ofrecer un análisis comparativo de la evolución de la lógica y de las estructuras de razonamiento lógico en los tres marcos legislativos que han regulado el currículo de Educación Primaria en España durante el siglo XXI: LOE, LOMCE y LOMLOE. Mientras que en etapas anteriores del currículo la lógica y la teoría de

conjuntos podían aparecer como contenidos explícitos asociados a determinadas concepciones estructurales de la matemática escolar, en los marcos normativos del siglo XXI estos contenidos desaparecen como tales del currículo formal (Rico et al., 2011).

Una primera aportación del trabajo consiste en mostrar que la lógica no aparece como contenido explícito dentro del currículo formal de matemáticas, aunque determinadas estructuras inferenciales continúan presentes de manera transversal en múltiples procesos matemáticos escolares. El análisis realizado permite observar que acciones como identificar patrones, establecer relaciones, formular conjeturas, analizar condiciones o descomponer problemas permanecen integradas en el currículo. Estas prácticas continúan sustentando procesos fundamentales del pensamiento matemático escolar (Canals, 2001; Díaz-Godino et al., 2003; Inhelder y Piaget, 1958).

En segundo lugar, el estudio identifica una transformación del estatuto curricular de estas estructuras de razonamiento. Más que una desaparición de la lógica del aprendizaje matemático, los resultados sugieren una reconfiguración de su función dentro del currículo: las estructuras lógicas pasan a incorporarse como herramientas implícitas al servicio de enfoques competenciales y funcionales de las matemáticas escolares (Coll Salvador y Martín Ortega, 2025; Rico et al., 2011).

Finalmente, el trabajo pone en relación esta evolución curricular con la incorporación reciente del pensamiento computacional en la educación obligatoria. En este sentido, el estudio sugiere que muchas de las competencias promovidas bajo el marco del pensamiento computacional se apoyan en formas de razonamiento estrechamente vinculadas con la lógica matemática (diSessa, 2018; Santaengracia et al., 2024), lo que reabre, bajo nuevas denominaciones, una cuestión que continúa ocupando un lugar estructural en el pensamiento matemático escolar.

Implicaciones curriculares

Esta transformación puede interpretarse como parte de un cambio más amplio en la concepción de las matemáticas escolares. En las reformas educativas recientes, el currículo tiende a priorizar enfoques funcionales y competenciales. En este contexto, el razonamiento lógico deja de presentarse como un contenido formal autónomo y pasa a integrarse en procesos considerados transversales al aprendizaje matemático.

Sin embargo, esta reconfiguración curricular plantea algunas tensiones relevantes. La desaparición de la lógica como contenido explícito puede dificultar la identificación clara de las estructuras formales que sustentan muchos de los procesos matemáticos que el currículo espera desarrollar en el alumnado. Cuando estas estructuras aparecen únicamente de forma implícita, su tratamiento didáctico puede quedar sujeto en mayor medida a interpretaciones pedagógicas o a decisiones curriculares locales.

Por otra parte, puesto que la incorporación reciente del pensamiento computacional en el currículo escolar reintroduce, bajo nuevas denominaciones, formas de razonamiento estrechamente vinculadas a la lógica matemática (diSessa, 2018; Santaengracia et al., 2024), se sugiere la posible existencia de una cierta desalineación curricular entre los fundamentos conceptuales del razonamiento lógico y las competencias que se pretende promover en la educación matemática contemporánea.

Esta cuestión adquiere especial relevancia en el contexto actual, en el que el pensamiento computacional y las competencias STEM ocupan un lugar creciente en las políticas educativas, así como en la formación académica y profesional del alumnado. En este sentido, una integración insuficiente de las bases lógicas del razonamiento matemático en la educación obligatoria podría dificultar en el alumnado el desarrollo sistemático, progresivo y continuado de estas formas de pensamiento. Esto resulta especialmente relevante si se tiene en cuenta que dichas competencias constituyen hoy un elemento clave para la participación en entornos científicos, tecnológicos y sociales cada vez más complejos. Por ello, esta situación plantea interrogantes sobre la universalización del acceso a competencias vinculadas a los ámbitos científicos y tecnológicos.

CONCLUSIONES

El análisis realizado muestra que la evolución reciente del currículo de matemáticas en la Educación Primaria española no implica tanto la desaparición de la lógica del aprendizaje matemático como una transformación de su lugar dentro de la organización curricular. Las estructuras inferenciales propias del razonamiento lógico continúan presentes en múltiples procesos matemáticos, aunque su formulación aparece ahora integrada en enfoques competenciales y en prácticas asociadas a la resolución de problemas, la identificación de patrones o la modelización.

En este contexto, la incorporación del pensamiento computacional en el currículo escolar pone de manifiesto la relevancia de estas formas de razonamiento para el desarrollo de competencias matemáticas y tecnológicas. Comprender cómo el currículo articula estas estructuras resulta, por tanto, fundamental para analizar las condiciones bajo las cuales el sistema educativo promueve el desarrollo del pensamiento matemático y computacional en la educación básica.

LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN FUTURAS

Los resultados de este trabajo sugieren la conveniencia de ampliar el análisis hacia otros niveles del sistema educativo y hacia aquellos factores que condicionan la implementación efectiva del currículo. En este sentido, futuras investigaciones podrían examinar hasta qué punto la formación inicial y permanente del profesorado de Educación Primaria incorpora conocimientos vinculados al razonamiento lógico, al lenguaje lógico-matemático y a la interpretación de estructuras condicionales presentes en la actividad matemática escolar (Dolz y Gómez-Chacón, 2024).

En resumen, la lógica ausente no es una lógica inexistente, sino una lógica curricularmente silenciada; hacerla visible es una condición necesaria para comprender, enseñar y democratizar el pensamiento matemático y computacional del siglo XXI.

Agradecimientos

PID2022-138325OB-I00 financiada por MICIU/AEI /10.13039/501100011033 y por FEDER, UE, y de contenido de tesis dentro del Programa IMEIO de la UCM y UPM. Financiación de CUNEF Universidad.

Referencias

Callejo, M. L., García-Reche, Á. y Fernández, C. (2016). Pensamiento algebraico temprano de estudiantes de educación primaria (6-12 años) en problemas de generalización de patrones lineales. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *10*, 5–25. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i10.106

Canals, M. A. (2001). *La enseñanza de las matemáticas en la educación primaria*. Graó.

Coll Salvador, C. y Martín Ortega, E. (2025). Los procesos de cambio curricular en España: de la LOGSE a la LOMLOE. *Revista De Educación*, *410*. https://doi.org/10.4438/1988-592X-RE-2025-410-708

Contreras, L. C. (2022). La nueva propuesta curricular y la formación del profesor. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 63–79). SEIEM.

Díaz-Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros*. Universidad de Granada.

Dolz, A., Gómez-Chacón, I. M. y García Fernández, C. (2026). Mathematics performance and the relations to cognitive reflection, fluid intelligence, conditional reasoning, and logical-mathematical language in the university students*, EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 21*(1).

Dolz, A. y Gómez-Chacón, I. M. (2024). *Interpretación del condicional por futuros profesores de educación primaria*. En S. Van Vaerenbergh et al. (Eds.), *Actas del Octavo Simposio sobre el Estudio del Trabajo Matemático (ETM8)* (pp. 387–398). Editorial Universidad Cantabria.

diSessa, A. A. (2018). Computational literacy and "the big picture" concerning computers in mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning, 20*(1), 3–31. https://doi.org/10.1080/10986065.2018.1403544

Inhelder, B. y Piaget, J. (1958). *The growth of logical thinking from childhood to adolescence: An essay on the construction of formal operational structures*. Basic Books. https://doi.org/10.1037/10034-000

Jiménez-Rubiano, L., Piñeiro, J. L. y Ruiz-Hidalgo, J. F. (2025). Diferentes normativas, diferentes versiones del sentido numérico. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. 236-243). SEIEM.

Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. *Boletín Oficial del Estado, núm. 106*, de 4 de mayo de 2006.

Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa. *Boletín Oficial del Estado, núm. 295*, de 10 de diciembre de 2013.

Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de Educación. *Boletín Oficial del Estado, núm. 340,* de 30 de diciembre de 2020.

Moreno, A. (2022). Introducción seminario de investigación II: El desarrollo del nuevo marco curricular en matemáticas. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 49–51). SEIEM.

Nunes, T., Bryant, P., Barros, R. y Sylva, K. (2007). The relative importance of two different mathematical abilities to mathematical achievement. *British Journal of Educational Psychology, 77*(3), 619–637. https://doi.org/10.1348/000709906X112147

Palop, B., Santaengracia, J. J. y Rodríguez-Muñiz, L. J. (2022). La conceptualización del pensamiento computacional en el currículo LOMLOE de matemáticas en educación primaria. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (p. 623). SEIEM.

Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. *Boletín Oficial del Estado, núm. 293*, de 8 de diciembre de 2006.

Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria. *Boletín Oficial del Estado, núm. 52*, de 1 de marzo de 2014.

Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. *Boletín Oficial del Estado, núm. 52*, de 2 de marzo de 2022.

Rico Romero, L., Díez Lozano, Á., Castro Martínez, E. y Lupiáñez Gómez, J. L. (2011). Currículo de matemáticas para la educación obligatoria en España durante el periodo 1945-2010. *Educatio Siglo XXI*, *29*(2), 139–172. https://revistas.um.es/educatio/article/view/133011/122711

Rubio-Sánchez, A., Gómez-Chacón, I. M. y Gómez Veiga, I. (2023). Relationships among mathematics beliefs, fluid intelligence, cognitive reflection and mathematics achievement in secondary school students. *Proceedings of the Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* CERME13.

Santaengracia, J. J., Aguilar-González, A., Palop, B. y Rodríguez-Muñiz, L. J. (2024). Conocimiento especializado de estudiantes para maestro/a en una tarea sobre pensamiento computacional. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 489-496). SEIEM.

ESTUDIO DE CASO SOBRE LA EVOLUCIÓN DEL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DE UNA MAESTRA EN FORMACIÓN INICIAL SOBRE EL ALGORITMO DE LA RESTA

A case study about the evolution of the specialised knowledge of a pre-service teacher about the subtraction algorithm

Duarte-Tosso, I., Sánchez-Compaña, M. T. y Sánchez-Cruzado, C.

Universidad de Málaga

Resumen

La mayoría de estudiantes del Grado en Educación Primaria ejecutan correctamente la resta con llevada, pero no muestran capacidad para explicarla conceptualmente y acaban recurriendo a metáforas mecánicas. Este trabajo emplea el modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK) como marco teórico y analítico para valorar, mediante un estudio de caso, cómo un plan de formación específico puede revertir esta tendencia en una futura maestra. Los hallazgos muestran una evolución significativa: desde una visión técnica del algoritmo hacia una comprensión profunda de la didáctica de las operaciones aritméticas aditivas. Asimismo, el estudio evidencia que este cambio en el conocimiento especializado transforma positivamente las creencias sobre la propia capacidad de enseñanza de una maestra en formación inicial.

Palabras clave: *resta, conocimiento especializado, sistema de numeración, docentes en formación inicial.*

Abstract

Most of the students of the Degree in Primary Education correctly perform subtraction with borrowing, but are unable to explain it conceptually and resort to mechanical metaphors. This study uses the Mathematics Teacher´s Specialised Knowledge (MTSK) as a theoretical and analytical framework to assess how a specific training plan can reverse this trend in a pre-service teacher in a case study. The findings reveal a significant improvement: from a technical focus on the algorithm to a deep understanding of the teaching of additive arithmetic operations. Furthermore, the study shows that this shift in specialised knowledge positively transforms the beliefs of a pre-service teacher regarding her own teaching abilities.

Keywords: *subtraction, specialised knowledge, number system, pre-service teachers.*

INTRODUCCIÓN

La formación inicial de maestras y maestros de Educación Primaria es clave para asegurar la calidad de la enseñanza matemática. Ortiz-Villarejo y González-Marí (2016) afirman que el alumnado del Grado en Educación Primaria suele iniciar sus estudios universitarios con un conocimiento matemático eminentemente técnico, instrumental y memorístico, evidenciando lagunas significativas en la comprensión de la estructura del Sistema de Numeración Decimal (SND) y en la justificación de los algoritmos de las operaciones elementales. Este fenómeno es especialmente notorio en la enseñanza del algoritmo de la resta con llevada, donde la mayoría de docentes en formación son capaces de ejecutar el cálculo correctamente, pero muestran dificultades para explicarlo desde un punto de vista conceptual (Thanheiser, 2009). Frecuentemente, su comprensión se centra en la metáfora de "pedir prestado", un enfoque que trata a los dígitos de un número como entidades independientes en lugar de entender las relaciones jerárquicas del valor posicional (Ma, 1999).

Duarte-Tosso, I., Sánchez-Compaña, M. T. y Sánchez-Cruzado, C. (2026). Estudio de caso sobre la evolución del conocimiento especializado de una maestra en formación inicial sobre el algoritmo de la resta. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (pp. 202-209). SEIEM.

Superar estas dificultades no depende únicamente de una mejora cognitiva, sino que influye la componente socioafectiva, pues las experiencias escolares previas forjan un sistema de actitudes y creencias que se trasladan, de manera consciente o inconsciente, al propio aula (García-González et al., 2019). Preparar profesionales competentes exige atender al bagaje emocional, a las creencias y al dominio del contenido matemático (Soto-Cerros et al., 2023). En este sentido, resulta necesario disponer de marcos teóricos que permitan analizar y orientar el desarrollo de ese conocimiento profesional de manera integrada.

El modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK) se emplea como marco teórico y analítico para estructurar y diseñar tareas en la formación inicial docente. Esta comunicación presenta un estudio de caso cualitativo cuyo objetivo es determinar el impacto de un plan formativo, basado en la deconstrucción del sistema de numeración y diseñado desde el MTSK, en la transformación del conocimiento de una futura maestra, evidenciando su tránsito desde un conocimiento algorítmico y creencias limitantes hacia la construcción de un conocimiento especializado adecuado sobre la resta con llevada y la evolución en su dominio de creencias.

El estudio pone en valor el modelo MTSK como herramienta para el diseño instruccional en la formación inicial y para su análisis posterior. La investigación pone de manifiesto cómo la sustitución de rutinas mecánicas por una comprensión profunda del valor posicional trasciende lo puramente cognitivo: esta deconstrucción del algoritmo transforma positivamente el dominio socioafectivo y las creencias limitantes de la futura maestra, dotándola de la seguridad didáctica necesaria para su desempeño en el aula.

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

La investigación se enmarca en el conocimiento especializado del profesorado de matemáticas sobre la didáctica de la aritmética, abordando las estrategias y técnicas utilizadas para el proceso de enseñanza-aprendizaje de la resta. Desde la perspectiva de la investigación, el desarrollo de este conocimiento profesional no puede entenderse fragmentando la cognición del afecto. Por ello, esta investigación adopta un enfoque integrador empleando el modelo MTSK, el cual permite comprender cómo el dominio profundo de este contenido interactúa de manera directa con la transformación del dominio afectivo y el sistema de creencias del profesorado en formación. Al reestructurar el conocimiento especializado, se puede transformar la visión de las matemáticas en el futuro profesorado, pasando de una concepción instrumental a una relacional, lo que permite adquirir una identidad profesional más competente y emocionalmente segura frente al error.

El Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK)

El modelo MTSK (Carrillo et al., 2018) permite estudiar el conocimiento especializado del profesor para la enseñanza de las matemáticas. El modelo se divide en dos grandes dominios centrales: el Conocimiento Matemático (MK) y el Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK), los cuales están conformados por tres subdominios cada uno. De manera transversal, se sitúa el tercer dominio, correspondiente a las Creencias (Carrillo et al., 2018).

El dominio del MK profundiza en cómo se comprende la matemática como disciplina en un contexto escolar. Se divide en tres subdominios: Conocimiento de los Temas (KoT), Conocimiento de la Estructura de las Matemáticas (KSM) y Conocimiento de la Práctica Matemática (KPM). El dominio del PCK agrupa los saberes relacionados con el contenido matemático concebido como objeto de enseñanza y aprendizaje. Se divide en: Conocimiento de las Características de Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM), Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT) y Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (KMLS) (Alberca y Contreras, 2021).

En el modelo MTSK, el diseño de planes de formación docente parte del supuesto de que es posible estructurar, guiar y anticipar el conocimiento especializado que se espera que construya el profesorado, en formación inicial y en activo, a través de tareas específicas (Climent et al., 2024). El

modelo permite planificar, implementar y evaluar planes docentes con metas de aprendizaje precisas. Las secuencias formativas se diseñan para situar la construcción del conocimiento en un contexto de aula y movilizar subdominios de manera intencional (Montes et al., 2022). Al establecer un plan de formación concreto bajo la perspectiva del MTSK, se puede configurar el conocimiento esperado o las áreas de conocimiento objetivo de la tarea, permitiendo al profesorado orientar y sistematizar el aprendizaje (Climent et al., 2024).

El dominio afectivo y las creencias en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas

Toda práctica docente se encuentra influenciada por el dominio afectivo. Las creencias, actitudes y emociones que el futuro profesorado ha construido durante su propia etapa escolar condicionan las decisiones que toman y la forma en que enseñarían matemáticas en el futuro. En este sentido, Gómez-Chacón (2000) destaca que la dimensión socioafectiva requiere una enseñanza que cuide el clima emocional y valore la diversidad afectiva, asumiendo la interconexión entre la cognición y el afecto. Esta visión integral es respaldada por Hannula et al. (2019), quienes enfatizan la necesidad de estudiar conjuntamente los procesos afectivos y cognitivos para comprender el aprendizaje matemático. Para comprender y operativizar estos afectos, resulta útil el modelo tridimensional de Di Martino y Zan (2010), quienes definen la actitud hacia las matemáticas a través de la interrelación entre la dimensión emocional, la competencia percibida y la visión, instrumental o relacional, que se tiene de la materia. Martínez-Juste et al. (2025) evidencian que transitar hacia una cultura de aula relacional fomenta una visión más rica de la matemática, mejora la competencia percibida y consolida emociones agradables.

Desde la perspectiva del modelo MTSK, las concepciones y creencias del profesor se encuentran de manera transversal, distinguiendo entre las creencias acerca de la naturaleza de las matemáticas y las creencias sobre su enseñanza y aprendizaje (Carrillo et al., 2018). Las concepciones del profesorado sobre las matemáticas condicionan su Conocimiento Matemático (MK), así como las decisiones metodológicas (KMT) y el tipo de aprendizaje que potencian (KFLM). La evidencia constata una relación entre el conocimiento especializado del profesor y sus propias emociones, por lo que resulta fundamental formar docentes que comprendan esta interacción (García-González et al., 2019).

Proceso de enseñanza-aprendizaje de la resta

La mayor parte del tiempo invertido en los primeros años de escolaridad se dedica al SND y a la comprensión del valor posicional (Ortiz-Villarejo y González-Marí, 2016). La falta de comprensión sobre el agrupamiento y la estructura en potencias de diez es la raíz de muchas dificultades posteriores en los algoritmos (Flores, 2009). Concretamente, la resta con llevada ha sido tradicionalmente enseñada desde un enfoque procedimental basado en la metáfora de "pedir prestado". Sin embargo, esta instrucción induce a errores conceptuales, ya que sugiere que los dígitos del minuendo son números independientes que pueden transferir valores de forma arbitraria (Ma, 1999). Además, el término "pedir prestado" es inexacto, puesto que lo que se toma de un orden superior no se devuelve, sino que se transfiere de manera definitiva.

Para evitar que este proceso se reduzca a una rutina memorística, se apuesta por una progresión didáctica basada en las etapas enactiva, icónica y simbólica formuladas por Bruner (1966). El uso de materiales manipulativos proporcionales permite al alumnado visualizar físicamente las relaciones multiplicativas entre los valores posicionales, comprendiendo el principio de desagrupamiento (Yilmaz y Tekerek, 2025). En el trabajo manipulativo con bloques multibase, destaca el método de transferencia posicional: se representa físicamente el minuendo y, al no disponer de suficientes unidades sueltas para retirar la cantidad indicada por el sustraendo, se toma una barra (decena) y se descompone en diez cubitos (unidades), permitiendo ejecutar la sustracción de forma empírica antes de plasmarla en el algoritmo estándar escrito. El algoritmo tradicional austríaco (o compensación) requiere comprender propiedades algebraicas de conservación de la diferencia que la mayoría de las niñas y los niños aún no poseen.

METODOLOGÍA

La investigación se sitúa dentro del paradigma interpretativo con un enfoque cualitativo, ya que pretende comprender la experiencia humana y el desarrollo del conocimiento especializado en su propio contexto. Para ello, el diseño metodológico adoptado corresponde a un estudio de caso cualitativo (Stake, 1998). En concreto, se trata de un estudio de caso instrumental, ya que el interés de la investigación no radica en comprender a la participante en sí misma, sino que el caso se selecciona como un medio para comprender un fenómeno más amplio: la evolución del conocimiento especializado sobre la resta con llevada y el dominio afectivo tras haber cursado un plan de formación estructurado bajo el modelo MTSK (Muñoz-Catalán, 2009; Stake, 1998).

Contexto y participante

La investigación se enmarca en el Grado en Educación Primaria de la Universidad de Málaga. A través de una secuencia de 25 sesiones teórico-prácticas, el plan de formación, diseñado bajo el prisma del MTSK, persigue que el futuro profesorado de Educación Primaria adquiera un conocimiento especializado profundo de la aritmética elemental. Este plan se vertebra en torno a tareas que conectan la deconstrucción y la reconstrucción del conocimiento matemático.

La participante del estudio de caso es una maestra en formación inicial. Su selección se realizó de manera intencional, por su capacidad reflexiva y disposición a cuestionar sus creencias previas, lo que permitió a las investigadoras comprender cómo se reestructura el conocimiento didáctico-matemático a lo largo de las sesiones instrumentadas.

La Tabla 1 detalla la articulación de los dominios y subdominios del modelo MTSK en las sesiones introductorias y de cierre, y las dedicadas al SND y las operaciones aritméticas aditivas, que corresponden a las sesiones 1-7 y 25 del plan de formación completo. Como momentos más relevantes en este período, se destacan el pre-test, el post-test, las tareas Enséñame a Restar I y II (ERI y ERII, respectivamente) y el trabajo con el principio de agrupamiento empleando la estrategia del "pita y pasa" ("beep and shift" en su versión inglesa). Esta emplea material manipulativo, cajas transparentes y un timbre para mostrar visual y auditivamente el principio de agrupamiento en el sistema de numeración. De forma resumida, consiste en que cuando una caja acumula los elementos equivalentes a la base (por ejemplo, diez), la campana *pita*, indicando que deben agruparse, sustituirse por una unidad de orden superior y *pasarse* inmediatamente a la caja adyacente.

Tabla 1

Descripción detallada de las sesiones 1-7 y 25

Sesión y foco temático	Subdominios MTSK	Actividades y estrategias destacadas
1. Dimensión afectiva	Creencias	Pre-test (Di Martino y Zan, 2010). Creencias y emociones (Hannula et al., 2019).
2. Principios de la Educación Matemática	KoT / KMT	Finalidad de la Educación Matemática. Tarea ERI.
3. Génesis del número	KoT / KSM / KMT / KFLM	Introducción al uso de materiales manipulativos.
4 y 5. SND y agrupamiento	KoT / KSM / KMT / KFLM	Introducción a la estrategia "pita y pasa". Taller sobre sistemas de numeración (invención y bases).
6 y 7. Operaciones aritméticas aditivas	KoT / KSM	Deconstruir algoritmos: me llevo una y pedir prestado. Taller sobre operaciones en distintas bases. Tarea ERII

25. Dimensión afectiva	Creencias	Post-test (Di Martino y Zan, 2010).

Instrumentos de recogida de información

Se emplean como instrumentos cuatro tareas del plan de formación: los cuestionarios de exploración de ideas (pre-test y post-test) y las producciones audiovisuales, ERI y ERII. Los dos cuestionarios (pre-test y post-test), relativos al dominio afectivo, se basan en las tres dimensiones de la actitud hacia las matemáticas propuestas por Di Martino y Zan (2010): la dimensión emocional, la visión de las matemáticas y la competencia percibida. Para este estudio, la investigación original fue adaptada al contexto de la formación inicial docente, componiéndose de preguntas abiertas diseñadas para indagar específicamente en las creencias sobre la enseñanza de la aritmética. Por su lado, las tareas ERI y ERII son procedimentales. La primera de ellas es una evaluación diagnóstica en la que el alumnado se graba explicando de forma intuitiva la resta "132 – 65". Para la segunda, se solicita un análisis crítico del ERI y una nueva explicación de la misma operación, ahora centrada en los aspectos didácticos trabajados durante las sesiones.

Además, tras el primer período de Prácticum de la titulación, se realiza una entrevista semiestructurada que ha permitido evidenciar ciertos aspectos de los que había indicios en los vídeos y cuestionarios, además de ahondar en las decisiones didácticas y emociones a lo largo del proceso de la participante, incluyendo la asignatura y el Prácticum.

Procedimiento y análisis de datos

El tratamiento de los datos se llevó a cabo mediante un análisis de contenido de corte deductivo-inductivo (Montes, 2015). En primer lugar, se transcribieron literalmente las producciones audiovisuales (ERI y ERII) y la entrevista semiestructurada. Posteriormente, se procedió a la codificación de las unidades de significado extraídas de estas transcripciones y de los cuestionarios.

El instrumento empleado para este análisis fue el modelo MTSK. Se utilizó el sistema de categorías e indicadores del modelo para organizar los datos empíricos en los subdominios correspondientes: KoT, KSM, KMT, KFLM.

El rigor analítico se garantizó mediante el proceso de triangulación metodológica: una afirmación sobre su conocimiento no se validó basándose en un único instrumento, sino verificando que dicha competencia se manifestaba de forma coherente tanto en sus tareas de clase, incluyendo los ERI y ERII, como en sus reflexiones durante la entrevista.

RESULTADOS

El análisis del caso de estudio pone de manifiesto una transformación del conocimiento especializado de la futura docente. La intervención formativa no solo reconstruyó su conocimiento respecto al SND y a la resta con llevada, sino que modificó su sistema de creencias y emociones. A continuación, se detallan sus aportaciones más relevantes (comunicación personal, 2026).

Dominio del Conocimiento Matemático (MK)

El desarrollo del subdominio KoT en la alumna es, posiblemente, el salto cognitivo más evidente. En su ERI mostraba un conocimiento instrumental, reflejo de cómo fue enseñada. Explicaba la resta apoyándose en rutinas aprendidas sin dotarlas de significado matemático: "2 es más pequeño que 5... ¿qué haremos entonces? Pues vamos a colocarle un 1 delante del 2 y se convierte en 12... y luego nuestro famoso 'me llevo una', que pasa abajo sumando".

En el ERII, se evidencia un KoT especializado que se alinea con la perspectiva conceptual defendida por Ma (1999). Ya no emplea el vocabulario memorístico y define la resta con llevada a través del principio posicional: "Lo que vamos a hacer es desagrupar, descomponer cuando sea necesario".

Abandona la idea de "colocar un 1" para hablar con rigor: "Tenemos que coger nuestra bolsa y soltarla, es decir, quitar y despasar la centena, que se convertirá en 10 decenas".

Este dominio del valor posicional del número se conecta directamente con el subdominio KSM mediante conexiones de complejización. La alumna evidencia que ha comprendido el principio de agrupamiento al ser capaz de transferir, en el ERII, el mismo cálculo a la base 7, sin que apareciese explícitamente en las instrucciones de esta tarea formativa. Para explicar la resta, emplea gominolas ("gumis") como material manipulativo proporcionado, debidamente colocadas en bolsas con la cantidad de la base del sistema en el que está trabajando. Sobre esta operación señala: "Tenemos 132 'gumis' en base 7. Hay 7 paquetitos, no hay 10 (que serían una centena)". Esta generalización evidencia que el sistema decimal ha dejado de ser el único conocido para convertirse en un caso particular de sistema posicional, demostrando gran nivel de comprensión.

Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK)

La evolución en el subdominio KMT destaca por la superación del enfoque tradicional en favor de los modelos manipulativos. La estudiante rechaza el aprendizaje memorístico ("ya no hay magia... el alumnado no memoriza un procedimiento que no comprende ni trucos como el 'me llevo una'") y propone modelizar la resta con el material concreto anteriormente descrito. Sin embargo, su conocimiento va más allá del simple uso del material; introduce estrategias didácticas como el "pita y pasa". Utiliza una campana para señalar el momento en que es necesario desagrupar: "¿Por qué pita nuestra campana? Porque nos está diciendo que ya tenemos 10 'gumis' sueltos... nos recuerda que aquí sí que tenemos 'gumis' que podemos utilizar".

Respecto al subdominio KFLM, la estudiante demuestra ser consciente de las dificultades que puede causar el trabajar con materiales sin fundamentación teórica, como comentó en la entrevista tras haberlo observado en su centro de prácticas: "el material si no lo utilizas de forma estructurada... no da el fruto, o sea, no desarrolla el potencial que tiene". También justifica cada decisión didáctica de su intervención en el Prácticum atendiendo al nivel de desarrollo cognitivo de la clase, por ejemplo, cuando afirma: "Pues lo hacían y ya sí vi cada uno en qué nivel se encontraba".

Cuando en el ERII realiza la crítica de su ERI, reconoce la dificultad que suponen los algoritmos estándar en edades tempranas: "Ya no existe eso de cinco en la cabeza y cuento con los dedos hasta llegar a 12, exigiéndole al niño un nivel muy elevado del dominio de la cadena de la secuencia numérica". Este hecho la lleva a diseñar su nueva propuesta con la que trata de evitar la aparición de estas dificultades: "no se le exige un nivel que aún no posee, sino que ahora lo que hace es observar, manipular y contar teniendo una imagen visual de todo lo que va haciendo". También defiende la utilidad de las matemáticas apelando al "triple carácter de las matemáticas: lo formativo, instrumental y funcional" y lo muestra en la contextualización del problema propuesto: "Tenemos todos estos gumis preparados para el día de la cabalgata de Reyes."

A lo largo de la entrevista destaca su trabajo durante el Prácticum con una alumna diagnosticada con Trastorno Específico del Lenguaje. Al trabajar la estructuración de las decenas, consigue conectar con su alumna: "al tener dificultades en el lenguaje, 'once' para ella no existía... y cuando le expliqué el 'pita y pasa', me dijo 'el dieciuno' […] lo ha entendido. Yo ya me voy superfeliz".

Transformación del dominio afectivo y el sistema de creencias

Los datos recogidos en el pre-test y en el post-test, evidencian que la estudiante ingresó al Grado con un historial matemático fragmentado. Mientras que en Educación Primaria experimentó emociones agradables vinculadas al aprendizaje manipulativo, en Educación Secundaria confiesa que el aprendizaje se volvió "monótono y desmotivante". Cuando no entendía algo, la alumna afirma que "desconectaba la mitad de la clase". Asumió sus errores como una falta de capacidad: "reproducir algo que me habían explicado. Lo aplico, lo hago, uf, qué bien. Pero no comprendía muchas cosas [...] sí que era un poco mala". Tras el paso por la asignatura, muestra una evolución de sus creencias.

La alumna, que al inicio de la asignatura asociaba las matemáticas con la palabra "orden", tras el paso por el plan de formación, acaba asociándolas a la palabra "manipular", refiriéndose a la necesidad de manipular materiales.

En la entrevista, la alumna destaca la necesidad de que exista confianza entre docente y estudiantes: "tanto yo como estudiante como maestra, pues tiene que estar la confianza, que sientan seguridad para expresarse". Este cambio de creencias tuvo un impacto directo en su Prácticum, donde experimentó una profunda seguridad fundamentada en la didáctica adquirida: "la profesora empezaba a investigar el método OAOA y yo dije, esto yo lo conozco". Conocer la teoría funcionó como un escudo contra la inseguridad, permitiéndole entender que "el error es parte del proceso, porque si te estás equivocando es porque lo estás intentando".

CONCLUSIONES

Retomando la premisa inicial sobre la necesidad de contar con marcos teóricos que permitan analizar y orientar el conocimiento profesional de manera integrada, los hallazgos de este estudio sostienen la pertinencia de diseñar e implementar secuencias de sesiones teórico-prácticas estructuradas bajo el modelo MTSK en la formación inicial del profesorado. El análisis del caso demuestra que este tipo de intervención formativa permite configurar a priori el conocimiento esperado y sistematizar un aprendizaje donde la teoría, la práctica didáctica y el dominio socioafectivo se desarrollan de forma simultánea e indivisible.

A lo largo del plan de formación, la participante transitó desde un conocimiento instrumental hacia una comprensión conceptual del algoritmo de la resta basada en el valor posicional (Ortiz-Villarejo y González-Marí, 2016; Ma, 1999). Desde la perspectiva del MTSK, se evidenció una evolución transversal: en los subdominios KoT y KSM, al superar la visión mecánica de "pedir prestado" y comprender la descomposición de unidades; y en los subdominios KMT y KFLM, mediante el uso fundamentado de materiales manipulativos y la anticipación de las dificultades del alumnado. Esta evolución constata que el trabajo con bases de numeración distintas a la decimal y la deconstrucción de rutinas mecanizadas requieren que la futura maestra experimente empíricamente los retos de su futuro alumnado, facilitando un aprendizaje más profundo.

Asimismo, el estudio evidencia la estrecha relación entre la cognición y el dominio afectivo (Soto-Cerros et al., 2023). Al comprender el sentido matemático de la resta, la estudiante desarrolló una mayor seguridad y modificó sus creencias limitantes previas, lo que permite pensar que el conocimiento especializado actúa como un escudo frente a la inseguridad en el aula real.

Esta investigación añade al campo de la Didáctica de la Matemática nuevas evidencias empíricas sobre el potencial instruccional del modelo MTSK. Además, aporta que la deconstrucción y resignificación de la aritmética elemental mediante secuencias teórico-prácticas integradas mejoran el conocimiento matemático y didáctico de la futura maestra, y son una vía para revertir su miedo al error y proporcionarle la seguridad necesaria para su futuro profesional.

A partir de estos hallazgos, se plantea ampliar la muestra a un mayor número de casos para contrastar y generalizar el impacto de esta secuencia instruccional en el resto del alumnado universitario, además de desarrollar estudios longitudinales que permitan evaluar en qué medida el conocimiento especializado y las creencias perduran y se aplican durante el ejercicio profesional de la docente.

Referencias

Alberca, M. y Contreras, L. C. (2021). El conocimiento especializado de un maestro de primaria cuando enseña la resta. *Zetetike*, 29, e021004. https://doi.org/10.20396/zet.v29i00.8661216

Bruner, J. (1966). *Toward a Theory of Instruction.* Harvard University Press.

Climent, N., Contreras, L.C., Montes, M. y Ribeiro, M. (2024). The MTSK model as a tool for designing tasks for teacher education. *ZDM Mathematics Education*, *56*(6), 1123-1135. https://doi.org/10.1007/s11858-024-01605-8

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education* (en prensa).

Contreras, L. C., Carrillo, J. y Climent, N. (2018). Aproximándonos al conocimiento especializado de una estudiante para maestro a partir de una narrativa. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 51-65). SEIEM.

Di Martino, P. y Zan, R. (2010). 'Me and maths': Towards a definition of attitude grounded on students' narratives. *Journal of Mathematics Teachers Education*, *13*(1), 27-48. https://doi.org/10.1007/s10857-009-9134-z

Flores M. M. (2009). Teaching subtraction with regrouping to students experiencing difficulty in mathematics. *Preventing School Failure*, *53*(3), 145–152. https://doi.org/10.3200/PSFL.53.3.145-152

Fuson, K. C. (1990). Conceptual Structures for Multiunit Numbers: Implications for Learning and Teaching Multidigit Addition, Subtraction, and Place Value. *Cognition and Instruction*, *7*(4), 343-403. https://doi.org/10.1207/S1532690XCI0704_4

García-González, M., Pascual, M., Carrillo, J. y Martínez-Sierra, G. (2019). El modelo de conocimiento especializado para la enseñanza y las emociones del profesor de matemáticas. En H. Lidia, I. Borja, J. Slisko y J. Juárez (Eds.). *Aportes a la educación matemática basado en la investigación* (99-119). BUAP.

Gómez-Chacón, I. M. (2000). *Matemática emocional: los afectos en el aprendizaje matemático.* Madrid: Narcea.

Hannula, M. S., Leder, G. C., Morselli, F., Vollstedt, M. y Zhang, Q. (2019). *Affect and mathematics education: Fresh perspectives on motivation, engagement, and identity.* Springer.

Ma, L. (1999). *Knowing and Teaching Elementary Mathematics. Teachers' Understanding of Fundamental Mathematics in China and the United States.* Mahwah, NJ.

Martínez-Juste, S., Beltrán-Pellicer, P., Siaba-Lestón, M. J. y Morales-Ordoñez, G. (2025). Evolución de la actitud hacia las matemáticas de alumnado de primaria tras cambios en la cultura de aula. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, *39*(2), 21–34. https://doi.org/10.47553/rifop.v39i2.114622

Montes, M. (2015). *Conocimiento especializado del profesor de matemáticas acerca del infinito. Un -de caso.* Tesis doctoral. Universidad de Huelva, Huelva.

Montes, M., Climent, N. y Contreras, L.C. (2022). Construyendo conocimiento especializado en geometría: un experimento de enseñanza en formación inicial de maestros. *Aula Abierta, 1*, 27-36. https://doi.org/10.17811/rifie.51.1.2022.27-36

Muñoz-Catalán, M. C. (2009). *El desarrollo profesional en un entorno colaborativo centrado en la enseñanza de las matemáticas: el caso de una maestra novel.* Tesis doctoral. Universidad de Huelva, Huelva.

Ortiz-Villarejo, A. L. y González-Marí, J. L. (2016). Comprensión de los sistemas de numeración. Modelos y tareas. *Enseñanza De Las Ciencias. Revista De investigación Y Experiencias didácticas*, *34*(3), 161–182. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2041

Thanheiser, E. (2009). Preservice elementary school teachers' conceptions of multidigit whole numbers. *Journal for Research in Mathematics Education, 40,* 251-281.

Soto-Cerros, S., García-González, M.S. y Pascual-Martín, M. I. (2023), La relación entre el dominio afectivo y el modelo MTSK: una oportunidad de investigación. *Educación Matemática*, 35(2): 226–246. https://doi.org/10.24844/EM3502.09

Stake, R. (1998). *Investigación con estudio de casos* (2a ed.). Ediciones Morata.

Yilmaz, A. y Tekerek, B. (2025). Investigating prospective mathematics teachers' use of concrete materials in place value concept in different bases: addition and subtraction with whole numbers. *Education and Science*, *50*(223), 175-198. https://doi.org/10.15390/ES.2025.2446

FUNCIONES EN LIBROS DE TEXTO DE PRIMARIA ESPAÑOLES TRAS LA INCLUSIÓN DEL SENTIDO ALGEBRAICO EN EL CURRÍCULO

Functions in Spanish elementary textbooks following the introduction of algebraic sense in the curriculum

Durán-Rubio, A., Cañadas, M. C. y Torres, M. D.

Universidad de Granada

Resumen

En este trabajo analizamos la presencia de las funciones en libros de texto de educación primaria en España después de que se haya incluido el sentido algebraico en el currículo español en 2022. Desde el marco teórico del early algebra, describimos y clasificamos las tareas que involucran elementos relacionados con las funciones a lo largo de los seis cursos de primaria en las tres editoriales de mayor tirada nacional: Anaya, Santillana y SM. Realizamos un análisis de contenido de estos textos, describiendo la distribución y progresión mediante la presencia de prácticas algebraicas en tareas que involucran funciones. Los resultados muestran que las funciones desde la perspectiva del pensamiento algebraico aparecen de forma fragmentada y desigual.

Palabras clave: *early algebra, educación primaria, funciones, libros de texto.*

Abstract

In this study, we analyse the presence of functions in Primary Education textbooks in Spain following the inclusion of algebraic sense in the Spanish curriculum in 2022. Within the theoretical framework of early algebra, we describe and classify tasks involving functional elements proposed across the six grades of Primary Education in the three most widely distributed national publishers: Anaya, Santillana and SM. We conducted a content analysis of these textbooks, describing their distribution and progression through the presence of algebraic practices. The results show that functional aspects from the perspective of algebraic thinking appear in a fragmented and uneven manner.

Keywords: *early algebra, primary education, functions, textbooks.*

INTRODUCCIÓN Y JUSTIFICACIÓN

Desde el *early algebra*, se apuesta por la inclusión de elementos algebraicos que permitan suavizar la introducción del álgebra en educación secundaria (e. g., Carraher y Schliemann, 2007). No se trata de adelantar el álgebra que se trabaja en educación secundaria, se busca promover formas de pensamiento algebraico desde edades tempranas para fomentar la exploración, la generalización, la representación y la justificación de relaciones y expresiones matemáticas (e. g., Blanton, Stephens et al., 2015; Carraher y Schliemann, 2007). Con este objetivo, las funciones son uno de los contenidos que se consideran adecuados para introducir elementos algebraicos desde los primeros niveles educativos. Se pueden ver algunas tareas que pueden ser útiles para esta introducción en www.pensamientoalgebraico.es/actividades. La comprensión de las relaciones entre variables y la representación de estas relaciones, así como su representación en diferentes formas son fundamentales (Blanton et al., 2015).

Con la entrada en vigor de la LOMLOE (Ministerio de Educación y Formación Profesional, 2022), el currículo de educación primaria en España incorpora explícitamente el sentido algebraico en

Durán-Rubio, A., Cañadas, M. C. y Torres, M. D. (2026). Funciones en libros de texto de primaria españoles tras la inclusión del sentido algebraico en el currículo. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (pp. 210-217). SEIEM.

Matemáticas, estableciendo que "proporciona el lenguaje en el que se comunican las matemáticas. Ver lo general en lo particular, reconociendo patrones y relaciones de dependencia entre variables y expresándolas mediante diferentes representaciones" (p. 142). En este texto reconocemos prácticas algebraicas como la representación o la generalización vinculadas a elementos relacionados con las funciones como variables y relaciones entre ellas. Por tanto, en el contexto español, resulta especialmente pertinente analizar cómo los libros de texto abordan las funciones en educación primaria. Adicionalmente, no hemos encontrado estudios que analicen nociones algebraicas en los libros de texto de educación primaria en España en el currículo vigente. En consecuencia, en este trabajo planteamos describir y caracterizar las tareas relacionadas con funciones asociadas a las prácticas algebraicas presentes en textos escolares de educación primaria españoles.

MARCO TEÓRICO Y ANTECEDENTES

Funciones y prácticas algebraicas desde el *early algebra*

Al enfoque del *early algebra* cuyo foco está en las funciones como contenido matemático, se conoce como enfoque funcional, una aproximación al pensamiento algebraico, entendido como "un conjunto de formas de pensar sobre relaciones cuantitativas entre variables que covarían enfatizando aspectos de la generalización con expresiones que no son necesariamente propias del simbolismo algebraico" (Kieran, 1996, p. 275). Desde este trabajo con las funciones, el interés está "en la construcción, descripción, representación y razonamiento con y sobre las funciones y los elementos que las constituyen" (Cañadas y Molina, 2016, p. 211). Se busca promover que el alumnado identifique relaciones de covariación y construya generalizaciones que expresen relaciones de dependencia, favoreciendo así una comprensión relacional del cambio (Cañadas y Molina, 2016).

Para abordar elementos algebraicos en educación primaria, Kaput y colaboradores (e. g., Blanton et al., 2011; Kaput et al., 2008) proponen cuatro prácticas algebraicas en el aula: (a) generalizar, (b) representar, (c) razonar y (d) justificar. Las prácticas algebraicas son acciones, procesos y habilidades mediante los cuales los estudiantes comienzan a razonar de manera abstracta sobre nociones algebraicas, yendo más allá de los simples cálculos numéricos (Blanton et al., 2011). A través de las prácticas, el alumnado puede interactuar con las relaciones funcionales, construyéndolas, representándolas, razonando sobre ellas y justificándolas. De este modo, permiten operativizar el trabajo con funciones (Ayala-Altamirano y Molina, 2021; Brizuela y Martínez, 2012; Carraher et al., 2007). La generalización implica reconocer regularidades o estructuras comunes y expresarlas con validez general (Kaput et al., 2008). La representación hace referencia al uso de nociones simbólicas o gráficas para expresar y comprender conceptos matemáticos (Rico, 2009). El razonamiento se entiende como el proceso mediante el cual el alumnado conecta ideas, identifica relaciones y construye explicaciones sobre los procedimientos realizados (Blanton et al., 2011). La justificación implica comunicar y argumentar por qué una relación o afirmación matemática es válida, más allá de comprobarla con ejemplos (Blanton et al., 2011).

El desarrollo de hábitos mentales a través de estas prácticas tiene la misma importancia que el aprendizaje de los contenidos (Brizuela, 2023). Desde esta propuesta, para abordar el sentido algebraico con ciertas garantías de éxito, debieran fomentarse las cuatro prácticas algebraicas. Consideramos las prácticas algebraicas como un elemento clave para el tratamiento de las funciones en educación primaria, ya que favorecen que el alumnado interactúe con estructuras y relaciones matemáticas, más allá del procedimiento (Kaput et al., 2008). Además, dado que el currículo establece un enfoque competencial, que prioriza el "saber hacer" (Ministerio de Educación y Formación Profesional, 2022), resulta coherente promover el desarrollo de prácticas algebraicas en las tareas de los libros de texto.

Estudios previos evidencian que el alumnado de primaria puede establecer relaciones entre variables y construir generalizaciones a partir de la variación de cantidades (Carraher et al., 2007), así como razonar sobre la covariación y comparar funciones en edades tempranas (Brizuela y Martínez, 2012).

Los estudiantes reconocen estructuras funcionales en situaciones concretas, aunque presentan dificultades ante cantidades indeterminadas y recurren a representaciones no simbólicas (Torres et al., 2022), y sus justificaciones se apoyan principalmente en casos particulares, con una incipiente referencia a relaciones funcionales (Ayala-Altamirano y Molina, 2021).

Estudios sobre libros de texto

Partimos de la premisa de que los libros de texto actúan como un puente entre el currículo pretendido (el currículo) y el currículo implementado en el aula. En el ámbito algebraico en educación primaria, Aké y Godino (2018) analizaron un libro de texto de primer curso de educación primaria en México. Sus resultados mostraron que emergen objetos y relaciones de naturaleza algebraica. Con el foco en la generalización, Ayber y Tanışlı (2017) examinaron libros de texto de secundaria en Turquía y concluyeron que las actividades se centraban mayoritariamente en ejercicios procedimentales. Pacheco et al. (2024) describieron tareas sobre inecuaciones en textos escolares chilenos de 4º y 5º curso de educación primaria. Detectaron una presencia escasa y poco estructurada de este tipo de tareas, generalmente planteadas en contextos aritméticos, y concluyeron que rara vez se promueve la reflexión o la argumentación sobre las relaciones de desigualdad. Bolaños y Moreno (2024) examinaron las tareas de patrones presentes en libros de texto de cuarto y sexto grado en Costa Rica. Los resultados indicaron que, aunque existía concordancia con el currículo, las tareas presentaban limitaciones para crear, extender o transformar regularidades. Acosta et al. (2022) analizan tareas de patrones en libros de texto de educación infantil españoles, centrándose en las habilidades matemáticas que estas promueven. Los resultados muestran que aparecen con menor frecuencia tareas orientadas a la creación, generalización o explicación de regularidades, frente a aquellas centradas en extender secuencias, interpolar elementos o reconocer la unidad de repetición.

No hemos identificado ningún estudio cuyo foco sea el estudio de aspectos relacionados con funciones —ni siquiera el pensamiento algebraico en general— en los libros de texto de educación primaria en España. Este vacío en la literatura refuerza la necesidad de un estudio como el que presentamos.

METODOLOGÍA

Este estudio es descriptivo, interpretativo y exploratorio, sustentado en un análisis de contenido cualitativo. Es descriptivo porque representa con precisión un fenómeno educativo sin manipular variables; interpretativo, al buscar comprender los significados implícitos en tareas y explicaciones; y exploratorio, al abordar un fenómeno aún poco estudiado (Cohen et al., 2018). Usamos el análisis didáctico para el análisis de textos (Rico et al., 2013). Desde este marco, nuestra intención es extraer y describir la información contenida en los textos escolares.

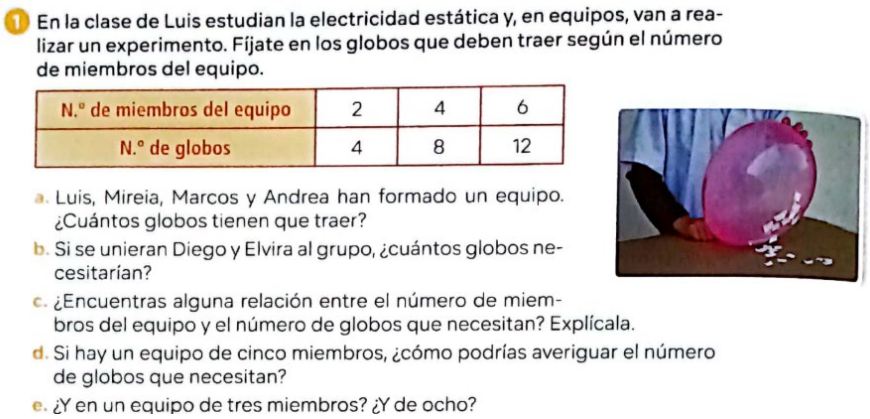
Muestra y unidad de análisis

Seleccionamos las editoriales de mayor tirada a nivel nacional y con mayor presencia en Andalucía (Junta de Andalucía, Consejería de Desarrollo Educativo y Formación Profesional, 2025): Anaya, Santillana y SM. Esta selección representativa garantiza que los libros de texto escogidos son una fuente adecuada para aproximarnos a un conocimiento de la presencia de funciones en educación primaria. Seleccionamos las ediciones de estas editoriales publicadas en Andalucía, comunidad autónoma con el mayor número de alumnado de educación primaria en España (Instituto Nacional de Estadística, 2025). En concreto, los libros de texto escogidos como muestra del estudio son: (a) Anaya: Operación Mundo (Andalucía), de 1º a 6º de educación primaria, edición 2023; (b) Santillana: Mate+ Matemáticas para pensar (Andalucía), de 1º a 6º de educación primaria, edición 2023 y (c) SM: Revuela (Andalucía), de 1º a 6º de educación primaria, edición 2023. La muestra total está formada por 34 libros —10 de Anaya, 6 de Santillana y 18 de SM—. La diferencia en el número de libros entre editoriales se debe a diferentes estructuras por volúmenes, según curso o trimestre.

Confirmamos con las editoriales que estos libros estaban en vigor en 2025, año en el que se inició este estudio y siendo posterior a la incorporación del sentido algebraico en el currículo de primaria. Entendemos por tarea cada requerimiento que se le hace al estudiante. Dentro de cada libro, identificamos las tareas relacionadas con funciones. Debe implicar el trabajo con mínimo dos variables (entendidas como conjuntos numéricos que covarían), relaciones funcionales o cualquier elemento relacionado con funciones. No requiere necesariamente el uso de notación simbólica formal. Por ejemplo, en la Figura 1 observamos 6 de estas tareas relacionadas con las funciones (en adelante, tareas funcionales).

Figura 1

Tareas de Funciones (SM 6º, 2023, p. 90)



1 En la clase de Luis estudian la electricidad estática y, en equipos, van a realizar un experimento. Fíjate en los globos que deben traer según el número de miembros del equipo.

N.º de miembros del equipo	2	4	6
N.º de globos	4	8	12

a. Luis, Mireia, Marcos y Andrea han formado un equipo. ¿Cuántos globos tienen que traer?
b. Si se unieran Diego y Elvira al grupo, ¿cuántos globos necesitarían?
c. ¿Encuentras alguna relación entre el número de miembros del equipo y el número de globos que necesitan? Explícala.
d. Si hay un equipo de cinco miembros, ¿cómo podrías averiguar el número de globos que necesitan?
e. ¿Y en un equipo de tres miembros? ¿Y de ocho?

Análisis de datos

Para abordar el análisis de los libros de texto, procedimos a su revisión individual. En total, los 34 libros de texto contienen más de 20.000 tareas. Aplicamos la técnica del análisis de contenido para identificar las tareas funcionales, es decir, aquellas tareas que abordan la identificación de variables, la regla general o la traducción de representaciones propias del contenido de las funciones. Esta técnica constituye un método para interpretar textos dentro de su contexto comunicativo, transformando la información cualitativa en datos susceptibles de comparación y análisis (Bardin, 1996; Cohen et al., 2018).

Una vez identificadas las tareas funcionales analizamos cualitativamente las prácticas algebraicas implicadas, según el marco teórico: generalización, representación, razonamiento y justificación. Estas categorías son deductivas y no son exhaustivas. A cada tarea funcional, le asignamos la práctica algebraica que pretende desarrollar. Para la identificación de las prácticas algebraicas, nos basamos en palabras clave presentes en los enunciados que permiten inferir la acción promovida y la intencionalidad de la tarea. Así, generalizar se asocia a la búsqueda de regularidades y formulación de conclusiones generales; representar, a acciones como "representa", "dibuja" o "construye una tabla"; razonar, a procesos de análisis e inferencia, identificados mediante términos como "observa", "analiza", "compara" o "predice"; y justificar, a la explicitación y comunicación de razones, a partir de términos como "explica por qué", "argumenta" o "demuestra". Para el proceso de codificación, registramos las tareas según el curso, la editorial, la página del libro en la que se encontraba y la práctica algebraica implicada. En cada registro incluimos el curso de primaria, la editorial, el número de tareas, la página del libro y la práctica algebraica asociada.

Para garantizar la consistencia y fiabilidad del análisis, llevamos a cabo una triangulación de expertos entre las tres autoras de este estudio. Analizamos individualmente las tareas y comparamos los resultados, asegurando un criterio común para la interpretación de los datos. Dos de ellas son doctoras en el área y se encuentran participando en el cuarto proyecto I+D de la convocatoria nacional sobre

pensamiento algebraico. Las categorías de análisis, junto con algunos ejemplos, se han compartido y debatido en dos reuniones del grupo Pensamiento Numérico y Algebraico de la SEIEM.

RESULTADOS

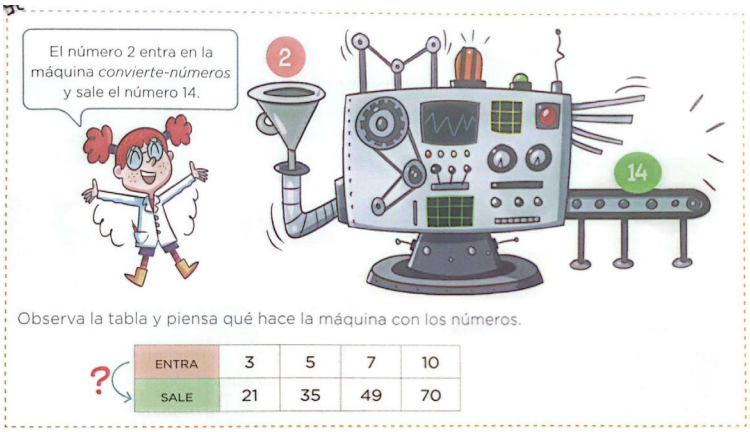
Hemos identificado 71 tareas que involucran funciones y al menos una práctica algebraica. Dentro de las tareas funcionales, identificamos tareas donde se preguntaba por el establecimiento de correspondencia, construcción de tablas de valores para dos variables, descripción de dependencias entre cantidades o representación gráfica de relaciones. En 1º, 2º y 3º de primaria observamos que Anaya es la única editorial que incluye tareas funcionales. En 1º identificamos una tarea vinculada a la práctica de generalizar; en 2º, dos de generalizar y en 3º, dos de la práctica de razonar. Por el contrario, en Santillana y en SM no registramos tareas de funciones en 1º, 2º y 3º. En 4º de primaria no identificamos tareas sobre funciones vinculadas a las prácticas algebraicas en ninguna de las tres editoriales analizadas.

En 5º de primaria, observamos una mayor presencia de prácticas algebraicas en las tareas de funciones de la editorial Anaya. De las cuatro tareas de funciones: dos se vinculan con la práctica de justificar y dos con la de generalizar. En Santillana no encontramos tareas de funciones y en SM identificamos cuatro tareas asociadas a la práctica de razonar. En el último curso de primaria, observamos un cambio en la distribución de las tareas de funciones. En Anaya, 12 de las 14 tareas de funciones se vinculan con la práctica de representar y dos con razonar. En Santillana observamos 16 tareas de funciones de la práctica de representar. Por su parte, en SM identificamos 28 tareas de funciones: 12 asociadas a representar, cuatro a razonar, cuatro a justificar y ocho a generalizar. Dentro de las cuatro tareas de justificar se encuentra el apartado (c) de la Figura 1, en la que se pide explicar la respuesta. Consideramos que justificar implica ir más allá del simple razonamiento interno: supone comunicar de manera explícita las razones que respaldan una conclusión, aportando evidencias que permitan convencer a otros de su validez.

Un ejemplo de tarea funcional vinculada a una práctica algebraica lo observamos en la Figura 2, en la que, a través de una máquina de funciones, se solicita al alumnado que reflexione sobre cómo la máquina transforma los números. Para ello, se apoya en una representación tabular que indica los valores de entrada de la función (n) y de salida $(f(n))$. Al pedir al alumnado que observe la tabla y piense, la tarea se relaciona con la práctica de razonar, ya que requiere establecer inferencias, deducciones o relaciones lógicas entre elementos matemáticos.

Figura 2

Tarea de Funciones (Anaya 3º, 2023, p. 73)

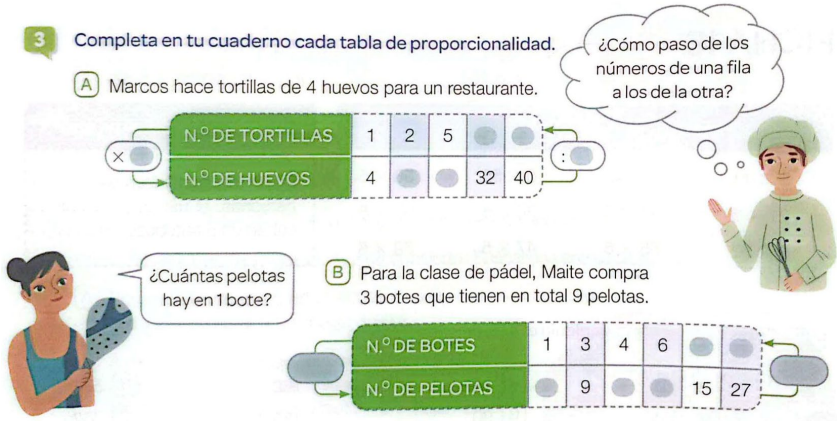


En la Figura 3 observamos dos tareas formuladas como preguntas en las viñetas, y otras dos para completar las representaciones tabulares de funciones de proporcionalidad. La intencionalidad de las cuatro tareas es que el alumnado identifique las relaciones funcionales involucradas en cada caso y

complete las respectivas tablas, reconociendo cómo se relacionan los valores de entrada y salida de las funciones. Por ello, estas tareas están vinculadas a la práctica de representar, ya que se solicita completar la representación tabular. No obstante, cada tarea podría reducirse a un mero cálculo si no se fomenta la reflexión y comprensión de las estructuras algebraicas presentes.

Figura 3

Tareas de Funciones (Santillana 6º, 2023, p. 78)



CONCLUSIONES

En cuanto a nuestro objetivo de investigación, concluimos que la presencia de tareas de funciones en los textos escolares de educación primaria es muy escasa y desigual entre editoriales y cursos. Aunque en algunos casos —especialmente en 6º curso— observamos un aumento, en otros cursos su presencia es reducida o incluso inexistente, como en 4º. Esto indica que el tratamiento de las funciones no sigue una progresión clara y homogénea a lo largo de la etapa, es decir, no aparecen de manera ordenada y/o gradual de un curso a otro. Los contenidos aparecen de forma irregular: en algunos cursos se trabajan ciertos aspectos y en otros desaparecen o cambian sin una conexión evidente, lo que dificulta una comprensión progresiva por parte del alumnado. Como observamos en los resultados, la presencia de funciones difiere según la editorial analizada, a excepción de 4º de primaria, curso en el que ninguna editorial incluye tareas de funciones vinculadas a las prácticas algebraicas. Anaya es la única editorial en la que hay al menos una tarea por curso, en Santillana encontramos tareas funcionales solo en 6º de primaria y en SM empiezan a incorporar tareas funcionales a partir de 5º de primaria. Coincidimos con Acosta et al. (2022), que las diferencias en la frecuencia de tareas entre editoriales y cursos pueden generar un proceso de enseñanza-aprendizaje desequilibrado, condicionado por el libro de texto utilizado.

La ausencia de tareas funcionales en 4º de primaria se podría considerar como una primera identificación de cómo la enseñanza del álgebra temprana en los libros de texto, en lugar de favorecer la conexión entre funciones y pensamiento algebraico, reproduce su desconexión, un fenómeno didáctico ya identificado por Ruiz et al. (2010) en el caso de la educación secundaria.

Identificamos una escasa vinculación de las tareas con prácticas algebraicas. La mayoría de las tareas no se asocian a las prácticas algebraicas y cuando lo hacen, predomina la práctica de representar. Las representaciones que se solicitan en mayor medida son las tabulares (ver Figuras 1 y 3). A veces las tareas solicitaban meros cálculos procedimentales donde el alumno no necesita generalizar ni razonar sobre expresiones, como observamos en la tarea (a) de la Figura 1. Consideramos conveniente reforzar la incorporación intencional y sistemática de prácticas algebraicas en este tipo de tareas, de modo que no solo se trabajen relaciones funcionales a través de representaciones tabulares, sino que se favorezca también la generalización, la justificación y el razonamiento algebraico desde educación primaria.

Observamos que, aunque las tareas relacionadas con funciones están presentes en los textos analizados, las prácticas algebraicas son escasas. Además, al igual que Bolaños y Moreno (2024) y Pacheco et al. (2024), concluimos que la justificación se promueve de manera limitada y los materiales presentan dificultades para favorecer generalizaciones, ya que tienden a centrarse en la verificación mediante casos particulares (véase apartados (d) y (e) de la Figura 1, Figura 2 y 3). La lectura de los resultados no pretende atribuir a las editoriales una intención explícita, sino poner de relieve cómo se materializa el tratamiento de las funciones en los libros de texto analizados, particularmente cuando el currículo de educación primaria recoge el estudio de las relaciones de dependencia entre variables como parte del sentido algebraico. A partir de los resultados obtenidos, identificamos varias líneas abiertas para futuras investigaciones. Entre ellas, consideramos relevante analizar la correspondencia entre la intención didáctica de los libros de texto y la práctica real en el aula.

Los hallazgos ponen de manifiesto la necesidad de profundizar en la formación docente y el desarrollo profesional, especialmente en esta temática que es nueva en el currículo de primaria y que los libros de texto analizados no lo plasman de una forma clara. La implementación efectiva del sentido algebraico también depende del conocimiento del profesorado. Explorar este conocimiento, así como cómo la formación inicial pueden potenciar el uso coherente, sistemático y significativo de tareas algebraicas contribuiría a fortalecer el desarrollo del pensamiento algebraico en educación primaria y a garantizar aprendizajes conceptualmente sólidos.

Agradecimientos

Este estudio se ha desarrollado con el apoyo de los proyectos PID2020-113601GB-I00 y PID2024-157106NB-I00, financiados por MICIU/AEI/10.13039/501100011033 y fondos FEDER, y la ayuda PRE2024-002321.

Referencias

Acosta, Y., Pincheira, N. y Alsina, Á. (2022). Tareas y habilidades para hacer patrones de repetición en libros de texto de educación infantil. *AIEM - Avances de investigación en educación matemática*, *22*, 91-110. https://doi.org/10.35763/aiem22.4193

Aké, L. P. y Godino, J. (2018). Task analysis of an elementary school textbook from the algebraization levels perspective. *Educación Matemática, 30*(2), 171-201. https://doi.org/10.24844/em3002.07

Almodóvar Herráiz, J. A., De la Cruz Fayos, A., Escudero Martín, J., García Atance, P., González Ramírez, A., Marín García, S., Pérez Saavedra, C., Rodríguez Pecharromán, M. y Sánchez Figueroa D. (Santillana 6º) (2023). *Mate+ Matemáticas para pensar 6º Primaria*. Santillana.

Álvarez-Rivera, B., Ariza, N., Carvajal, A., Fernández-Palop, P., Peris, J. y De la Rosa, L. (Anaya 3º) (2023). *3º Primaria Matemáticas Operación Mundo*. Anaya.

Ayala-Altamirano, C. y Molina, M. (2021). Fourth-graders' justifications in early algebra tasks involving a functional relationship. *Educational Studies in Mathematics, 107*(2), 359-382 https://doi.org/10.1007/s10649-021-10036-1

Ayber, G. y Tanışlı, D. (2017). An analysis of middle school mathematics textbooks from the perspective of fostering algebraic thinking through generalization. *Educational Sciences: Theory & Practice, 17*(6), 2001-2030. https://doi.org/10.12738/estp.2017.6.0506

Bardin, L. (1996). *Análisis de contenido*. Akal.

Blanton, M., Brizuela, B. M., Gardiner, A. M., Sawrey, K. y Newman-Owens, A. (2015). A learning trajectory in 6-year-olds' thinking about generalizing functional relationships. *Journal for Research in Mathematics Education, 46*(5), 511-558. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.46.5.0511

Blanton, M. L., Levi, L., Crites, T. y Dougherty, B. J. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in grades 3–5*. National Council of Teachers of Mathematics.

Blanton, M. L., Stephens, A. C., Knuth, E. J., Gardiner, A. M. y Isler, I. (2015). The development of children's algebraic thinking: The impact of a comprehensive early algebra intervention in third grade. *Journal for Research in Mathematics Education, 46*(1). https://doi.org/10.5951/jresematheduc.46.1.0039

Bolaños, H. y Moreno, A. (2024). Finalidades de las tareas de patrones presentes en los libros de texto de primaria en Costa Rica. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 129-136). SEIEM.

Brizuela, B. M. (2023). Prácticas algebraicas en los primeros cursos de educación primaria. *Investigación en Educación Matemática XXVI*, 43-57. SEIEM.

Brizuela, B. M. y Martínez, M. (2012). Aprendizaje de la comparación de funciones lineales. En M. Carretero y J. A. Castorina (Comps.), *Desarrollo cognitivo y educación [II]* (pp. 267-289). Paidós.

Calero, A., Bernabeu Ruiz, J. y Millán, S. (SM 6º) (2023). *Revuela 6º Primaria*. SM.

Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruíz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209-218). Comares.

Carraher, D. W., Martínez, M. V. y Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM-Mathematics Education*, *40*, 3-22. https://doi.org/10.1007/s11858-007-0067-7

Carraher, D. W. y Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*. NCTM e IAP.

Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2018). *Research methods in education* (8th ed.). Routledge. https://doi.org/10.4324/9781315456539

Instituto Nacional de Estadística. (2025). Recuperado el 25 de febrero de 2025 de https://www.ine.es/jaxi/Datos.htm?tpx=26113

Junta de Andalucía, Consejería de Desarrollo Educativo y Formación Profesional (2025). *Libros de texto utilizados en centros educativos en Andalucía*. Portal de Datos Abiertos. https://www.juntadeandalucia.es/datosabiertos/portal/dataset/libros-de-texto-usados-en-centros-educativos

Kaput, J. J., Carraher, D. W. y Blanton, M. L. (2008). *Algebra in the early grades*. Lawrence Erlbaum / NCTM. https://doi.org/10.4324/9781315097435

Kieran, C. (1996). The changing face of school algebra. En C. Alsina, J. Álvarez, B. Hodgson, C. Laborde y A. Pérez (Eds.), *Proceedings of 8th international congress on mathematical education: Selected lectures* (pp. 271–290). Sociedad Andaluza de Educación Matemática (SAEM) Thales.

Ministerio de Educación y Formación Profesional (2022). Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. *Boletín Oficial del Estado, 52*, 24386–24504. https://www.boe.es/eli/es/rd/2022/03/01/157

Pacheco, E., Ayala-Altamirano, C. y Molina, M. (2024). Caracterización de tareas sobre inecuaciones en libros de textos escolares en educación primaria. *Uniciencia*, *38*(1), 455-478. https://doi.org/10.15359/ru.38-1.25

Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *PNA: Revista de investigación en Didáctica de la Matemática*, *4*(1), 1-14. https://doi.org/10.30827/pna.v4i1.6172

Rico, L., Lupiáñez, J. L. y Molina, M. (2013). *Análisis Didáctico en Educación Matemática: Metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular*. Comares.

Ruiz, N., Bosch, M. y Gascón, J. (2010). La algebrización de los programas de cálculo aritmético y la introducción del álgebra en secundaria. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 545-556). SEIEM.

Torres, M. D., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (2022). Pensamiento funcional de estudiantes de 2º de primaria: estructuras y representaciones. *PNA, 16*(3), 215-236. https://doi.org/10.30827/pna.v16i3.23637

DIFERENCIAS DE GÉNERO EN LA REPRESENTACIÓN DE LAS PROPIEDADES ARITMÉTICAS EN EDUCACIÓN PRIMARIA

Gender differences in the representation of the arithmetic properties in primary education

Flores-Lamolda, L[a]., Ramírez, R[a]. y Ramírez-Uclés, I[b].

[a]Universidad de Granada, [b]Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED)

Resumen

En esta comunicación se estudian las diferencias de género en las respuestas a un cuestionario sobre la interpretación de las representaciones geométricas y algebraicas de las propiedades aritméticas. Se analizan las diferencias en el rendimiento y en las justificaciones empleadas. Los sujetos fueron 185 alumnos (103 hombres y 82 mujeres) de tercero a sexto de primaria. Se realiza un análisis cuantitativo para ver si hay diferencias significativas en el rendimiento en los tipos de justificaciones empleadas. El análisis muestra una falta de diferencias tanto en las doce variables de rendimiento estudiadas como en los tipos de justificaciones. Estos resultados matizan las diferencias de género descritas en la literatura sobre determinadas habilidades matemáticas, sugiriendo que su origen podría estar asociado a factores distintos de los estrictamente cognitivos, particularmente de carácter social o de personalidad.

Palabras clave: *diferencias de género, interpretación, propiedades aritméticas, justificaciones, representaciones.*

Abstract

This paper examines gender differences in responses to a questionnaire regarding the interpretation of geometric and algebraic representations of arithmetic properties. Differences in performance and the types of justifications provided were analysed. The participants were 185 primary school students (103 males and 82 females) from third to sixth grade. A quantitative analysis was conducted to determine if significant differences exist in performance and the types of justifications employed. The results show a lack of significant differences across the twelve performance variables studied, as well as in the types of justifications. These results qualify the gender differences described in the literature on certain mathematical skills, suggesting that their origin could be associated with factors other than strictly cognitive ones, particularly those of a social or personality nature.

Keywords: *gender differences, interpretation, arithmetic properties, justifications, representations.*

INTRODUCCIÓN Y JUSTIFICACIÓN

Durante las últimas décadas, la investigación sobre las diferencias de género en el rendimiento matemático ha sido un tema relevante (Hutchison et al., 2019). Esta preocupación surge a partir de los datos que muestran una menor presencia de las mujeres en carreras donde las matemáticas tienen un papel fundamental o en olimpiadas matemáticas nacionales e internacionales (Macho et al., 2020). A este respecto, la literatura ha explorado la influencia de factores como las actitudes hacia la disciplina (Hutchison et al., 2019), en la velocidad de respuesta o en rasgos de personalidad (Ramírez-Uclés y Ramírez-Uclés, 2020).

Existe un estereotipo sobre un mejor desempeño de los hombres en tareas matemáticas complejas (Ramírez-Uclés y Ramírez-Uclés, 2020). No obstante, diversos estudios muestran una ausencia de diferencias significativas en habilidades numéricas básicas o tareas geométricas. Por ejemplo,

Flores-Lamolda, L., Ramírez, R. y Ramírez-Uclés, I. (2026). Diferencias de género en la representación de las propiedades aritméticas en Educación Primaria. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (pp. 218-225). SEIEM.

Hutchison et al. (2019) reportan una falta de diferencias en estudiantes de 6 a 13 años en tareas de conteo y operaciones básicas. Asimismo, Ramírez-Uclés y Ramírez (2023) no hallaron diferencias en el rendimiento ni en el perfil de errores en tareas geométricas en alumnado de 13 a 16 años.

En cambio, existen estudios que documentan diferencias de género en distintos ámbitos de las matemáticas. Hyde (2014) en una revisión sobre trabajos centrados en las diferencias en habilidades espaciales, más concretamente en rotación mental, reporta una diferencia de género moderada a favor de los hombres. De Castro y Palop (2025) hallaron diferencias de género en el empleo de estrategias para la resolución de problemas aritméticos en estudiantes de 5 a 8 años, empleando más frecuentemente las mujeres estrategias basadas en el empleo de manipulativos.

La presencia de posibles diferencias de género en habilidades espaciales, pero no en otras habilidades matemáticas motiva el interés de este estudio. Se cuestiona si dichas diferencias se evidencian en un cuestionario que relaciona representaciones geométricas (que requieren habilidades de visualización) y algebraicas (vinculadas a propiedades aritméticas). El empleo de estas representaciones es de interés en el marco del álgebra temprana como forma de favorecer la generalización. En este sentido, la creciente investigación internacional en álgebra temprana ha destacado el papel del pensamiento algebraico en los currículos actuales, formando parte de la educación primaria e incluso infantil (Alsina y Pincheira, 2021). Así, en este trabajo se busca explorar cómo estudiantes de tercero a sexto de primaria interpretan dichas representaciones. Las justificaciones permiten observar cómo el alumnado realiza dicha interpretación. Su análisis resulta relevante para comprobar si las mujeres muestran menor rendimiento en la interpretación de las representaciones de las propiedades aritméticas geométricas, al haber estudios que evidencian diferencias a favor de los hombres en tareas que requieren de habilidades espaciales.

A partir de lo anterior se plantean las siguientes preguntas de investigación: ¿existen diferencias de género en la interpretación de representaciones geométricas y algebraicas de las propiedades aritméticas? ¿Existen también diferencias en el tipo de justificaciones empleadas por el alumnado para evidenciar esta interpretación?

Los resultados aportan información para el diseño de prácticas educativas efectivas en el ámbito de la aritmética generalizada y el uso de distintas representaciones (Ellis y Özgür, 2024). La ausencia de diferencias de género en aspectos cognitivos en edades tempranas podría dirigir la investigación hacia otros factores, de carácter social o de personalidad, que pudieran dar lugar a diferencias en etapas posteriores.

MARCO TEÓRICO

Como se ha mencionado, existe una trayectoria en Educación Matemática acerca del estudio de las diferencias de género y su dependencia de factores contextuales o extramatemáticos (Hutchison et al., 2019). A nivel nacional, se han identificado brechas de participación en carreras del ámbito STEM o concursos de alto rendimiento matemático (Macho et al., 2020), aunque en niveles escolares los resultados son diversos. Frente a las divergencias halladas en niveles universitarios (Geary et al., 2000), estudios en primaria y secundaria no encuentran diferencias significativas en habilidades numéricas básicas (Hutchison et al., 2019), en el uso de la propiedad distributiva para la resolución de problemas (Clerjuste et al., 2024) o en tareas de rotación mental (Ramírez-Uclés y Ramírez-Uclés, 2020; Ramírez-Uclés y Ramírez, 2023). En este contexto, resulta de interés explorar tareas que integran una componente visual a través de representaciones geométricas, las cuales han sido vinculadas previamente al estudio de las diferencias de género, dentro de un ámbito con especial relevancia en la investigación actual: el álgebra escolar.

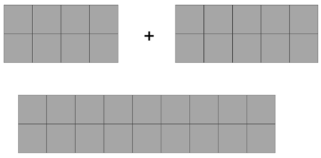
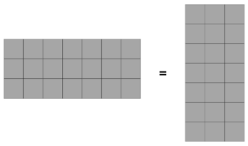
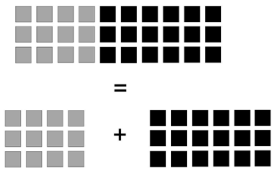
Este estudio se enmarca en un ámbito del álgebra temprana, llamado aritmética generalizada. Esta dimensión contempla la generalización y razonamiento con propiedades y relaciones aritméticas y de los números (Stephens et al., 2017). El trabajo con propiedades aritméticas favorece la comprensión

de contenidos matemáticos relevantes (NCTM, 2003). Por ejemplo, la conmutativa de la multiplicación y la distributiva son relevantes para la comprensión de la multiplicación (Ramírez et al., 2025) y con base en la paridad se pueden favorecer prácticas como la generalización y justificación (Blanton et al., 2011).

Estas propiedades (conmutativa de la multiplicación, distributiva y paridad de la suma de dos números pares) pueden representarse a partir de modelos geométricos. El empleo de distintas representaciones de estas propiedades enriquece su significado (Blanton et al., 2011; NCTM, 2003). En la Tabla 1, se muestran las propiedades representadas de forma verbal, geométrica y algebraica:

Tabla 1

Representaciones algebraicas, verbales y geométricas de las propiedades

Propiedad	Representación algebraica	Representación verbal	Representación geométrica
Paridad de la suma de dos números pares	$2a + 2b = 2(a + b)$	La suma de dos números pares es un número par	
Conmutativa de la multiplicación	$a \cdot b = b \cdot a$	Cuando se multiplican dos números, el orden no altera el resultado	
Distributiva	$2(a + b) = 2a + 2b$	Multiplicar un número por una suma, se multiplica por cada sumando y luego se suman los resultados.	

Fuente: Flores-Lamolda y Ramírez-Uclés, 2025

Los modelos geométricos de las propiedades requieren de habilidades espaciales para su interpretación. Para el estudio de estas habilidades se han tenido en cuenta los componentes de sentido espacial. El sentido espacial se refiere a las capacidades de un individuo para interactuar con el entorno a partir de la prescripción, clasificación, razonamiento y establecimiento de relaciones de formas y figuras (Flores et al., 2015). Los componentes de sentido espacial son el manejo de conceptos geométricos y las destrezas de visualización, en las que Gutiérrez (1996) destaca el papel de las habilidades de visualización en el proceso de interpretación de las representaciones externas. Estudiar la comprensión de las representaciones de las propiedades, requiere el análisis de la interpretación evidenciada por los estudiantes, entendida como la actividad cognitiva que conlleva la conversión de información de un sistema de representación a otro (Mayer, 2002). A través de las justificaciones escritas del estudiantado, se puede observar si han realizado dicha interpretación. La justificación es una práctica de interés en el álgebra temprana, a través de la cual el alumnado puede construir argumentos acerca de la autenticidad de reglas generales (Strachota et al., 2023). Estos autores establecen una categorización de tipos de justificaciones:

- Ejemplo: se comprueba si una expresión es cierta a partir del uso de uno o varios ejemplos concretos en los que se basa la justificación.
- Ejemplo genérico: se emplean números como cuasivariables.

- Argumento general: no se emplean números concretos, sino justificaciones basadas en generalidades.

METODOLOGÍA

Para analizar las posibles diferencias de género en la interpretación de las representaciones geométricas y algebraicas de las propiedades aritméticas se llevó a cabo un análisis cuantitativo mediante pruebas de chi-cuadrado de Pearson, con el objetivo de determinar si el género se asociaba significativamente con el rendimiento en las distintas variables analizadas. Asimismo, se desarrollaron análisis descriptivos orientados a examinar el rendimiento del alumnado y los tipos de justificaciones empleadas en cada uno de los apartados de las preguntas del cuestionario. Así, se plantean los siguientes objetivos de investigación:

- Examinar si hay diferencias de género en la interpretación de representaciones geométricas y algebraicas de las propiedades aritméticas.
- Analizar los tipos de justificaciones empleadas por los hombres y las mujeres para evidenciar la interpretación de las propiedades.

Sujetos

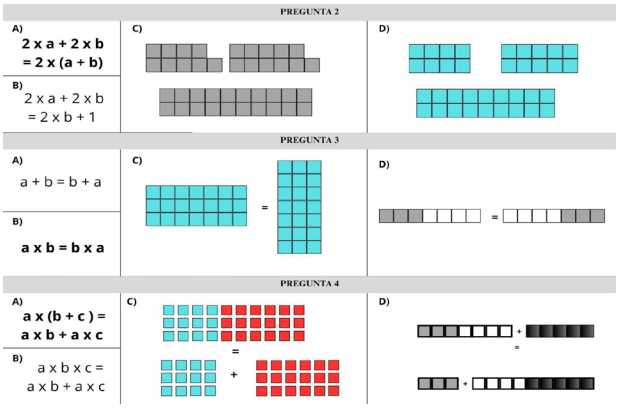
El estudio se llevó a cabo en un centro concertado de Granada. El cuestionario se administró al alumnado de tercero a sexto de Educación Primaria, con una muestra total de 185 estudiantes (103 hombres y 82 mujeres). No se tiene constancia de que los estudiantes hubieran recibido instrucción previa sobre las representaciones geométricas y algebraicas de las propiedades aritméticas.

Instrumento

El instrumento utilizado fue un cuestionario descrito en estudios previos (Flores-Lamolda y Ramírez-Uclés, 2025). Este se estructura en cinco preguntas, de las cuales se han seleccionado tres para el presente estudio: la segunda, sobre paridad; la tercera, sobre la propiedad conmutativa de la multiplicación; y la cuarta, centrada en la propiedad distributiva. La primera y la quinta trataban también sobre la paridad y la conmutativa de la multiplicación respectivamente, pero no se han incluido al tener una estructura distinta al resto de preguntas. A partir de la representación verbal, se presentan cuatro apartados (dos con representaciones geométricas y dos con representaciones algebraicas). En cada pregunta, un apartado algebraico y otro geométrico se corresponden con el enunciado, mientras que los otros dos no. El alumnado debe marcar en cada sección si existe correspondencia con el enunciado y justificar su elección. En la Figura 1 se muestran las representaciones empleadas en el cuestionario. Se marcan en negrita las representaciones algebraicas correctas y en color las representaciones geométricas correctas. En el cuestionario cada propiedad está en una página distinta y en cada opción tienen un hueco para justificar si se corresponde o no con la propiedad del enunciado.

Figura 1

Representaciones empleadas en el cuestionario



Variables y análisis

Las variables estudiadas fueron el rendimiento y los tipos de justificaciones. El rendimiento se analizó como variable dependiente. Este es una variable dicotómica que toma el valor 1 si la respuesta es correcta y 0 si es incorrecta. Se considera correcta cuando el alumnado marca adecuadamente la casilla de respuesta y justifica correctamente la relación entre la propiedad presentada de forma verbal y la representación correspondiente en el apartado. La unidad de análisis para esta variable fue la respuesta individual a cada uno de los cuatro apartados de las tres preguntas del cuestionario. Las variables de rendimiento se nombraron en función del número de pregunta y del apartado (p.ej. el rendimiento en el apartado A de la pregunta 2 se denomina P2AR). De este modo, se obtuvieron un total de 12 variables asociadas al rendimiento. A partir del análisis de las justificaciones empleadas por los estudiantes, se escoge la siguiente categorización de tipos de justificaciones. Se parte de la realizada por Strachota et al. (2023), añadiendo la categoría de "correspondencia con el enunciado" que se observó en la triangulación por tres expertos.

- Tipo 0 "correspondencia con el enunciado": parafrasea o reafirma la propiedad verbal sin añadir marcas de generalidad. Por ejemplo, el estudiante 528 indica sobre la distributiva: "sí, porque multiplica el número por la suma luego se multiplica cada sumando y luego se suma el resultado".
- Tipo 1 "ejemplo": sustitución por valores numéricos concretos o conteo de elementos geométricos. Por ejemplo, ante la paridad de la suma de números pares, el estudiante 508 cuenta los elementos y afirma: "sí, porque 8 más 10 es 18, siendo 18 múltiplo de 2".
- Tipo 2 "ejemplo genérico": uso de números como representación de una clase más amplia. El estudiante 512 justifica así la conmutativa: "sí corresponde, porque da igual si multiplicas por ejemplo 2 x 4 que 4 x 2, el orden de los factores no altera el resultado".
- Tipo 3 "argumento general": justificaciones no basadas en casos específicos para establecer afirmaciones generales. Por ejemplo, el estudiante 613 explica la paridad de la suma: "como siempre da par cuando multiplicas por 2, es correcto".

Asimismo, se añadieron 12 variables relativas al tipo de justificación. Estas variables toman los valores 0, 1, 2 y 3. Los tipos de justificación se analizaron en cada uno de los apartados, y únicamente cuando la justificación respalda correctamente la elección de la casilla de correspondencia. Las variables se nombraron también en función del número de pregunta y del apartado. Así, la justificación presentada en el apartado A de la pregunta 2 se denomina P2AJ.

RESULTADOS

Se analizaron las diferencias de género en las variables de rendimiento (P2AR hasta P4DR) que se recogen en las tres preguntas del cuestionario (en adelante P2, P3 y P4) mediante pruebas de chi-cuadrado de Pearson. Los resultados mostraron que no hay diferencias estadísticamente significativas entre hombres y mujeres en ninguna de las doce variables analizadas.

En P2 (paridad de la suma de dos números pares), se analizaron las variables P2AR, P2BR, P2CR y P2DR. Los valores de chi-cuadrado fueron bajos y no significativos ($\chi^2(1)$ entre 0.11 y 1.15; $p > .28$). De la misma manera, en P3 (conmutativa de la multiplicación) no se observaron diferencias significativas ($\chi^2(1)$ entre 0.06 y 2.14; $p > .14$). Finalmente, en la P4 (distributiva) tampoco se hallaron diferencias estadísticamente significativas entre mujeres y hombres ($\chi^2(1)$ entre 0.03 y 2.60; $p > .10$). En conjunto, estos resultados indican que el género no establece diferencias con ninguna de las variables evaluadas.

También se estudia el rendimiento mediante proporciones (ver Tabla 2) y los tipos de justificaciones empleadas (Figura 2). En la Tabla 2 aparecen en negrita el rendimiento en aquellos apartados en los que las representaciones se corresponden con el enunciado.

Tabla 2

Proporción de respuestas correctas por preguntas

	P2		P3		P4	
Apartado	H (%)	M (%)	H (%)	M (%)	H (%)	M (%)
A	**33,01**	**35,37**	8,74	9,76	**22,33**	**25,61**
B	32,04	26,83	**51,46**	**62,2**	18,45	19,51
C	10,68	19,51	**44,66**	**48,78**	**22,33**	**32,93**
D	**54,37**	**62,2**	2,91	4,88	6,8	4,85

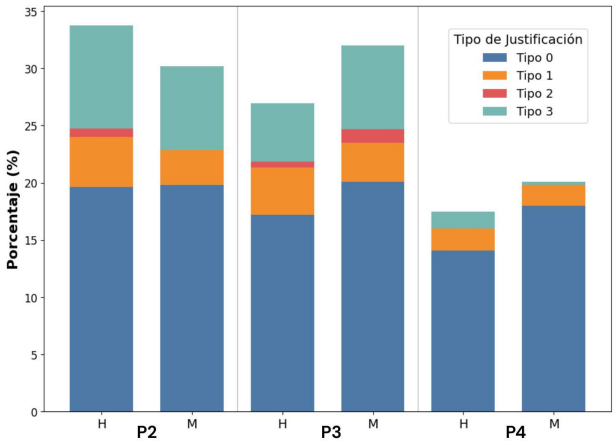
En la Tabla 2, se observa el rendimiento como porcentaje, considerando la frecuencia de respuestas correctas sobre el total de alumnos y alumnas. Se observa en prácticamente la totalidad de los apartados un rendimiento muy similar entre hombres (H) y mujeres (M). Se describen a continuación los apartados en los que, pese a la ausencia de diferencias significativas de género encontradas, se muestra cierta diferencia. Aunque los chicos muestran un rendimiento algo mayor en P2B (algebraica incorrecta), se observa un rendimiento ligeramente más elevado de las mujeres en P2C (representación geométrica incorrecta), P2D (geométrica correcta), P3B (algebraica correcta) y P4C (geométrica correcta).

Por otro lado, se han analizado los tipos de justificaciones empleadas por los hombres y las mujeres en las tres preguntas, para ver si había relación entre el género y la elección del tipo de justificación empleada. Se realizan únicamente el estudio descriptivo por el elevado número de respuestas en blanco o incorrectas. Se muestra en la Figura 2 un gráfico con los tipos de justificaciones empleadas en cada una de las preguntas por los hombres (H) y las mujeres (M).

El uso de las justificaciones de tipo 0 (correspondencia con el enunciado) predomina en todas las preguntas por parte de los hombres y de las mujeres, así como la ausencia de justificaciones de tipo 2 (ejemplo genérico). Se observan niveles muy similares de justificación por parte de los hombres y las mujeres, siendo ligeramente más alto el de las mujeres en la tercera y cuarta pregunta (conmutativa de la multiplicación y distributiva).

Figura 2

Distribución de los tipos de justificaciones por género



DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Los resultados del análisis muestran que no existen diferencias significativas en ninguna de las variables analizadas ni se evidencian diferencias en la elección de justificaciones por parte de las mujeres y los hombres. Esta ausencia de diferencias se manifiesta en las representaciones geométricas y algebraicas de las tres propiedades aritméticas analizadas.

Los resultados obtenidos se respaldan por otros estudios en los que tampoco se muestran estas diferencias en la etapa escolar. Clerjuste et al. (2024) analizaron el género como una de las variables en el uso de la propiedad distributiva para resolver problemas. En el estudio no encontraron diferencias significativas al estudiar si habían resuelto correctamente los problemas de propiedad distributiva. Asimismo, Ramírez-Uclés y Ramírez-Uclés (2020) no observaron relación entre la capacidad de resolución de problemas matemáticos complejos y el género en problemas de rotación mental. Las diferencias encontradas se atribuyeron con las características específicas de cada prueba realizada en el estudio. Hutchison et al. (2019) hallaron grandes similitudes al estudiar el rendimiento de las chicas y los chicos en una prueba que medía habilidades numéricas. Sin embargo, otros estudios, como el de Geary et al. (2000), reportan un mejor rendimiento de los chicos en pruebas de cálculos numéricos, razonamiento aritmético y cognición espacial en etapa universitaria.

Como limitaciones de este trabajo, además de los propios de la elección de la muestra, se destaca el bajo rendimiento en algunos apartados, asociados mayoritariamente a la correspondencia con el enunciado. Esto sucede ya que comprueban que las representaciones son correctas, pero no las comparan con la que aparece en el enunciado de la pregunta.

Como aportes de este trabajo, se destaca la ausencia de diferencias de género al profundizar en aspectos cognitivos específicos, en este caso las representaciones geométricas y algebraicas, que pueden influir en el rendimiento (Ramírez-Uclés y Ramírez, 2023). Esto sugiere indagar en otros aspectos sociales o de personalidad asociados a los estereotipos de género en matemáticas (Hutchison et al., 2019) que pueden influir a largo plazo en la elección de carreras relacionadas con el ámbito STEM.

Agradecimientos

Este trabajo se ha realizado en el seno del grupo FQM-193, y en el marco de los proyectos PID2020-117395RB-I00, PID2020-113601GB-I00 y Diferencias de género en altas capacidades intelectuales, sentido matemático y competencia STEM: un análisis multidimensional de factores cognitivos y de personalidad (DIFGEN) del Plan Propio de Investigación y Transferencia de la Universidad de Granada.

Referencias

Alsina, Á. y Pincheira, N. (2020). Luces y sombras del álgebra temprana en el currículo español (3-12 años). *Suma, 99*, 17-26.

Blanton, M., Levi, L., Crites, T., Dougherty, B. y Zbiek, R. M. (2011). *Developing Essential Understanding of Algebraic Thinking for Teaching Mathematics in Grades 3-5*. *Series en Essential Understandings.* National Council of Teachers of Mathematics.

Clerjuste, S. N., Guang, C., Miller-Cotto. D. y McNeil, N. M. (2024). Unpacking the challenges and predictors of elementary-middle school students' use of the distributive property. *Journal of Experimental Child Psychology, 244*, Article 105922, https://doi.org/10.1016/j.jecp.2024.105922

De Castro, C. y Palop, B. (2025). Diferencias de género en aritmética y resolución de problemas con manipulativos virtuales de 5 a 8 años. *PNA, 20*(1), 49-71,

Ellis, A. y Özgür, Z. (2024). Trends, insights, and developments in research on the teaching and learning of algebra. *ZDM-Mahematics Education*, *56*(2), 199-210 https://doi.org/10.1007/s11858-023-01545-9

Flores, P., Ramírez, R. y Del Río, A. (2015). Sentido espacial. En P. Flores y L. Rico (Coords.). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria*, (pp. 127- 146). Pirámide.

Flores-Lamolda, L. y Ramírez-Uclés, R. (2025). Errores en la identificación de representaciones geométricas y algebraicas de las propiedades aritméticas. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática* XXVIII (pp. 180-187). SEIEM.

Geary, C.D., Saults, S. J., Liu, F. y Hoard, M. K. (2000). Sex differences in Spatial Cognition, Computational Fluency, and Arithmetical Reasoning. *Journal of Experimental Child Psychology*, *77*, 337-353. https://doi.org/10.1006/jecp.2000.2594

Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. En L. Puig y A. Gutierrez (Eds.), *Proceedings of the 20th PME Conference, 1* (pp. 3-19). Universidad de Valencia.

Hutchison, J. E., Lyons, I. M. y Ansari, D. (2019). More similar than different: gender differences in children's basic numeral skills are the exception not the rule. *Child Developmen, 90*(1), e66-e67. https://doi.org/10.1111/cdev.13044

Hyde, J. S. (2014). Gender similarities and differences. *Annu. Rev. Psychol.* 65, 373–398.

Macho, M., Padrón, E., Calaza, L., Casanellas, M., Conde, M., Lorenzo, E. y Vázquez, M. E. (2020). Igualdad de género en el ámbito de las matemáticas. En D. Martín de Diego, T. Chacón Rebollo, G. Curbera Costello, F. Marcellán Español y M. Siles Molina (Coords.), *Libro Blanco de las Matemáticas* (pp. 375-420). Editorial Centro de Estudios Ramón Areces.

Mayer, R. E. (2002). Rote Versus Meaningful Learning. *Theory into practice, 41*(4), 226-232. https://doi.org/10.1207/s15430421tip4104_4

NCTM. (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*, SAEM Thales.

Stephens, A., Ellis, A., Blanton, M. y Brizuela, B. (2017). Algebraic thinking in the elementary and middle grades. En J. Cai (Ed.), *Compendium for Research in Mathematics Education. Third Handbook of Research in Mathematics Education* (pp. 386–420). NCTM.

Strachota, S., Brizuela, B., Gibbins, A., Blanton, M., Gardiner, A. M. y Sawrey, K. (2023). First Graders' Definitions, Generalization, and Justifications of Even and Odd Numbers. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 23*, 459-478. https://doi.org/10.1007/s42330-023-00297-8

Ramírez-Uclés y Ramírez-Uclés (2020). Gender differences in visuspatial abilities and complex mathematical problem solving. *Frontiers in Psychology, 11:191*. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2020.00191

Ramirez-Uclés, I. y Ramírez, R.(2023). Diferencias de género en test de rotación mental: una perspectiva desde la enseñanza de la geometría. *Educación XX1, 26*(2), 351-372. https://doi.org/10.5944/educxx1.33150

Ramírez, R., Fuentes, S., López, M. A. y Brizuela, B. M. (2025). Justificación de las propiedades distributiva y conmutativa del producto en primaria. *Enseñanza de las ciencias, 43*(3), 179-200. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.6334

CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DE FUTURAS MAESTRAS AL ANALIZAR LA DEFINICIÓN DE PROPORCIONALIDAD DIRECTA

Specialised knowledge of prospective teachers in analysing the definition of direct proportionality

Flores-Medrano, E., Martín-Portugués, S. G., Duro-Caballero, I. y Escudero-Ávila, D.

Universidad Complutense de Madrid

Resumen

En esta investigación analizamos el impacto de una tarea formativa sobre proporcionalidad directa, en el conocimiento especializado de un grupo de 42 futuras maestras de educación primaria. Los datos obtenidos durante la implementación de la tarea fueron analizados mediante el marco MTSK. Los principales resultados indican que el trabajo sobre una comprensión profunda de la definición de proporcionalidad directa, junto con la necesidad de adaptar este contenido a las aulas de primaria, favorece el desarrollo de conocimientos matemáticos y didáctico-matemáticos. Estos conocimientos permiten una comprensión fenomenológica del contenido y lo alejan de un tratamiento meramente procedimental.

Palabras clave: *proporcionalidad directa, MTSK, profesorado en formación, tarea formativa*

Abstract

In this study, we analyse the impact of a teacher education task designed around the mathematical and didactical unpacking of the notion of proportionality on a group of prospective primary teachers' specialised knowledge. The main findings suggest that engaging prospective teachers in developing a deep understanding of the definition of direct proportionality, together with the need to adapt this content to primary classrooms, fosters the development of mathematical and didactical-mathematical knowledge. This knowledge supports a phenomenological understanding of the content and moves it away from a merely procedural approach.

Keywords: *direct proportionality, MTSK, prospective teachers, teacher education task*

INTRODUCCIÓN Y ANTECEDENTES

Revisiones sistemáticas recientes, como la de Elias et al. (2025), muestran un claro interés por estudiar la proporcionalidad como un contenido de la matemática escolar que es importante comprender de manera significativa, las características que tiene su enseñanza, el papel de los artefactos y el análisis del propio contenido; no obstante, se observa un mayor énfasis en la relación entre el estudiantado y los contenidos de proporcionalidad. Pese al volumen de investigaciones y propuestas, continúa reportándose una persistente sensación de dificultad en la enseñanza y el aprendizaje de estos contenidos (Obando et al., 2014).

En este trabajo nos centramos en el análisis del conocimiento del profesorado en formación inicial sobre la proporcionalidad directa, en un entorno formativo orientado tanto al desarrollo de conocimientos matemáticos y didácticos del contenido como a competencias vinculadas al diseño de problemas. En particular, caracterizamos la proporcionalidad directa a partir de la covariación de magnitudes y la invariancia de la razón entre cantidades, de modo que el razonamiento proporcional implica establecer relaciones multiplicativas (razones) y utilizarlas para producir o justificar relaciones equivalentes (Valverde y Castro, 2009).

Flores-Medrano, E., Martín-Portugués, S. G., Duro-Caballero, I. y Escudero-Ávila, D. (2026). Conocimiento Especializado de futuras maestras al analizar la definición de proporcionalidad directa. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (pp. 226-233). SEIEM.

La literatura muestra que el profesorado en formación suele manifestar un conocimiento sobre razón, proporción y proporcionalidad predominantemente procedimental y débilmente conectado con sus significados (Buforn et al., 2018). Esta limitación se expresa, con frecuencia, en la identificación de la proporcionalidad directa con algoritmos de resolución mecánica, como la regla de tres (Burgos y Godino, 2021), y en errores asociados al uso de estrategias aditivas en situaciones que requieren comparaciones multiplicativas (Buforn, 2017). Asimismo, estas dificultades inciden en aspectos didácticos, como la interpretación y justificación de las respuestas del estudiantado bajo criterios principalmente operacionales y procedimentales (Burgos y Chaverri, 2023).

En respuesta a este problema, se han desarrollado tareas formativas en los Grados de Educación Primaria orientadas a comprender y promover el conocimiento del futuro profesorado sobre proporcionalidad. Por ejemplo, Castillo y Burgos (2023) emplearon el análisis de lecciones de libros de texto para potenciar la competencia reflexiva, mostrando que los participantes reconocen indicadores generales, pero presentan limitaciones al examinar aspectos matemáticos específicos, como la priorización de la regla de tres. En una línea complementaria, Burgos y Chaverri (2023) evidencian que, aunque los estudiantes de magisterio pueden proponer variaciones de problemas existentes, encuentran dificultades para diseñar tareas que distingan adecuadamente entre situaciones proporcionales y aditivas.

Estas investigaciones confirman el predominio de enfoques procedimentales. Sin embargo, son escasos los estudios que sitúan la construcción y explicitación de la propia definición de proporcionalidad directa como eje del proceso formativo, pues el problema también puede interpretarse como una brecha entre la imagen conceptual y la definición formal (Vinner, 2002) del constructo central. En esta línea, esta investigación se propone analizar el conocimiento especializado que moviliza un grupo de futuras maestras al enfrentarse a una tarea formativa con énfasis en la construcción de una definición operativa de la proporcionalidad directa, sustentada en un tratamiento fenomenológico del concepto.

MARCO TEÓRICO

Para describir y analizar el conocimiento matemático y didáctico matemático especifico que ponen en juego las futuras maestras al abordar una tarea formativa, hemos utilizado el modelo *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* (MTSK), diferenciándolo tanto del conocimiento matemático disciplinar general como del conocimiento pedagógico general (Carrillo-Yañez et al., 2018). El MTSK organiza dicho conocimiento en dos grandes dominios: el conocimiento matemático y el conocimiento didáctico del contenido, divididos, con fines analíticos, en tres subdominios cada uno (Carrillo et al., 2022).

Dentro del conocimiento matemático se considera el Conocimiento de los Temas (KoT, de aquí adelante, las siglas se corresponden con la traducción del subdominio al inglés), que se refiere al conocimiento profundo del contenido matemático específico que se enseña, incluyendo significados, definiciones, propiedades, condiciones de aplicación y variedad de representaciones asociadas al tema (Carrillo-Yañez et al., 2018). El Conocimiento de la Estructura de las Matemáticas (KSM) se vincula con conexiones y articulaciones interconceptuales y temporales (Carrillo et al., 2022). Por su parte, el Conocimiento de la Práctica Matemática (KPM) alude al conocimiento sobre las formas de proceder y producir en matemáticas y considera prácticas tales como definir, demostrar, usar heurísticos (Carrillo et al., 2022).

En el dominio del Conocimiento Didáctico del Contenido, el MTSK contempla los subdominios: Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT), relativo al conocimiento sobre estrategias, recursos, tareas y formas de gestión didáctica vinculadas a un contenido; Conocimiento de las Características de Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM), asociado a expectativas, dificultades, errores y formas de pensamiento del estudiantado al aprender un tópico; y el Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (KMLS), referido a expectativas curriculares,

progresiones y referencias normativas sobre qué se espera que el alumnado aprenda en un nivel escolar dado (Carrillo-Yañez et al., 2018).

En este estudio los subdominios y categorías del MTSK nos han servido para analizar el conocimiento que las futuras maestras van movilizando a lo largo de la tarea formativa, sobre todo por el potencial que tiene para establecer relaciones entre los conocimientos y las prácticas matemáticas, destacando en esta tarea, el papel matemático y didáctico de la definición de proporcionalidad directa como eje articulador de la tarea. Cabe señalar que de acuerdo con Carrillo-Yañez et al. (2018), el modelo MTSK no es constituye una herramienta con carácter evaluativo, sino descriptivo, por lo que a lo largo del análisis pueden aparecer evidencias de conocimientos que pueden considerarse erróneos, pero que, a través de la tarea formativa, buscamos analizar cómo se reconfiguran para hacerlos asimilables a la definición del concepto.

METODOLOGÍA

Esta es una investigación cualitativa e interpretativa, en tanto que busca comprender los significados que emergen de las producciones de las participantes y analizar los conocimientos que se ponen en juego en una situación formativa específica (Willis, 2007). El análisis se desarrolla mediante un estudio de caso instrumental: el conocimiento especializado que ponen de manifiesto futuras maestras de educación primaria al abordar una tarea formativa sobre proporcionalidad directa (Stake, 1995).

En el estudio participó un grupo de 42 futuras maestras de educación primaria que, al momento de la recogida de datos, cursaban el tercer año de la titulación. A partir de la implementación de una secuencia de actividades, se exploró cómo las participantes movilizaban diversos conocimientos matemáticos y didáctico-matemáticos vinculados con la proporcionalidad directa en una situación de aula no asociada a evaluación, con el fin de favorecer respuestas centradas en la comprensión del contenido y no en su rendimiento académico.

Las participantes fueron informadas del propósito de la investigación, del uso académico de los datos y del carácter no punitivo de sus respuestas. Asimismo, se garantizó la confidencialidad de la información recogida y el análisis se realizó sobre sus producciones escritas generadas durante el desarrollo de la secuencia.

El análisis se realizó a partir del modelo MTSK, que permitió identificar y organizar los conocimientos evidenciados tanto en sus producciones escritas, como, sobre todo, en las participaciones y discusiones grupales (Carrillo-Yañez et al., 2018). Las unidades de análisis fueron fragmentos de producciones e intervenciones, codificadas según las categorías de cada subdominio. Dicha codificación fue revisada y discutida entre los autores.

Diseño y gestión de la tarea formativa

La tarea formativa se organizó en seis actividades, implementadas a lo largo de cuatro sesiones de dos horas. Su diseño pretendía que las participantes transitaran desde una definición inicial, frecuentemente apoyada en rasgos de monotonía, hacia una caracterización más robusta de la proporcionalidad directa, sustentada en invariantes (razón constante) y en el análisis de casos límite (incluida la constante negativa) y contraejemplos, así como en la construcción de una definición operativa para el trabajo en la educación básica. A continuación, se describen las actividades y la intención formativa asociada a cada una.

Primera actividad: Exploración y consenso de una definición inicial. Se solicitó a las participantes que explicitaran qué entendían por proporcionalidad directa. La dinámica se realizó mediante Wooclap, con respuestas individuales que posteriormente se discutieron de forma colectiva. La puesta en común permitió identificar regularidades en las definiciones aportadas y acordar una formulación de referencia para el trabajo posterior, atendiendo a criterios básicos de explicitación de condiciones definitorias (Escudero et al., 2014).

Segunda actividad: Contraste de fenómenos lineales con y sin término independiente. Con el fin de problematizar definiciones apoyadas únicamente en argumentos del tipo "si una magnitud aumenta, la otra también", se propusieron situaciones contextualizadas cuya relación entre variables se modeliza mediante funciones de la forma $f(x)=mx$ y $f(x)=mx+b$. Las participantes resolvieron los problemas en parejas y, a continuación, contrastaron los procedimientos empleados y la validez de las respuestas con la definición adoptada en la primera actividad. La intención fue generar la necesidad de refinar la definición inicial a partir del análisis de casos que comparten monotonía, pero no cumplen proporcionalidad directa.

Tercera actividad: Búsqueda en fuentes formales y revisión de la definición a partir de invariantes. Se propuso revisar definiciones de proporcionalidad directa en textos de referencia y contrastarlas con los fenómenos trabajados en la actividad anterior. La discusión se orientó a identificar condiciones necesarias y suficientes, especialmente la invariancia de la razón. El objetivo fue reconstruir colectivamente una definición que permitiera discriminar de manera explícita entre los modelos $f(x)=mx$ y $f(x)=mx+b$.

Cuarta actividad: Puesta a prueba de la nueva definición mediante contraejemplos. Una vez incorporada la condición de correspondencia del cero como posible condición definitoria, se presentaron nuevas situaciones en las que los datos cumplen dicha correspondencia, pero la relación no es proporcional directa (p. ej. relaciones no lineales). La intención fue evidenciar que pasar por el origen aunado a la monotonía sigue sin ser suficiente y reforzar el papel de la razón constante como invariante definitoria.

Quinta actividad: Inclusión de la constante de proporcionalidad negativa. Se trabajaron problemas en los que la constante de proporcionalidad es negativa, de modo que la covariación entre magnitudes no responde al patrón aumenta-aumenta. Esta parte se diseñó para ampliar el repertorio fenomenológico asociado a la proporcionalidad directa y para discutir la diferencia entre el signo de la constante y el tipo de proporcionalidad, evitando interpretaciones que desplazan estos casos hacia la proporcionalidad inversa.

Sexta actividad: Exploración de regularidades en tablas y articulación con propiedades multiplicativas. Las participantes construyeron tablas de valores para distintos tipos de constantes de proporcionalidad (enteras positivas, fraccionarias positivas y enteras negativas) y analizaron regularidades numéricas asociadas a partir de cuestionamientos guiados. La discusión se orientó a explicitar propiedades multiplicativas y relaciones invariantes, retomando los productos internos y externos descritos por Block et al. (2010). El propósito fue construir una definición basada en una generalidad y vincularla con criterios operativos de identificación y validación en representaciones tabulares o fenomenológicas.

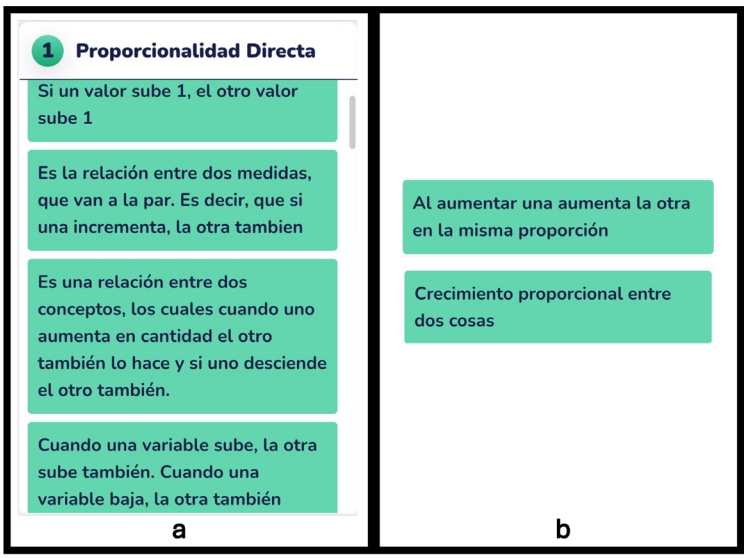
RESULTADOS

En este apartado se presentan los principales conocimientos movilizados durante el trabajo con la tarea formativa. Dado que se trata de un grupo, no se pretende afirmar que estos conocimientos sean representativos de todas las participantes ni diferenciarlos por estudiante.

En la primera actividad, las participantes pusieron de manifiesto lo que sabían sobre la definición de proporcionalidad directa (KoT). Aunque algunas de ellas dijeron no saber definirla o emplearon ambigüedades (p. ej. "Relación entre dos magnitudes"), la definición que identificaban estaba mayoritariamente sustentada de manera específica en la monotonía (creciente o decreciente) de la relación entre magnitudes (Figura 1a), y se generó también un debate sobre la característica de no recursividad en la definición (KPM) (Figura 1b).

Figura 2

Ejemplos de definiciones de proporcionalidad directa de futuras maestras



Con una definición provisional basada en la monotonía, por haber aparecido en la mayoría de las propuestas, en la segunda actividad se movilizaron conocimientos procedimentales (KoT), sustentados en el uso frecuente de la regla de tres para resolver problemas que se modelizan con f(x)=mx, en consonancia con lo reportado por Burgos y Godino (2021). En los problemas modelizados con f(x)=mx+b las resoluciones solían ser correctas, pero, al cuestionar si se trataba de proporcionalidad directa, una futura maestra comentó que "los niños pueden usar la regla de tres y estarían sumando de más", aludiendo a la multiplicación indebida del término b. Este comentario evidencia el conocimiento sobre efectos del trabajo exclusivamente procedimental en la relación del estudiantado con el contenido (KFLM), al anticipar errores derivados de la aplicación mecánica de un mismo algoritmo.

En la tercera actividad se exploró la movilización de conocimientos a partir del contraste entre la imagen conceptual grupal compuesta parcialmente por su definición y los problemas anteriores y una definición basada en la razón constante entre valores correspondientes de dos magnitudes. En este tramo se evidenciaron formas de concebir la relación entre imagen y definición del concepto, ya sea como equivalentes o jerárquicas (KPM), como sugiere el siguiente diálogo entre una futura maestra (M1) y el formador (F):

M1: Como se están dividiendo, si tú cambias el valor de este [numerador] y quieres que [el cociente] siga siendo el mismo número, debes cambiar también el valor de este [denominador]… si este es más grande, este también

F: ¿Entonces ambas definiciones son equivalentes?

M1: Yo diría que sí, pero me lía pensarlo al revés.

F: Que yo sé que cuando una [magnitud] crece la otra [magnitud] crece, pero no sé cómo llegar a que se forman fracciones equivalentes y si eso es así o no siempre se forman.

Aunque la maestra no nombra explícitamente las nociones de equivalencia o jerarquía, sus intentos de transformación entre ambas proposiciones se corresponden con rasgos descritos por Escudero et al. (2014). Además, en su explicación se establece una conexión entre proporcionalidad directa y fracciones equivalentes (KSM), empleada como vía para dotar de sentido al proceso de verificación.

Al verificar el cumplimiento de la definición reconstruida en la tercera actividad en los problemas trabajados en la segunda, una parte del grupo asumió inicialmente que se cumplía, al centrar el análisis

en los datos previos al valor inicial. Cuando algunas participantes propusieron considerar el fenómeno completo, el grupo acordó que, para tratarse de proporcionalidad directa, los problemas no debían incluir un valor inicial distinto de cero. En este punto se movilizó conocimiento relativo a la degeneración de la definición (Escudero et al., 2014) (KPM) y se adoptó una formulación breve del tipo "cuando ambas crecen o decrecen y pasan por el cero".

En la cuarta actividad las futuras maestras resolvieron problemas que se modelizan con funciones que pasan por el origen y son monótonas crecientes, pero no lineales, como calcular el cambio en el área de un rectángulo en función del cambio en la medida de sus lados manteniendo las proporciones. Esto las llevó a movilizar conocimientos vinculados con los contenidos de los problemas, en ocasiones con errores en el proceso de resolución (KoT). A partir de esas dificultades, se discutió la pertinencia de este tipo de tareas en relación con el currículo vigente (KMLS). Asimismo, se movilizó conocimiento sobre el papel de la necesidad y la suficiencia en las definiciones (KPM), al concluir que el paso por el origen y la monotonía no garantizaban la proporcionalidad directa y que era necesario explicitar la forma en que ambas magnitudes covarían.

La quinta actividad desplazó el debate hacia la exploración de un fenómeno lineal de crecimiento-decrecimiento. En esta actividad las futuras maestras confrontaron el fenómeno (balance en tarjeta de crédito en función de una cantidad de gastos idénticos) con su imagen conceptual de proporcionalidad inversa (KoT), y el foco del análisis pasó de la insuficiencia de la condición de monotonía a su posible no necesidad. Algunas participantes propusieron modificar el enunciado del problema para hablar de deuda en lugar de balance, con el fin de mantener el patrón aumenta-aumenta, y argumentaron que los números negativos no son un contenido de primaria (KMLS) y que su inclusión llevaría a errores en el estudiantado. Ante ello se produjo el siguiente diálogo entre el formador y una futura maestra (M2), que respondió en lugar de quien había planteado inicialmente el razonamiento:

F: Ahora mismo no estamos pensando en los estudiantes, sino en la definición, pero si quisiéramos evitar errores, ¿qué tal nos está yendo con la definición actual?

M2: Yo creo que el problema no es si metemos negativos o no en primaria, sino que todo lo hacemos mecánico y que vemos que ambas [magnitudes] crecen y lo llevamos a [resolverlo con] regla de 3 y hasta nosotros nos equivocamos.

F: Vale, la mecanización al resolver problemas nos hace equivocarnos, pero ¿qué dirías sobre la mecanización que ahora mismo tenemos con la definición?

M2: Pues lo mismo. Tú ahora nos dices que está mal que digamos "cuando una crece la otra crece", o bueno, el problema es lo que nos dice, pero yo lo que veo es que quizá debamos fijarnos en otra cosa y no es si ambas crecen o una sí y la otra no.

En este intercambio, además del reconocimiento de la mecanización como fuente de errores (KFLM), la futura maestra moviliza conocimiento sobre alternativas para definir, al desplazar el foco desde la covariación cualitativa hacia otros elementos a caracterizar (KPM).

En la sexta actividad, al solicitarse que se expresara la proporcionalidad directa en formato tabular, las futuras maestras movilizaron conocimiento sobre este registro de representación (KoT). También reforzaron el significado de fracción como cociente para construir tablas asociadas a constantes de proporcionalidad fraccionarias utilizando únicamente datos enteros, ya que el interés de la actividad era explorar regularidades de modo que la construcción de las tablas se restringió a procedimientos coherentes con la condición de razón constante. En este tramo se movilizó conocimiento relativo a la invariancia de la definición ante cambios de registro (KPM).

Los cuestionamientos para el análisis de regularidades incluyeron procesos aditivos y multiplicativos, y en este registro no aparecieron estrategias aditivas erróneas como las reportadas por Buforn (2017). Las futuras maestras dedujeron que, al sumar o restar dos parejas de datos de una tabla, los resultados

también quedaban emparejados (cuando los nuevos pares no estaban en la tabla, verificaban si el cociente se mantenía constante para incorporarlos). Asimismo, dedujeron que esta forma de proceder para la multiplicación y división no era válida en general, salvo cuando la constante era 1 (KPM). También identificaron que, para constantes distintas de 1, sumar o restar el mismo valor a datos emparejados no preservaba el emparejamiento, mientras que multiplicar o dividir por el mismo factor sí lo preservaba (KoT).

En todos los casos se solicitó una justificación fenomenológica de las deducciones, siendo el contexto de compraventa el más empleado. Tras ello, las futuras maestras exploraron las ideas centrales de Block et al. (2010) y, mediante una revisión retrospectiva apoyada en las tablas y en los problemas previos, verificaron el cumplimiento de la definición "al doble le toca el doble". Finalmente, vincularon dicha definición con las propiedades exploradas y la conectaron con la discusión final: cuando se multiplica o divide por un valor a una magnitud, la otra magnitud se multiplica o divide por el mismo valor.

Como cierre, las futuras maestras analizaron si la nueva definición era completa o si requería incorporar explícitamente el paso por el origen de ambas magnitudes (KPM). Concluyeron que, siempre que la definición se cumple, obliga al paso por el origen y que, si dos magnitudes no pasan por el origen, la definición no se cumple.

CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos permiten matizar el diagnóstico recurrente en la literatura sobre el predominio de aproximaciones procedimentales en el futuro profesorado al abordar la proporcionalidad directa (e. g. Buforn et al., 2018). Al inicio de la experiencia formativa reaparecen rasgos bien documentados: una definición sustentada en monotonía, la identificación de la proporcionalidad con la regla de tres y una tendencia a justificar la validez en términos operacionales. Cuando la tarea desplaza el foco hacia el contraste de la relación entre imagen conceptual y definición, emerge un espacio de trabajo en el que las participantes deben decidir, con criterios explícitos, qué condiciones son necesarias suficientes para identificar la proporcionalidad directa.

En ese sentido, el estudio aporta evidencia de que una tarea centrada en definición puede activar de manera particularmente nítida componentes del conocimiento especializado que suelen quedar ocultos cuando la actividad formativa se organiza alrededor de la resolución rutinaria. La discusión sobre el alcance de formulaciones no recursivas, la necesidad de incorporar invariantes y la revisión de la definición ante contraejemplos operan como disparadores de KPM en interacción con KoT, y permiten observar conexiones estructurales, por ejemplo, con fracciones equivalentes, como soporte para la verificación (KSM). Además, en consonancia con trabajos que señalan limitaciones del futuro profesorado para sostener análisis finos del contenido y para diseñar o evaluar tareas más allá de indicadores generales (Castillo y Burgos, 2023; Burgos y Chaverri, 2023), se identifican momentos en los que las participantes desplazan el debate hacia consideraciones curriculares o de potenciales errores del estudiantado. Este desplazamiento aparece como una consecuencia de la profundización en el acto de definir: una definición débil no solo genera clasificaciones erróneas, también compromete la interpretación didáctica de lo que el alumnado hace cuando aplica procedimientos de manera mecánica.

A la luz de lo anterior, el principal resultado de esta comunicación es la caracterización del tipo de conocimiento que se moviliza cuando el trabajo formativo se organiza alrededor de la tensión imagen-definición, además de construir una mejor definición escolar de proporcionalidad directa. No obstante, es importante acotar el alcance de la tarea presentada, en tanto que esta no fue diseñada para cubrir de manera exhaustiva la noción de proporcionalidad directa en la formación inicial, ni para atender todas sus dimensiones de enseñanza y aprendizaje. Su propósito fue explorar el conocimiento especializado que se moviliza cuando el eje se sitúa en un análisis profundo de la imagen conceptual y la definición del concepto, mediante contrastes sistemáticos entre casos y contraejemplos. En esa

medida, el valor de la propuesta reside en su capacidad para generar evidencias sobre cómo el futuro profesorado negocia criterios definitorios, reorganiza significados y articula prácticas matemáticas relevantes para comprender la enseñanza de la proporcionalidad con rigor y sentido.

Agradecimientos

Este trabajo fue realizado al amparo del proyecto PID2024-158877NB-I00, financiado por el Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades. Forma parte de la producción de la Red MTSK, auspiciada por AUIP.

Referencias

Block, D., Mendoza, T. y Ramírez, M. (2010). *¿Al doble le toca el doble? La enseñanza de la proporcionalidad en la educación básica*. Ediciones SM.

Buforn, À. (2017). *Características de la competencia docente mirar profesionalmente de los estudiantes para maestro en relación al razonamiento proporcional* [Tesis doctoral, Universidad de Alicante]. Repositorio Institucional de la Universidad de Alicante (RUA)

Buforn, À., Llinares, S. y Fernández, C. (2018). Características del conocimiento de los estudiantes para maestro españoles en relación con la fracción, razón y proporción. *RMIE*, *23*(76), 229-251.

Burgos, M. y Godino, J. D. (2021). Conocimiento didáctico-matemático de la proporcionalidad en futuros maestros de Educación Primaria. *Profesorado, Revista de Currículum y Formación del Profesora*do, *25*(2), 281-306. https://doi.org/10.30827/profesorado.v25i2.8725

Burgos, M. y Chaverri, J. (2023). Explorando la percepción de futuros maestros de primaria sobre el pensamiento matemático de los alumnos en un problema de proporcionalidad. *Aula Abierta*, *52*(1), 43-52. https://doi.org/10.17811/rifie.52.1.2023.43-52

Carrillo, J., Montes, M. y Climent, N. (Eds.) (2022). *Investigaciones sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): 10 años de camino*. Dykinson.

Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, Á., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, *20*(3), 236–253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Castillo, M. J. y Burgos, M. (2023). Idoneidad didáctica de lecciones de proporcionalidad de libros de texto: una experiencia de análisis con maestros en formación. *PNA. Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, *17*(2), 173-204. https://doi.org/10.30827/pna.v17i2.24089

Elias, H. R., Powell, A. B., Haydar, H. N. y Ribeiro, A. J. (2025). A Systematic Literature Review on Proportionality. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *39*(1), e2402011. https://doi.org/10.1590/1980-4415v39a2402011

Escudero, I. M., Gavilán, J. M. y Sánchez-Matamoros, G. (2014). Una aproximación a los cambios en el discurso matemático generados en el proceso de definir. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *17*(1), 7-32. https://doi.org/10.12802/relime.13.1711

Obando, G., Vasco, C. E. y Arboleda, L. C. (2014). Enseñanza y aprendizaje de la razón, la proporción y la proporcionalidad: un estado del arte. *Relime*, *17*(1), 59-81. https://doi.org/10.12802/relime.13.1713

Stake, R. E. (1995). *The art of case study research*. SAGE Publications.

Valverde, A. G. y Castro, E. (2009). Actuaciones de maestros en formación en la resolución de problemas de proporcionalidad directa. En M.J. González, M.T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 523-531). SEIEM.

Vinner, S. (2002). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. En D. Tall (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 65-81). Springer. https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1_5

Willis, J. W. (2007). *Foundations of Qualitative Research: Interpretative and Critical Approaches*. SAGE Publications.

AMBIGÜEDADES Y CONFLICTOS SEMIÓTICOS

Ambiguities and semiotic conflicts

Font, V., Breda, A., Verón, A. y Vanegas, Y.

Universitat de Barcelona

Resumen

En esta comunicación, se reporta una reflexión teórica en torno a la noción de conflicto semiótico, constructo generado en el marco del enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática, y su relación con la noción de ambigüedad. El primer objetivo es ampliar la tipología de conflictos semióticos con la distinción entre conflicto actual y potencial. El segundo es establecer una relación entre la noción de ambigüedad, un componente del criterio de idoneidad epistémica, y la de conflicto semiótico. El tercer objetivo es clarificar el tipo de reflexión que interesa cuando el profesorado reflexiona sobre las ambigüedades que él propicia.

Palabras clave: *ambigüedad, conflicto semiótico, reflexión docente*

Abstract

This paper presents a theoretical reflection on the notion of semiotic conflict, a construct developed within the framework of the Ontosemiotic Approach to Cognition and Mathematics Education, and its relationship to the notion of ambiguity. The first objective is to expand the typology of semiotic conflicts by distinguishing between actual and potential conflicts. The second is to establish a relationship between the notion of ambiguity, a component of the criterion of epistemic appropriateness, and that of semiotic conflict. The third is to clarify the type of reflection that is relevant when teachers reflect on the ambiguities they foster.

Keywords: *ambiguities, semiotic conflicts, teaching reflection*

INTRODUCCIÓN

En Font (en prensa), en el marco de la problemática de la formación del profesorado de matemáticas, se formula el llamado problema del diseño instruccional: qué criterios hay que suministrar al profesorado de matemáticas para que estos diseñen, implementen y rediseñen secuencias de tareas cada vez mejores; así como diferentes soluciones a dicho problema. En esta comunicación nos interesa una de sus soluciones: la integración de los criterios de idoneidad didáctica (CID) y del diseño universal del aprendizaje (DUA) para organizar la reflexión del profesorado sobre su práctica.

Diversos autores han realizado investigaciones sobre el uso de los CID para organizar la reflexión del profesorado (por ejemplo, Beltrán-Pellicer et al., 2018) y, más recientemente, sobre el uso de los CID y del diseño universal del aprendizaje (DUA) para organizar la reflexión del profesorado sobre su práctica (Sánchez et al., 2025). La pauta integrada CID-DUA, propuesta en Sánchez et al. (2025) es el resultado de la integración de la pauta CID propuesta en Breda et al. (2017) y la versión 2,2 de la pauta del DUA (CAST, 2018). En esta última pauta se incorpora el componente ambigüedades del criterio de idoneidad epistémico, que ya estaba contemplado en la pauta CID (Breda et al., 2017).

En Sánchez et al. (2022) se presentaron resultados que respondían a las siguientes preguntas: 1) ¿Identifican ambigüedades los futuros profesores al reflexionar sobre su implementación? 2) ¿qué tipos de ambigüedades identifican?, a partir del análisis de los Trabajos de Fin de Máster (TFM) de varias promociones de futuros profesores de un máster de formación del profesorado de educación secundaria de matemáticas. En este máster, los futuros profesores realizan un TFM donde reflexionan

Font, V., Breda, A., Verón, A. y Vanegas, Y. (2026). Ambigüedades y conflictos semióticos. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (pp. 234-241). SEIEM.

sobre la secuencia de tareas que han implementado en el período de prácticas en los centros educativos; el objetivo del TFM es que los futuros profesores reflexionen sobre su propia práctica usando los CID como herramienta para organizarla y propongan mejoras de la secuencia de tareas que han implementado. En particular, dentro del análisis que realizan, han de reflexionar sobre si propiciaron ambigüedades durante la implementación de su unidad didáctica. En Sánchez et al. (2022) se concluye que, a pesar de presentar los CID en las clases del máster y explicar su uso, algunos participantes confunden ambigüedades con errores matemáticos. Por esta razón, proponen que, en el proceso de reflexión de los futuros profesores, sería conveniente conseguir un mayor detalle en el análisis de las ambigüedades presentes en sus implementaciones didácticas; y, además, proponen, como continuación de su investigación, desarrollar una pauta que ayude a los profesores a distinguir entre error y ambigüedad y también a identificar tipos de ambigüedades, así como para que sean conscientes de las situaciones en las que se suelen producir; y, también, distinguir entre los errores de los alumnos que tienen un origen en la forma en la que el profesor hace su explicación, y otros cuyo origen es las matemáticas mismas o los usos lingüísticos convencionales.

En este trabajo, en la línea sugerida en Sánchez et al. (2022), nos interesa profundizar en el componente ambigüedades del criterio de idoneidad epistémica de esta pauta integrada CID-DUA y su relación con la noción de conflicto semiótico propuesto en el marco del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS). La primera pregunta que nos formulamos fue ¿qué tipo de reflexión interesa cuando el profesorado reflexiona sobre el componente ambigüedades del criterio de idoneidad epistémica de la pauta CID-DUA? Para responderla, llegamos a la conclusión que era necesario antes responder a la siguiente pregunta: ¿cuál era la relación entre la noción de ambigüedad y la de conflicto semiótico? y llegamos a la conclusión que para responderla era necesario primero ampliar la clasificación de conflictos semióticos contemplada en el EOS con la dualidad conflicto actual/potencial. De acuerdo con las preguntas anteriores nos planteamos tres objetivos. El primer objetivo de este estudio es ampliar la tipología de conflictos semióticos con la dualidad actual/potencial. El segundo es relacionar la noción de ambigüedad y la de conflicto semiótico. El tercero es clarificar el tipo de reflexión que interesa cuando el profesorado reflexiona sobre el componente ambigüedades del criterio de idoneidad epistémica de la pauta CID-DUA.

MARCO TEÓRICO

En esta sección se explica la noción de conflicto semiótico, constructo generado en el marco del EOS, y la de ambigüedad, un componente del criterio de idoneidad epistémica.

Conflictos semióticos

En el EOS se ha generado la noción de conflicto semiótico y una tipología de estos conflictos:

> Describe cualquier disparidad o discordancia entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos (personas o instituciones). Si la disparidad se produce entre significados institucionales hablamos de conflictos semióticos de tipo epistémico, mientras que, si la disparidad se produce entre prácticas que forman el significado personal de un mismo sujeto, los designamos como conflictos semióticos de tipo cognitivo. Cuando la disparidad se produce entre las prácticas (discursivas y operativas) de dos sujetos diferentes en interacción comunicativa (por ejemplo, alumno-alumno o alumno-profesor) hablaremos de conflictos (semióticos) interaccionales. (Godino, 2024, p. 240)

Criterios de idoneidad didáctica

En Sánchez et al. (2025) se explica un modelo de diseño instruccional basado en una pauta CID-DUA que integra la pauta que hace operativo el constructo CID (Breda et al, 2017), con la versión 2,2 de la pauta del DUA (CAST, 2018), para ser usada como herramienta para organizar la reflexión del profesorado de matemáticas sobre su práctica. Esta pauta integrada CID-DUA considera los mismos seis criterios de idoneidad parcial que el constructo CID: 1) Idoneidad epistémica, para valorar si las matemáticas que se enseñan son “buenas matemáticas”; 2) Idoneidad cognitiva, para valorar si lo que

se quiere enseñar está a una distancia razonable, es decir en la zona d desarrollo próximo, de lo que saben los alumnos y, si los aprendizajes logrados se acercan a los pretendidos; 3) Idoneidad interaccional, para valorar si las interacciones resuelven dudas y dificultades de los alumnos; 4) Idoneidad mediacional, para valorar la adecuación de los recursos materiales y temporales usados en el proceso de instrucción; 5) Idoneidad emocional, para valorar la implicación (intereses y motivaciones) de los alumnos durante el proceso; y, 6) Idoneidad ecológica, para valorar la adecuación del proceso de instrucción al proyecto educativo del centro, directrices curriculares, condiciones del entorno social y profesional, entre otros (Font et al., 2010). Para la operatividad de estos criterios se define un conjunto de componentes e indicadores observables que sirven de guía para la valoración del proceso de instrucción en cualquier etapa educativa. En particular, en el criterio de idoneidad epistémica se contempla el componente 'Ambigüedades', que es el que aquí interesa.

Tabla 6

Indicadores del componente ambigüedades del Criterio de Idoneidad Epistémica

Fuente: Sánchez et al. (2025, p. 6)

Componentes	Indicadores
Ambigüedades	No se observan ambigüedades que puedan llevar a la confusión a los alumnos: definiciones y procedimientos clara y correctamente enunciados, adaptados al nivel educativo al que se dirigen; adecuación de las explicaciones, comprobaciones, demostraciones al nivel educativo al que se dirigen, uso controlado de metáforas, entre otros.

Ambigüedades

La ambigüedad ocurre en las lenguas naturales, y consiste en que una sola construcción lingüística posee más de un significado. Técnicamente, una construcción lingüística o emisión es ambigua si puede ser interpretada de más de una manera (Löbner, 2002). esta misma caracterización de ambigüedad, de acuerdo con Sol et al. (2024), se puede aplicar cuando en lugar de la lengua natural nos referimos a la lengua utilizada en las clases de matemáticas.

Diversos autores se han interesado por las ambigüedades en las matemáticas. Byers (2007) afirma que no solo existe ambigüedad en las matemáticas, sino que es esencial para su desarrollo: una fuente de creatividad que puede llevar a los matemáticos (y a quienes aprenden matemáticas) a nuevas ideas y perspectivas al intentar resolver múltiples y conflictivas formas de abordar una situación matemática concreta. Para este autor, la ambigüedad es la coexistencia de múltiples interpretaciones, significados o perspectivas, sobre todo, de un mismo concepto, y, lo que es más importante, surge cuando este mismo concepto, puede entenderse de más de una manera (por ejemplo, geométrica versus algebraica). Para este autor y otros (Grosholz, 2007), la ambigüedad no es un error, sino una condición que permite descubrir nuevas matemáticas. Grosholz (2007), describe lo que ella denomina «ambigüedad productiva»; y, en los numerosos ejemplos que ofrece, la ambigüedad está vinculada a diferentes modos de representación y da lugar a la capacidad de ver y describir un fenómeno de múltiples maneras. Foster (2011) propuso examinar las circunstancias y las formas en que la ambigüedad podría resultar beneficiosa para los estudiantes de matemáticas. En consecuencia, amplió la noción de ambigüedad productiva y clasificó diferentes tipos de ambigüedad productiva específicos de las matemáticas (simbólica, de soluciones múltiples, paradigmática, en la definición, lingüística, entre otras). Más recientemente Marmut y Zazkis (2022) describen como la perspectiva de la ambigüedad productiva puede enriquecer la formación del profesorado y el discurso en el aula.

El lenguaje matemático tiene el propósito de caracterizar los hechos y las reglas de razonamiento con precisión alejándose de las ambivalencias propias del lenguaje natural -entre otras razones, en las matemáticas hay términos técnicos que, utilizados en el lenguaje cotidiano, pueden tener diferentes interpretaciones como, por ejemplo, diferencia o pendiente-. Por otra parte, para su enseñanza, los contenidos matemáticos se modifican y adaptan para que sean más asequibles, por ejemplo, ciertas

definiciones se simplifican y resultan imprecisas. Si bien algunas ambigüedades se relacionan con la transposición didáctica (Chevallard, 1991), no todas se pueden explicar por este proceso.

RELACIÓN ENTRE LA NOCIÓN DE CONFLICTO SEMIÓTICO Y LA DE AMBIGÜEDAD

Según la Real Academia Española (s. f.), un conflicto tiene seis acepciones que se pueden reelaborar como un "enfrentamiento, lucha, pelea o colisión entre personas, ideas o fuerzas opuestas". Puede referirse a una situación de difícil salida, a un problema o, en psicología, a la coexistencia de tendencias contradictorias que generan angustia. Por tanto, lo primero que hay que aclarar es que lo que aquí nos interesa no son conflictos que generen peleas entre personas, sino conflictos de ideas; más en concreto, se trata de conflictos de significado, de interpretación, etc., entre dos sujetos (personas o instituciones). Es importante clarificar que en el conflicto semiótico hay dos interpretaciones, que no necesariamente han de ser errores, aunque pueden serlo.

Tipología de conflictos semióticos

En el EOS se consideran tres tipos de conflictos semióticos: cognitivos, epistémicos e interaccionales, pero es importante señalar que no se trata de conjuntos de conflictos disjuntos.

Conflictos semióticos interaccionales: Cuando la disparidad se produce entre las prácticas (discursivas y operativas) de dos sujetos diferentes en interacción comunicativa (por ejemplo, alumno-alumno o alumno-profesor) se habla de conflictos semióticos interaccionales. La resolución de un conflicto interaccional es un aspecto clave en el proceso de enseñanza y aprendizaje como se puede ver en Font y Contreras (2008) donde se describen dos conflictos interaccionales entre alumnado y profesorado en los que el profesorado explica a su alumnado las reglas que rigen el uso del ejemplo genérico. Ahora bien, todos los conflictos en cierta manera se pueden considerar interaccionales ya que hay dos interpretaciones dispares en interacción, pero cuando la interacción se da entre interpretaciones de la misma persona se llaman cognitivos; y cuando la interacción se da entre instituciones (o entre representantes de estas instituciones) se llaman epistémicos. Dicho de otra manera, si un conflicto interaccional se puede considerar cognitivo o epistémico hablaremos de conflicto cognitivo o epistémico y no de conflicto interaccional.

Conflictos cognitivos: En el EOS la noción de conflicto cognitivo se toma de Piaget, quien considera que el desarrollo intelectual implica una autoregulación, ya que cuando nuevas ideas inciden sobre las ya existentes puede suceder que provoquen un conflicto. Este conflicto es la causa de un desequilibrio que se ha de resolver. Como ser vivo que es, un alumno ha de reconciliar cualquier perturbación con la estabilidad de su estado mental. Piaget utiliza el término "equilibración" para referirse a este fenómeno e introduce dos ideas relacionadas con él: la de asimilación y la de acomodación. Por asimilación entiende la adopción y aceptación de nuevas ideas; y por acomodación entiende todo aquello que puede ser necesario para modificar ideas ya aceptadas de manera que sea posible la asimilación. Estos dos procesos se producen juntos y, generalmente, son inseparables.

Las experiencias que se han realizado en el aula, basadas en el conflicto cognitivo, siguen básicamente la siguiente estructura: 1) fase inicial: en la que se ponen de manifiesto las ideas intuitivas de los alumnos, 2) fase de conflicto: las ideas intuitivas entran en conflicto con las ideas de otros compañeros o bien por la intervención del profesor, 3) fase de resolución del conflicto: en esta fase el alumno es consciente de que sus ideas son insuficientes o incorrectas y ve la necesidad de asimilar las ideas de los otros alumnos o las del profesor, o bien de buscar nuevas, y 4) fase de consolidación: realización de ejercicios, problemas, trabajos, etc. que permiten la consolidación del nuevo aprendizaje.

La idea esencial del conflicto cognitivo es que el conflicto se produce entre dos interpretaciones del mismo sujeto y que la intervención del profesor se focaliza en generar el conflicto para que sea el alumno quien lo resuelva, no lo resuelve el profesor. En la literatura hay muchos ejemplos de cómo el profesorado usa la técnica del conflicto cognitivo. Por ejemplo, en Dickson et al. (1991, pp. 46-47) se muestra cómo un entrevistador, a partir de sus preguntas, consigue que un alumno que, cuando se

le pide que trace un círculo y un diámetro, dibuja un círculo con dos diámetros perpendiculares, llegue a la conclusión, él mismo, de que el círculo tiene infinitos diámetros.

Si bien la idea de conflicto cognitivo es la de un conflicto con uno mismo, se pude ampliar y hablar de conflicto cognitivo de grupo, ya que para que el grupo cambie de interpretación como mínimo uno de sus miembros tiene que haber tenido un conflicto cognitivo.

Conflictos epistémicos: En el EOS si la disparidad se produce entre significados institucionales hablamos de conflictos semióticos de tipo epistémico.

En Font et al. (2010) se presenta un ejemplo de cómo un conflicto cognitivo se convierte en un conflicto epistémico. Estos autores analizan un episodio de aula que tiene lugar en una clase de matemáticas con estudiantes de 15 y 16 años (enseñanza obligatoria) de una escuela pública en España. En la primera lección el profesor propone la dinámica de resolver un problema en pequeños grupos y llevar a cabo una puesta en común. El enunciado del problema (escrito en una hoja para cada grupo) menciona dos barrios de la ciudad, uno cercano a la escuela y conocido por los alumnos. El profesor supone que tienen los conocimientos y las habilidades matemáticas requeridas para resolver la tarea; disponen, además, de calculadoras.

El episodio se inicia después de que Alicia, Emilio y Mateo, miembros de un grupo, le hayan dicho al profesor que no han consensuado una solución común al problema. El profesor pretende crear un conflicto semiótico de tipo cognitivo en Emilio. Emilio, en lugar de resolver el conflicto semiótico de tipo cognitivo de la manera que espera el profesor plantea un conflicto semiótico de tipo epistémico entre la institución "mundo de la vida", representada por él, y la institución "clase de matemáticas", representada por el profesor. El paso del conflicto cognitivo al epistémico es posible por la familiaridad de Emilio con el contexto del problema. Dicho conflicto es resuelto por el profesor apelando al principio de autoridad. En general, los conflictos semióticos de tipo epistémico se resuelven por el principio de autoridad, en el sentido que se impone la visión institucional de una de las dos instituciones como la única válida.

Conflictos semióticos actuales y potenciales

Otra clasificación de conflictos es aquella que considera conflictos actuales y potenciales, los cuales, a su vez, pueden ser interaccionales, cognitivos o epistémicos. Todo conflicto actual lo es porque se da. En la mayoría de los casos un conflicto actual viene de un conflicto potencial, pero no siempre, y lo que lo hace actual es que se da, pero no todo conflicto potencial llega a ser un conflicto actual (es decir, no es inevitable bajo ciertas circunstancias). Los conflictos semióticos potenciales son aquellos que se pueden dar, pero también puede pasar que no se den. En este último grupo hay que situar:

a) Los que se pueden dar por las limitaciones espaciotemporales de los símbolos matemáticos. Por ejemplo, la gráfica de una función no se puede representar toda, por lo que preguntar por el dominio se presta a interpretar el máximo dominio o bien el dominio de la parte de la gráfica que se representa.

b) Los que se pueden producir por la ambigüedad de los símbolos matemáticos (polisemia de algunos símbolos, uso de elementos genéricos, etc.). Por ejemplo, *ab* puede ser un producto de *a* por *b* o bien un numero de dos dígitos. En estos casos normalmente hay un contexto que juega un papel central para saber si estamos en el primero o en el segundo caso.

c) Por la complejidad de las nociones matemáticas. Entre estos conflictos semióticos destacan, por su relevancia, aquellos que pueden ser originados en un libro de texto cuando los autores dejan a cargo del lector la realización de determinadas funciones semióticas que son básicas para la correcta interpretación del texto. Un ejemplo se halla en Font y Contreras (2008) donde, al analizar la definición de derivada dada en un texto utilizado en el nivel de Bachillerato, se concluye que los autores del libro dejan a cargo del alumno el establecimiento de funciones semióticas que son clave para comprender esta definición, lo cual puede conducirles a un conflicto semiótico potencial.

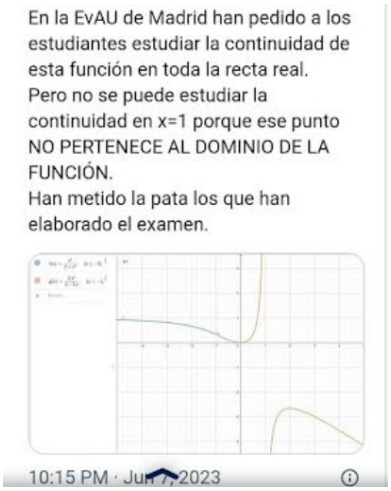
d) Conflictos semióticos epistémicos por la transposición didáctica. Por ejemplo, se tiene en el bachillerato, donde la función $f(x) = 1/x^2$tiene una discontinuidad asintótica en x= 0, en cambio en la universidad solo se puede considerar discontinuidades de los valores que son del dominio.

Los conflictos epistémicos potenciales se pueden convertir en actuales, aunque no necesariamente, cuando las dos instituciones tienen, metafóricamente, una frontera (una zona de contacto como, por ejemplo, las pruebas de selectividad). Por ejemplo, preguntar en un examen de selectividad por la continuidad de determinadas funciones ha producido problemas ya que se puede considerar una u otra interpretación posible (la de la universidad o la del bachillerato); este fue el caso de las pruebas de acceso a la universidad en Madrid en junio de 2023, Matemáticas II - Ejercicio B2, en las que se pidió estudiar la continuidad de una función (no definida en *x*= 1) en toda la recta real. Un ejemplo de este conflicto es este comentario (anonimizado) publicado en redes sociales sobre estas pruebas:

Figura 1

Comentario en redes sociales anonimizado

Fuente: redes sociales



Otro ejemplo, son los conflictos que se dan cuando los alumnos tienen familiaridad con el contexto del problema y el profesor espera que éste se resuelva de acuerdo con el contrato didáctico vigente y no con base al conocimiento del contexto que tienen los alumnos. En este caso, para que el conflicto potencial se convierta en actual, es necesario que el alumnado tenga familiaridad con el contexto, y, también, es necesario que tenga la voluntad de poner en cuestión el contrato didáctico escolar.

Ambigüedades y su relación con los conflictos semióticos

En este trabajo nos interesan las ambigüedades que pueden derivar en conflictos semióticos (actuales o potenciales, sean de tipo interaccional, cognitivo o epistémico) generadas por el profesor sin que sean necesarias. Es decir, excluimos la polisemia propia de las matemáticas de la ambigüedad que nos interesa estudiar en esta comunicación. La polisemia es la pluralidad de significados de cualquier signo lingüístico. Por ejemplo, el signo "-" es polisémico al cambiar su significado según se aplique a un número (en este caso, es el signo del número y forma parte del número) o bien se aplique a una operación entre dos números (no forma parte del número). Dicho de otra manera, excluimos la polisemia cuya causa está en las mismas matemáticas y de la cual el profesor no sería responsable.

También excluimos aquellas que se pueden considerar como un resultado de la transposición didáctica y/o de la evolución histórica de un objeto matemático, y tampoco se pueda considerar que en ellas el profesor tenga responsabilidad. Un ejemplo, sería cómo se estudia la discontinuidad en el Bachillerato, otro sería el caso de la polisemia y la ambigüedad de la raíz cuadrada y del signo radical que se puede observar en los textos históricos y en los libros de texto actuales (el signo radical

aplicado a 4 es ambiguo, al no tener un solo valor, sino dos: $\sqrt{4}$ es +2 y −2; el signo radical es polisémico al cambiar su significado según se aplique a un número cuadrado perfecto o a una letra: aplicado a 4 representa un conjunto de dos valores y aplicado a la letra *a* representa un valor absoluto. Quedan excluidas, a su vez, las ambigüedades cuyo origen está en palabras que tienen un significado diferente en el lenguaje natural al que tienen en matemáticas y, también las que no especifican cuál ha sido la emisión del profesor que ha originado la ambigüedad y su grado de responsabilidad, por ejemplo, cuando el futuro profesor justifica la confusión o error del alumno por el hecho de suponer que la explicación realizada por él (sin detallarla) no ha sido clara. El hecho de que un objeto matemático pueda tener varios significados diferentes también queda excluido.

En este trabajo nos interesan, en particular, las emisiones del profesorado que son (o pueden ser) interpretadas por los alumnos de manera diferente a la que espera el profesorado al realizar esta emisión en las clases de matemáticas (sean textos escritos o emisiones orales) y que se pueden considerar que son de su responsabilidad. Dicho de otra manera, nos interesan los conflictos semióticos actuales o potenciales que son causados por ambigüedades presentes o generadas en las explicaciones del profesorado que se puedan considerar de su responsabilidad. Un ejemplo típico es el uso de metáforas que pueden ser tomadas en sentido literal por algunos alumnos. Ahora bien, esta doble interpretación (la que espera el profesor y la que hace el alumno de manera inesperada) no es suficiente, ya que siempre se puede dar, es decir el alumno siempre puede decir algo que sea inesperado para el profesor (por ejemplo, muchos chistes matemáticos); por tanto, es necesario que el profesor asuma algún tipo de responsabilidad por la interpretación inesperada del alumno.

Tipo de reflexión que interesa cuando el profesorado reflexiona sobre el componente ambigüedades del criterio de idoneidad epistémica de la pauta CID-DUA

Dado que la noción de ambigüedad puede abarcar un amplio abanico de emisiones, desde la perspectiva del criterio de idoneidad epistémico interesan las que tienen su origen en emisiones del profesor, en cuanto representante de la institución matemática; estas emisiones las puede hacer él directamente o bien hallarse en los libros de texto y material didáctico (emisiones que él avala). Por tanto, en este trabajo nos interesan, en particular, las emisiones del profesor que: a) son interpretadas por los alumnos de manera diferente a la que él espera al realizarlas, b) la interpretación del alumno le parece razonable al profesor, incluso cuando sea errónea y c) el profesor asume una cierta responsabilidad en el hecho de que suceda *a* y *b* (por ejemplo, en un examen acepta como respuesta correcta la respuesta inesperada que da el alumno, o que, en un nuevo rediseño, la definición imprecisa que ha originado la ambigüedad será modificada). Dicho de otra manera, en la pauta CID-DUA para organizar la reflexión del profesorado sobre su práctica, cuando se reflexiona sobre el componente ambigüedades, nos interesan las reflexiones que cumplen las tres condiciones anteriores.

CONSIDERACIONES FINALES

En esta comunicación se ha ampliado la tipología de conflictos semióticos considerados en el EOS y se ha relacionado esta noción con la de ambigüedad. Además, se clarifica el tipo de reflexión que se espera del profesorado sobre las ambigüedades que él propicia. La aparición de ambigüedades en el discurso del profesor es habitual e inevitable (y en algunos casos son ambigüedades productivas); y si bien muchas se resuelven por el contexto, otras no y pueden ser la causa de errores matemáticos en el alumnado. Por tanto, es importante que el docente sea consciente de estas ambigüedades y reflexione sobre sus causas porque le puede ayudar a detectar e interpretar los errores de sus alumnos.

Como continuación de este trabajo, en la línea de Sánchez et al. (2022), nos proponemos generar una pauta que ayude al profesorado a distinguir entre error y ambigüedad y también a identificar tipos de ambigüedades, así como para concienciarlos de las situaciones en las que se producen; y, también, distinguir entre los errores de los alumnos que tienen un origen en la forma en la que el profesor hace el discurso, y otros cuyo origen es las matemáticas mismas o los usos lingüísticos convencionales.

Referencias

Beltrán-Pellicer, P., Godino, J. D. y Giacomone, B. (2018). Elaboración de indicadores específicos de idoneidad didáctica en probabilidad: aplicación para la reflexión sobre la práctica docente. *Bolema*, *32* (61), 526-548. https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n61a11

Breda, A., Pino-Fan, L. y Font, V. (2017). Meta didactic-mathematical knowledge of teachers: Criteria for the reflection and assessment on teaching practice. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *13*(6), 1893-1918. https://doi.org/10.12973/eurasia.2017.01207a

Byers, W. (2007). *How mathematicians think: Using ambiguity, contradiction, and paradox to create mathematics*. Princeton University Press.

CAST. (2018). *Universal Design for Learning Guidelines version 2.2*. CAST. https://udlguidelines.cast.org/

Chevallard, Y. (1991). *La Transposition Didactique - du savoir savant au savoir enseigné*. La pensée sauvage.

Dickson, L., Brown, M. y Gibson, O. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas*. Labor-MEC

Font, V. (en prensa). Integración de los criterios de idoneidad didáctica y del diseño universal del aprendizaje para organizar la reflexión del profesorado. En *Actas XXIX Jornadas Nacionales De Educación Matemática*. SOCHIEM.

Font, V. y Contreras, Á. (2008). The problem of the particular and its relation to the general in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 69*, 33–52. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9123-7

Font, V., Planas, N. y Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Journal for the Study of Education and Development: Infancia y Aprendizaje, 33*(1), 89–105. https://doi.org/10.1174/021037010790317243

Foster, C. (2011). Productive ambiguity in the learning of mathematics. *For the Learning of Mathematics, 31*(2), 3–7.

Godino, J. D. (2024). *Enfoque ontosemiótico en educación matemática. Fundamentos, herramientas y aplicaciones*. McGraw Hill-Aula Magna.

Grosholz, E. R. (2007). *Representation and productive ambiguity in mathematics and the sciences*. Oxford University Press.

Löbner, S. (2002). *Understanding semantics*. Routledge.

Marmur, O. y Zazkis, R. (2022). Productive ambiguity in unconventional representations: "what the fraction is going on?". *Journal of Mathematics Teacher Education 25*, 637-665. https://doi.org/10.1007/s10857-021-09510-7

Real Academia Española. (s. f.). Conflicto. *Diccionario de la lengua española*. https://dle.rae.es/conflicto

Sánchez, A., Breda, A., Ledezma, C., Sala-Sebastià, G., Sol, T. y Font, V. (2022). ¿Qué conflictos semióticos detectan los futuros profesores en las clases de matemáticas que imparten? En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 529-537). SEIEM

Sánchez, A., Ledezma, C. y Font, V. (2025). A proposal of integration of universal design for learning and didactic suitability criteria. *Education Sciences, 15*(7), Article 909. https://doi.org/10.3390/educsci15070909

Sol, T., Breda, A., Font, V. y Sala-Sebastià, G. (2024). Argumentación práctica sobre ambigüedades en la valoración del diseño de una unidad didáctica sobre funciones. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 497-504). SEIEM.

EL CICLO DE INVESTIGACIÓN ESTADÍSTICA EN EDUCACIÓN PRIMARIA: DECISIONES Y TENSIONES AL TRABAJAR CON UNA VARIABLE CUALITATIVA CONTEXTUALIZADA

The statistical investigation cycle in Primary Education: decisions and tensions when working with a contextualised categorical variable

Fraile-González, J.[a], Palop, B.[a], Garrido-Martos, R[b]. y Blázquez, R.[c]

[a]Universidad Complutense de Madrid, [b]Universidad Autónoma de Madrid, [c]CRA Sierra Oeste.

Resumen

El desarrollo de investigaciones estadísticas escolares en contextos socialmente relevantes ofrece oportunidades para trabajar prácticas estadísticas a partir de datos contextualizados. En este contexto, este estudio analiza las tensiones que emergen cuando alumnado de 6.º de Educación Primaria desarrolla una investigación estadística sobre una variable cualitativa en un contexto STEAM socialmente relevante. Se presenta un estudio de casos instrumental en el que se compara el proceso seguido por dos grupos de aula. Los resultados muestran que el desarrollo de la investigación se configura a partir de decisiones tempranas sobre la categorización y de la gestión de las tensiones derivadas, en parte, del fuerte anclaje contextual de la variable. A su vez, estas tensiones conducen a revisiones del propio ciclo y ponen de manifiesto tanto su carácter iterativo como el papel estructurante del contexto en investigaciones estadísticas escolares.

Palabras clave: *educación estadística, investigación estadística, categorización de datos, GAISE, alfabetización estadística*

Abstract

The development of school statistical research projects in socially relevant contexts offers opportunities to work with statistical practices based on contextualised data. In this context, this study analyses the tensions that emerge when 6th-grade students develop a statistical research project on a qualitative variable in a socially relevant STEAM context. An instrumental case study is presented, comparing the process followed by two classroom groups. The results show that the development of the research is shaped by early decisions regarding categorisation and the management of tensions generated in part by the variable's strong contextual anchoring. In turn, these tensions lead to revisions of the research cycle itself and highlight both its iterative nature and the structuring role of context in school statistical research.

Keywords: *statistics education, statistical investigation, data categorization, GAISE, statistical literacy*

INTRODUCCIÓN

La alfabetización estadística se ha consolidado como una competencia fundamental para la ciudadanía actual, ligada a la capacidad de interpretar y evaluar críticamente información basada en datos y de comunicar juicios fundamentados (Gal, 2002). Para avanzar hacia ella es preciso implicar al alumnado en investigaciones estadísticas desde la enseñanza básica (Bargagliotti et al., 2020), en las que el contexto ayuda a encontrar significado en los patrones observados e interpretar los datos en relación con la situación estudiada (Pfannkuch, 2011). Sin embargo, la estadística escolar tiende a reducirse a procedimientos descontextualizados y a actividades centradas en la representación de datos (Alsina et al., 2023), relegando procesos como la recogida, clasificación y organización de datos

Fraile-González, J., Palop, B., Garrido-Martos, R. y Blázquez, R. (2026). El ciclo de investigación estadística en Educación Primaria: decisiones y tensiones al trabajar con una variable cualitativa contextualizada. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (pp. 242-249). SEIEM.

(Alsina, 2025) y dificultando la articulación entre conocimiento estadístico y contextual necesaria para interpretar los datos en situaciones reales (Pfannkuch, 2011). En este sentido, la Educación STEAM, que promueve la resolución de problemas contextualizados y socialmente relevantes (Quigley et al., 2017), puede ofrecer un marco adecuado para desarrollar investigaciones estadísticas. No obstante, la relevancia del contexto puede influir en el desarrollo del ciclo de investigación estadística y generar tensiones entre el significado contextual y el tratamiento estadístico de los datos (Rodríguez-Muñiz et al., 2022). Resulta, por tanto, necesario profundizar en cómo se desarrollan investigaciones estadísticas en contextos socialmente relevantes (Burrill y Pfannkuch, 2024). El objetivo de este estudio es analizar las tensiones que emergen cuando alumnado de 6.º de Educación Primaria desarrolla una investigación estadística sobre una variable cualitativa en un contexto STEAM socialmente relevante.

MARCO TEÓRICO

Los problemas realistas que se abordan desde la Educación STEAM pueden ofrecer un marco para trabajar la estadística desde contextos relevantes (Berciano, 2025). De esta forma, se puede avanzar hacia una concepción de la estadística escolar como una actividad de investigación basada en datos (Alsina et al., 2023). El reporte GAISE II (Bargagliotti et al., 2020) establece un ciclo de resolución de problemas de cuatro etapas: formular preguntas estadísticas, recoger o considerar datos, analizar datos e interpretar resultados. Este ciclo se concibe como un proceso iterativo en el que las decisiones adoptadas en cada fase pueden requerir revisiones posteriores. El trabajo de Rodríguez-Muñiz et al. (2021) destaca la importancia de que los estudiantes participen en procesos de recogida, clasificación y organización de datos como parte del ciclo completo de investigación estadística. Estos procesos ofrecen al alumnado situaciones en las que la variabilidad requiere tomar decisiones para clasificar y organizar datos en contextos donde las categorías no son inmediatas ni inequívocas.

Dada la dificultad de aprender a categorizar los datos, que exige reconocer diferencias y similitudes, Rodríguez-Muñiz et al. (2021) proponen dos estrategias: clasificación supervisada (categorías previas y discusión de casos ambiguos) y clasificación no supervisada (categorías emergentes tras observar los datos). Los datos organizados mediante tablas de registro pueden facilitar la emergencia de tablas de frecuencias, en las que el recuento permite comprobar el número de valores observados en cada categoría (Alsina et al., 2023; Batanero, 2013). Estas tablas de frecuencias sustentan el análisis posterior mediante la creación de representaciones gráficas y la obtención de parámetros estadísticos (Bargagliotti et al., 2020). La interpretación de los resultados, en interacción con el contexto de los datos, puede revelar discrepancias, ambigüedades o insuficiencias en los datos recogidos. Esto puede conducir a profundizar en la indagación, buscar información adicional o reconsiderar las decisiones adoptadas (Frischemeier y Schnell, 2023).

Dado que los datos no son entidades abstractas sino representaciones de fenómenos contextualizados, su contexto constituye un componente estructurante del propio proceso investigativo (Cobb y Moore, 1997), ya que condiciona qué datos recoger, cómo analizarlos y cómo interpretar los resultados (Wild y Pfannkuch, 1999). En este sentido, Pfannkuch (2011) distingue entre el contexto del problema –del que proceden los datos– y el contexto experiencial del alumnado, señalando que la interacción entre ambos puede influir en el desarrollo del ciclo de investigación y en la construcción del razonamiento estadístico. Cuando la actividad estadística se sitúa en escenarios auténticos para trabajar con datos reales y próximos al alumnado, el contexto condiciona y puede enriquecer las decisiones adoptadas durante la investigación (Frischemeier y Schnell, 2023). El razonamiento estadístico exige articular simultáneamente una visión contextual y abstracta de los datos. No obstante, cuando este equilibrio no se mantiene, el foco puede desplazarse desde el razonamiento estadístico hacia el propio significado contextual de los datos (Rodríguez-Muñiz et al., 2022). Desde esta perspectiva, entendemos las discrepancias, ambigüedades y revisiones que emergen durante la investigación como tensiones propias del desarrollo del ciclo estadístico escolar, especialmente cuando el alumnado debe articular simultáneamente decisiones estadísticas y significados contextuales.

METODOLOGÍA

El estudio forma parte de una investigación basada en diseño (IBD) centrada en explorar cómo la Educación STEAM puede generar contextos significativos para desarrollar un ciclo de investigación estadística. Para ello, se diseñó un proyecto STEAM (sobre la identidad) articulado en torno a la pregunta reto *¿Quiénes somos los niños de la clase?*, que integra una tarea de investigación estadística estructurada según el ciclo del GAISE. Dentro de esta IBD se realizaron dos ciclos de implementación de la tarea. En esta comunicación se presenta un estudio de casos colectivo instrumental (Stake, 2006) orientado a analizar comparativamente el proceso de investigación de una misma variable cualitativa. El estudio se centra en dos grupos de 6.º de Educación Primaria de centros distintos (G1 y G2), correspondientes respectivamente al primer y segundo ciclo de implementación de la IBD. Ambos grupos analizaron la misma variable *Ocio y aficiones* en el contexto del proyecto. La implementación con G1 (25 estudiantes) se realizó en abril de 2025. En este grupo, la tarea se desarrolló principalmente en gran grupo con el acompañamiento del maestro. El alumnado únicamente había trabajado de forma superficial algunos parámetros estadísticos en cursos anteriores. A partir del análisis retrospectivo de este primer ciclo se introdujeron modificaciones en el diseño de la tarea dirigidas a favorecer una mayor autonomía del alumnado en la formulación de preguntas y en los procesos de recogida, organización y representación de datos, lo que implicó una ampliación de la temporalización de la tarea. Estas modificaciones dieron lugar a una segunda implementación, realizada con G2 (16 estudiantes) en febrero de 2026. En esta implementación, el alumnado trabajó en grupos de cuatro con mayor autonomía y el acompañamiento de la maestra. El grupo había trabajado previamente la creación y el análisis de gráficos estadísticos. La tarea tuvo una duración aproximada de dos horas en G1 y tres en G2.

Los datos proceden de grabaciones audiovisuales y producciones del alumnado. El análisis se desarrolló mediante la segmentación de las grabaciones en episodios significativos (Schoenfeld, 2000) en los que el alumnado toma o revisa decisiones vinculadas al proceso de investigación estadística. Los episodios se organizaron según las fases del ciclo GAISE y se analizaron narrativamente para reconstruir cómo se desarrollaba la investigación en cada grupo, atendiendo a las prácticas estadísticas emergentes (por ejemplo, formulación o revisión de preguntas, construcción de categorías o elección de instrumentos de recogida) y a las tensiones que surgían durante el proceso. Las producciones escritas asociadas a cada episodio se analizaron de forma integrada. Se realizó primero un análisis intracaso y, posteriormente, un análisis intercasos orientado a identificar patrones comunes y contrastes en las tensiones emergentes durante el desarrollo de la investigación estadística. Este análisis comparado permitió profundizar en la comprensión de dichas tensiones a partir de las convergencias y divergencias observadas entre ambos casos, así como orientar el rediseño de la tarea en los sucesivos ciclos de la IBD.

RESULTADOS

Formulación de preguntas

En G1 no se desarrolla esta fase, ya que la variable de estudio está previamente definida y la pregunta es planteada por el maestro. El trabajo se inicia directamente en la categorización de las aficiones propuestas por el alumnado.

Por otro lado, el proceso de G2 se configura como altamente negociado en la formulación de la pregunta. En un primer momento el alumnado explora distintas formulaciones posibles, como "¿tienes alguna afición?" o "¿qué haces por las tardes?". La maestra guía al grupo, a través de preguntas, para avanzar hacia la formulación de una primera pregunta investigable: "¿cuáles son tus aficiones favoritas?". A partir de esta formulación, el alumnado discute si la pregunta permitiría recoger la información que buscan y comienza a considerar la diversidad de respuestas posibles en la clase. En este proceso emerge una tensión en torno al significado de "aficiones favoritas" y a la posibilidad de reducir la respuesta a una única opción. Al debatir si formular la pregunta en singular

o en plural ("¿cuál es tu afición favorita?" o "¿cuáles son tus aficiones favoritas?"), una alumna argumenta que una persona puede tener varias aficiones, mientras que otra considera incoherente tener más de una favorita. Aunque el grupo se aproxima finalmente a una formulación en singular, esta discusión introduce la posibilidad de respuestas múltiples y anticipa tensiones que emergerán posteriormente durante la recogida de datos. La decisión sobre el número de respuestas posibles comienza así a configurarse como un elemento que condicionará el resto de la investigación.

Consideración y recogida de datos

En G1, la recogida se apoya en un dato previo de cada estudiante. Esta limitación a una única afición otorga estabilidad al posterior sistema de categorías. A partir de los datos individuales, el maestro dirige un proceso de categorización hasta obtener las categorías representativas de la clase mediante una agrupación guiada: distintas aficiones deportivas se unifican bajo la categoría "deportes" y cada estudiante sitúa su dato dentro de una de las categorías resultantes, cerrando progresivamente el sistema categorial. Esta estabilización temprana favorece una mayor coherencia técnica y fluidez en la recogida y representación posterior, aunque con un grado de autonomía limitado para el alumnado. La dinámica de recogida es dirigida por el maestro y consiste en que cada alumno sitúe un post-it junto a la categoría correspondiente. Durante la actividad, el alumnado demanda poder elegir más de una afición, por lo que el maestro permite dos; sin embargo, esta apertura a respuestas múltiples no va acompañada de una reapertura del sistema categorial, generando tensiones en fases posteriores.

En G2, el sistema de categorías se configura como permeable, revisable y construido desde una atención a la variabilidad. La preocupación por la cobertura del sistema se traduce en intentos de codificar respuestas concretas en categorías más generales, mediante una negociación continua para agrupar o añadir categorías que permitan representar a todo el grupo. Por ejemplo, se debate si "música va dentro de arte" o si "en deportes van todos los deportes". Esta revisión incluye también la previsión de situaciones límite, incorporando opciones como "no tengo", "no está ahí" o "prefiero no contestar". Al planificar la recogida de datos emerge inicialmente la lista nominal, pero el grupo avanza hacia la tabla de doble entrada al considerarla un registro más eficaz. No obstante, la recogida se inicia sin haber estabilizado completamente el sistema categorial. Durante la recogida, aunque la pregunta se formula en singular ("afición"), varios estudiantes responden más de una opción y ellas lo registran, rompiendo la correspondencia entre alumno y registro, lo que compromete la organización posterior de los datos y afecta a la representación gráfica.

Análisis de datos

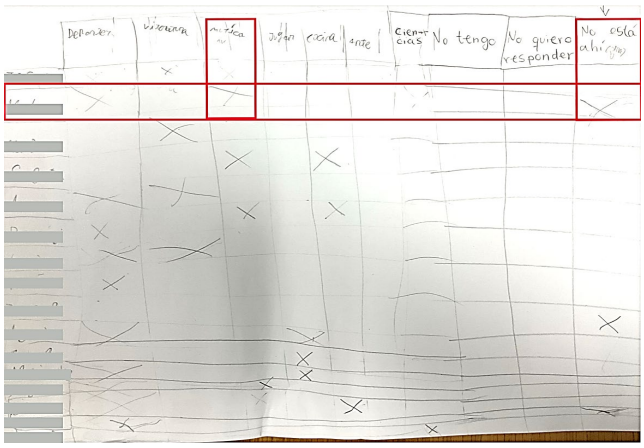
En G1, el análisis se apoya inicialmente en una lectura visual inmediata de la representación construida con *post-it.* Desde los primeros intercambios, varios alumnos identifican que "sale mucho deporte", lo que muestra una rápida detección de la categoría más frecuente a partir de la disposición material de los datos. No obstante, la propia representación introduce una dificultad analítica: la longitud desigual de algunas filas, provocada por la separación entre post-it, genera una impresión visual que no siempre coincide con la frecuencia real. Esta tensión aparece cuando una categoría parece mayor que otra por su extensión en el espacio, hasta que un alumno corrige esa lectura afirmando que otra tiene más "porque los he contado". De este modo, en G1 el análisis de los datos evoluciona de una apreciación visual global al recuento como criterio de validación. La representación facilita, por tanto, una entrada rápida al análisis, pero también obliga a contrastar la percepción inicial con el conteo efectivo de los datos.

Por su parte, en G2 el análisis se inicia sobre la tabla, antes de la construcción del gráfico. A partir de ella, el alumnado identifica la categoría mayoritaria ("deportes"), la minoritaria, los empates entre algunas categorías y la presencia de respuestas agrupadas en "no está ahí". En la tabla aparecen además errores que el alumnado no detecta, como el registro de un estudiante que marca simultáneamente "no está ahí" y "música" (Figura 1). La transición de la tabla al gráfico surge a partir de la propuesta de la maestra de realizar una representación más visual; sin embargo, su construcción

genera varias dificultades. La recogida de más de una respuesta por alumno provoca problemas para determinar el total de referencia y establecer la escala del eje vertical. Además, se producen desajustes entre la tabla y la representación, ya que algunas categorías registradas–como "no tengo", con frecuencia 1–no se incorporan de forma consistente al gráfico. En consecuencia, el análisis de los datos queda condicionado por las decisiones adoptadas en la fase previa de recogida y organización.

Figura 1

Registro conflictivo en la tabla de recogida de G2



Interpretación de resultados

En G1, la interpretación está dirigida por el maestro. En primer lugar, se consolida "deportes" como la categoría más frecuente porque "La mayoría de la gente ha puesto post-it en deporte", y el maestro introduce el término *moda*. Posteriormente, el foco se desplaza a la categoría "amigos", cuya frecuencia se interpreta, según un alumno, como que "hay 10 personas que eligen amigos como ocio o afición favorita". Esta lectura es cuestionada por otra alumna, que plantea que quizá "amigos" no sea una categoría equiparable a las demás, porque muchas actividades también se hacen con amigos. Finalmente, otro estudiante cuestiona la síntesis excesiva de la lista al afirmar que "hemos reducido mucho la lista", y varios más señalan la ausencia de una categoría relativa a la música, mostrando que la categorización ha dejado fuera elementos importantes para representar al grupo.

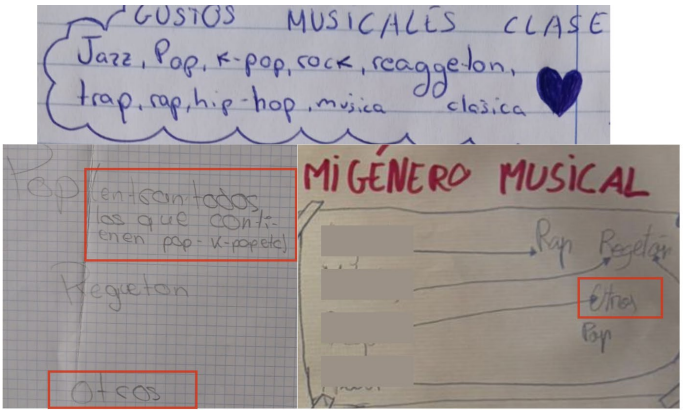
Por su parte, G2 muestra una intensa problematización del proceso. En primer lugar, una alumna presenta la información que considera más relevante: "la mayoría ha puesto deporte", y la maestra aprovecha esa lectura para introducir el término moda. A partir de ahí, se explicita qué significa que una categoría sea la que más se repite y el debate se desplaza hacia la categoría menos valorada. Cuando el grupo afirma que "ciencia" es la afición que menos personas realizan, se abre un debate con la maestra porque en la tabla había categorías previstas con frecuencia 0 que no habían representado. De este modo, emerge la distinción entre una categoría con menor frecuencia positiva y una categoría sin registros, formulada por la maestra como que no es "la que menos tiene", sino "de las que tienen, es la que menos tiene".

Como consecuencia de las tensiones identificadas durante la investigación, ambos grupos reabrieron el ciclo estadístico, aunque por motivos diferentes. En G1 se desarrolló en una sesión posterior una investigación centrada en la categoría no recogida, "música", en la que el alumnado propuso, de forma autónoma, una pregunta–"¿Qué tipo de música te gusta más?"–, un sistema de categorías construido de forma autónoma que incorporaba el valor "otros" para evitar dejar respuestas fuera, como había ocurrido en la investigación anterior (Figura 2), un plan de recogida de datos basado en encuestas online, el uso de representaciones mediante gráficos y una interpretación preliminar a partir de resultados hipotéticos proporcionados por el maestro. Por su parte, en G2 se revisó la investigación en una sesión posterior, acordando recoger un único dato por alumno y realizando, en consecuencia, una nueva recogida, representación y análisis. En ambos casos, esta continuidad del trabajo muestra

una apropiación del ciclo estadístico por parte del alumnado y una devolución de la consigna, tanto en términos de completar la tarea como de dotarla de significado.

Figura 2

Sistema de categorías de la segunda investigación de G1



El análisis comparado muestra dos convergencias en el desarrollo de ambas investigaciones. En ambos grupos, la identificación de la categoría más frecuente emerge con rapidez a partir de la representación de los datos y es institucionalizada, según se había previsto en el diseño de la tarea de ambos ciclos. Asimismo, en ambos grupos la fase final no cierra la investigación, sino que deriva en nuevas investigaciones o revisiones del proceso. En G1 la nueva investigación sobre la música surge como respuesta a la limitación de los resultados para representar adecuadamente al grupo. Por su parte, en G2 emerge de forma no anticipada el deseo de rehacer la investigación cuando el alumnado detecta problemas en la recogida y representación de los datos. Esto muestra una apropiación del proceso de investigación presumiblemente favorecida por la relevancia contextual del proyecto.

Junto a estas convergencias, se observan diferencias –derivadas de decisiones de diseño de la tarea– en el desarrollo inicial del ciclo de investigación estadística, en el rol del docente y en la gestión del sistema de categorías. Tras la primera implementación se incorporó una fase inicial destinada a que el propio alumnado formulase la pregunta de investigación. Asimismo, mientras que en G1 se planificó una mediación docente más dirigida, en G2 el diseño se reorientó para promover una mayor autonomía del alumnado. Estas diferencias también se reflejan en la gestión del sistema de categorías. En G1, el maestro dirige su construcción y lo estabiliza tempranamente, mientras que en G2 la maestra promueve una dinámica más abierta, en la que las decisiones sobre la pregunta, las categorías y la recogida permanecen abiertas y revisables durante buena parte del proceso. Además, en G2 se anticipó la posibilidad de incorporar una categoría como “otros”, que ya emergió en la investigación de G1, apoyada en la idea de no dejar a ningún estudiante fuera del sistema categorial.

Además de las diferencias anticipadas, emergen dos cuestiones relevantes. Por un lado, en ambos casos se generaron, de forma no prevista, tensiones relacionadas con el sistema de categorías durante el desarrollo de la investigación. En G1, la tensión aparece durante la interpretación de los resultados, cuando el alumnado cuestiona si la categorización realizada representa adecuadamente al grupo debido a la ausencia de una categoría considerada relevante. En cambio, en G2 la tensión se hace visible durante el análisis y la representación, y deriva de no haber estabilizado suficientemente la pregunta y las categorías antes de la recogida de datos. Esto parece apuntar hacia un sistema categorial excesivamente rígido en G1 y hacia un inicio prematuro de la recogida de datos en G2.

Finalmente, el fuerte anclaje contextual de la variable, vinculada a la identidad y a las aficiones del propio grupo, desempeña un papel crucial en el desarrollo de la investigación. En G2, la importancia atribuida por el alumnado a sus aficiones dificulta estabilizar la pregunta y las categorías antes de la recogida de datos. Al mismo tiempo, en ambos casos el contexto favorece una implicación que va más allá de completar la tarea, llevando al alumnado a cuestionar las decisiones estadísticas adoptadas

–categorías, representaciones e interpretaciones– cuando considera que los resultados no representan adecuadamente al grupo. Como consecuencia, la investigación se amplía para abordar nuevas variables en G1 y se reinicia en G2 para rehacer todo el proceso.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Los resultados muestran, en primer lugar, que las tensiones que han emergido durante la investigación estadística derivaban, por una parte, de decisiones adoptadas en torno a la categorización. En este sentido, la categorización estabilizada tempranamente ha facilitado la recogida y organización de los datos, pero ha generado tensiones posteriores relacionadas con la limitada capacidad del sistema categorial para representar la variabilidad del grupo. En cambio, la categorización más abierta y revisable ha favorecido la inclusión de esa variabilidad contextual, aunque ha generado tensiones en la representación y el análisis de los datos al no estabilizarse adecuadamente antes de la recogida. De este modo, los resultados refuerzan la idea de que la categorización no actúa únicamente como una forma de organizar la información, sino como un proceso de toma de decisiones que condiciona el desarrollo posterior de la investigación estadística (Alsina, 2025; Rodríguez-Muñiz et al., 2021).

Por otro lado, el contexto socialmente relevante de la investigación ha influido notablemente en el proceso. La importancia que las aficiones tenían para el alumnado generó tensiones entre el significado contextual de los datos y el razonamiento estadístico necesario para investigarlos. Sin embargo, este mismo contexto también favoreció una apropiación progresiva del proceso de investigación, llevando al alumnado a evaluar críticamente sus propias decisiones. De este modo, la relevancia del contexto puede favorecer el equilibrio entre razonamiento estadístico y conocimiento contextual (Rodríguez-Muñiz et al., 2022). Asimismo, la necesidad de responder al reto planteado en este contexto STEAM parece haber promovido la revisión y ampliación de las investigaciones (Frischemeier y Schnell, 2023). En este sentido, los nuevos ciclos de inveconstituye una respuesta del alumnado ante la insuficiencia de los resultados para representar el contexto estudiado.

En conjunto, los resultados muestran el potencial de un contexto STEAM socialmente relevante para promover la implicación del alumnado y favorecer la emergencia de razonamientos estadísticos orientados a interpretar un fenómeno social próximo. Asimismo, la evolución entre ambos grupos se alinea con la intencionalidad del diseño de proporcionar una mayor autonomía al alumnado para desarrollar la investigación. En esta línea, un proceso de categorización autónomo y abierto puede promover el reconocimiento de la variabilidad, aunque requiere acompañamiento docente para estabilizar el sistema categorial antes de la recogida de datos. Finalmente, los resultados refuerzan la conveniencia, desde el punto de vista del aprendizaje, de permitir que el alumnado revise, amplíe o reinicie sus propias investigaciones.

Agradecimientos

Este estudio ha sido realizado en parte gracias al Proyecto de cooperación Erasmus KA2 de la Unión Europea (Project 2024-1-BE02-KA220-SCH-000245678), al Proyecto de Generación de Conocimiento 2024 (PID2024-155358NB-I00), a la ayuda FPU del Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades (FPU22/02803), al acuerdo de colaboración del Grupo de Investigación sobre Educación Científica y Matemática en la Sociedad (GIECMES) y al Colegio Rural Agrupado Sierra Oeste.

Referencias

Alsina, Á., Muñiz-Rodríguez, L., Rodríguez-Muñiz, L. J., García-Alonso, I., Vásquez, C. y López-Serentill, P. (2023). Alfabetizando estadísticamente a niños de 7-8 años a partir de contextos relevantes. *Revista Complutense de Educación, 34*(1), 95-108. https://doi.org/10.5209/rced.77186

Alsina, Á. (2025). La investigación sobre estadística y probabilidad en edades tempranas: impacto en la escuela. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. 41–57). SEIEM.

Bargagliotti, B., Franklin, C., Arnold, P., Gould, R., Johnson, R., Perez, L. y Spangler, D.A. (Eds.) (2020). *Pre-K–12 guidelines for assessment and instruction in statistics education II (GAISE II)*. American Statistical Association.

Berciano, A. (2025). Retos de la investigación sobre sentido estocástico en proyectos STE(A)M de educación secundaria. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. 20–40). SEIEM.

Burrill, G. y Pfannkuch, M. (2024). Emerging trends in statistics education. *ZDM–Mathematics Education, 56,* 19–29. https://doi.org/10.1007/s11858-023-01501-7

Batanero, C. (2013). Sentido estadístico: componentes y desarrollo. *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria*, 55-61. Universidad de Granada.

Cobb, G. W. y Moore, D. S. (1997). Mathematics, Statistics, and Teaching. *The American Mathematical Monthly, 104*(9), 801–823. https://doi.org/10.1080/00029890.1997.11990723

Frischemeier, D. y Schnell, S. (2023). Statistical investigations in primary school–the role of contextual expectations for data analysis. *Mathematics Education Research Journal, 35*(1), 217-242. https://doi.org/10.1007/s13394-021-00396-5

Gal, I. (2002). Adults' statistical literacy: Meanings, components, responsibilities. *International Statistical Review, 70*(1), 1-47. https://doi.org/10.1111/j.1751-5823.2002.tb00336.x

Pfannkuch, M. (2011). The role of context in developing informal statistical inferential reasoning: A classroom study. *Mathematical Thinking and Learning, 13*(1-2), 27-46. https://doi.org/10.1080/10986065.2011.538302

Quigley, C. F., Herro, D. y Jamil, F. M. (2017). Developing a conceptual model of STEAM teaching practices. *School Science and Mathematics, 117*(1–2), 1–12. https://doi.org/10.1111/ssm.12201

Rodríguez-Muñiz, L.J., Muñiz-Rodríguez, L. y Aguilar-González, Á. (2021). El recuento y las representaciones manipulativas: los primeros pasos de la alfabetización estadística. *PNA, 15*(4), 311-338. https://doi.org/10.30827/pna.v15i4.22511

Rodríguez-Muñiz, L. J., Muñiz-Rodríguez, L., García-Alonso, I., López-Serentill, P., Vásquez, C. y Alsina, À. (2022). Navigating between abstraction and context in secondary school statistics education. *Culture and Education, 34*(3), 689-725. https://doi.org/10.1080/11356405.2022.2058794

Schoenfeld, A. (2000). Models of the teaching process. *Journal of Mathematical Behavior, 18*(3), 243-261. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(99)00031-0

Stake, R. E. (2006). *Investigación con estudio de casos*. Ediciones Morata.

Watson, J. M. (2006). *Statistical literacy at school: Growth and goals*. Lawrence Erlbaum.

Wild, C. y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review, 67*(3), 223–248. https://doi.org/10.1111/j.1751-5823.1999.tb00442.x

LA RELACIÓN CON EL OTRO EN LA COMPRENSIÓN MATEMÁTICA: EXTENDIENDO SU INTERPRETACIÓN FUNCIONAL

The relation to the other in mathematical understanding: Expanding its functional interpretation

Gallardo, J. y Quintanilla, V. A.

Universidad de Málaga

Resumen

En este trabajo, exploramos el papel que desempeña el otro en el origen y desarrollo de la comprensión matemática. Lo hacemos a través de una propuesta teórico-metodológica que incorpora el encuentro responsable con el otro a la interpretación funcional de la comprensión. Ilustramos la operatividad de esta propuesta en un episodio de aula donde interpretamos la comprensión colectiva de tres alumnas involucradas en la resolución conjunta de una tarea de geometría analítica en el plano. Nuestra propuesta interpretativa permite vislumbrar cómo la relación con el otro transforma la comprensión matemática de las estudiantes y, a su vez, cómo esta comprensión condiciona la relación entre ellas durante su práctica compartida en el aula ordinaria.

Palabras clave: *comprensión, interpretación, alteridad, matemáticas dialógicas*

Abstract

In this work, we explore the role played by the other in the origin and development of mathematical understanding. We do so through a theoretical–methodological proposal that incorporates the responsible encounter with the other into a functional interpretation of understanding. We illustrate the operability of this proposal through a classroom episode in which we interpret the collective understanding of three female students engaged in the joint resolution of a task in plane analytic geometry. Our interpretative proposal shows how the relation with the other transforms the students' mathematical understanding and, in turn, how this understanding influences the relationship between them during their shared activity in the ordinary classroom.

Keywords: *understanding, interpretation, otherness, dialogic mathematics*

INTRODUCCIÓN

La comprensión del conocimiento matemático es un fenómeno cognitivo complejo, que demanda unas exigencias intelectuales necesariamente vinculadas a la esfera mental de quien la desarrolla (Duval, 2006). También es observable en la práctica, a través de la actividad matemática escolar, aunque su interpretación en el aula supone un desafío metodológico (Martin et al., 2006). En particular, permanece abierta la cuestión fundamental del retorno a la comprensión (Gallardo y Quintanilla, 2019, 2025): ¿cómo recuperar el carácter cognitivo de la comprensión del estudiante si se regresa a ella con una interpretación sustentada en los registros observables de los usos dados al conocimiento matemático? De otro modo: ¿cómo evitar reducir la comprensión a sus manifestaciones externas, si reconocemos que éstas constituyen su principal vía de acceso y fuente de evidencia? Por otra parte, al interpretar la comprensión matemática del estudiante también se manifiesta la problemática de la relación con el otro, en la que intervienen aspectos específicos vinculados con la alteridad (Abtahi et al., 2018). Entre ellos, los relativos a la intencionalidad del alumno y su responsabilidad con los demás, la proximidad en la relación interpretativa o el retorno inclusivo y la

Gallardo, J. y Quintanilla, V. A. (2026). La relación con el otro en la comprensión matemática: extendiendo su interpretación funcional. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (pp. 250-257). SEIEM.

apropiación transformadora de la comprensión (Guillemette, 2017; Radford y Santi, 2022). En especial, se corre el riesgo de suscitar una reducción ontológica en la comprensión si la interpretación se aborda solo en términos de conciencia intencional del estudiante, donde la primacía del yo se manifiesta frente al otro (Metz y Simmt, 2015). Además, al pretender caracterizar las diferencias epistemológicas reconocidas en la comprensión de los alumnos (Ryan, 2022), surge para la interpretación el reto metodológico de vincular el conocimiento matemático a la relación con el otro.

Es en este contexto problemático donde se desarrolla el presente estudio. Nuestro objetivo es explorar cómo interviene la presencia del otro y qué influencia ejerce en el origen y desarrollo de la comprensión matemática del estudiante durante la actividad compartida en el aula ordinaria. Afrontamos este propósito planteando una interpretación funcional de la comprensión, centrada en cómo los estudiantes actúan y utilizan el conocimiento matemático en sus prácticas escolares cotidianas. Al mismo tiempo, ampliamos este enfoque funcional incorporando explícitamente la relación con el otro a la interpretación. Integramos todo ello en un método multifacético específico para llevar a cabo la interpretación de la comprensión a través del uso del conocimiento matemático y la búsqueda del consentimiento con el otro, entendida como conformidad recíproca y disposición a quedar transformado por la comprensión del otro. En la práctica, mostramos su operatividad en un episodio de aula donde intervienen tres alumnas de segundo curso de Bachillerato (17-18 años) involucradas en la resolución conjunta de una tarea de geometría analítica plana. Finalmente, ofrecemos una interpretación que nos permite delimitar qué comprenden y cómo comprenden las estudiantes, así como elaborar explicaciones plausibles de su forma particular de comprender, a partir de lo que son capaces de hacer con el conocimiento matemático en relación con los demás.

MARCO TEÓRICO

Exponemos los fundamentos teórico-metodológicos de una propuesta que integra distintos aspectos de la comprensión matemática dentro del mismo recorrido interpretativo (Figura 1).

Enfoque funcional de la comprensión y su interpretación en matemáticas

Reconocemos que el estudiante comprende un conocimiento matemático si es capaz de emplearlo, en alguna de sus formas posibles, en aquellas situaciones problemáticas en las que tiene sentido y contribuye como medio de resolución. En la decisión que justifica el uso del conocimiento matemático siempre hay un ejercicio cognitivo, mental y privado, de deliberación y elección de alternativas por parte del alumno, ligado a una intención y a un cierto convencimiento de que la acción es posible y pertinente (Gallardo y Quintanilla, 2019). Por ello, desde una perspectiva ontológica, concebimos la comprensión en matemáticas como una actividad racional, emocional e intencional que capacita al individuo para elaborar respuestas adaptadas y contextualizadas que involucran la utilización del conocimiento matemático (Quintanilla y Gallardo, 2022).

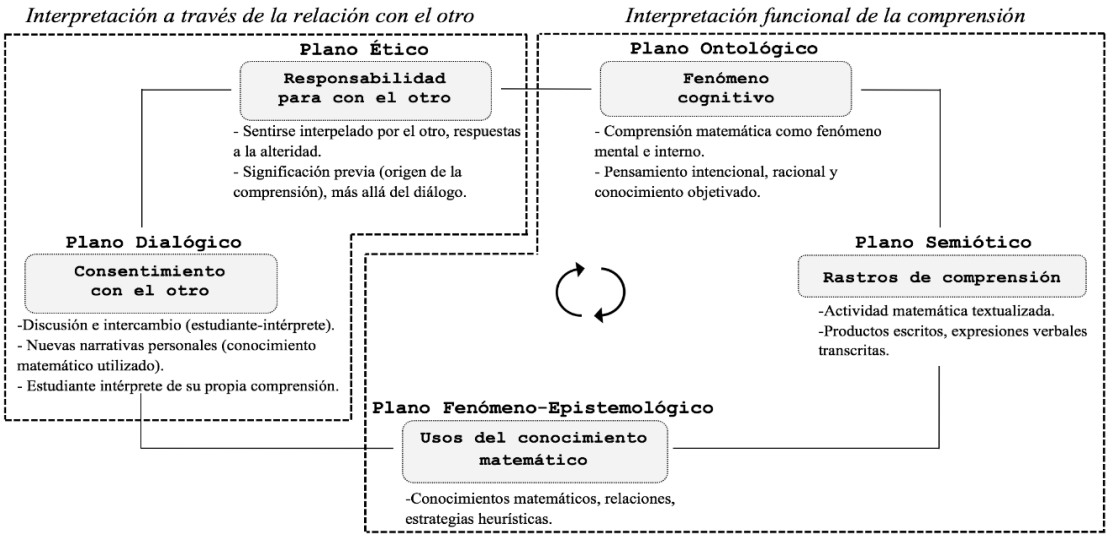
Por otra parte, la comprensión se expresa en prácticas sociales e incluye en su manifestación externa rastros interpretables (Font et al., 2013). El registro generado durante la actividad matemática observable se erige como la principal fuente depositaria de rastros visibles derivados de la comprensión. Este registro es la reducción ostensiva que resulta de textualizar (Ricœur, 1990/1996) en diferentes sistemas de representación semiótica las diversas evidencias de la práctica matemática realizada por el estudiante (Duval, 2006). Posicionados en este plano semiótico, la interpretación tiene por objetivo identificar y delimitar, entre todo lo observado y registrado de la actividad matemática del estudiante, los rastros de su comprensión que pueden considerarse indicadores de algún uso tipificado dado al conocimiento matemático.

Adicionalmente, aunque la comprensión y su interpretación se ejerzan sobre la mediación de un texto, rebasan el campo de lo meramente semiótico. Al actuar, el estudiante interviene en el mundo de las prácticas matemáticas y de los fenómenos organizados por los conocimientos matemáticos puestos en uso (Puig, 2006). En este plano, dirigimos la interpretación más allá del texto, a la identificación

y caracterización de los usos del conocimiento matemático que se desprenden de los rastros de comprensión emergentes de los registros escritos. Los componentes caracterizadores de la estructura fenómeno-epistemológica del conocimiento matemático son los que establecen en cada caso los distintos requisitos condicionantes de su empleo intencionado por parte del estudiante (Font et al., 2013). Es aquí donde evidenciamos la especificidad del conocimiento matemático como factor determinante que condiciona su comprensión (Duval, 2006).

Figura 1

Círculo hermenéutico de la comprensión en matemáticas



Interpretación de la comprensión matemática a través de la relación con el otro

El estudio del origen de la comprensión del conocimiento matemático requiere delimitar las circunstancias concretas de su primera significación para el estudiante e identificar la experiencia original que la desencadena durante la actividad matemática en el aula. Al respecto, admitimos la existencia de una significación inherente a la comprensión, que es previa e irreductible a la intencionalidad y al saber racional característico de su faceta ontológica. Este ámbito de significación previa apunta a la alteridad: la comprensión emerge al poner en cuestión mi propio yo por la presencia crítica del otro, quien siempre me interpela, me demanda y me concierne (Levinas, 1971/2016). Este reclamo es ineludible, por lo que el otro se muestra como estímulo y guía del pensamiento nuevo y es condición y vía efectiva para el desarrollo de la comprensión propia (Guillemette y Dematte, 2022).

Específicamente, situamos el origen de la comprensión en la *responsabilidad para con el otro* (Levinas, 1971/2016), entendida como voluntad previa y predisposición innata de mostrarse próximo y sentirse requerido por el otro, que el estudiante ejerce y despliega de manera única durante la actividad compartida en el aula. Entendemos que la significación que el alumno otorga a este requerimiento del otro es el punto de partida desencadenante de la función cognoscitiva de la comprensión y la comunicación como sistema de signos que expresan un sentido, y es anterior al modo en el que el conocimiento matemático es pensado y utilizado durante la práctica. Desde esta perspectiva, la relación con el otro es ética, por cuanto se manifiesta en actos solidarios y se produce como encuentro responsable con el otro (Radford y Santi, 2022; Ryan, 2022).

Sugerimos continuar el proceso interpretativo iniciado en el enfoque funcional con la búsqueda de una conformidad recíproca entre el propio estudiante y su intérprete (compañeros, profesor, investigador) acerca de los usos del conocimiento matemático evidenciados durante la actividad compartida. En concreto, planteamos el acceso a la comprensión matemática del estudiante a través del diálogo, la discusión crítica y el intercambio necesarios para alcanzar en última instancia el *consentimiento con el otro* (Gallardo y Quintanilla, 2019). El diálogo llama a la responsabilidad (Metz

y Simmt, 2015) y la instaura, promoviendo la disposición del estudiante a relacionarse a través del encuentro crítico y solidario con el otro (Ryan, 2022). Reivindicamos así la necesaria participación y el protagonismo del otro en los procesos interpretativos, que solo podrán garantizar una reconstrucción de la comprensión (Ricœur, 1990/1996). La tarea hermenéutica involucrada en este acceso se centra en la identificación y apropiación de los usos intencionales dados al conocimiento matemático por el estudiante. Esta apropiación conlleva un efecto transformador en quien realiza la interpretación como consecuencia de hacer propio lo que en un principio le resulta ajeno (Radford y Santi, 2022; Ricœur, 1990/1996). Comprender será quedar transformado por la apropiación de la faceta pública de tales usos intencionales, que cobran sentido cuando el estudiante explicita lo que experimenta en la situación de interacción con el otro. El plano dialógico ofrece el escenario común idóneo para que pueda darse esa llamada del otro que me interpela y permite la transformación que me lleva al consentimiento y, finalmente, a la comprensión. Es en este plano donde acontece la proximidad entre uno y otro, y es a través del consentimiento con el otro donde se plasma esta aproximación, manteniendo la pluralidad de los interlocutores (Levinas, 1971/2016).

Cuestiones de investigación

Con base en este marco de referencia, nos planteamos las siguientes cuestiones con objeto de explorar la presencia e influencia del otro en el origen y desarrollo de la comprensión matemática del estudiante durante su actividad cotidiana compartida en el aula ordinaria. En relación con el origen, ¿cómo se manifiesta y actúa la responsabilidad para con el otro en el uso intencional del conocimiento matemático? En cuanto al desarrollo, ¿qué tipo de relación con el otro hace posible el consentimiento y garantiza la transformación en la comprensión matemática?

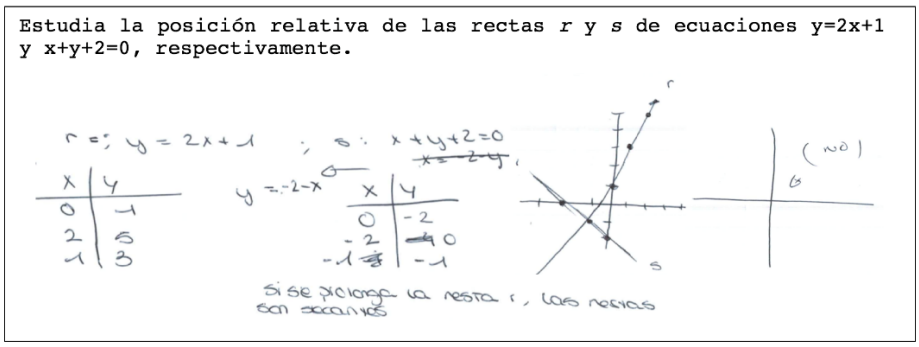
MÉTODO

Aplicamos nuestra propuesta interpretativa en episodios que reflejan la comprensión de los estudiantes durante sus prácticas matemáticas compartidas. Concebimos estas prácticas desde una perspectiva fenomenológica, como experiencias únicas y exclusivas vividas por cada estudiante de forma particular en su ambiente natural de aula (Guillemette, 2017). Aquí, la actividad matemática transcurre a través del uso del conocimiento matemático y la búsqueda del consentimiento dialógico con el otro, procurando propiciar acuerdos mutuos para lograr transformar y mejorar la comprensión de los participantes. En los episodios de comprensión que nos interesan intervienen grupos reducidos de alumnos, involucrados en la resolución conjunta de tareas matemáticas curriculares consideradas usuales en el aula ordinaria (por ejemplo, similares a las convencionales incluidas en el libro de texto). En el episodio tomado de ejemplo, participaron Adriana, Ainhoa y Celia, alumnas que cursaron la asignatura de Matemáticas II (2º Bachillerato - Ciencias de la Salud) durante el curso escolar 2023-2024. Junto al resto de sus compañeros de clase, y como parte de su actividad cotidiana en el aula, propusimos a estas alumnas la resolución de varias tareas de geometría analítica plana a modo de evaluación inicial y repaso de conocimientos matemáticos previos, antes de comenzar el estudio del bloque de contenidos de geometría analítica en el espacio.

Al igual que otras aproximaciones que analizan en profundidad la actividad matemática cotidiana desde la realidad del aula (Guillemette, 2017; Martin et al., 2006), en nuestra interpretación empleamos (a) registros de producción escrita generada por las alumnas (de nombre ficticio) y (b) extractos de diálogo que evidencian la interacción entre ellas durante el episodio. La Figura 2 muestra una de las tareas planteadas y el registro escrito que generaron durante su resolución. Para el análisis e interpretación de los datos, proponemos una doble vía de acceso a la comprensión del estudiante, centrada en (i) la caracterización de los usos dados al conocimiento matemático a partir de sus registros y producciones matemáticas externas (interpretación funcional de la comprensión matemática), y (ii) el estudio de su relación con el otro durante la búsqueda del consentimiento dialógico (interpretación a través de la relación con el otro).

Figura 2

Registro de Adriana, Ainhoa y Celia al resolver la tarea de geometría analítica plana



La primera vía reconoce la singularidad que impone la tarea y los conocimientos matemáticos utilizados en ella (Puig, 2006). Para la interpretación funcional, utilizamos el análisis fenómeno-epistemológico aplicado sobre la tarea, donde explicitamos los conocimientos matemáticos, relaciones y estrategias fundamentales que las estudiantes utilizan en su resolución (Tabla 1) y que ilustran la comprensión matemática colectiva (Martin et al., 2006) evidenciada en el episodio.

Tabla 1

Análisis fenómeno-epistemológico del episodio de comprensión

Conocimientos matemáticos	Recta en el plano, puntos de una recta, coordenadas cartesianas, puntos de corte, sistemas de representación de la recta (algebraico, tabular, gráfico), posiciones relativas de las rectas en el plano.
Relaciones	Álgebra y geometría, conversión entre sistemas de representación de la recta.
Estrategias	Determinar puntos de una recta a partir de su expresión algebraica, construir tablas de valores, hallar coordenadas de puntos en el plano, representar gráficamente una recta, trazar rectas a partir de puntos dados.

En la segunda vía, interpretamos la responsabilidad para con el otro en términos de predisposición desinteresada del estudiante de aproximarse al otro y ofrecer diferentes respuestas a la alteridad: distanciamiento, representación, consentimiento. Identificamos estas respuestas a través de los rastros externos específicos descritos en la Tabla 2.

Tabla 2

Posibles respuestas a la alteridad

Distanciamiento [Yo ⇢ Otro]	El estudiante no muestra sentirse concernido por el uso del conocimiento matemático del otro. Hay ausencia de saber racional compartido e imposibilidad de transformación en la comprensión matemática.
Representación [Yo → Otro]	El estudiante reconoce el uso del conocimiento matemático del otro y lo dota de sentido. Elabora una significación racional de él, pero sin que ello influya en el uso intencional propio. No se aprecia transformación aparente en su comprensión matemática particular.
Consentimiento [Yo ↔ Otro]	El estudiante es interpelado por el otro, cuya intervención condiciona el uso personal dado al conocimiento matemático. Se percibe la búsqueda genuina de consentimiento con el otro, que genera una transformación en la comprensión matemática propia.

RESULTADOS

Para determinar la posición relativa de ambas rectas, las estudiantes deciden representarlas gráficamente y visualizar el resultado.

1. Adriana: Yo creo que hay que hacer una tabla. Pones *x* e *y*, y cuando le das valores a la *x*…
2. Ainhoa: Te da la *y*.

3. Celia: Venga, pues decidme.
4. Ainhoa: Cero, uno y dos.
5. Celia: [En la ecuación de la primera recta] Pongo el 0, *y* es 1. Si *x* es 2, *y* es 5. Y ya está.
6. Adriana: Hay que dar tres [valores a *x*], porque una recta no puede tener dos puntos. El 1, que es 3.

Las alumnas comienzan construyendo tablas de valores para determinar las coordenadas de distintos puntos en cada recta (1-5). Desde una perspectiva funcional, evaluar ecuaciones, construir tablas y determinar puntos para la representación gráfica de una función, evidencian distintos rastros de comprensión matemática a través del uso dado a conocimientos matemáticos específicos. De manera simultánea, en la interacción entre las estudiantes se aprecia diferentes muestras de cómo la relación con el otro interviene en este uso intencional. En concreto, la propuesta inicial de Adriana, de construir una tabla dando valores a *x,* condiciona las intervenciones posteriores de Ainhoa (1, 2, 4). Asimismo, las acciones matemáticas de Celia están motivadas por las sugerencias de sus dos compañeras (3, 5). Ambos casos los consideramos muestras de *consentimiento con el otro*. Por otra parte, interpretamos que la explicación de Adriana de dar tres valores a *x* (6) tiene su origen en la *representación* que ésta hace de la acción previa de Celia de determinar solo dos puntos (5). A partir de aquí, emergen nuevas evidencias sobre la comprensión que poseen las alumnas acerca de la recta.

7. Celia: [En la segunda ecuación] Bueno, vamos a despejar de aquí la *x* y se nos queda que *-2-y*.
8. Ainhoa: ¿Por qué te has complicado y has pasado la *x* aquí [a la izquierda de la igualdad] y la *y* ahí [a la derecha]?
9. Celia: Es verdad [tacha *x=-2-y* y despeja *y* en función de *x*]. *y=-2-x*. 0 es -2, 2 es -4.
10. Ainhoa: Pon 1 ahora.

Para ellas, es preferible despejar *y* en función de *x* a despejar *x* en función de *y* en la ecuación general de la recta en el plano (7-9). También, ya admiten todas que se necesitan al menos tres puntos para trazar una recta (9-10). En el caso de Celia, este último *consentimiento* podría interpretarse en términos de aceptación, más que por acuerdo real con sus compañeras, pues al inicio ella propuso solo dos puntos (5). De nuevo, en estos usos particulares interpretados en términos funcionales, reconocemos la intervención e influencia de la relación con el otro. En particular, en la pregunta de Ainhoa percibimos su *representación* del despeje realizado por Celia (7-8) y, a su vez, el *consentimiento* de Celia con la alternativa propuesta por Ainhoa (9). Adicionalmente, Ainhoa muestra *consentimiento* con la sugerencia de Adriana (10), aunque su propuesta de evaluar la ecuación de la segunda recta en *x=1*, genera en sus compañeras nuevos usos del conocimiento matemático.

11. Celia: No pueden tener los mismos valores [al evaluar ambas rectas]. Pues, se pone negativo.
12. Adriana: Haber puesto -2 y te da 0.
13. Ainhoa: Y luego, si es -1, te da -1.

Celia no acepta la última sugerencia de Ainhoa, porque para ella se deben utilizar diferentes valores de *x* para evaluar rectas distintas (10-11). La alternativa de emplear números negativos termina siendo compartida por sus compañeras, quienes ofrecen puntos concretos distintos a los ya empleados en la evaluación de la ecuación de la primera recta (12-13). Estos usos los interpretamos como evidencias de una comprensión matemática compartida que tiene su origen en respuestas particulares dadas a la alteridad. En concreto, percibimos *consentimiento* y transformación en la comprensión de Celia (11) como consecuencia del comentario previo de Ainhoa (10). Al mismo tiempo, las intervenciones y usos posteriores de Adriana y Ainhoa (12-13) emergen de alcanzar el *consentimiento* con Celia al aceptar su propuesta (11). Una vez elaboradas las tablas de valores, las alumnas prosiguen con la representación gráfica de las rectas a partir de los puntos obtenidos.

14. Celia: [Primera recta] Cero, uno. Dos, cinco. Y, uno, tres. Vale, y ahora esta [dibuja otros ejes].

15. Ainhoa: No, pero se hace en la misma [mismo sistema de referencia].
16. Celia: No, se hace en diferentes, ¿no?
17. Adriana: Se hace en la misma [risas].
18. Ainhoa: Para ver si se cruzan, si son paralelas, … La posición relativa.
19. Celia: Sí, vale. [Va representando los puntos en el mismo sistema de referencia y los une].
20. Ainhoa: Es que ni se tocan, vaya.
21. Celia: ¡Sí se tocan! Esta es la *s* y esta es la *r*. Si esta [la recta *r*] se prolonga… las rectas son secantes. Pues ya está hecho, mira qué listas somos.

Vuelven a manifestarse nuevas evidencias de la comprensión de las alumnas, esta vez relativas a la representación gráfica. En concreto, reconocen que: (a) para estudiar la posición relativa de ambas rectas, éstas han de representarse gráficamente en el mismo sistema de ejes coordenados (14-18); y (b) los segmentos que resultan de unir los distintos puntos de cada recta determinan su posición relativa (19-21). En estos usos apreciamos una vez más el vínculo entre la comprensión matemática de las estudiantes y la propia relación entre ellas a través de sus intervenciones. Así, en la discusión sobre los ejes coordenados a emplear, reconocemos un *distanciamiento* transitorio entre Celia (16), por un lado, y Ainhoa y Adriana (15, 17), por otro, a la vez que una *representación* compartida entre estas últimas (17-18), que finalmente evoluciona hacia un *consentimiento* de Celia con sus compañeras (19). El episodio finaliza con una nueva evidencia de *consentimiento* de Celia con Ainhoa. Ahora, la conclusión errónea de Ainhoa (20) condiciona la acción final de Celia de prolongar las rectas trazadas (21), una última transformación que les permite resolver satisfactoriamente la tarea matemática. Estas evidencias de usos dados al conocimiento matemático en relación con las demás, ilustran la evolución de la comprensión matemática colectiva de las estudiantes durante el episodio.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIÓN

En el episodio evidenciamos que la relación entre las alumnas interviene en las decisiones sobre los usos dados al conocimiento matemático, transformando de manera continua su comprensión matemática durante la resolución de la tarea. Al mismo tiempo, la comprensión evidenciada en términos de tales usos condiciona de forma dinámica la relación entre ellas, originando nuevas interacciones y respuestas a la alteridad durante la práctica compartida. En relación con la primera cuestión del estudio, observamos que en el origen de la comprensión matemática de las alumnas, más allá de su interpretación funcional, se manifiesta un ejercicio permanente de reconocimiento y responsabilidad para con el otro. Hacerlo posible implica estar dispuestos a quedar transformados por el otro a través de sus productos interpretables en un proceso principalmente dialógico (Radford y Santi, 2022; Ricœur, 1990/1996). Esta responsabilidad no parece ser un compromiso elegido que nace en cada alumna como necesidad interior, ni un ejercicio intencional de conciencia empática hacia sus compañeras (Guillemette, 2017). Más bien, la percibimos como una exposición al otro sin intencionalidad previa, como una réplica desprendida que las alumnas liberan en forma de respuesta a la alteridad al verse afectadas por las demás (Levinas, 1971/2016). Respecto a la segunda cuestión, consideramos que las evidencias vinculadas con la relación con el otro arrojan luz sobre las condiciones bajo las que acontece el consentimiento con el otro. Vislumbramos que las estudiantes confieren significatividad (Guillemette y Dematte, 2022; Levinas, 1971/2016) a los usos dados al conocimiento matemático al verse interpeladas por sus compañeras, transformando por ello su propia comprensión matemática. Entendemos que esta significatividad, como respuesta responsable, promueve la aproximación entre las estudiantes, y la búsqueda y logro del consentimiento con el otro.

Este trabajo ilustra una forma de investigar sobre la alteridad en Educación Matemática (Abtahi et al., 2018). Con nuestra propuesta aspiramos a ofrecer una vía operativa para interpretar la comprensión matemática del estudiante durante su actividad compartida en el ambiente natural de su aula ordinaria. Para esta interpretación, sugerimos recorrer el círculo hermenéutico expuesto y

emplear distintos rastros de comprensión provenientes de (a) los usos dados al conocimiento matemático, (b) el consentimiento con el otro y su efecto transformador, y (c) la propia relación con el otro que me interpela y despierta mi responsabilidad. Consideramos esta alternativa complementaria a los métodos fenomenológicos de introspección guiada sugeridos para acceder de manera empática a las experiencias matemáticas de los estudiantes (Metz y Simmt, 2015; Guillemette, 2017). Asimismo, al vincular el conocimiento matemático a la relación con el otro, contribuimos a especificar las diferencias epistemológicas presentes en la comprensión de los alumnos (Puig, 2006; Ryan, 2022). Queda pendiente contrastar la operatividad de nuestra propuesta interpretativa en contextos dialógicos donde el estudiante no puede verse involucrado de manera directa y real con el otro. Es el caso de la interpretación de textos matemáticos históricos, donde la intención pública del autor solo puede expresarse de manera indirecta a través del texto autónomo que produce y deja como herencia al estudiante intérprete (Guillemette, 2017; Radford y Santi, 2022).

Referencias

Abtahi, Y., Adler, J., Guillemette, D., Herheim, R., Lerman, S., Maheux, J.-F. y Valero, P. (2018). Otherness in mathematics education. En E. Bergqvist, M. Österholm, C. Granberg y L. Sumpter (Eds.), *Proc. 42nd Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. 1, pp. 95-123). PME.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1/2), 103-131. https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z

Font, V., Godino, J. D. y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, *82*(1), 97-124. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9411-0

Gallardo, J. y Quintanilla, V. A. (2019). El círculo hermenéutico de la comprensión en matemáticas: una propuesta integradora para la evaluación en el aula. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *22*(1), 97-122. https://doi.org/10.12802/relime.2019.25

Gallardo, J. y Quintanilla, V. A. (2025). On interpretation of understanding in mathematics: Beyond fragility. *For the Learning of Mathematics*, *45*(0), Monograph 3, 27-34.

Guillemette, D. (2017). History of mathematics in secondary school teachers' training: Towards a nonviolent mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, *96*(3), 349-365. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9774-3

Guillemette, D. y Dematte, A. (2022). A discussion on Levinas's ethics of otherness, originals from history and teaching-learning mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *42*(2), 22-28.

Levinas, E. (2016). *Totalidad e infinito* (M. García-Baró, Trad.; 3ª ed.). Sígueme. (Original publicado en 1971)

Martin, L., Towers, J. y Pirie, S. E. B. (2006). Collective mathematical understanding as improvisation. *Mathematical Thinking and Learning*, *8*(2), 149-183. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0802_3

Metz, M. L. y Simmt, E. S. M. (2015). Researching mathematical experience from the perspective of an empathic second-person observer. *ZDM, 47*(2)*,* 197-209. https://doi.org/10.1007/s11858-014-0621-z

Puig, L. (2006). Sentido y elaboración del componente de competencia de los modelos teóricos locales en la investigación de la enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos. En P. Bolea, Mª. J. González y M. Moreno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática X* (pp. 107-126). SEIEM.

Quintanilla, V. A. y Gallardo, J. (2022). Interpreting the relationship between emotions and understanding in mathematics: An operational approach applied to measurement with preservice elementary teachers. *Journal of Mathematical Behavior*, *68*, Article 101012. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2022.101012

Radford, L. y Santi, G. (2022). Learning as a critical encounter with the other: Prospective teachers conversing with the history of mathematics. *ZDM*, *54*(7), 1479-1492. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01393-z

Ricœur, P. (1996). *Sí mismo como otro* (A. Neira, Trad.; 1ª ed.). Siglo XXI. (Original publicado en 1990)

Ryan, U. (2022). Solidarity acts in the context of language diversity: Students' encounters with epistemological difference. *Journal of Mathematical Behavior*, *66*, 100946. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2022.100946

CANTIDAD DE INFORMACIÓN Y CALIBRACIÓN CONFIANZA–RENDIMIENTO EN ESTUDIANTES DE SECUNDARIA Y FUTUROS MAESTROS

Amount of information and confidence–performance calibration in secondary school students and pre-service teachers

García-Cerdá, C., Ferrando, I. y Segura, C.

Universitat de València

Resumen

Este estudio examina si las diferencias de rendimiento y confianza entre estudiantes y futuros maestros dependen de la cantidad de información en los problemas de modelización, y si la correlación entre confianza y rendimiento varía según el tipo de problema y el perfil del resolutor. Utilizando problemas de modelización con falta y exceso de datos, comparamos sus patrones de rendimiento y confianza. Los futuros maestros obtuvieron mejores resultados en los problemas con exceso de datos, mientras que los estudiantes mostraron menor confianza en los problemas con falta de datos a pesar de su mayor rendimiento en estos últimos. La correlación confianza–rendimiento se mantuvo estable en los futuros maestros, pero se debilitó en los estudiantes en los problemas con exceso de datos. Los resultados subrayan la importancia de desarrollar la competencia diagnóstica de los futuros maestros para reconocer la descalibración metacognitiva en los estudiantes.

Palabras clave: *Resolución de problemas, Problemas de modelización, cantidad de información, rendimiento, confianza*

Abstract

This study examines how the amount of information in modelling tasks influences the performance and confidence of two groups—students and pre-service teachers. It also explores whether the relationship between confidence and performance changes depending on the type of task and the solver's profile. To address this, we used modelling problems designed either with missing or an excess of data and compared both groups' confidence levels and outcomes. Pre-service teachers achieved higher scores on excess data tasks, whereas students, despite performing better on missing data tasks, reported lower confidence in these tasks. The link between confidence and performance remained fairly consistent among pre-service teachers, but it weakened for students when working on excess data tasks. These findings emphasise the need to strengthen future teachers' diagnostic abilities so they can better identify and interpret metacognitive miscalibration in their students.

Keywords: *Problem solving, Modelling problems, amount of information, performance, confidence*

INTRODUCCIÓN

Los problemas de modelización matemática presentan un gran potencial para desarrollar competencias esenciales en la educación matemática, tal y como señalan trabajos recientes como el de Greefrath (2020). Sin embargo, los estudiantes suelen encontrar dificultades a lo largo de todo el ciclo de modelización y manifiestan baja confianza al resolver este tipo de tareas (Klock y Siller, 2020; Krawitz y Schukajlow, 2018). Investigaciones previas, como la de Cabero et al. (2021), muestran que incluso variaciones en la forma de presentar los datos pueden afectar al proceso de resolución de problemas verbales. En particular, la cantidad de información, ya sea por falta o por exceso de datos, puede influir tanto en el rendimiento como en la confianza, dado que los datos

García-Cerdá, C., Ferrando, I. y Segura, C. (2026). Cantidad de información y calibración confianza-rendimiento en estudiantes de secundaria y futuros maestros. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (pp. 258-265). SEIEM.

incompletos o superfluos suponen demandas cognitivas y metacognitivas distintas (Ferrando et al., 2020).

Los futuros maestros también se enfrentan al reto de evaluar la adecuación de las tareas para sus estudiantes. Su experiencia previa puede influir en su competencia diagnóstica, entendida como la capacidad de juzgar la complejidad y la pertinencia de una tarea (Ferrando et al., 2025). La confianza desempeña un papel esencial: cuando se alinea con el rendimiento, indica una autoevaluación precisa; cuando no lo hace, puede reflejar valoraciones sesgadas (Leuders et al., 2018). Esta alineación entre confianza y rendimiento se conceptualiza como calibración confianza–rendimiento y constituye un indicador clave de la competencia diagnóstica. Analizar de forma conjunta las diferencias en confianza, rendimiento y su calibración entre estudiantes de secundaria y futuros maestros permite examinar cómo la cantidad de información afecta a la conciencia metacognitiva que sustenta la competencia diagnóstica (Böswald y Schukajlow, 2023). En consecuencia, abordamos dos preguntas de investigación: (RQ1) ¿Dependen las diferencias de rendimiento y confianza entre estudiantes de secundaria y futuros maestros de la cantidad de información incluida en el enunciado del problema? (RQ2) ¿Existen diferencias en la magnitud de la relación entre confianza y rendimiento según el tipo de problema (exceso y falta de datos) y el perfil del resolutor? Se espera que la cantidad de información del enunciado influya no solo en el rendimiento y en la confianza sino también en la calibración entre estas dos variables, especialmente en los estudiantes de secundaria.

MARCO TEÓRICO

Cantidad de información en problemas de modelización

Los problemas de modelización conectan situaciones del mundo real con las matemáticas al traducir los contextos en representaciones matemáticas y viceversa (Niss y Blum, 2020). Para resolverlos, es necesario construir un modelo de la situación, lo que implica estructurar y simplificar el enunciado antes de abordar su resolución (Leiß et al., 2019). Para ello, quienes resuelven deben identificar la información relevante y, cuando esta no aparece en el enunciado, formular suposiciones plausibles (Krawitz y Schukajlow, 2018; Segura et al., 2025). Dado que la cantidad de información implica exigencias cognitivas distintas, los problemas pueden clasificarse en dos categorías: los problemas con falta de datos, que exigen inferir la información ausente mediante suposiciones o estimaciones (Krawitz et al., 2018), y los problemas con exceso de datos, que requieren seleccionar y justificar qué datos son pertinentes para avanzar en la resolución (Krawitz y Schukajlow, 2018; Segura et al., 2025). En la Figura 1 se presenta un ejemplo de cada tipo de problema de modelización.

Figura 1

Problemas con falta y exceso de datos utilizados en el estudio

<table>
<tr><th>Problema con falta de datos</th><th>Problema con exceso de datos</th></tr>
<tr><td>CONCIERTO EN EL PATIO DEL INSTITUTO
El alumnado de 4ESO está preparando un concierto en la pista de básquet con el fin de recaudar dinero para el viaje de fin de curso. Explica cómo puedes averiguar el número máximo de personas que pueden asistir al concierto, indica todos los pasos de tu razonamiento, no es preciso que des un resultado numérico.</td><td>ESCUELA DE EQUITACIÓN
Pablo busca una escuela de equitación donde su caballo pueda tener un box y recibir comida. También le gustaría hacer cursos de equitación en esa escuela.
A unos 15 minutos de su casa, encuentra dos hípicas.
<table><tr><th>ESCUELA DE EQUITACIÓN BANNERT</th><th>ESCUELA DE EQUITACIÓN LARSEN</th></tr><tr><td>Número de caballos: 26
Establo y comida al mes: 180€
Precio de la hora de equitación: 15€</td><td>Número de caballos: 52
Establo y comida al mes: 240€
Precio de la hora de equitación: 12€</td></tr></table>¿Cuándo merece la pena ir a Bannert y cuándo a Larsen? Escribe tu solución.</td></tr>
</table>

Rendimiento y confianza en problemas de modelización

La resolución de problemas de modelización implica elaborar un modelo matemático adecuado y aplicar correctamente los procedimientos necesarios para obtener una solución, lo cual afecta al

rendimiento (Segura et al., 2026). Ferrando et al. (2020) señalan que la cantidad de información presente en el enunciado puede influir en la calidad con la que se desarrolla dicho modelo.

La confianza, entendida como el grado de certeza sobre la corrección de la propia respuesta, ha sido poco estudiada en problemas complejos como los de modelización (Foster, 2016). En aquellas tareas que resultan más familiares a los resolutores, la relación entre confianza y rendimiento está bien documentada (Stankov et al., 2012), y suele observarse una correspondencia razonable entre la seguridad declarada y el rendimiento. Sin embargo, en problemas complejos, esta relación puede ser menos estable, ya que la conciencia metacognitiva del alumnado aún se encuentra en desarrollo (Nederhand et al., 2021). En cambio, los futuros maestros, con una metacognición más madura, tienden a mostrar una alineación más coherente entre su confianza y su rendimiento. En este sentido, la confianza se concibe como un juicio metacognitivo posterior cuya correspondencia con el rendimiento puede ser variable (Stankov et al., 2012), y que puede revelar percepciones erróneas en la autoevaluación cuando dicho juicio no se ajusta al desempeño real (Morony et al., 2013). En ese caso, cuando el juicio de confianza no se corresponde con el rendimiento obtenido, puede hablarse de una descalibración metacognitiva, particularmente en forma de sobreconfianza cuando la seguridad declarada es superior al rendimiento real.

No obstante, todavía no está claro si esta relación varía en función del tipo de problema (exceso y falta de datos), ya que apenas existen estudios que comparen directamente problemas de modelización con distinta cantidad de información. Desde una perspectiva metacognitiva, la calibración entre confianza y rendimiento puede entenderse como un indicador de competencia diagnóstica, al reflejar la capacidad del resolutor para evaluar con precisión su propio rendimiento. Comprender cómo difieren las relaciones entre confianza y rendimiento en estudiantes y futuros maestros, y si estas cambian según el tipo de problema, es esencial para avanzar en el desarrollo de la competencia diagnóstica, entendida como la capacidad de valorar la idoneidad de las tareas y evaluar la comprensión del alumnado (Böswald y Schukajlow, 2023).

METODOLOGÍA

Participantes y recogida de datos

En este estudio participaron dos grupos diferenciados. El primero estuvo formado por 188 estudiantes de tercer y cuarto curso de Educación Secundaria Obligatoria de un centro público de secundaria de Valencia (49,48% chicas y 50,52% chicos), y el segundo por 91 futuros maestros del Grado de Educación Primaria de una universidad pública de la misma ciudad (82,42% mujeres y 17,58% hombres). Todos los participantes —y, en el caso del alumnado de secundaria, también sus familias— fueron informados sobre los objetivos del estudio y el uso previsto de los datos, siguiendo las directrices éticas aprobadas por la institución investigadora. La recogida de datos se realizó durante el curso 2023–2024 para los estudiantes de secundaria y en 2024–2025 para los futuros maestros, en función de la disponibilidad de las muestras.

Todos los participantes resolvieron una secuencia de dos problemas de falta de datos y dos problemas de exceso de datos en una sesión de 60 minutos. En la Figura 1 se presentan problemas representativos de cada tipo (falta y exceso de datos), mientras que el resto de las tareas utilizadas responde a los mismos criterios de diseño y a un nivel de complejidad comparable. Todos los problemas, independientemente de la cantidad de información presentada en el enunciado, admiten distintas estrategias de resolución y, en función de estas, pueden involucrar diversos contenidos matemáticos que resultan elementales, de acuerdo con los niveles educativos considerados. Esta variabilidad está presente en ambos tipos de problemas y no constituye una diferencia sistemática entre ellos, por lo que el rasgo diferenciador de las tareas seleccionadas es la cantidad de información proporcionada en el enunciado y las demandas asociadas a su gestión, más que el contenido matemático específico requerido. Tras cada problema, indicaron su grado de confianza mediante una escala Likert de cinco puntos (“Creo que mi respuesta está bien”). Para obtener las puntuaciones de rendimiento y confianza

en cada tipo de problema, se calculó la media de las dos tareas correspondientes a cada categoría (exceso y falta de datos).

Análisis de datos

El rendimiento se evaluó mediante el sistema de codificación para problemas de modelización propuesto por Segura et al. (2026), que asigna una puntuación de 0 a los modelos incompletos, 1 a los modelos completos con errores procedimentales y 2 a los modelos completos sin errores. Dos investigadores codificaron de forma independiente todas las respuestas, obteniendo una alta fiabilidad interjueces en el conjunto de problemas (Cohen's Kappa $0.88 \leq \kappa \leq 0.98$). Las puntuaciones de confianza se obtuvieron directamente de la escala Likert de cinco puntos empleada tras cada problema. Se calcularon las puntuaciones medias de rendimiento y confianza para cada tipo de problema (exceso y falta de datos) a partir de los dos ítems correspondientes. La fiabilidad (α de Cronbach) fue aceptable para el rendimiento ($\alpha = 0.65$) y alta para la confianza ($\alpha = 0.85$) en el alumnado de secundaria, y también aceptable en el grupo de futuros maestros tanto para el rendimiento ($\alpha = 0.69$) como para la confianza ($\alpha = 0.79$). En el caso del rendimiento, dado el reducido número de ítems utilizados y la proximidad de los valores obtenidos al umbral habitualmente considerado aceptable, se consideró adecuada esta estimación.

Los análisis estadísticos se realizaron con el software SPSS. Para responder a la RQ1, se llevaron a cabo pruebas ANOVAs mixtas por separado para rendimiento y confianza, utilizando la cantidad de información (exceso y falta de datos) como factor intrasujeto y el perfil del resolutor (estudiantes de secundaria vs. futuros maestros) como factor intersujeto. Se realizaron comparaciones por pares para examinar si las diferencias de rendimiento y confianza entre ambos grupos variaban en función de la cantidad de información (exceso y falta de datos). Para responder a la RQ2, se calcularon correlaciones de Pearson para estimar la magnitud de la relación entre confianza y rendimiento por separado para cada perfil de resolutor y para cada categoría de información (exceso y falta de datos). Las diferencias entre correlaciones se analizaron mediante la transformación Z de Fisher para muestras independientes (entre perfiles) y la prueba Z de Steiger para correlaciones dependientes (dentro de cada perfil). Los tamaños del efecto (η^2, d de Cohen) se informan junto con las pruebas de significación. Antes de realizar los análisis, se tuvieron en cuenta los supuestos de las pruebas estadísticas empleadas. En el caso de los ANOVA mixtos, el supuesto de esfericidad se cumple automáticamente (factor intrasujeto con dos niveles) y, atendiendo al tamaño muestral (N=188), los análisis pueden considerarse robustos ante posibles desviaciones de la normalidad.

RESULTADOS

Influencia de la cantidad de información en las diferencias de rendimiento entre estudiantes de secundaria y futuros maestros

La Tabla 1 muestra las puntuaciones medias del rendimiento de los estudiantes de secundaria y de los futuros maestros en los distintos tipos de problemas.

Tabla 1

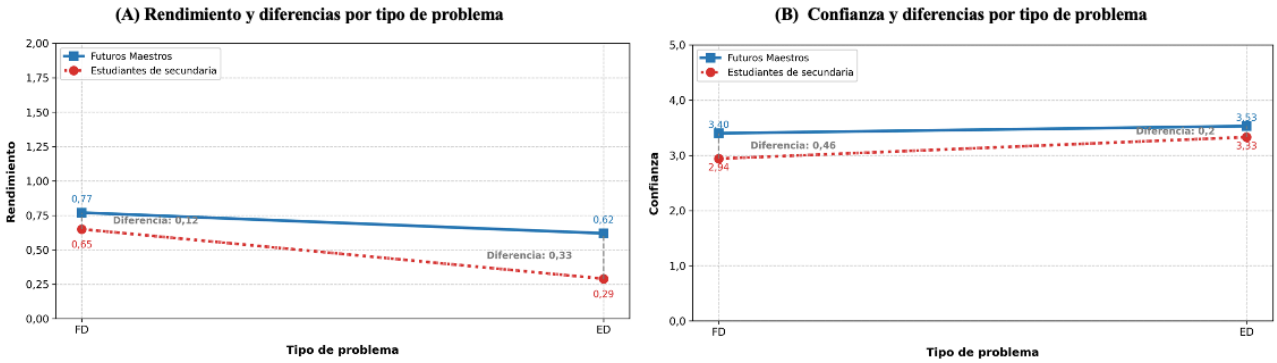
Rendimiento medio (y desviación estándar) por grupo y tipo de problema

Grupo	Problemas de falta de datos	Problemas de exceso de datos
Estudiantes de secundaria	0.65 (*SD* 0.68)	0.29 (*SD* 0.48)
Futuros maestros	0.79 (*SD* 0.76)	0.61 (*SD* 0.64)

Los futuros maestros obtuvieron mejores resultados que los estudiantes de secundaria, con la mayor diferencia en los problemas con exceso de datos (0.33 puntos) y la menor en los problemas de falta de datos (0.12 puntos). Mientras que en los futuros maestros apenas se observan diferencias de rendimiento entre los dos tipos de problemas, el rendimiento del alumnado de secundaria es inferior en los problemas con exceso de datos. Los resultados se presentan en la Figura 2(A).

Figura 2

Rendimiento y confianza por grupo para los problemas con falta de datos (FD) y exceso de datos (ED)



El ANOVA mixto mostró una interacción significativa entre la cantidad de información y el perfil del resolutor ($F(1, 277) = 3.83$, $p < .05$, $\eta^2 = .02$). Las comparaciones por pares indicaron que las diferencias de rendimiento entre estudiantes y futuros maestros no fueron significativas en los problemas de falta de datos ($p = .12$), mientras que en los problemas de exceso de datos fueron mayores y estadísticamente significativas ($p < .001$). Esto sugiere que la ventaja de rendimiento de los futuros maestros se concentra principalmente en los problemas con exceso de información.

Influencia de la cantidad de información en las diferencias de confianza entre estudiantes de secundaria y futuros maestros

La Tabla 2 muestra las puntuaciones medias de la confianza manifestada por los estudiantes de secundaria y los futuros maestros al resolver los distintos tipos de problemas.

Tabla 2

Confianza media (y desviación estándar) por grupo y tipo de problema

Grupo	Problemas de falta de datos	Problemas de exceso de datos
Estudiantes de secundaria	2.94 (SD 1.22)	3.33 (SD 1.20)
Futuros maestros	3.41 (SD 1.02)	3.55 (SD 1.14)

Los futuros maestros mostraron niveles de confianza superiores a los de los estudiantes de secundaria, siendo mayor la diferencia en los problemas en los que faltan datos (0.46 puntos) menor en los problemas con exceso de datos (0.20 puntos). Los futuros maestros reportaron una confianza similar en ambos tipos de problemas mientras que los estudiantes de secundaria mostraron una confianza notablemente más baja en los problemas de falta de datos en comparación con los de exceso de datos. Estos resultados se presentan en la Figura 2(B).

El ANOVA mixto mostró que el efecto de interacción fue significativo ($F(1, 277) = 4.09$, $p < .05$, $\eta^2 = .02$). Las comparaciones por pares revelaron que las diferencias de confianza entre estudiantes y futuros maestros fueron significativas en los problemas con falta de datos ($p < .01$), pero no alcanzaron significación en los problemas con exceso de datos ($p = .16$). Esto indica que los futuros maestros muestran niveles de confianza mayores en los problemas que requieren gestionar falta de información.

Influencia de la cantidad de información y del perfil del resolutor en la relación entre confianza y rendimiento

Las correlaciones de Pearson mostraron patrones diferentes según el tipo de problema y el grupo de resolutores. En el caso de los estudiantes, la confianza se asoció moderadamente con el rendimiento en los problemas con falta de datos ($r = .40$, $p < .01$), mientras que en los problemas con exceso de datos la asociación fue más débil ($r = .17$, $p < .05$). En los futuros maestros, la relación fue en general

más débil: resultó significativa únicamente en los problemas con falta de datos ($r = .24$, $p < .05$), y en los problemas con exceso de datos la asociación fue pequeña y no significativa ($r = .20$, $p = .06$).

Las pruebas Z de Steiger permitieron examinar si la relación confianza–rendimiento difería entre los problemas con falta y exceso de datos dentro de cada perfil de resolutor. En los estudiantes, la relación fue significativamente más fuerte en los problemas con falta de datos que en los con exceso de datos ($Z = -2.67$, $p < .01$). En cambio, en los futuros maestros no se encontraron diferencias significativas entre los dos tipos de problemas ($Z = 0.37$, $p = .71$).

La transformación Z de Fisher permitió comparar las correlaciones entre perfiles de resolutores para cada tipo de problema. En los problemas con falta de datos, la diferencia entre estudiantes y futuros maestros no fue estadísticamente significativa ($Z = 1.38$, $p = .17$), y tampoco lo fue en los problemas con exceso de datos ($Z = -0.16$, $p = .87$). En conjunto, estos resultados muestran que la relación entre confianza y rendimiento varía más entre tipos de problemas en el caso de los estudiantes que en el de los futuros maestros, mientras que las diferencias entre grupos no son significativas para ninguno de los dos tipos de problema. Este patrón contrasta con los resultados de rendimiento, donde la ventaja de los futuros maestros se concentraba en los problemas con exceso de datos.

DISCUSIÓN

Influencia de la cantidad de información en las diferencias de rendimiento y de confianza (RQ1)

Los resultados muestran que las diferencias en el rendimiento favorecen a los futuros maestros en los problemas con exceso de datos, mientras que se reducen de manera notable en los problemas con falta de datos. Esto sugiere que el mayor rendimiento por parte de los futuros maestros está relacionado con la gestión de la información. En efecto, la capacidad de construir la situación, priorizar los datos relevantes y descartar los irrelevantes parece ser el elemento diferenciador en los problemas con exceso de datos. Por el contrario, cuando la información debe obtenerse mediante estimaciones, la brecha de rendimiento se reduce, lo que es compatible con que ambos perfiles puedan apoyarse en estrategias de estimación similares. Una posible explicación de esta ventaja podría estar relacionada con una mayor competencia lectora de los futuros maestros (Segura et al., 2025). Su capacidad para manejar la información del enunciado repercute positivamente en cómo organizan los datos y simplifican la situación para construir un modelo adecuado (Leiß et al., 2019), lo que se traduce en estrategias de resolución más eficaces y un mayor rendimiento (Segura et al., 2026). En el caso de los estudiantes, la presencia de exceso de información incrementa la carga cognitiva, dificultando la detección de los datos irrelevantes y la construcción de modelos precisos.

En cuanto a la influencia de la cantidad de información en las diferencias de confianza, los resultados muestran que, mientras que los futuros maestros mantienen niveles de confianza estables en ambos tipos de problemas, los estudiantes presentan una confianza más alta en los problemas con exceso de datos a pesar de obtener un rendimiento claramente inferior, lo que indica una desalineación entre confianza y rendimiento, es decir, una falta de calibración (Niederhand et al., 2021). En consecuencia, se observa una diferencia de confianza entre futuros maestros y estudiantes en los problemas con falta de datos, diferencia que se atenúa en los problemas con exceso de datos.

La obtención de una mayor diferencia en el nivel de confianza en los problemas con falta de datos sugiere que la menor familiaridad con este tipo de actividad afecta negativamente a la confianza de los estudiantes: este tipo de problemas apenas aparece en los libros de texto, tradicionalmente dominados por problemas verbales convencionales (Vicente et al., 2018). En cambio, en los problemas con exceso de datos se observa un mayor desajuste entre confianza y rendimiento, lo que podría interpretarse como una tendencia a sobreestimar su rendimiento. Esto podría estar relacionado con la percepción de familiaridad que generan estos problemas verbales. Sin embargo, esta identificación superficial oculta su verdadera dificultad: seleccionar, priorizar y descartar información (Segura et al., 2025; Krawitz y Schukajlow, 2018).

Los futuros maestros muestran un patrón claramente distinto: su confianza es más estable y está mejor calibrada en ambos tipos de problemas, lo que refleja un diagnóstico más preciso del hecho de que tanto los problemas con falta de datos como los con exceso de datos son tareas no convencionales que requieren enfoques de resolución específicos.

Relación entre rendimiento y confianza (RQ2)

Los resultados muestran dos patrones complementarios. En primer lugar, al comparar estudiantes y futuros maestros dentro de cada tipo de problema, la relación entre confianza y rendimiento se mantiene positiva y relativamente estable en ambos grupos, en consonancia con lo señalado por la literatura sobre la consistencia de esta relación en distintos contextos (Stankov et al., 2012). En segundo lugar, al comparar los tipos de problema dentro de cada perfil de resolutor, emergen diferencias importantes: los futuros maestros mantienen una correspondencia estable entre confianza y rendimiento tanto en los problemas con falta de datos como en los problemas con exceso de datos, mientras que en los estudiantes esta correspondencia es más sólida en los problemas con falta de datos pero se desajusta en los de exceso de datos. Este patrón refleja la diferencia en conciencia metacognitiva ya identificada en la RQ1: los estudiantes monitorizan de forma más precisa su rendimiento cuando falta información, pero tienden a sobreestimar su confianza en los problemas con exceso de datos, incluso cuando su rendimiento es inferior, lo que evidencia una falta de calibración.

Estos resultados ponen de manifiesto la necesidad de abordar este tipo de tareas desde distintos ángulos. En el caso de los estudiantes, es necesario enseñar explícitamente la naturaleza de las distintas condiciones de información mediante una secuencia cuidadosa de tareas, junto con retroalimentación metacognitiva específica, especialmente en los problemas con exceso de datos, donde se da un mayor desajuste entre confianza y rendimiento. En cuanto a los futuros maestros, resulta fundamental trabajar su competencia diagnóstica para reconocer las descalibraciones de confianza en el alumnado, de modo que puedan ofrecer un apoyo más eficaz en el aprendizaje. Estas prioridades deberían incorporarse a los programas de formación inicial del profesorado orientados al desarrollo de la competencia diagnóstica y de la conciencia metacognitiva.

LIMITACIONES

Aunque se controló la complejidad de las tareas, no puede descartarse completamente cierta influencia del contenido matemático. Además, la confianza se evaluó mediante un ítem por problema, aunque cada categoría contó con dos (uno por problema). Futuras investigaciones podrían emplear escalas multidimensionales para profundizar en esta variable.

Agradecimientos

Este estudio se ha hecho en el marco del proyecto PID2021-126707NB-I00 financiado por MCIU/AEI/10.13039/501100011033 y por FEDER "A way of making Europe", y del proyecto emergente CIGE2024/64 financiado por la Generalitat Valenciana.

Referencias

Böswald, V. y Schukajlow, S. (2023). I value the problem, but I don't think my students will: Preservice teachers' judgments of task value and self-efficacy for modelling, word, and intramathematical problems. *ZDM–Mathematics Education*, *55*(2), 331–344. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01412-z

Cabero, I., Diago, P. D., González-Calero, J. A., Wu, Y., Arnau, D. y Arevalillo-Herráez, M. (2021). Repercusión de la tipología de presentación de los datos en el aprendizaje de la resolución de problemas verbales. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (p. 644). SEIEM.

Ferrando, I., Barquero, B. y Segura, C. (2025). Does training matter? Effect of training strategies on how pre-service teachers pose and assess modelling problems. *ZDM–Mathematics Education*, *57*(2), 275–288. https://doi.org/10.1007/s11858-025-01658-3

Ferrando, I., Segura, C. y Pla-Castells, M. (2020). Relations entre contexte, situation et schéma de résolution dans les problèmes d'estimation. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, *20*(3), 557–573. https://doi.org/10.1007/s42330-020-00102-w

Foster, C. (2016). Confidence and competence with mathematical procedures. *Educational Studies in Mathematics*, *91*(2), 271–288. https://doi.org/10.1007/s10649-015-9660-9

Greefrath, G. (2020). Mathematical modelling competence: Selected current research developments. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *17,* 38–51. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i17.303

Krawitz, J. y Schukajlow, S. (2018). Do students value modelling problems, and are they confident they can solve such problems? Value and self-efficacy for modelling, word, and intra-mathematical problems. *ZDM–Mathematics Education*, *50*(1-2), 143–157. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0893-1

Krawitz, J., Schukajlow, S. y Van Dooren, W. (2018). Unrealistic responses to realistic problems with missing information: what are important barriers? *Educational Psychology*, *38*(10), 1221–1238. https://doi.org/10.1080/01443410.2018.1502413

Klock, S. y Siller, H.-S. (2020). A time-based measurement of the intensity of difficulties in the modelling process. En G. A. Stillman, G. Kaiser y C. E. Lampen (Eds.), *Mathematical modelling education and sense-making* (pp. 163–173). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-37673-4_15

Leiß, D., Plath, J. y Schwippert, K. (2019). Language and mathematics - key factors influencing the comprehension process in reality-based tasks. *Mathematical Thinking and Learning*, *21*(2), 131–153. https://doi.org/10.1080/10986065.2019.1570835

Leuders, T., Dörfler, T., Leuders, J. y Philipp, K. (2018). Diagnostic competence of mathematics teachers: Unpacking a complex construct. En T. Leuders, K. Philipp y J. Leuders (Eds.), *Diagnostic Competence of Mathematics Teachers* (pp. 3–31). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-66327-2_1

Morony, S., Kleitman, S., Lee, Y. P. y Stankov, L. (2013). Predicting achievement: Confidence vs self-efficacy, anxiety, and self-concept in Confucian and European countries. *International Journal of Educational Research*, *58*, 79–96. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2012.11.002

Nederhand, M. L., Tabbers, H. K., De Bruin, A. B. y Rikers, R. M. (2021). Metacognitive awareness as measured by second-order judgements among university and secondary school students. *Metacognition and Learning*, *16*(1), 1–14. https://doi.org/10.1007/s11409-020-09228-6

Niss, M. y Blum, W. (2020). *The Learning and Teaching of Mathematical Modelling*. Routledge. https://doi.org/10.4324/9781315189314

Segura, C., Gallart, C. y Ferrando, I. (2026). Influence of pre-service primary school teachers' prior knowledge of measurement and measurement estimation in solving modelling problems. *Journal of Mathematics Teacher Education, 29,* 433–458. https://doi.org/10.1007/s10857-025-09685-3

Segura, C., García-Cerdá, C. y Ferrando, I. (2025). Effect of reading literacy on performance and confidence solving modelling problems with missing or excess data [Comunicación oral]. En *The 22nd International Conference on the Teaching of Mathematical Modelling and Applications* (ICTMA 22). Linköping, Sweden.

Stankov, L., Lee, J., Luo, W. y Hogan, D. J. (2012). Confidence: A better predictor of academic achievement than self-efficacy, self-concept and anxiety? *Learning and individual differences*, *22*(6), 747–758. https://doi.org/10.1016/j.lindif.2012.05.013

Vicente, S., Manchado, E. y Verschaffel, L. (2018). Solving arithmetic word problems. An analysis of Spanish textbooks. *Culture and Education*, *30*, 71–104. https://doi.org/10.1080/11356405.2017.1421606

HERRAMIENTAS TECNOLÓGICAS PARA LA ENSEÑANZA DEL SENTIDO ESTOCÁSTICO EN EDUCACIÓN SECUNDARIA

Technological tools for teaching stochastic thinking in secondary education

García-Cuétara, I. y Muñiz-Rodríguez, L.

Universidad de Oviedo

Resumen

Esta comunicación presenta los resultados de una revisión sistemática sobre el uso de la tecnología en la enseñanza de la estocástica en educación secundaria. El análisis se centra en identificar qué herramientas tecnológicas se utilizan con mayor frecuencia y qué saberes básicos del sentido estocástico se trabajan con cada una. Se analizaron 35 artículos científicos, de los que se extrajeron las herramientas tecnológicas empleadas y los saberes básicos del sentido estocástico abordados. Los resultados revelan que GeoGebra y las hojas de cálculo son las herramientas tecnológicas predominantes. La representación gráfica y las medidas de tendencia central son los saberes básicos más frecuentes, presentes cada uno en 13 de los 35 estudios. Además, el análisis cruzado de las herramientas tecnológicas y los saberes básicos muestra que cada herramienta presenta un perfil didáctico claramente diferenciado. Se discuten las implicaciones de estos hallazgos para la práctica docente y la investigación futura.

Palabras clave: *educación secundaria, estadística, probabilidad, tecnología.*

Abstract

This paper presents the results of a systematic review on the use of technology in the teaching of stochastics in secondary education. The analysis focuses on identifying which technological tools are most frequently used and which basic knowledge of stochastic thinking is addressed with each of them. A total of 35 scientific articles were analysed, from which the technological tools employed and the basic knowledge of the stochastic thinking covered were extracted. The results reveal that GeoGebra and spreadsheets are the predominant technological tools. Graphical representation and measures of central tendency are the most frequent basic knowledge areas, each present in 13 of the 35 studies. Furthermore, the cross-analysis of technological tools and basic knowledge shows that each tool presents a clearly differentiated didactic profile. The implications of these findings for teaching practice and future research are discussed.

Keywords: *probability, secondary education, statistics, technology.*

INTRODUCCIÓN

El desarrollo del sentido estocástico, entendido como la capacidad de razonar sobre datos, incertidumbre y probabilidad en contextos reales, constituye uno de los objetivos centrales de la educación matemática en secundaria (Batanero, 2013; Burrill y Biehler, 2011), y ha sido recientemente reafirmado como una prioridad tanto curricular como investigadora (Berciano, 2025). Las recomendaciones internacionales, como las directrices del GAISE College Report (*Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education*) subrayan la importancia de trabajar con datos reales, fomentar el razonamiento estocástico a lo largo de todo el ciclo de investigación y utilizar la tecnología como herramienta que facilite la exploración y la comprensión conceptual (Bargagliotti et al., 2020; Burrill y Biehler, 2011; Chance et al., 2007).

García-Cuétara, I. y Muñiz-Rodríguez, L. (2026). Herramientas tecnológicas para la enseñanza del sentido estocástico en educación secundaria. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (pp. 266-273). SEIEM.

El papel de la tecnología en la enseñanza de la estocástica en educación secundaria ha sido objeto de creciente atención investigadora. En una revisión sistemática de la literatura realizada por las autoras de este trabajo se identificaron 35 estudios empíricos centrados en este ámbito. No obstante, la amplia diversidad de herramientas empleadas (que abarca desde software estadístico especializado hasta lenguajes de programación, applets de simulación o dispositivos de recogida de datos) dificulta establecer con claridad qué tecnologías se utilizan, con qué finalidad didáctica y para el desarrollo de qué saberes estocásticos concretos. Esta situación pone de relieve la necesidad de analizar con mayor detalle la relación entre las herramientas tecnológicas y los saberes básicos asociados al sentido estocástico. En consecuencia, el objetivo de esta comunicación es analizar qué herramientas tecnológicas se utilizan para enseñar los saberes básicos del sentido estocástico en educación secundaria. Para ello, se plantean tres preguntas de investigación: 1) ¿Qué herramientas tecnológicas se identifican en los estudios empíricos sobre la enseñanza del sentido estocástico en educación secundaria? 2) ¿Qué saberes básicos del sentido estocástico se abordan en dichos estudios? 3) ¿Qué herramientas tecnológicas se utilizan para enseñar cada uno de los saberes básicos del sentido estocástico en educación secundaria según la literatura?

ANTECEDENTES

La investigación acumulada en las últimas décadas ofrece evidencia sobre los beneficios del uso de la tecnología en la enseñanza de la estocástica en educación secundaria. Los estudios analizados en la revisión sistemática que sustenta esta comunicación coinciden de manera generalizada en señalar mejoras en el rendimiento académico del alumnado tras la implementación de intervenciones didácticas que incorporan herramientas tecnológicas (Cujba y Pifarre, 2023; Rizou et al., 2022)

Más allá del rendimiento, la tecnología parece incidir también en el desarrollo de competencias cognitivas específicas. Varios estudios reportan mejoras en la capacidad del alumnado para interpretar gráficos, formular conjeturas, justificar razonamientos y comprender conceptos estocásticos complejos como la aleatoriedad, la inferencia o la distribución normal (Zenteno et al., 2020). Estas ganancias se producen con mayor intensidad en entornos que promueven la exploración guiada, el trabajo colaborativo asistido por ordenador y el aprendizaje basado en problemas o proyectos (Salsabila y Setyaningrum, 2018), lo que sugiere que el efecto de la tecnología no es independiente de la metodología didáctica en la que se inscribe.

La dimensión actitudinal ha recibido menos atención empírica, pero los estudios que la abordan apuntan también en una dirección positiva. Después de aplicar herramientas tecnológicas se han observado mejoras en el interés por la materia y en la percepción de su utilidad (Castro Salas, 2020), una mayor motivación para explorar fenómenos aleatorios (Burbano Pantoja et al., 2015), una reducción de la ansiedad estadística (Cujba y Pifarre, 2023) y valoraciones positivas en dimensiones como la usabilidad, la motivación y la claridad de las explicaciones (Yulindra et al., 2023).

Sin embargo, pese a la evidencia acumulada sobre sus beneficios, la literatura no ha abordado sistemáticamente qué herramienta resulta más adecuada para qué contenido estocástico concreto, lo que en este trabajo se denomina perfil didáctico de cada herramienta. Burrill y Biehler (2011) ya advirtieron que herramientas como TinkerPlots y Fathom no son intercambiables, sino que responden a orientaciones pedagógicas distintas; y el marco TPACK (Technologiacl Pedagogical Content Knowledge) (Mishra y Koehler, 2006) subraya que el conocimiento tecnológico-pedagógico del contenido exige precisamente ese tipo de correspondencia, una cuestión destacada también en investigaciones recientes (Sancho-Blanco et al., 2025). Esta comunicación parte de ambos antecedentes para cubrir ese vacío.

METODOLOGÍA

La revisión sistemática de la literatura llevada a cabo siguiendo las directrices PRISMA (Page et al., 2021) identificó en las bases de datos Web of Science y Scopus 35 estudios empíricos (en su mayoría

diseños de intervención educativa) publicados entre 2014 y 2024 sobre el uso de la tecnología en la enseñanza de la estocástica en educación secundaria. Esta revisión aborda cinco preguntas de investigación relativas a las características del contexto, las herramientas tecnológicas empleadas, las metodologías utilizadas, el impacto en el aprendizaje y las actitudes del alumnado, y las dificultades de implementación. Los resultados completos están pendientes de publicación en otro trabajo. La presente comunicación se centra específicamente en los resultados relativos al uso de herramientas tecnológicas y presenta un análisis original no incluido en el trabajo previo: el cruce sistemático entre cada herramienta identificada y los saberes básicos del sentido estocástico trabajados en cada intervención. Este análisis permite trazar un mapa de correspondencias entre tecnologías y contenidos estocásticos en educación secundaria, una dimensión ausente tanto en la revisión de origen como en la literatura previa sobre el tema.

Los saberes básicos abordados en cada estudio se extrajeron directamente del texto y se agruparon tomando como referencia la organización del sentido estocástico establecida en el currículo de educación secundaria (Ministerio de Educación y Formación Profesional, 2022), estructurado en torno a tres grandes ideas: organización y análisis de datos, incertidumbre, e inferencia. A efectos analíticos, estos saberes se distinguen entre contenidos descriptivos básicos (representación gráfica, medidas de tendencia central y dispersión, tablas de frecuencia) y contenidos de mayor complejidad conceptual (distribuciones estadísticas, inferencia, correlación y regresión), distinción que responde a la caracterización de Garfield y Ben-Zvi (2008), según la cual son estos últimos los que permiten al alumnado razonar estadísticamente en sentido pleno. El uso de los saberes básicos como categoría de análisis responde a la necesidad de operacionalizar el sentido estocástico como un constructo amplio que integra conocimientos, razonamientos y prácticas estadísticas (Batanero, 2013), mediante un marco alineado con el currículo y con las recomendaciones internacionales sobre enseñanza de la estadística. El procedimiento de codificación consistió en una lectura detallada de cada artículo, identificando de forma explícita los saberes básicos trabajados en la intervención. Los saberes básicos identificados se clasificaron en los siguientes bloques: recogida y organización de datos, representación gráfica, medidas de tendencia central, medidas de dispersión, tablas de frecuencia y contingencia, correlación y regresión, probabilidad, distribuciones estadísticas, estadística inferencial, formulación de preguntas estadísticas y contenido no especificado cuando el estudio no detallaba los saberes abordados. Se permitió la codificación múltiple cuando un estudio abordaba varios saberes y se utilizó la categoría "contenido no especificado" en los casos de información ambigua o insuficiente. Dado que algunos estudios analizados tienen procedencia internacional, esta clasificación no responde a la terminología curricular de cada país de origen, sino que constituye un marco de categorización adoptado por las autoras con el fin de facilitar la interpretación de los resultados en el contexto nacional en el que se enmarca esta comunicación.

Las herramientas tecnológicas se identificaron a partir de las referencias explícitas a los recursos digitales empleados en cada intervención. El proceso de codificación consistió en registrar cada herramienta mencionada, normalizando la denominación para evitar duplicidades, y permitiendo la codificación múltiple cuando se empleaban varias herramientas en un mismo estudio. No se establecieron categorías de herramientas a priori, ya que el objetivo del análisis era examinar su relación con los saberes básicos del sentido estocástico, permitiendo que los perfiles didácticos de las herramientas emergieran del análisis cruzado con dichos saberes.

RESULTADOS

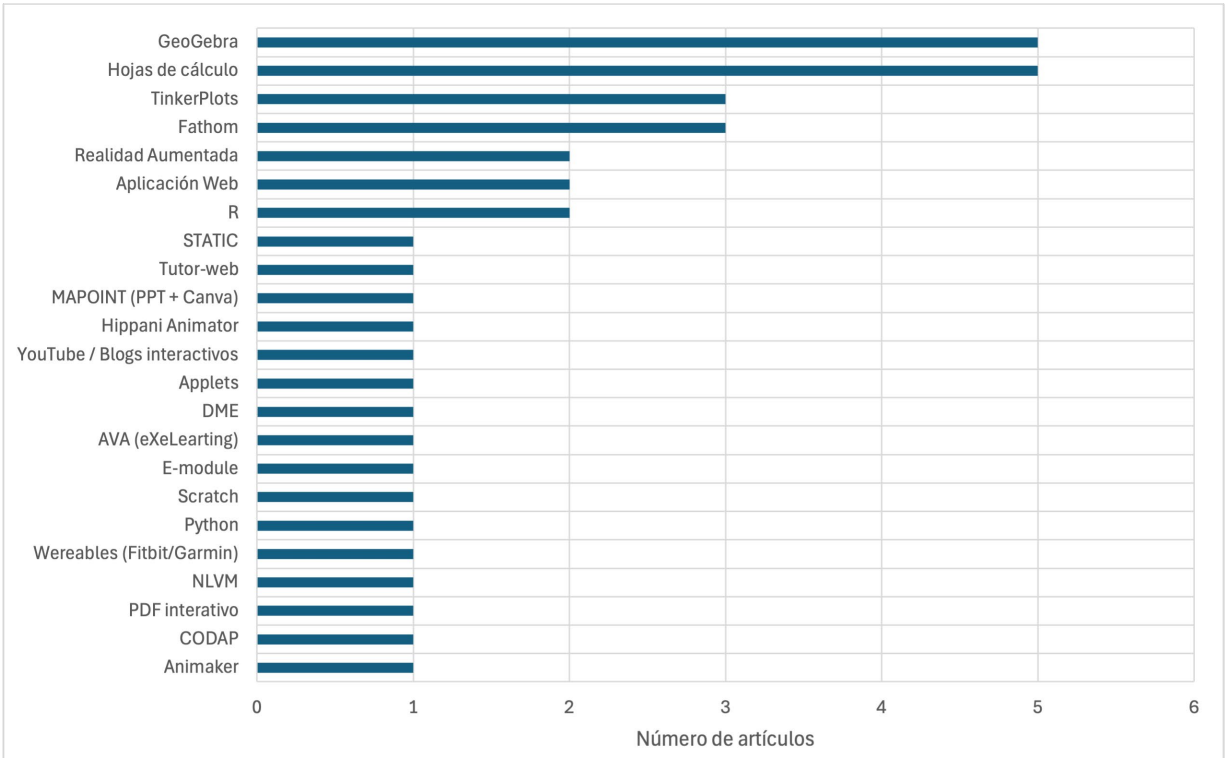
Herramientas tecnológicas identificadas

El análisis de los 35 artículos seleccionados revela una notable diversidad tecnológica: se identificaron un total de 23 herramientas distintas (Figura 1), lo que pone de manifiesto la heterogeneidad de recursos digitales empleados en la enseñanza de la estocástica en educación secundaria. GeoGebra y las hojas de cálculo son las herramientas más frecuentes, presentes en 5

artículos. A continuación, se sitúan Fathom y TinkerPlots, con 3 estudios cada una, y R, la realidad aumentada y las aplicaciones Web con 2. Las 16 herramientas restantes aparecen en un único estudio, lo que refleja una marcada dispersión en este campo de investigación.

Figura 1

Herramientas tecnológicas identificadas en los estudios analizados. Fuente: elaboración propia.

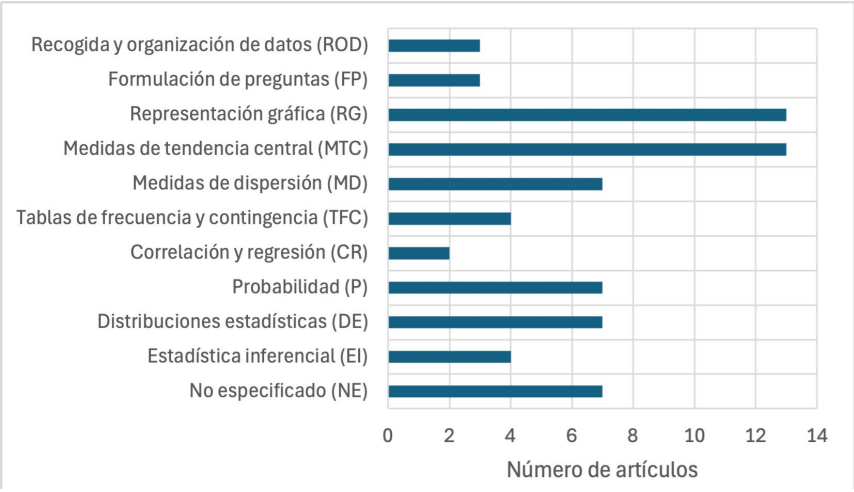


Saberes básicos identificados

El análisis de los saberes básicos del sentido estocástico trabajados en los 35 artículos seleccionados muestra una distribución desigual entre los distintos bloques (Figura 2).

Figura 2

Saberes básicos identificados en los estudios analizados. Fuente: elaboración propia.



Relación entre las herramientas tecnológicas y los saberes básicos del sentido estocástico

El análisis cruzado entre las herramientas tecnológicas identificadas y los saberes básicos del sentido estocástico trabajados en cada estudio, cuya distribución completa se recoge en la Tabla 1, permite trazar un mapa de correspondencias que revela patrones de uso. Las hojas de cálculo son la herramienta más frecuente y presentan el perfil más transversal: su uso abarca saberes heterogéneos, desde la representación gráfica y las medidas de tendencia central hasta las tablas de frecuencia y la correlación y regresión lineal. Cuando se combina con applets de probabilidad, incorpora también ese bloque temático. Esta versatilidad refleja su condición de herramienta de propósito general, lo que puede explicar tanto su amplia adopción como la diversidad de usos que se le da en los distintos estudios. GeoGebra destaca por su perfil temático amplio y diversificado. Sus cinco artículos cubren un espectro que va desde los contenidos descriptivos más habituales: medidas de dispersión (3 artículos), medidas de tendencia central (2) y representación gráfica (1), hasta contenidos de mayor complejidad conceptual como las distribuciones estadísticas (2 artículos) y la estadística inferencial (1). Fathom, en cambio, muestra una orientación más especializada. Los tres estudios que la utilizan se centran en las distribuciones estadísticas, con especial atención a la distribución normal, y en la estadística inferencial, lo que la posiciona como una herramienta especialmente adecuada para los contenidos de mayor nivel conceptual del currículo. Su uso parece asociarse a etapas avanzadas de la educación secundaria, donde estos saberes básicos tienen mayor presencia curricular.

TinkerPlots, por su parte, aparece vinculada principalmente al análisis exploratorio de datos: representación gráfica y medidas de tendencia central, favoreciendo una aproximación visual e intuitiva a los datos. Cuando se combina con el entorno digital DME, su alcance se amplía hacia la estadística inferencial, lo que sugiere que la plataforma de apoyo puede jugar un papel determinante en la profundidad estadística que se alcanza con la herramienta. La realidad aumentada presenta el perfil más delimitado de todas las herramientas analizadas: los dos artículos en que aparece la utilizan exclusivamente para trabajar la probabilidad, a través de la simulación de experimentos aleatorios en entornos inmersivos. Aunque su presencia es todavía reducida, su uso consistente en este bloque temático apunta a un nicho didáctico específico con potencial para seguir desarrollándose.

Resulta especialmente llamativo el caso de Animaker, CODAP y los dispositivos wearables (Fitbit y Garmin), que comparten un rasgo distintivo respecto al resto de herramientas: son las únicas que sitúan explícitamente la formulación de preguntas estadísticas y el ciclo de investigación en el centro de la intervención didáctica. Mientras la mayoría de las herramientas se emplean para trabajar contenidos estadísticos concretos de forma procedimental, estas tres propician un enfoque más integrador, en el que el alumnado recoge datos propios, formula preguntas con sentido y toma decisiones basadas en evidencia, en consonancia con las recomendaciones del informe GAISE (Bargagliotti et al., 2020).

Finalmente, Scratch merece una mención especial por la singularidad de su perfil. El único artículo que lo utiliza, en el marco de un videojuego educativo, aborda tablas de contingencia, distribuciones conjunta y marginal, dependencia e independencia de variables y regresión lineal, que constituyen los saberes básicos del sentido estocástico de mayor nivel de todos los estudios analizados. Este hallazgo, aunque basado en un único estudio, abre una línea de reflexión sobre el potencial de los entornos de programación y gamificación para trabajar conceptos estocásticos avanzados que habitualmente reciben escasa atención en la investigación sobre tecnología y estocástica en secundaria.

Tabla 1

Relación entre herramientas tecnológicas y saberes básicos identificados en los estudios analizados. Fuente: elaboración propia.

Tecnología	N	OAD						CR	PI		I	NA
		ROD	FP	RG	MTC	MD	TFC	CR	P	DE	EI	
Hojas de cálculo	7			2	1		1	1	1	1		
GeoGebra	5			1	2	3				2	1	1
Fathom	3			1	1	1				2	2	
TinkerPlots	3			2	2							
R	2			1					1			
Realidad aumentada	2								2			
Animaker	1	1	1	1	1							
CODAP	1	1	1									
Scratch	1						1	1		1		
Python	1				1							
Wearables (Fitbit/Garmin)	1	1	1	1	1							
NLVM	1								1			
PDF interactivo	1								1	1		
Aplicación Web	1			1	1	1						1
E-module	1				1	1						
YouTube/ Blogs	1			1	1		1					
Applets	1			1			1		1			
DME	1			1	1	1					1	
AVA (eXeLearning)	1											1
Tutor – web	1											1
STATIC	1											1
Hippani Animator	1											1
MAPOINT (PPT + Canva)	1											1

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Los resultados muestran que la investigación sobre uso de tecnología para la enseñanza del sentido estocástico en secundaria se concentra mayoritariamente en la estadística descriptiva. Como muestra la Figura 2, la representación gráfica y las medidas de tendencia central son los saberes más frecuentes, lo que sugiere que la tecnología se emplea preferentemente para apoyar la comprensión de contenidos básicos. Esta tendencia puede interpretarse, por un lado, como reflejo de las prioridades curriculares de la etapa y, por otro, como un uso aún limitado del potencial de la tecnología para promover competencias estocásticas de mayor complejidad. Rodríguez-Muñiz y Díaz (2018) constatan que esta infrarrepresentación de los contenidos más complejos es una tendencia transversal en la educación estocástica en secundaria, coherente con lo que Garfield y Ben-Zvi (2008) ya señalaron: la enseñanza de la estadística tiende a centrarse en procedimientos aislados y contenidos descriptivos, sin promover la comprensión interrelacionada de las grandes ideas estadísticas que permiten al alumnado razonar estadísticamente.

La escasa presencia de la correlación y la regresión y de la formulación de preguntas estadísticas dentro del ciclo de investigación resulta llamativa. Tal como muestra la Figura 2, apenas tres estudios del total trabajan explícitamente estas fases del ciclo estadístico, a pesar de que las recomendaciones curriculares internacionales, como el informe GAISE (Bargagliotti et al., 2020), la sitúan en el centro de la educación estadística.

La diferenciación funcional entre herramientas es un hallazgo relevante para la práctica docente. La elección de GeoGebra frente a Fathom, de TinkerPlots frente a las hojas de cálculo, o de CODAP frente a una hoja de cálculo no es neutra: cada herramienta lleva implícita una determinada orientación didáctica y facilita el trabajo con ciertos contenidos más que con otros. Los resultados de esta investigación son consistentes con la caracterización de Burrill y Biehler (2011): TinkerPlots favorece la exploración visual apropiada para los primeros niveles de secundaria, mientras que Fathom apoya el razonamiento inferencial en niveles superiores. Estas correspondencias son precisamente el tipo de conocimiento que el marco TPACK considera indispensable para la práctica docente y el diseño curricular.

Finalmente, la elevada dispersión tecnológica (Figura 1) limita la acumulación de evidencia empírica y confirma la necesidad de investigaciones más sistemáticas y comparativas, tal como ya advertían Chance et al. (2007).

Este estudio presenta limitaciones inherentes a su diseño. La búsqueda se restringió a WoS y Scopus en inglés y español, lo que puede haber excluido trabajos relevantes en otras bases de datos o idiomas. Además, el reducido número de estudios por herramienta limita la solidez de las correspondencias identificadas. El análisis es descriptivo y no permite establecer relaciones causales entre el uso de una herramienta y el aprendizaje de un saber concreto.

Esta comunicación muestra que cada herramienta tecnológica presenta un perfil didáctico diferenciado en la enseñanza del sentido estocástico en secundaria: GeoGebra destaca por su versatilidad transversal, Fathom por su orientación hacia la inferencia, TinkerPlots por el análisis exploratorio visual y la realidad aumentada por la simulación de experimentos aleatorios. Estos resultados, encuadrados en el marco TPACK, tienen implicaciones directas para la formación del profesorado y el diseño curricular. Como líneas futuras, se identifican dos prioridades: diseñar intervenciones para los saberes menos representados y desarrollar el TPACK específico del dominio estocástico en la formación del profesorado de matemáticas.

Referencias

Bargagliotti, A., Franklin, C. A., Arnold, P. y Scheaffer, R. (2020). *Guidelines for assessment and instruction in statistics education (GAISE) college report 2016.* American Statistical Association.

Batanero, C. (2013). Sentido estadístico: componentes y desarrollo. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria* (pp. 55-61). Universidad de Granada.

Berciano, A. (2025). Retos de la investigación sobre sentido estocástico en proyectos STE(A)M de educación secundaria. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. 20-40). SEIEM.

Burbano Pantoja, V. M. Á., Pinto Sosa, J. E. y Valdivieso Miranda, M. A. (2015). Ways to use simulation as a teaching resource. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte, 45*, 16–37.

Burrill, G. y Biehler, R. (2011). Fundamental statistical ideas in the school curriculum and in training teachers. En C. Batanero, G. Burrill, y C. Reading (Eds.), *Teaching Statistics in School Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education* (pp. 57-69). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-1131-0_10

Castro Salas, A. (2020). Exploración y modificación de la actitud de los estudiantes de pre-universitario hacia el estudio de las matemáticas. *Transformación, 16*(3), 610-621.

Chance, B., Ben-Zvi, D., Garfield, J. y Medina, E. (2007). The role of technology in improving student learning of statistics. *Technology Innovations in Statistics Education*, *1*(1), 1-27. https://doi.org/10.5070/T511000026

Cujba, A. y Pifarre, M. (2023). Relationships between the learning of statistics and the attitudes of students in the framework of a data analysis project with technology. *Mathematics Education, 35*, 196-225. https://doi.org/10.24844/EM3502.08

Garfield, J. y Ben-Zvi, D. (2008). *Developing students' statistical reasoning: Connecting research and teaching practice*. Springer.

Ministerio de Educación y Formación Profesional (2022). Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria. *Boletín Oficial del Estado, 76*, 41571-41789. https://www.boe.es/eli/es/rd/2022/03/29/217

Mishra, P. y Koehler, M. J. (2006). Technological pedagogical content knowledge: A framework for teacher knowledge. *Teachers College Record, 108*(6), 1017–1054. https://doi.org/10.1111/j.1467-9620.2006.00684.x

Page, M. J., McKenzie, J. E., Bossuyt, P. M., Boutron, I., Hoffmann, T. C., Mulrow, C. D., ... Moher, D. (2021). The PRISMA 2020 statement: An updated guideline for reporting systematic reviews. *BMJ, 372*(71), 1-9. https://doi.org/10.1136/bmj.n71

Rizou, O., Klonari, A. y Kavroudakis, D. (2022). Investigating the Impact and Effectiveness of an ICT-based Teaching Scenario on Secondary School Students' Geospatial and Statistical Literacy: A Case Study from Greece. *European Journal of Geography, 13*, 50-69. https://doi.org/10.48088/ejg.o.riz.13.3.050.069

Rodríguez-Muñiz, L. J. y Díaz, P. (2018). Las investigaciones sobre la estadística y la probabilidad en los libros de texto de Bachillerato. ¿Qué se ha hecho y qué se puede hacer? *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *14*, 65-81. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i14.218

Sancho-Blanco, V., Arnal-Bailera, A. y Manero, V. (2025). Cuestionario para evaluar el desarrollo del TPACK en docentes de Matemáticas. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. 397-404). SEIEM.

Salinas, J., Valdez-Monroy, J. C., Salinas-Hernández, U., Sánchez, E. y Carrillo, J. (2021). Análisis de una secuencia para la noción de distribución de probabilidad usando un recurso computacional. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 545-552). SEIEM.

Salsabila, N. H. y Setyaningrum, W. (2018). Game "STATIC": Is it interesting for students? *Journal of Physics: Conference Series, 1097*, 012105. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1097/1/012105

Yulindra, D., Swastika, A., Negara, H. R. P., Setyaningsih, R. y Nurcahyo, A. (2023). E-module based on statistical literacy in mathematics learning. *Proceeding of international summit on education, technology, and humanity 2021, 2727*(1), 020075. https://doi.org/10.1063/5.0141914

Zenteno Ruiz, F. A., Rivera Espinoza, T. A. y Pariona Cervantes, D. J. (2020). Treatment of dispersion measurements by means of GeoGebra software. *Revista Universidad y Sociedad*, *12*(1), 244-250.

CONOCIMIENTO INTERPRETATIVO DE FUTUROS DOCENTES DE PRIMARIA SOBRE EL PENSAMIENTO FUNCIONAL

Interpretive knowledge of future primary school teachers on functional thinking

García-Moya, M.[a], Montoro, A. B.[b] y Moreno, A.[b]

[a]Universidad Autónoma de Madrid, [b]Universidad de Granada

Resumen

Este trabajo presenta un estudio exploratorio y descriptivo, cuyo objetivo general es analizar el conocimiento interpretativo de futuros docentes de Educación Primaria ante las respuestas que pueden ofrecer los escolares en tareas de pensamiento funcional. Participaron 39 futuros docentes que realizaron una actividad, antes y después de varias tareas formativas, donde debían identificar dificultades en las respuestas de los escolares y proponer ayudas. Los resultados muestran un cambio desde una visión centrada en errores procedimentales hacia una interpretación más profunda, identificando obstáculos en la generalización y el uso de variables. Se concluye que las actividades formativas favorecieron el desarrollo del conocimiento interpretativo.

Palabras clave: c*onocimiento interpretativo, Educación Primaria, formación de docentes, pensamiento funcional.*

Abstract

This paper presents an exploratory and descriptive study aimed at analysing the interpretive knowledge of future primary education teachers regarding the responses that schoolchildren can offer in functional thinking tasks. Thirty-nine students participated in the study, completing an activity before and after several training tasks in which they were required to identify difficulties in the students' answers and propose strategies to address them. The results show a change from a perspective focused on procedural errors towards a deeper interpretation, identifying obstacles in generalisation and the use of variables. It is concluded that the training activities fostered the development of this interpretive knowledge.

Keywords: *functional thinking, interpretive knowledge, Primary education, teachers training.*

INTRODUCCIÓN

El sentido algebraico se ha incorporado en el currículo español de Educación Primaria, reconociendo su relevancia en el desarrollo del pensamiento matemático desde edades tempranas (Ministerio de Educación y Formación Profesional, 2022). Este cambio se alinea con el enfoque internacional del Álgebra Temprana (Early Algebra), el cual promueve el desarrollo del pensamiento abstracto y relacional antes de la educación secundaria (Kaput, 2008). De este modo, no solo se busca que los escolares realicen cálculos, sino que comprendan relaciones, identifiquen patrones y generalicen regularidades, capacidades esenciales para la formación matemática futura (Narváez et al., 2025a; Moreno et al., 2022; Fuentes y Cañadas, 2024).

El sentido algebraico se articula a través de diversas vías de acceso, entre las que destaca el pensamiento funcional, definido como el estudio de las relaciones de covariación entre magnitudes y la generalización de dichas relaciones (Cañadas y Molina, 2016; Kaput, 2008). A diferencia de otros enfoques, el pensamiento funcional permite a los alumnos de Educación Primaria transitar desde la observación de casos particulares hacia la construcción de reglas generales que describen cómo cambia una cantidad en función de otra (Blanton y Kaput, 2011; Cañadas et al., 2024; Stephens et al.,

García-Moya, M., Montoro, A. B. y Moreno, A. (2026). Conocimiento interpretativo de futuros docentes de primaria sobre el pensamiento funcional. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (pp. 274-281). SEIEM.

2023). Desde esta perspectiva, el alumnado debe identificar cómo varían conjuntamente dos cantidades y expresar la regularidad observada mediante diferentes representaciones, ya sean verbales, pictóricas, tabulares o simbólicas (Moreno et al., 2022; Fuentes y Cañadas, 2024). La capacidad de generalizar una relación funcional no solo implica encontrar un resultado, sino comprender la naturaleza de la variable y la estabilidad de la regla en diferentes contextos (Cañadas et al., 2024; Moreno et al., 2025).

Ante esta situación, la formación inicial de docentes de Educación Primaria adquiere un papel clave, ya que el conocimiento matemático y didáctico condiciona directamente las oportunidades de aprendizaje que ofrecerán a su alumnado. Sin embargo, estudios recientes muestran que los futuros docentes no siempre están preparados para fomentar el sentido algebraico en las aulas, presentando limitaciones tanto en el dominio conceptual como en estrategias didácticas que favorezcan la generalización y la comprensión de relaciones (Gibim et al., 2025; Narváez et al., 2025b; Pinto et al., 2025). Esta brecha entre las demandas curriculares y la preparación docente justifica la necesidad de incluirlo como parte de la formación de los futuros docentes.

MARCO CONCEPTUAL

El conocimiento interpretativo se define como la capacidad del maestro para comprender el significado de las producciones matemáticas del alumnado, anticipar dificultades y diseñar intervenciones pedagógicas que promuevan la generalización y la abstracción (Ribeiro et al., 2021). Dicho conocimiento permite ir más allá de la simple verificación de respuestas correctas, facilitando la detección de patrones, errores recurrentes y estrategias de los alumnos y constituye un factor clave para el desarrollo de habilidades algebraicas significativas. En concreto, un alto conocimiento interpretativo permite comprender las estrategias o enfoques inesperados de los alumnos, dando sentido a su razonamiento. El conocimiento interpretativo también incluye la capacidad de elaborar comentarios específicos basados en el sentido que se le da al razonamiento de los alumnos; por lo tanto, debería permitir aprovechar el potencial de las estrategias erróneas o inesperadas (Di Martino et al., 2020). De acuerdo con Di Martino et al. (2020), el fortalecimiento del conocimiento interpretativo en la formación docente requiere atender a dos dimensiones que se refuerzan mutuamente: la evaluación de los niveles de conocimiento interpretativo de los docentes y el diseño de actividades específicas para su desarrollo. Ambas líneas de acción están estrechamente relacionadas, ya que el debate crítico generado en torno a las tareas de medición del conocimiento interpretativo actúa como un motor de aprendizaje en sí mismo. Este proceso permite que los futuros docentes desarrollen una nueva conciencia sobre los errores y las estrategias de los escolares, abordando la práctica desde una doble perspectiva: el dominio profundo de los contenidos matemáticos y la capacidad de diseñar enfoques pedagógicos ante razonamientos inesperados o erróneos. Dado que este conocimiento no surge de forma automática con la experiencia, sino que es un proceso que requiere una formación intencional, el análisis sistemático de las producciones de los alumnos se vuelve esencial para transformar el error en una verdadera oportunidad de aprendizaje

Los investigadores utilizan diversas categorías para analizar y clasificar la profundidad del conocimiento interpretativo de los futuros docentes. A continuación, se detallan las diferentes categorías identificadas en las investigaciones:

- Categoría evaluativa/descriptiva: El futuro docente se limita a identificar si la respuesta es correcta o incorrecta. Identifica estrategias superficiales y patrones de error evidentes, lo que le permite diseñar andamiajes básicos como tablas de valores o preguntas guía (Gibim et al., 2025; Jacobsen et al., 2014).
- Categoría interpretativa: El futuro docente busca comprender el obstáculo cognitivo subyacente. No se centra solo en el "qué" hizo el alumno, sino en el "por qué" lo hizo. Propone intervenciones integrales que fomentan la abstracción y la justificación de la regla general (Di Martino et al., 2016).

- Categoría de análisis: El futuro docente utiliza las producciones de los alumnos (incluso las erróneas) como oportunidades de aprendizaje. El futuro docente moviliza su conocimiento especializado del contenido matemáticos para generar nuevas trayectorias de aprendizaje que conectan el razonamiento particular del alumno con estructuras matemáticas más amplias y formales (Di Bernardo et al., 2017; Jacobsen et al., 2014).

Por lo comentado con anterioridad, resulta relevante analizar el conocimiento interpretativo de futuros docentes de Educación Primaria ante respuestas que pueden ofrecer los escolares de Educación Primaria en tareas de pensamiento funcional (Early Algebra). Para poder abordar lo anterior, se establecen los siguientes objetivos específicos:

- O1: Identificar las dificultades que los futuros docentes observan en las producciones de los escolares.
- O2: Analizar las propuestas de ayuda que los futuros docentes plantean para guiar a los escolares.

MÉTODO

El presente estudio adopta un enfoque descriptivo y exploratorio, ya que busca analizar la evolución del conocimiento interpretativo de futuros docentes de Educación Primaria (Cohen et al., 2018).

Los datos utilizados en esta investigación provienen de las producciones escritas de los 39 futuros docentes de Educación Primaria que asistieron a una formación sobre el pensamiento funcional, realizada tras unas sesiones sobre el sentido algebraico en el currículo de primaria (Vicepresidencia, Consejería de Educación y Universidades, 2022) y un primer acercamiento al trabajo con patrones. La formación sobre pensamiento funcional comenzó con la realización, de forma individual, de una actividad que pedía identificar dificultades en las respuestas de cinco estudiantes de Educación Primaria a una tarea de pensamiento funcional y explicar cómo podrían ayudarles (Figura 1). Esta tarea se ha diseñado partiendo de la representación de Pérez-Martos et al. (2024) y describiendo respuestas de los escolares (E1-E5) basadas en las pautas de razonamiento de Brizuela et al. (2015), adaptando diálogos originales al contexto visual de la máquina de bolas para dar coherencia y narrativa a la tarea. Posteriormente, los futuros docentes resolvieron cinco problemas de la página www.pensamientoalgebraico.com diseñados para el trabajo con escolares de Educación Primaria. Todos estos problemas tenían la misma estructura, plantean una situación que relaciona dos variables por medio de una función afín ($y = ax + b$) y se les pide calcular el valor de la variable dependiente para: valores cercanos, valores lejanos, regla general y función inversa), con la finalidad de que resuelvan tareas de pensamiento funcional, compartan sus soluciones y comprendan mejor los contenidos teóricos que se darán a continuación.

Tras este bloque práctico, se impartió una formación teórica que contenía la explicación de la estructura de las tareas trabajadas con anterioridad y el análisis de la resolución de estudiantes de Educación Primaria a las tareas propuestas, donde se vieron las estrategias empleadas y diversas formas de intervención docente: invitar, apoyar, informar, desafiar y cuestionar (Narváez y Cañadas, 2023).

Posteriormente, los futuros docentes resolvieron dos problemas propuestos para niños de entre 11 y 13 años: uno de ellos con la misma estructura, pero con un patrón geométrico (representación visual) y el otro planteado de manera general (comparar el coste de la factura telefónica), si bien se podría aplicar la misma estructura para dar respuesta. Tras poner en común las estrategias seguidas por los futuros docentes para su resolución, estos volvieron a resolver, de forma individual, la actividad inicial (Figura 1).

Para analizar el conocimiento interpretativo mostrado por los futuros docentes, se analizaron las producciones escritas siguiendo las categorías indicadas en el marco teórico (Di Bernardo et al., 2017; Gibim et al., 2025; Ribeiro et al., 2021). Además, dichas respuestas fueron analizadas mediante un proceso de triangulación de investigadores.

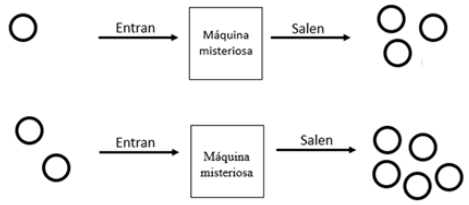
Figura 1

Actividad inicial y final basada en un problema de máquinas funcionales

a) ¿Qué dificultades observas o crees que podrían tener el estudiantado?
b) ¿Cómo crees que les podrías ayudar?

PROBLEMA

Al cole ha llegado una caja misteriosa. Cuando introduces un número de bolas, sale otro, como ves en la siguiente imagen. Vuestra misión es averiguar el cambio que realiza la máquina.



SOLUCIONES



E1: Se salta un número.
E2: Poniendo 3 números más.
E3: Si entran 4 le sumamos 5 y salen 9.
E4: Si le sumas dos más dos, le faltaría uno, y más este uno, formamos el cinco. Y si entra el cuatro, cuatro más cuatro, y añadimos el uno. Si entran 3 bolas. Saldrían tres más tres, pondría un seis, y aquí (señalando la salida) pondría un siete). Si entran nueve. Entonces si nueve más nueve son diez y ocho, más uno sería diez y nueve.
E5: Entran X. Serían X más X, que serían cero. Sería uno porque si le añadimos el uno sería uno. La x es cero porque no es ningún número. Se escribe 2 por x +1 porque es una operación que se tiene que hacer.

RESULTADOS

El objetivo general de este estudio fue analizar el conocimiento interpretativo de futuros docentes de Educación Primaria ante respuestas que pueden ofrecer los escolares en tareas de pensamiento funcional (Early Algebra). Para dar respuesta a este propósito, se establecieron los siguientes objetivos específicos:

- O1: Identificar las dificultades que los futuros docentes observan en las producciones de los escolares.
- O2: Analizar las propuestas de ayuda que los futuros docentes plantean para guiar a los escolares.

Se clasificaron las respuestas dadas por los futuros docentes en la actividad inicial y final de acuerdo con las categorías indicadas en el marco teórico (Di Bernardo et al., 2017; Gibim et al., 2025; Ribeiro et al., 2021) y se obtuvieron los resultados que se encuentran a continuación.

Respecto a la identificación de dificultades, en la actividad inicial hubo 22 futuros docentes en la categoría evaluativa/descriptiva, un grupo que se redujo a 3 en la actividad final. Por el contrario, la categoría interpretativa, que inicialmente contaba con 17 futuros docentes, alcanzó los 30 en la actividad final. De igual modo, la categoría de análisis no contó con ningún registro en la actividad inicial, pero esto se incrementó a 6 futuros docentes en la actividad final. A continuación, se muestran ejemplos de esto, comenzando con futuros docentes cuyas respuestas a la actividad inicial y final pertenecen a la misma categoría.

E25 es un ejemplo de futuro docente que permanece en la categoría evaluativa/descriptiva, ya que su respuesta a la actividad inicial fue “Fijarse solo en uno de los ejemplos, contar y razonar mal” y en la

final indicó que "Pueden tener problemas relacionados con la interpretación de la imagen y el enunciado, además de qué tipo de operación o procedimiento emplear".

Un ejemplo de permanencia en la categoría interpretativa es el caso del futuro docente E9, quien en la actividad inicial afirma que la dificultad sería "Que no entiendan la proporción de que por cada 1 que entra sale (bola x 2) + 1" y en la final que "la dificultad es pasar de ejemplos concretos a una regla general bien expresada".

A continuación, mostramos tres ejemplos de futuros docentes cuyas respuestas en la actividad inicial y final pertenecen a categorías diferentes.

Concretamente, la respuesta a la actividad inicial de E32 fue que "Podrían haber contado mal las cantidades", mientras que en la actividad final indicó que la dificultad estaba en "No identificar la regla y no comprobar si la regla se cumple en todos los casos". De este modo, vemos que inició en la categoría evaluativa/descriptiva y finaliza en la interpretativa.

Otro futuro docente cuya respuesta inicial, "No conocer el patrón del problema", pertenece a la categoría evaluativa/descriptiva fue E4. Sin embargo, su respuesta final cae dentro de la categoría análisis, ya que indica que:

> "E1: Identifica un cambio, pero no concreta la regla ni la operación. E2: Detecta aumento, pero no es constante ni justificado. E3 y E4: Comprende la relación, pero razona de forma verbal y confusa, sin expresar claramente la regla general. E5 Uso incorrecto de la variable (x, α), confusión entre número cualquiera y cero" (Respuesta de E4 a la actividad final).

Por último, tenemos en caso del futuro docente E14, quien inició en la categoría interpretativa y finaliza en la de análisis. En la actividad inicial E14 intenta comprender las respuestas de los escolares. Para ello, escribe al lado de cada máquina (n+1) (2+3) (4+5) y al final pone: "número de bolas + (número de bolas +1) o número de bolas x 2 + 1" y marca como buenas E3 y E4 con un tick. Sin embargo, en la actividad final escribe: "E1 y E2: Ambos alumnos/as se han basado únicamente en uno de los ejemplos, por ello, la regla no funciona con los casos restantes. E5: este alumno/a ha hallado la fórmula, sin embargo, me aseguraría de que comprende la resolución del ejercicio".

Respecto al análisis de la ayuda ofrecida por los futuros docentes a los escolares, se observa que todos comenzaron en la categoría evaluativa/descriptiva (39) y que, tras la formación, fueron 35 los que se encontraron en la categoría interpretativa, siendo solo 4 futuros docentes los que permanecieron en la categoría evaluativa/descriptiva.

Un ejemplo de futuro docente cuyas respuestas permanecen en la categoría evaluativa/descriptiva fue E25, quien en la actividad inicial indicó que "llevaría pelotitas de pimpón y una cajita. A cada pelotita le pondríamos un número y contaríamos todos juntos", y en la final que "llevaría fichas del parchís y un cuadrado de cartulina y representaríamos el dibujo con las fichas, si no fuera suficiente, probaría con pelotas y una caja para que puedan contar".

Por el contrario, aunque la respuesta de E14 en la actividad inicial fue muy similar, "llevar bolas para representarlo y preguntas orientativas para que comprendan lo que sucede" (categoría evaluativa/descriptiva), su respuesta a la actividad final está en la categoría interpretativa:

> "E1 y E2: Que prueben la regla en alguno de los otros dos casos y preguntarles ¿Son más o menos de las que entran? ¿Cuántas más? ¿Qué relación tiene ese número de bolas que salen de más, con el número de bolas que entran? ¿Qué tienen los tres casos en común? ¿Qué operaciones matemáticas puedes realizar para hallar el número de bolas que salen? Una vez desarrollen una hipótesis, les preguntaría ¿Funciona en los tres casos? Y según su respuesta tendría que seguir buscando o habrá hallado la solución. En cuanto a E3: le preguntaría ¿Qué conclusión sacas de esta afirmación? ¿A todos se les suma 5? ¿Por qué?, ¿Cuánto sumo en los otros casos?, Entonces, ¿cuál dirías que es la regla que sigue esta caja? E5: este alumno/a ha hallado la fórmula, pero me aseguraría de que comprende la

> resolución del ejercicio. Le preguntaría ¿Por qué x es 0? ¿x solo puede ser 0? ¿si quiero saber cuántas salen si entran 4, cómo sería la fórmula?" (Respuesta de E14 a la actividad final).

Los resultados evidencian un desplazamiento desde la categoría evaluativa/descriptiva hacia la interpretativa y analítica en la identificación de dificultades. Algo similar ocurre con las ayudas, pasando de estar la mayoría en la categoría evaluativa/descriptiva hacia la interpretativa.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIÓN

En la actividad inicial, la mayoría de los futuros docentes se sitúa en la categoría evaluativa/descriptiva, lo que coincide con investigaciones previas que muestran que los futuros docentes tienden a interpretar las respuestas de los estudiantes desde una perspectiva centrada en el resultado correcto o incorrecto (Gibim et al., 2025). Tras la intervención formativa, la mayoría de los futuros docentes se sitúa en la categoría interpretativa, lo que indica que buscan comprender las estrategias utilizadas por los escolares. Este resultado es coherente con estudios que señalan que el análisis sistemático de producciones de escolares favorece el desarrollo de conocimiento interpretativo de los futuros docentes (Ribeiro et al., 2021). Asimismo, un grupo reducido de 6 futuros docentes cambia a la categoría de análisis en la identificación de dificultades, caracterizada por el uso de las producciones de los escolares como oportunidades de aprendizaje. En estas respuestas se observa una mayor integración entre conocimiento matemático y conocimiento didáctico, ya que utilizan las producciones de los escolares como oportunidades de aprendizaje (Di Bernardo et al., 2017; Jacobsen et al., 2014).

En relación con las ayudas propuestas, los resultados muestran un cambio significativo desde estrategias centradas en el uso de tablas y preguntas guía (Gibim et al., 2025; Jacobsen et al., 2014) hacia intervenciones que buscan fomentar la abstracción y la justificación de la regla general (Di Martino et al., 2016). Este avance se vincula con una mayor capacidad para identificar obstáculos específicos en la generalización y en el uso de variables, como se observó en el análisis de respuestas donde los escolares confundían la variable con el valor cero. Sin embargo, los futuros docentes no llegaron a diseñar ayudas que generen nuevas trayectorias de aprendizaje conectadas con el razonamiento particular de cada escolar (Di Bernardo et al., 2017; Jacobsen et al., 2014). No obstante, la persistencia de algunos participantes en la categoría evaluativa sugiere que el conocimiento interpretativo es un proceso (Di Martino et al., 2020; Ribeiro et al., 2021) que requiere oportunidades continuadas de análisis sistemático sobre el pensamiento de los escolares

Los resultados de este estudio evidencian que la formación centrada en el análisis y realización de tareas de pensamiento funcional ha contribuido al desarrollo del conocimiento interpretativo de los futuros docentes que han participado en el trabajo. Por lo tanto, refuerza la importancia de fortalecer el conocimiento interpretativo en la formación docente inicial para facilitar la consolidación del pensamiento funcional (Blanton y Kaput, 2011).

Agradecimientos

Este trabajo se ha realizado con el apoyo de PID 2020-113601 GB-I00, financiado por la Agencia Estatal de Investigación (AEI) de España. PID2024-157106NB-I00, financiado por MCIN/ AEI/10.13039/501100011033 y FEDER, UE.

El grupo de investigación GIECMES (Universidad Autónoma de Madrid).

Referencias

Blanton, M., Brizuela, B. M., Gardiner, A. M., Sawrey, K. y Newman-Owens, A. (2015). A learning trajectory in 6-year-olds' thinking about generalizing functional relationships. *Journal for research in mathematics education, 46*(5), 511-558.

Blanton, M. L. y Kaput, J. J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early Algebraization. Advances in Mathematics Education* (pp. 5-23). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_2

Cañadas, M. C., Moreno, A. y Torres, M. D. (2024). First encounter with constructing graphs in the functional thinking approach to school algebra in 3rd and 4th grades. *ZDM-Mathematics Education, 56*, 1059–1078. https://doi.org/10.1007/s11858-024-01627-2

Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2018). *Research methods in education* (8th ed.). Routledge.

Di Bernardo, R., Carotenuto, G., Mellone, M. y Ribeiro, M. (2018). Prospective teachers' interpretative knowledge on early algebra. *Cuadernos de Pesquisa, 24(especial)*, 208–222. https://doi.org/10.18764/2178-2229.v24n.especialp208-222

Di Martino, P., Mellone, M. y Ribeiro, M. (2020). Interpretative knowledge. En S. Lerman (Eds.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 424-428). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-77487-9_100019-1

Di Martino, P., Mellone, M., Minichini, C. y Ribeiro, M. (2016). Prospective teachers' interpretative knowledge: giving sense to subtraction algorithms. En S. Zehetmeier, B. Rösken-Winter, D. Potari y M. Ribeiro (Eds.), *Proceedings of the CERME Topic Conference: Mathematics teaching, resources and teacher professional development* (pp. 73-80). ERME.

Fuentes, S. y Cañadas, M. C. (2024). f(n)=3n: Representaciones, estrategias y estructuras por alumnado de primero de primaria. *PNA, 18*(2), 161-188. https://doi.org/10.30827/pna.v18i2.27701

Gibim, G., Rifo, L., Climent, N. y Ribeiro, M. (2025). Conhecimento interpretativo de professores em uma tarefa de divisão de frações. *PNA, 16*(4), 305-328. https://doi.org/10.30827/pna.v19i3.31002

Jakobsen, A., Ribeiro, C. M. y Mellone, M. (2014). Norwegian prospective teachers' MKT when interpreting pupils' productions on a fraction task. *Nordic Studies in Mathematics Education, 19*(3-4), 135–150. https://doi.org/10.7146/nomad.v19i3-4.148652

Kaput, J. J. (2008). What is algebra to an elementary school teacher? En J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-31). Lawrence Erlbaum Associates.

Kieran, C. (Ed.). (2018). *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds: The Global Evolution of an Emerging Field of Research and Practice*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5

Ministerio de Educación y Formación Profesional. (2022). Real decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. *Boletín Oficial del Estado, 52*, 24386–24504.

Moreno, A., Torres, M. D. y Pérez-Martos, M. C. (2025). Representación tabular y gráfica en quinto de primaria: Tareas con funciones para desarrollar el pensamiento algebraico. *Épsilon, 121*, 59-72.

Narváez, R., Adamuz-Povedano, N. y Cañadas, M. C. (2025a). Análisis bibliométrico sobre pensamiento algebraico en educación infantil y primaria en Scopus. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 27,* 43–65. https://doi.org/10.35763/aiem27.5825

Narváez, R., Brizuela, B. M. y Cañadas, M. C. (2025b). Justifications and mediations in the generalization process among fourth grade students. *International Journal of Science and Mathematics Education, 23*(7), 2629-2652. https://doi.org/10.1007/s10763-025-10574-7

Narváez, R. y Cañadas, M. (2023). Mediaciones realizadas a estudiantes de segundo de primaria en una tarea de generalización. *PNA, 17*(3), 239-264. https://doi.org/10.30827/pna.v17i3.24153

Pérez-Martos, M. C., Moreno, A., Cañadas, M. C. y Torres, M. D. (2024). Justificaciones de alumnos de quinto de primaria en tareas con diferentes contextos. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Research in Mathematics Education XXVII.* (pp. 417-424). SEIEM.

Pinto, E., Ayala-Altamirano, C., Molina, M. y Cañadas, M. C. (2025). La invención de sentencias e historias matemáticas como medio para evidenciar el desarrollo del pensamiento algebraico. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 28,* 77–96. https://doi.org/10.35763/aiem28.7544

Ribeiro, M. y Almeida, A. (2022). Tarefas para a formação para desenvolver o conhecimento especializado do professor no âmbito do pensamento algébrico em contextos de regularidades de crescimento. *Espaço Plural, 23*(47), 1-22.

Ribeiro, M., Gibim, G. y Alves, C. (2021). A necessária mudança de foco na formação de professores de e que ensinam matemática: discussão de tarefas para a formação e o desenvolvimento do Conhecimento Interpretativo. *Perspectivas da Educação Matemática, 14*(34), 1-24. https://doi.org/10.46312/pem.v14i34.12686

Vicepresidencia, Consejería de Educación y Universidades. (2022). Decreto 61/2022, de 13 de julio, del Consejo de Gobierno, por el que se establece para la Comunidad de Madrid la ordenación y el currículo de la etapa de Educación Primaria. *Boletín Oficial de la Comunidad de Madrid, 169*, 15-169.

POTENCIALIDAD DE UNA TAREA FORMATIVA PARA EL DESARROLLO DE CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO SOBRE PROPORCIONALIDAD

The potential of a teacher education task for the development of teachers' specialised knowledge on proportionality

García-Viso, P., Climent, N. y Martín-Díaz, J. P.

Universidad de Huelva

Resumen

Este trabajo aborda el diseño de una tarea en la formación inicial del profesorado de Primaria para el desarrollo de conocimiento en relación con la enseñanza de la proporcionalidad. El modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas sirve para estructurar el conocimiento esperado con la implementación de la tarea formativa. Tras presentar la tarea y justificar el conocimiento especializado pretendido, se muestran los principales resultados de su implementación. Estos resultados ponen de manifiesto que la tarea consigue poner en conflicto el conocimiento matemático del futuro profesorado sobre proporcionalidad, mientras que presenta limitaciones en el desarrollo del conocimiento pretendido sobre características del aprendizaje de la proporcionalidad en primaria. Lo anterior permite reflexionar sobre la formación inicial del profesorado en relación con el desarrollo de conocimiento especializado.

Palabras clave: *conocimiento del profesor, formación inicial, proporcionalidad, primaria, MTSK.*

Abstract

This study examines the design of a task for primary school preservice teacher education aimed at developing knowledge related to teaching proportionality. The model of mathematics teacher's specialised knowledge is used to structure the knowledge expected to be acquired through the implementation of the training task. After presenting the task and justifying the intended specialised knowledge, the main results of its implementation are presented. These results show that the task successfully challenges the future teachers' mathematical knowledge of proportionality, whilst revealing limitations in the development of the intended knowledge regarding the characteristics of learning proportionality in primary education. This allows for reflection on preservice teacher education in relation to the development of specialised knowledge.

Keywords: *teachers' knowledge, preservice teacher education, proportionality, primary school, MTSK.*

INTRODUCCIÓN

La proporcionalidad, además de contenido del currículo de matemáticas de la Educación Primaria en España, puede propiciar una transformación cognitiva fundamental en el aprendiz, debido a que se sitúa en la intersección donde el pensamiento aritmético, dominado por estructuras aditivas, debe ceder paso o integrarse con estructuras multiplicativas más complejas (Vergnaud, 1983).

El desarrollo de razonamiento proporcional, entendido como la capacidad para interpretar relaciones multiplicativas, comparar razones y comprender la covariación, presenta dificultades durante la Educación Primaria (Sari et al., 2023) y depende en gran medida del tipo de tareas que se proponen en el aula. Según Lamon (2007), las tareas rutinarias (especialmente aquellas centradas en la "regla de tres" o el cálculo mecánico), no son suficientes para posibilitar una comprensión de las relaciones

García-Viso, P., Climent, N. y Martín-Díaz, J. P. (2026). Potencialidad de una tarea formativa para el desarrollo de conocimiento especializado sobre proporcionalidad. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (pp. 282-289). SEIEM.

que implican la noción de proporcionalidad, siendo recomendable proponer la interpretación de razones en contextos significativos y el análisis de variaciones entre magnitudes.

La efectividad de estas tareas depende de la capacidad del docente para identificar y atender el razonamiento proporcional que emerge en la actividad del estudiante (Amador et al., 2025). Es por ello que en este estudio nos centramos en una tarea para la formación inicial de docentes de Primaria que pretende desarrollar su conocimiento especializado (Carrillo et al., 2018) sobre proporcionalidad.

Investigaciones previas han mostrado dificultades en estudiantes para maestro para comprender los significados de razón y proporción (Buforn et al., 2018), coincidiendo con dificultades en futuro profesorado de Secundaria (Burgos et al., 2017).

El objetivo de esta comunicación es presentar y justificar el diseño de una tarea formativa, y evaluar su potencialidad sobre la base de los resultados obtenidos en su implementación. Aunque hay estudios que evalúan el conocimiento del futuro profesorado en relación con la enseñanza de la proporcionalidad, son menos los que se centran en el análisis de la potencialidad de situaciones formativas para propiciar el desarrollo de dicho conocimiento.

MARCO TEÓRICO

Una de las claves del razonamiento proporcional reside en la capacidad de diferenciar cuándo una relación entre cantidades es multiplicativa en lugar de aditiva, así como discernir cuándo una situación tiene propiedades de proporcionalidad, o no. Esta distinción, aunque trivial para un experto, constituye un salto epistemológico para los estudiantes de Primaria (Lamon, 2007).

Algunas de las estrategias empleadas por estudiantes conllevan una sobregeneralización de los modelos lineales (Van Dooren et al., 2010), asumiendo como proporcionales situaciones que solo aparentemente lo son. En ese sentido, pueden utilizar estrategias sin comprender el concepto de razón. Fomentar la resolución de problemas de proporcionalidad desde múltiples estrategias y ofrecer tareas que animen a reflexionar sobre si una situación es proporcional o no, reducen el sesgo de linealidad, permitiendo caracterizar situaciones de proporcionalidad (Kaput y West, 1994).

Diversos estudios han identificado algunas características de tareas que promueven el razonamiento proporcional en Primaria: que hagan explícita la multiplicatividad y exijan analizar la relación entre cantidades, en lugar de las diferencias (Lamon, 2007); que ofrezcan oportunidades para construir la constante de proporción (Steffe y Olive, 2010); que impliquen representaciones variadas y cambios de representación (Kaput y West, 1994); y que contengan contextos realistas (Weiland et al., 2021).

Situamos este estudio en el diseño de tareas para fomentar el desarrollo de conocimiento especializado del futuro profesorado de Primaria para la enseñanza de la proporcionalidad. Para estructurar el conocimiento que se pretende que emerja en la resolución de la tarea propuesta hacemos uso del modelo *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* (MTSK) (Carrillo et al., 2018).

El modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK), parte de la diferenciación de Shulman (1986) entre conocimiento del contenido y didáctico del contenido, añadiendo las concepciones del profesor hacia las matemáticas y su enseñanza y aprendizaje. Poniendo el foco en estos tres dominios, se diferencian subdominios del conocimiento matemático y del conocimiento didáctico del contenido. En este estudio nos centramos en uno de los subdominios del conocimiento matemático, el conocimiento de los temas (*Knowledge of Topics*, KoT) y en uno de los subdominios del conocimiento didáctico del contenido, el conocimiento sobre las características de aprendizaje de las matemáticas (*Knowledge of Features of Learning Mathematics*, KFLM).

El conocimiento de los temas (KoT) pone el énfasis en el conocimiento conceptual y procedimental del profesorado sobre el tema, en este caso proporcionalidad. Se diferencia en este subdominio el conocimiento sobre: situaciones que dan sentido y en las que se pueden aplicar los objetos matemáticos propios del tema, ligados a sus significados (*fenomenología y aplicaciones*), posibles

definiciones y propiedades relativas a los conceptos propios del tema (*definiciones, propiedades y fundamentos*), distintas formas de representación (*registros de representación*) y *procedimientos* propios del tema. En el caso del tema de proporcionalidad, en línea con lo que hemos comentado antes, será importante que el futuro profesor conozca situaciones proporcionales y no proporcionales (conocimiento de *fenomenología y aplicaciones*), comprenda que la proporcionalidad es una relación entre variables e identifique las características de una situación de proporcionalidad, en particular la necesidad de la existencia de una razón de proporcionalidad (*definiciones, propiedades y fundamentos*), conozca distintos procedimientos para resolver situaciones problemáticas de proporcionalidad (tanto las que puedan ser más mecánicas como regla de tres, como otras alternativas como la reducción a la unidad, el uso de razones o de propiedades de la proporcionalidad, así como aplicaciones de la proporcionalidad, como la escala) (*procedimientos*), así como diversos *registros de representación*, relacionados con algunos de los procedimientos o aplicaciones anteriores (como el uso de tablas o los distintos modo de representar una escala).

El conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM) pretende fundamentar el conocimiento sobre los procesos de aprendizaje de un determinado tema matemático. En este estudio nos ceñiremos a dos de las categorías del KFLM diferenciadas en el modelo MTSK: el conocimiento sobre *fortalezas y debilidades en el aprendizaje de las matemáticas* y el conocimiento de sobre *formas de interacción de los estudiantes con el contenido matemático*. En el tema de proporcionalidad, es conveniente que el futuro profesorado conozca la posible dificultad de los estudiantes de Primaria en relación con la sobregeneralización de situaciones de proporcionalidad y para comprender el concepto de razón (*fortalezas y debilidades*), así como posibles estrategias con las que abordan situaciones de proporcionalidad (*formas de interacción*).

METODOLOGÍA

A partir de una situación de aprendizaje sobre proporcionalidad elaborada por el equipo e implementada en un aula de quinto de Educación Primaria (García-Viso et al., 2025), diseñamos una tarea para la formación inicial del profesorado que pretende incidir en el desarrollo de conocimiento sobre proporcionalidad y su aprendizaje.

El material base de la tarea son tres imágenes de una lengua o flecha de tierra (La Flecha de El Rompido) en tres años diferentes (1957, 1977, 2013), que permiten apreciar su evolución (Figura 1).

Figura 1

Ortofoto histórica de la Flecha en 1957, 1977 y 2013



Tras una introducción en la que se explica que se trata de una propuesta didáctica implementada en una clase de quinto de Educación Primaria que aborda una problemática sociocientífica ligada a la lengua de tierra, la tarea se estructura en once actividades. Nos centraremos aquí en las nueve últimas, seleccionando para el análisis aquellos fragmentos que resultan de especial interés y riqueza desde el punto de vista del modelo MTSK (Carrillo et al., 2018).

En las tres primeras, de las que no nos ocuparemos aquí, se pide al futuro profesorado imaginar qué información podría extraer alumnado de quinto de Primaria de las imágenes y proponer contenidos que podrían trabajarse en Primaria a partir de las 3 fotografías.

En la cuarta, se les pide resolver la tarea escolar presentada en la Figura 2.

Figura 2

Tarea escolar sobre el crecimiento longitudinal de la Flecha

SESIÓN 4. ¡CÓMO CRECE!

Te vamos a dar unas imágenes de la Flecha en diferentes fechas. Obsérvalas bien que vamos a averiguar algunas cosas.

a. Como ves en las imágenes, la Flecha ha aumentado desde 1957 hasta 2013 que es la foto más reciente que tenemos. ¿En qué ha aumentado? ¿Puedes calcular la diferencia en su longitud? Contesta razonadamente.

b. ¿Cómo podríamos trasladar el crecimiento que hemos medido en los mapas a la realidad? Teniendo en cuenta la escala gráfica de los mapas, ¿cómo podemos calcular cuánto ha aumentado sobre el terreno desde 1957 hasta 2013?

c. Si en 56 años la longitud de la Flecha ha aumentado en ____ metros. ¿Puedes hacer una previsión de cuánto podría medir en 2032? ¿Puedes explicar en qué te basas para hacer esa previsión?

En las actividades quinta y sexta, se les pide, respectivamente, imaginar posibles respuestas de los estudiantes de Primaria a la tarea escolar y compararlas con respuesta reales (Figuras 3 y 4), evaluando, además, su corrección y describiendo su posible intervención como maestros.

Figura 3

Respuesta a la primera pregunta de la tarea escolar

Gonzalo: Como nos dijeron en la oficina de turismo que por año crecía 30m, lo hemos multiplicado por 57 años que lleva y nos ha dado 1710 [m] y luego le hemos sumado los 500m.

Figura 4

Respuestas a la segunda pregunta de la tarea escolar

Marta:	He cogido un lápiz y lo he puesto en un extremo de la escala.
Maestra:	Ha puesto el lápiz en el trocito de escala ¿veis? Y ha medido el lápiz cuánto es el trocito de escala y después ¿qué has hecho?
Marta:	Y después en mi papel de cebolla de ahí [extremo de la Flecha] he empezado a contar lo que esto serían 500m
Maestra:	Claro, porque esto [señala la parte de lápiz] equivale a 500m, entonces ella ha ido poniendo rayitas, 1, 2, 3, 4, 5 [superponiendo la parte del lápiz por el mapa].
Marta:	Pues he hecho 1, 2 y 3...
Maestra:	Porque el crecimiento sería solamente, desde la primera foto que tenemos de la primera Flecha hasta la última, ¿no? [...] ¿cuánto te ha salido aproximadamente?
Marta:	Aproximadamente, creo que 1500m
Maestra:	Óscar, tú en lugar de hacer lo que ha hecho Marta, ¿cómo lo has hecho?
Óscar:	Pues viendo cuánto media en la última y en la primera y luego restando.
Maestra:	… has usado el mismo método usando la escala y ¿cuánto te da más o menos?
Óscar:	He hecho 2 cosas, la que ha hecho Marta me ha dado 1500 [m] y la otra 2000 [m]

En las actividades octava y novena se pide, respectivamente: describir momentos, cotidianos o imaginarios, donde la proporcionalidad tenga sentido; y relacionar las tres imágenes con ideas sobre proporcionalidad. Finalmente, las dos últimas actividades cuestionan sobre la posibilidad de hacer una previsión para dar respuesta a la última pregunta 3 de la tarea escolar.

Desde el punto de vista de la construcción de conocimiento especializado, la resolución de la tarea escolar y las actividades 8, 9, 10 y 11 pretenden el desarrollo de conocimiento sobre proporcionalidad (proporcionalidad directa, escala, expresión gráfica de la escala, situaciones no proporcionales, razón de proporción, cálculo de la razón de proporción, cálculo de longitudes reales a partir de un mapa, falsa linealidad y aproximación de situaciones de crecimiento no lineal) (KoT). Las actividades 5, 6

y 9 persiguen la construcción de conocimiento sobre el pensamiento de los estudiantes sobre la proporcionalidad (estrategias de resolución y falsa linealidad) (KFLM).

La tarea escolar recoge algunos de los requisitos citados en el marco teórico en relación con las características de tareas que promueven el razonamiento proporcional: exige analizar las relaciones entre variables, propiciando la reflexión sobre la necesidad de una razón de proporción, y parte de un contexto realista, que presenta una aplicación de la proporcionalidad (la escala) y posibles representaciones de la misma (como las representaciones a escala y la representación gráfica de la escala). Estas características nos llevan a pensar que puede propiciar el desarrollo de conocimiento del tema y sobre posible pensamiento de estudiantes de Primaria en relación con la proporcionalidad.

En esta comunicación presentamos los resultados sobre la potencialidad de la tarea en la construcción de conocimiento especializado del profesor de matemáticas respondiendo a dos preguntas de investigación: 1) qué conocimiento matemático sobre proporcionalidad propicia la tarea y 2) qué conocimiento sobre el aprendizaje de la proporcionalidad en Primaria propicia la tarea.

Para responder a estas cuestiones desarrollamos un experimento de enseñanza (Molina, 2021), en el que, tras el diseño de la tarea, esta fue implementada en una sesión de 2 horas con un grupo compuesto por 40 estudiantes para maestro (EPM, en adelante) del Grado de Educación Primaria de la Universidad de Huelva, en una materia sobre la medida y su enseñanza y aprendizaje. Se implementó antes de que se abordara la proporcionalidad en el grado, alternándose trabajo en pequeño grupo y discusión en gran grupo. Analizamos los resultados de la implementación a partir de la videograbación del aula formativa, su trascripción y la resolución por escrito individual de la tarea.

Realizamos un análisis de contenido identificando unidades de información cuyo aporte fuera relevante en sí mismo sobre el conocimiento especializado del futuro profesorado, considerando las categorías del KoT y KFLM, en los aspectos antes señalados.

RESULTADOS

Conocimiento matemático sobre proporcionalidad

El análisis de las transcripciones y de las producciones, apoyado en las distintas categorías del KoT, evidencia un cierto avance en la comprensión del concepto de proporcionalidad por parte de los EPM, al menos en el sentido de cuestionarse su conocimiento al respecto.

En la actividad 4 (Figura 2), el análisis de las producciones individuales muestra que los EPM movilizan principalmente conocimiento asociado a la categoría de *procedimientos* del KoT, ya que utilizan la escala del mapa y realizan reglas de tres, divisiones o multiplicaciones para calcular las longitudes reales.

> Formador: ¿Alguien que me diga qué cálculo ha realizado para ver cómo aumenta?
>
> EPM1: He medido la longitud que hay en la foto y luego lo he pasado… lo he multiplicado por 500.

Esto se evidencia también en el uso de la equivalencia de medidas que realiza, por ejemplo, otra EPM, al calcular la distancia real a través del mapa (1 cm del mapa equivale a 500 m de la realidad, para aplicarlo a la diferencia de 2,5 cm entre las longitudes de la Flecha en las imágenes primera y última), mostrando así un manejo operativo de la proporcionalidad (KoT -*Procedimientos*). Algunas EPM se apoyan en este cálculo para determinar cuánto crece la Flecha cada año, mientras que otras reconocen que el crecimiento no sigue una razón constante, refiriéndose a él como "más o menos" o "aproximado". Esta última forma de argumentar sugiere un avance dentro del KoT (*Definiciones, propiedades y sus fundamentos*), en cuanto a la fundamentación de la idea de proporcionalidad (no basta con que aumente con el paso del tiempo, debe darse una razón constante), al comenzar a identificar que el fenómeno real no responde a una relación de proporcionalidad, sino a una tendencia

variable (lo que asociamos a la identificación de fenómenos asociados a la proporcionalidad directa –KoT, *fenomenología*).

La puesta en común posterior confirma la tendencia de que los EPM, de manera generalizada, asocian la proporcionalidad directa a la coincidencia de incrementos en dos variables, sin que sea necesaria una constante (KoT -*Definiciones, propiedades y sus fundamentos*):

Formador: Y luego lo has multiplicado por 500, que es la escala. Y eso ¿qué es lo que te ha dado?

EPM2: Depende de qué foto.

Formador: Y con esas medidas que has llevado a cabo ¿has visto una relación de proporcionalidad?

EPM2: Sí, cuanto más pasan los años, más grande es la Flecha.

En la actividad 8, se evidencia KoT relacionado con la categoría de *Fenomenología*, al evocar contextos cotidianos donde la proporcionalidad está presente:

EPM 3: La proporcionalidad es lo de pasar las proporciones.

EPM 4: La proporcionalidad tú tienes que saber las proporciones para poder hacer un bizcocho.

EPM 3: No, te estás equivocando con las fracciones.

EPM 5: Las proporciones es lo de las escalas, 1 centímetro 500 metros.

EPM 3: Cuando te vas a comprar una casa y miras los planos.

Otros ejemplos, evidencian cuestionamiento sobre el tipo de relación entre variables: "el peso y la altura de una persona con la talla que usa, […] mi idea era que, si pesas 80 kilos tienes una 42. Se supone que, si pesases 90 tendrías más, pero esa es mi duda, porque también entra en juego la estatura". Lo anterior se puede asociar con una etapa intermedia en la comprensión del concepto de proporcionalidad en relación con las categorías de *Fenomenología* y *Definiciones, propiedades y sus fundamentos*. En esta etapa los EPM reconocen diferentes contextos de proporcionalidad, aunque todavía presentan dificultades para distinguir entre relaciones proporcionales y no proporcionales, y se cuestionan si es necesario que exista una razón constante entre las variables. Este conocimiento fenomenológico podría ampliarse con la actividad 9, al vincularse la proporcionalidad con los cambios observados en las imágenes de la Flecha, identificándose posibles situaciones de proporcionalidad directa (como la inducida en la tarea entre paso del tiempo y crecimiento de la Flecha) e inversa (como aumento en la población y decrecimiento de la vegetación), aunque no llegan a justificar dichas relaciones mediante la existencia de una razón constante. Esto denota persistencia de una concepción incompleta sobre la idea de proporcionalidad asociada a la categoría del KoT (*Definiciones, propiedades y sus fundamentos*).

En las actividades 10 y 11, se observa una consolidación del conocimiento asociado a *Procedimientos* y *Fenomenología* (KoT). Al analizar la afirmación de que la Flecha crece 30 metros al año, algunos estudiantes contrastan la información mediante mediciones y verificaciones con la escala, concluyendo que los datos no coinciden con la realidad. Este tipo de argumentación muestra un uso más analítico de los procedimientos, en el que se emplea la proporcionalidad como herramienta de comprobación y no solo de aplicación mecánica. Otros reconocen que el crecimiento no es uniforme, identificando que no responde a una proporcionalidad directa, sino que dependiendo del año el crecimiento podrá ser diferente. Estas respuestas constituyen una evidencia de avance en el conocimiento de proporcionalidad (KoT, *Definiciones*; *Fenomenología*) al incorporar la variabilidad y no linealidad como elementos interpretativos del fenómeno.

Conocimiento sobre el aprendizaje de la proporcionalidad

En la actividad 5, en relación con la categoría *fortalezas y debilidades en el aprendizaje de las matemáticas* (KFLM), varias EPM prevén posibles obstáculos en el alumnado de Primaria, como la dificultad en la comprensión de la escala gráfica, pudiendo ocurrir que: "pasan los 2'6 cm [diferencia

de longitud en el mapa] a metros, pues la escala está en esas medidas". Asimismo, una EPM afirma que estudiantes de Primaria pueden responder que "todos los años no tiene por qué crecer lo mismo", mientras que otra dice que algunos estudiantes de Primaria podrían aplicar directamente una regla de tres. Ambas respuestas suponen el contraste entre la comprensión de la situación de proporcionalidad y la aplicación inadecuada de la regla de tres. La comparación de las respuestas que imaginaron a la tarea escolar (en la actividad 5) con las que se muestran en la actividad 6, potencia el reconocimiento del fenómeno de falsa linealidad. Algunos EPM son conscientes de que reproducen razonamientos similares a los del alumnado de Primaria "mis respuestas dadas en la actividad 5 vuelven a asemejarse a las respuestas de los alumnos", lo que pone de relieve dificultades en el desarrollo de KFLM, pudiendo suponer un primer cuestionamiento del *conocimiento sobre el tema* (KoT).

En la Actividad 9, los EPM muestran nuevamente cómo anticipan respuestas del alumnado. Algunos esperan que los estudiantes perciban el crecimiento en la longitud de la Flecha como directamente proporcional, mientras que otra EPM apunta a que los estudiantes de Primaria pueden pensar que "el aumento respecto al tiempo no es proporcional, pues no aumenta en la misma cantidad [...] no es como el mar que va subiendo cada año, la urbanización no es progresiva, se urbaniza si el humano lo decide". De este modo, parece expresar que la situación puede plantear la necesidad de un crecimiento constante, suponiendo un cuestionamiento sobre cómo puede pensar el alumnado de Primaria.

CONCLUSIONES

En conjunto, los resultados de la implementación de la tarea reflejan una progresión dentro del KoT desde un conocimiento predominantemente procedimental, en la que prima la aplicación mecánica de reglas de cálculo, a revisar la adecuación de la idea de proporción al contexto real, cuestionando la constancia de la razón y reconociendo los límites de la proporcionalidad en la situación. Esta evolución sugiere una articulación progresiva entre las categorías del KoT (fundamentalmente en relación con el conocimiento de *Procedimientos*, *Definiciones* y *Fenomenología*), en la que la proporcionalidad deja de ser entendida como técnica de resolución para convertirse en un objeto matemático relacional, dependiente de las magnitudes implicadas y de las condiciones de constancia.

La tarea permite, por tanto, fortalecer la necesidad de razón de proporcionalidad, lo que se relaciona con una mejor comprensión del tópico en el caso de estudiantes para maestros (Buforn et al., 2018).

En relación con el desarrollo de KFLM relativo a la proporcionalidad, consideramos que los resultados indican que la tarea formativa debe fortalecerse o completarse con otras tareas formativas. Las respuestas reales del estudiantado de Primaria presentadas en la tarea formativa favorecen, en general, el cuestionamiento del propio conocimiento del tema y, si acaso, el conocimiento de algunas dificultades esperables en alumnado de Primaria. Estos resultados refuerzan el reto especial que supone el desarrollo de KFLM en la formación inicial de profesorado de matemáticas y la necesidad de seguir explorando el diseño de situaciones que lo posibiliten.

Esta investigación espera responder a la necesidad de estudiar cómo diseñar oportunidades de aprendizaje adecuadas (atendiendo al desarrollo de conocimientos, creencias y competencias) y su respaldo con resultados empíricos (Wasserman et al., 2023).

Agradecimientos

Proyecto PID2021-122180OB-I00 (Gobierno de España), Proyecto PID2024-158877NB-I00 financiado por MICIU/AEI /10.13039/501100011033/FEDER, UE. Centro de Investigación COIDESO (U. de Huelva). Grupo DESYM (HUM-168). Red MTSK, auspiciada por la AUIP.

Referencias

Amador, J. M., Glassmeyer, D. y Brakoniecki, A. (2025). Teachers' noticing of proportional reasoning. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *28*(4), 879-907. https://doi.org/10.1007/s10857-024-09625-7

Buforn, À., Llinares, S. y Fernández, C. (2018). Características del conocimiento de los estudiantes para maestro españoles en relación con la fracción, razón y proporción. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, *23*(76), 229-251. http://hdl.handle.net/10045/73969

Burgos, M., Giacomone, B., Beltrán-Pellicer, P. y Godino, J. D. (2017). Reconocimiento de niveles de algebrización en una tarea de proporcionalidad por futuros profesores de matemáticas de secundaria. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 177-186). SEIEM.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, *20*(3), 236-253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

García-Viso, P, De Las Heras, M.Á., Climent, N. y Pérez, L.R. (2025). Situación de aprendizaje para el estudio de la controversia sociocientífica del espacio protegido de la Flecha del Rompido. Una visión integrada desde las ciencias naturales y las matemáticas en primaria. En A.A. Lorca (Coord.), *Situaciones de aprendizaje interdisciplinares en patrimonios naturales* (pp. 193-210). Octaedro.

Kaput, J. y West, M. M. (1994). Missing-value proportional reasoning problems: Factors affecting informal reasoning patterns. En G. Harel, y J. Confrey (Eds.), *The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics* (pp. 235-287). State University of New York Press.

Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework. En F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 629-667). Routledge. https://doi.org/10.1108/978-1-28141-200-320251019

Molina, M. (2021). Investigación de diseño educativa: un marco metodológico en evolución. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 83-97). SEIEM.

Sari, Y. M., Fiangga, S., El Milla, Y. I. y Puspaningtyas, N. D. (2023). Exploring students' proportional reasoning in solving guided-unguided area conservation problems: A case of Indonesian primary students. *Journal on Mathematics Education*, *14*(2), 375-394.

Shulman, L.S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *American Educational Research Association*, *15*(2), 4-14.

Steffe, L. P. y Olive, J. (2010). *Children's fractional knowledg*e. Springer.

Van Dooren, W., De Bock, D. y Verschaffel, L. (2010). From addition to multiplication… and back. The development of students' additive and multiplicative reasoning skills. *Cognition and Instruction*, *28*(3), pp. 360-381.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. En R. Lesh, y M. Landau, (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (pp. 127-174.) Academic Press.

Wasserman, N. H., Buchbinder, O. y Buchholtz, N. (2023). Making university mathematics matter for secondary teacher preparation. *ZDM Mathematics Education*, *55*, 719-736. https://doi.org/10.1007/s11858-023-01484-5

Weiland, T., Orrill, C.H., Nagar, G.G., Brown, R. E. y Burke, J. (2021). Framing a robust understanding of proportional reasoning for teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *24*(2), 179-202. https://doi.org/10.1007/s10857-019-09453-0

EMERGENCIA DE CONFLICTOS SEMIÓTICOS ASOCIADOS A LA DIFERENCIAL EN UNA TAREA DE MODELIZACIÓN MATEMÁTICA CON ESTUDIANTES DE INGENIERÍA

Emergence of semiotic conflicts associated with the differential in a mathematical modelling task with engineering students

Giacomone, B.[a] y Verón, M. A.[b]

[a]Università della Repubblica di San Marino, [b]Universidad de Barcelona

Resumen

En este trabajo se analizan los conflictos semióticos que emergen durante la resolución de una tarea de modelización sobre el cálculo de la masa de una lámina circular con densidad variable, con el fin de comprender su papel en la construcción de significados asociados a la diferencial. El estudio se realizó con 70 estudiantes de primer año de ingeniería durante una clase de Análisis I. El análisis se fundamenta en el Enfoque Ontosemiótico, particularmente en la noción de conflicto semiótico como desajuste entre significados movilizados en la actividad matemática. Los resultados identifican conflictos vinculados con la interpretación de la densidad como magnitud variable, la representación del radio como variable, la superposición de áreas y la redefinición de la unidad de acumulación. La discusión colectiva favoreció la conceptualización de cantidades infinitesimales y la introducción de la diferencial como herramienta para modelizar variaciones continuas.

Palabras clave: *diferencial, conflictos semióticos, modelización matemática, cálculo en ingeniería, Enfoque Ontosemiótico*

Abstract

This study analyses the semiotic conflicts that emerge during the resolution of a mathematical modelling task involving the calculation of the mass of a circular lamina with variable density, with the aim of understanding their role in the construction of meanings associated with the differential. The study was conducted with 70 first-year engineering students during an Analysis I class. The analysis is grounded in the Onto-Semiotic Approach, particularly in the notion of semiotic conflict as a mismatch between meanings mobilised in mathematical activity. The results identify conflicts related to the interpretation of density as a variable magnitude, the representation of the radius as a mathematical variable, the superposition of areas, and the redefinition of the unit of accumulation. Collective discussion supported the conceptualisation of infinitesimal quantities and the introduction of the differential as a tool for modelling continuous variation.

Keywords: *differential, semiotic conflicts, mathematical modelling, calculus education, Onto-semiotic Approach*

INTRODUCCIÓN

La diferencial constituye uno de los objetos matemáticos que presenta dificultades particulares en la enseñanza y aprendizaje del cálculo, debido a la pluralidad de significados que adopta según el contexto de uso (Badillo et al., 2005; Ely, 2021). En la práctica educativa, la diferencial, clave en la modelización de fenómenos de variación continua, suele interpretarse de manera informal como una "cantidad muy pequeña" (Hu y Rebello, 2013; Nilsen y Knutsen, 2023; Tall, 1980; Von Korff y Rebello, 2014), lo que contribuye a su carácter epistemológicamente complejo.

Giacomone, B. y Verón, M. A. (2026). Emergencia de conflictos semióticos asociados a la diferencial en una tarea de modelización matemática con estudiantes de ingeniería. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (pp. 290-297). SEIEM.

Estas dificultades no son únicamente de naturaleza técnica o procedimental, sino también semiótica, ya que pueden surgir de tensiones entre los significados institucionales y personales atribuidos a los objetos matemáticos movilizados en la resolución de problemas.

Desde el EOS, estas dificultades se analizan como conflictos semióticos, definidos como discrepancias entre significados atribuibles a una misma expresión en distintas prácticas matemáticas (Godino, 2024). Aunque diversos estudios han documentado dificultades asociadas a la comprensión de la diferencial y la emergencia de conflictos semióticos en torno a este objeto matemático (Badillo et al., 2005; Verón et al., 2026), resulta de interés analizar cómo emergen estos conflictos en la resolución de tareas de modelización en contextos universitarios. Este estudio se propone analizar no solo la identificación y análisis de los conflictos emergentes en la resolución de un problema de masa de una lámina circular, sino también su papel en la construcción progresiva de significados asociados a la diferencial.

MARCO TEÓRICO Y PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Enfoque Ontosemiótico y actividad matemática

En el marco del EOS la noción de significado y su relación con las nociones de práctica y objeto desempeñan un papel central. Una práctica se entiende como "cualquier acción o manifestación (lingüística o de otro tipo) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, para comunicar la solución a otras personas, con el fin de validar y generalizar esa solución a otros contextos y problemas" (Godino y Batanero, 1994, p. 334). Desde esta perspectiva, el significado de un objeto matemático se concibe como el sistema de prácticas operativas y discursivas desarrolladas por una persona o institución en la resolución de situaciones-problema, por lo que puede considerarse desde una dimensión personal e institucional (Godino y Batanero, 1994). Asimismo, los objetos matemáticos primarios —situaciones-problema, lenguajes, conceptos-definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos— emergen de los sistemas de prácticas y de las configuraciones ontosemióticas movilizadas en la actividad matemática (Font et al., 2013; Godino, 2024). Dichas configuraciones pueden ser epistémicas o cognitivas, según se refieran a significados institucionales o personales.

En este estudio, este marco permite interpretar la actividad matemática desarrollada por los estudiantes y, particularmente, analizar los conflictos semióticos que emergen en las prácticas vinculadas con la construcción de significados asociados a la diferencial.

Conflictos semióticos

La noción de conflicto semiótico hace referencia a "una disparidad o desajuste entre los significados atribuidos a una misma expresión por dos sujetos—personas o instituciones—en interacción comunicativa y pueden explicar las dificultades y limitaciones de los aprendizajes y las enseñanzas implementadas" (Godino, 2002, p. 258). Estos conflictos permiten explicar dificultades y limitaciones en los procesos de enseñanza y aprendizaje matemático.

Un conflicto semiótico es de tipo epistémico si la disparidad se produce entre los significados institucionales, pero si la disparidad se produce entre las prácticas que forman el significado personal de un mismo objeto, es un conflicto semiótico de tipo cognitivo (Godino, 2024).

En el caso de la diferencial, la coexistencia de múltiples significados institucionales y personales puede generar tensiones interpretativas que se manifiestan en el uso de símbolos, procedimientos y argumentos matemáticos. Desde esta perspectiva, el análisis de conflictos semióticos constituye una herramienta pertinente para comprender las dificultades que emergen en la resolución de tareas de cálculo.

El concepto de diferencial

La diferencial posee múltiples significados en la enseñanza y la historia del cálculo (Hu y Rebello, 2013; Pulido, 2010, Verón y Giacomone, 2021; Verón et al., 2024). Esta pluralidad de significados

genera dificultades en su comprensión, ya que suele presentarse y utilizarse de formas diversas en distintos contextos, lo que produce ambigüedades e incluso contradicciones, especialmente en cursos de cálculo y física (López-Gay et al., 2015; Nilsen y Knutsen, 2023).

Diversos autores muestran cómo estos significados conviven y generan diferentes conflictos explícitos e implícitos en los libros de textos y en la enseñanza de cálculo, física e ingeniería (Artigue et al.,1990; Badillo et al., 2005; Oldenburg, 2016; Pulido, 2010; Verón y Giacomone, 2023). Por ejemplo, la expresión dy/dx puede cambiar de significado según el contexto: puede representar la derivada de y respecto de x, un cociente de diferenciales (Ely, 2021), o incluso un símbolo indivisible (Tall, 1992). Asimismo, Hu y Rebello (2013) muestran que los símbolos dx y dy generan dificultades para los estudiantes de física, ya que su interpretación varía según el contexto de uso, representando tanto una cantidad infinitesimal como un cambio infinitesimal de una cantidad física. También se generan conflictos cognitivos en los procesos de significación e interpretación de la dx en la expresión $\int_a^b f(x)dx$ como lo estudia Burgos et al. (2021), Ely (2017), Jones (2015), Nilsen y Knutsen (2023) y Tall (1992).

En este sentido, la diferencial puede entenderse como un objeto matemático cuyo significado se construye a partir de prácticas y usos situados, en los que emergen conflictos semióticos vinculados con la interpretación de magnitudes variables, cantidades infinitesimales y procesos de acumulación. Analizar estos conflictos en contextos de modelización resulta relevante para comprender cómo los estudiantes elaboran significados asociados a la diferencial en cursos iniciales de cálculo.

METODOLOGÍA

Se empleó un enfoque cualitativo, exploratorio y descriptivo (McMillan y Schumacher, 2001) con 70 estudiantes de primer año de ingeniería, organizados en grupos de 4 a 5 integrantes, durante una sesión de dos horas de Análisis I. La tarea (Figura 1) consistió en calcular la masa de una lámina circular de radio 3m con densidad variable según la distancia al centro.

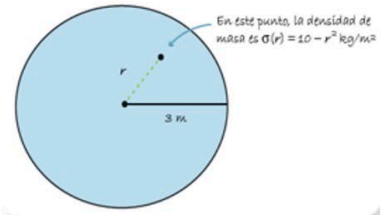
Figura 1

Situación-problema presentada a los estudiantes

Situación-problema:

Considerando una lámina circular de 3 metros de radio, cuya masa se distribuye de tal manera que la densidad en todo punto es $\sigma(r) = 10 - r^2\ (kg/m^2)$*, donde* ***r*** *es la distancia del punto al centro de la lámina. Se pide:*

Determinar la masa M total de la lámina circular con la densidad de masa dependiendo de radio.



Masa=densidad x área

Fuente: Adaptado de Salinas et al. (2012, p. 142)

Para este estudio se analizaron producciones escritas, representaciones gráficas y discusiones colectivas generadas durante la resolución de la tarea.

Desde el marco del EOS, se realizó un análisis a priori de posibles estrategias de resolución, tomando como referencia significados institucionales asociados al objeto matemático en estudio, con el fin de anticipar potenciales conflictos semióticos (como proponen, por ejemplo, Malaspina y Font, 2010).

Durante la implementación, las puestas en común permitieron problematizar las estrategias emergentes y hacer explícitos conflictos cognitivos asociados a las interpretaciones de los estudiantes.

El análisis se centró en identificar desajustes entre los significados personales movilizados por los estudiantes y los significados institucionales de referencia asociados a la diferencial y a los objetos matemáticos implicados en la tarea. Las discusiones colectivas fueron consideradas como evidencia complementaria para interpretar cómo estos conflictos emergían, se explicitaban y se resignificaban durante la actividad matemática desarrollada en el aula.

RESULTADOS: CONFLICTOS SEMIÓTICOS EMERGENTES

El análisis de las resoluciones de los estudiantes permitió identificar una serie de conflictos semióticos, relacionados con la interpretación de las magnitudes involucradas, que no aparecen de manera aislada, sino que configuran una progresión conceptual.

Conflicto 1: interpretación de la densidad como constante

Este conflicto limita la comprensión de la variación de la magnitud y constituye uno de los primeros obstáculos en la resolución de la tarea. Al calcular la masa de la lámina, algunos estudiantes asumieron que la densidad era constante en toda la superficie, sustituyendo directamente el valor correspondiente al radio máximo ($r = 3m$) en la expresión de densidad y multiplicándolo por el área total del círculo. Este procedimiento evidencia un conflicto semiótico asociado a la interpretación funcional de la densidad, ya que se la concibe como una magnitud uniforme e independiente de la posición, en lugar de entenderla como una función que varía en función de la distancia al centro de la lámina.

Conflicto 2: representación del radio como variable

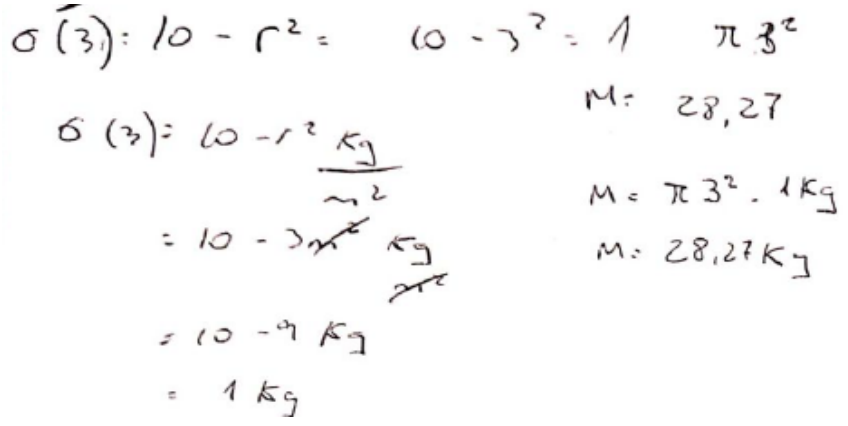
Un segundo conflicto emergió en la interpretación del radio como variable. En la Figura 1 coexisten dos significados ostensivos del radio: el radio particular de $3m$ correspondiente a la lámina completa y el radio genérico r, que representa cualquier distancia posible al centro.

Varios estudiantes no distinguieron estos significados y operaron únicamente con el valor fijo del radio máximo de $3m$, por ejemplo, como se observa en la Figura 2, dificultando la interpretación del radio como variable que interviene simultáneamente en la función de densidad y en el cálculo del área.

Desde el EOS, este conflicto puede interpretarse como una tensión entre los niveles ostensivo-extensivo e ostensivo-intensivo del objeto matemático, lo que dificulta la articulación entre lo particular y lo general. En términos de prácticas matemáticas, se observa una ruptura en la coordinación entre representaciones geométricas y analíticas del radio, afectando la construcción de significados coherentes para la densidad y la masa como funciones dependientes de la posición.

Figura 2

Parte de la resolución de un estudiante



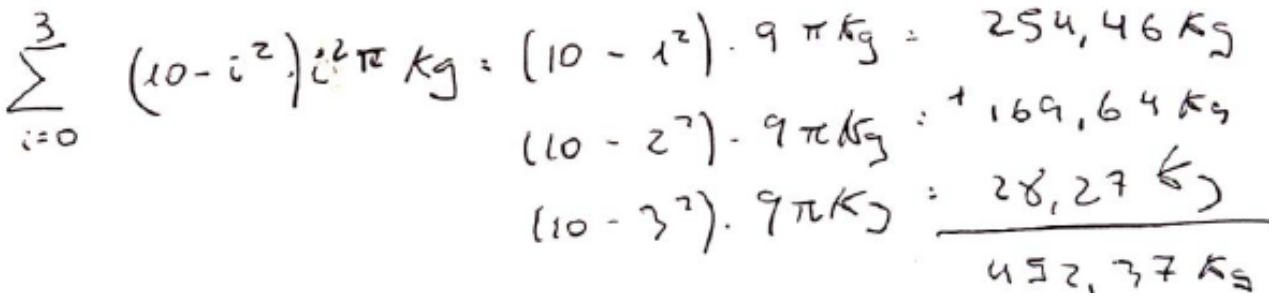
Durante la discusión colectiva se problematizaron los supuestos implícitos en estas resoluciones, especialmente el reemplazo directo del radio por su valor máximo sin considerar su papel como variable dentro de la modelización del problema. Esta discusión permitió explicitar que dicha interpretación limitaba la comprensión de la variación de la densidad y de su efecto en el cálculo de la masa.

Conflicto 3: superposición de áreas

Al avanzar con la resolución, se observa que la mayoría de los grupos consideró nuevos valores de radio (1, 2 y 3) y repitió el procedimiento de cálculo de la masa. Aunque reconocían que la densidad y la masa variaban, persistía un conflicto semiótico asociado a la acumulación de magnitudes geométricas, ya que el área utilizada seguía correspondiendo al círculo completo en cada caso (Figura 3).

Figura 3

Suma de los tres valores de masa



Esto implicaba considerar reiteradamente áreas superpuestas correspondientes a círculos concéntricos, produciendo una sobreestimación de la masa total. La discusión colectiva permitió explicitar este conflicto y reconocer que la estrategia utilizada no resultaba coherente con la acumulación de la magnitud buscada.

La discusión permitió reconocer que no era suficiente repetir cálculos para distintos radios, ya que el problema no consistía en sumar masas independientes sino en modelizar una acumulación continua. Esta reinterpretación llevó a algunos grupos a cuestionar la naturaleza de la unidad considerada inicialmente y a proponer regiones cada vez más pequeñas que evitaran la reiteración de áreas previamente contabilizadas. En este proceso comenzaron a emerger expresiones vinculadas con variaciones infinitesimales del radio y del área, favoreciendo la transición desde una aproximación discreta hacia una interpretación continua de la acumulación.

Conflicto 4: redefinición de la unidad de acumulación

Tras identificar el problema de la superposición de áreas, emergió un nuevo conflicto vinculado con la determinación de la unidad adecuada para modelizar la acumulación de masa. Mientras las estrategias iniciales consideraban círculos completos asociados a distintos valores del radio, esta representación impedía construir una acumulación coherente sin reiterar áreas previamente contabilizadas.

Algunos estudiantes comenzaron a proponer la descomposición de la lámina en coronas circulares cada vez más delgadas, introduciendo expresiones como “cantidades muy pequeñas”, “tiende a cero”, “infinitesimal”, “porción infinitesimal” o “cada vez más pequeño”, similares a las reportadas por Tall (1980).

Este conflicto resultó clave para avanzar hacia la conceptualización de la diferencial como herramienta para representar variaciones infinitesimales del radio, del área y de la masa. Es decir, constituye un punto de inflexión que conduce a la introducción de cantidades infinitesimales.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El estudio evidencia que la resolución de problemas de modelización matemática puede generar conflictos semióticos vinculados con la interpretación de magnitudes variables, la acumulación de cantidades y la construcción de significados asociados a la diferencial.

Los resultados muestran una secuencia de conflictos relacionados con la interpretación de la densidad como magnitud variable, la representación del radio como variable matemática, la superposición de áreas y la redefinición de la unidad de acumulación. En conjunto, estos conflictos permiten comprender algunas de las dificultades que enfrentan estudiantes de ingeniería al abordar procesos de modelización continua asociados al cálculo.

Estos hallazgos son consistentes con investigaciones previas que documentan dificultades en la interpretación del diferencial y de los objetos matemáticos asociados a procesos de acumulación y variación (Hu y Rebello, 2013; Nilsen y Knutsen, 2023; Verón et al., 2026).

La discusión colectiva de estrategias resultó relevante para hacer explícitos significados parciales, confrontar interpretaciones divergentes y favorecer procesos de resignificación conceptual en torno a la diferencial. Desde el Enfoque Ontosemiótico, estos resultados refuerzan la utilidad de la noción de conflicto semiótico como herramienta analítica para interpretar desajustes entre significados personales e institucionales movilizados en la actividad matemática.

Desde una perspectiva formativa, estos hallazgos tienen implicaciones para la formación del profesorado que enseña matemáticas en contextos universitarios, particularmente en carreras como ingeniería. Disponer de análisis a priori de tareas, identificar posibles conflictos epistémicos y cognitivos, así como contar con estrategias o resoluciones de referencia, puede constituir un recurso relevante para anticipar dificultades y orientar los procesos de enseñanza. En este sentido, la identificación y gestión de conflictos semióticos constituye una competencia docente clave para favorecer la comprensión de objetos matemáticos complejos como la diferencial (Font et al., 2024; Giacomone y Verón, 2023; Godino et al., 2017; Pino-Fan et al., 2023). Estos hallazgos refuerzan la importancia de desarrollar esta competencia en la formación del profesorado de matemáticas, en línea con aportes recientes de la comunidad de investigación (Giacomone et al., 2024).

Aunque se trata de un estudio situado en un contexto específico de formación en ingeniería, los hallazgos aportan evidencia sobre la complejidad semiótica involucrada en la comprensión de la diferencial y ofrecen elementos para futuras investigaciones sobre la enseñanza y aprendizaje del cálculo en contextos universitarios.

RECONOCIMIENTOS

Trabajo realizado en el marco de los proyectos PID2021-122326OBI00 (España), 16/Q1706-PI (FCEQyN – UnaM, Argentina), y PRIU2025-2026 (República de San Marino)

Referencias

Badillo, E. R., Font, V. y Azcárate, C. (2005). Conflictos semióticos relacionados con el uso de la notación incremental y diferencial en libros de física y de matemática del bachillerato. *Enseñanza de las Ciencias*, *(Extra)*, 1-6.

Burgos, M., Bueno, S., Pérez, O. y Godino, J. (2021). Onto-semiotic complexity of the Definite Integral. *Journal of Research in Mathematics Education, 10*(1), 4-40. https://doi.org/10.17583/redimat.2021.6778

Ely, R. (2017). Definite integral registers using infinitesimals. *The Journal of Mathematical Behavior, 48*, 152-167. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.10.002

Ely, R. (2021). Teaching calculus with infinitesimals and differentials. *ZDM Mathematics Education, 53*, 591-604. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01194-2

Font, V., Breda, A., Sala-Sebastià, G. y Pino-Fan, L. (2024). Future teachers' reflections on mathematical errors made in their teaching practice. *ZDM-Mathematics Education, 56*, 1169-1181. https://doi.org/10.1007/s11858-024-01574-y

Font, V. y Contreras, Á. (2008). The problem of the particular and its relation to the general in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 69*, 33-52. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9123-7

Font, V., Godino, J. D. y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics, 82*, 97-124. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9411

Giacomone, B. y Verón, M. A. (2023). Competencia de futuros profesores de matemática para identificar prácticas, objetos y procesos en la resolución de un problema del diferencial. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), I*nvestigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 267-274). SEIEM.

Giacomone, B., Verón, M. A. y Beltrán-Pellicer, P. (2024). Reflexiones sobre el diseño didáctico de un ciclo formativo para el desarrollo de competencias didáctico-matemáticas. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 281-288). SEIEM.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en didactique des Mathématiques, 22(2/3)*, 237-284.

Godino, J. D. (2024). *Enfoque ontosemiótico en educación matemática. Fundamentos, herramientas y aplicaciones*. McGraw Hill-Aula Magna.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en didactique des Mathématiques, 14*(3), 325-355.

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C. y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema, 31*(57), 90-113.

Hu, D. y Rebello, N. S. (2013). Understanding student use of differentials in physics integration problems. *Physical Review Special Topics - Physics Education Research, 9*(2), 1-14. https://doi.org/10.1103/PhysRevSTPER.9.020108

Jones, S. R. (2015). Areas, anti-derivatives, and adding up pieces: definite integrals in pure mathematics and applied science contexts. *Journal of Mathematical Behavior, 38*, 9-28. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.01.001

López-Gay, R., Sáez, J. M. y Torregrosa, J. M. (2015). Obstacles to mathematization in physics: The case of the differential. *Science & Education, 24*(5-6), 591-613. https://doi.org/10.1007/s11191-015-9757-7

Nilsen, H. K. y Knutsen, K. H. (2023). First-year engineering students' interpretations of differentials and definite integrals. *Int. J. Res. Undergrad. Math. Ed., 9*, 173-200. https://doi.org/10.1007/s40753-022-00208-6

Malaspina, U. y Font, V. (2010). The role of intuition in the solving of optimization problems. *Educational Studies in Mathematics, 75*, 107-130. https://doi.org/10.1007/s10649-010-9243-8

McMillan, J. y Schumacher, S. (2001). *Investigación cualitativa*. Addison.

Oldenburg, R. (2016). Differentiale als prognosen. *Journal für Mathematik-Didaktik, 37*, 55-82. https://doi.org/10.1007/s13138-016-0096-2

Pino-Fan, L.R., Castro, W.F. y Font, V. (2023). A Macro Tool to Characterize and Develop Key Competencies for the Mathematics Teacher' Practice. *International Journal of Science and Mathematics Education, 21*, 1407-1432. https://doi.org/10.1007/s10763-022-10301-6

Pulido, R. (2010). La enseñanza de los diferenciales en las escuelas de ingeniería desde un enfoque socioepistemológico. *Relime: Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13*(4-I), 85-97.

Salinas, P., Alanis, J. A., Pulido, R., Santos, F., Escobedo, J. C. y Garza, J. L. (2012). *Cálculo aplicado: Competencias matemáticas a través de contextos* Tomo 2. Cengage Learning Editores SA de CV.

Tall, D. O. (1980). Intuitive infinitesimals in the calculus [poster]. *Fourth International Congress on Mathematical Education*, Berkeley, Estados Unidos. http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1980c-intuitive-infls.pdf

Tall, D. O. (1992). Students' difficulties in calculus. En *Proceedings of Working Group 3 on Students difficulties in calculus, ICME-7* (pp. 13-28). Québec, Canada, http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.377.2989&rep=rep1&type=pdf

Verón, M. A. y Giacomone, B. (2021). Análise dos significados do conceito de diferencial de uma perspectiva ontosemiótica. *Revemop, 3*, e202109. https://doi.org/10.33532/revemop.e202109

Verón, M. A. y Giacomone, B. (2023). Idoneidad didáctica de un libro de texto para el estudio del diferencial. En S. Caviedes, J.G. Lugo-Armenta, L.R. Pino-Fan y A. Sánchez (Eds.), *Actas del Primer Congreso Internacional de Didáctica de la Matemática* (pp. 341-350). Universidad de Los Lagos. https://cididmat.ulagos.cl/

Verón, M. A., Giacomone, B. y Pino-Fan, L. (2024). Guía de valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de la diferencial. *Uniciencia, 38*(1), 1-22. https://doi.org/10.15359/ru.38-1.2

Verón, M. A., Giacomone, B. y Etchegaray, S. (2026). Competencia del profesor para gestionar conflictos semióticos en la resolución de problemas de cálculo. *AIEM-Avances de Investigación en Educación Matemática, 29*, 111-132. https://doi.org/10.35763/aiem29.6943

Von Korff, J. y Rebello, N. S. (2014). Distinguishing between change and amount infinitesimals in first-semester calculus-based physics. *American Journal of Physics, 82*(7), 695-705. https://doi.org/10.1119/1.4875175

APROXIMACIÓN A UN MODELO DE CONOCIMIENTO DE FORMADORES DE PROFESORADO DE MATEMÁTICAS DESDE LA PRÁCTICA

Approach to a model of knowledge of mathematics teacher educators from practice

Giadas, P., Muñiz-Rodríguez, L. y Rodríguez-Muñiz, L. J.

Universidad de Oviedo

Resumen

Este trabajo trata sobre el conocimiento especializado del Formador de Profesorado de Matemáticas (FPM) en su manifestación en la práctica. El objetivo es examinar la utilidad del modelo Mathematics Teacher Educators Specialised Knowledge (MTESK) para identificar evidencias del conocimiento de un FPM mediante la observación de su práctica. Se adopta un enfoque cualitativo mediante un estudio de caso basado en la observación de dos sesiones, analizadas con un enfoque deductivo. Los resultados muestran que los subdominios del modelo se identifican en la práctica observada, aunque su categorización presenta dificultades debido a la interrelación entre tipos de conocimiento. Estos resultados apuntan a la necesidad de desarrollar pautas de observación que apoyen el análisis del conocimiento del FPM a partir de la práctica.

Palabras clave: *formador de profesorado*, *matemáticas*, *observación*, *práctica profesional*

Abstract

This study examines the specialised knowledge of Mathematics Teacher Educator (MTE) as it manifests in practice. The aim is to examine the usefulness of the Mathematics Teacher Educators Specialised Knowledge (MTESK) model for identifying evidence of MTEs' knowledge through the observation of their practice. A qualitative approach is adopted through a case study based on the observation of two sessions, analysed using a deductive approach. The results show that the subdomains of the model can be identified in the observed practice, although their categorisation presents difficulties due to the interrelation between different types of knowledge. These findings point to the need to develop observation protocols to support the analysis of MTEs' knowledge through their practice.

Keywords: *mathematics, observation, professional practices, teacher educator*

INTRODUCCIÓN

El impacto que tiene la labor del Formador de Profesorado de Matemáticas (FPM) en la calidad de la educación matemática (Beswick y Goos, 2018) ha producido un incremento en la investigación sobre esta figura en los últimos años (Castro Superfine et al., 2024). Este crecimiento se ha traducido en estudios centrados en los perfiles profesionales de los FPM (Giadas et al., 2024), su conocimiento especializado (Pérez-Montilla et al., 2025) o sus creencias sobre la formación inicial (Giadas et al., 2025; Pascual, Codes et al., 2024). Asimismo, se han consolidado espacios específicos de discusión académica, como el TSG-35 Working Group (2024) del *International Congress on Mathematical Education* (ICME), donde se subraya la necesidad de profundizar en la comprensión del conocimiento y la práctica de estos profesionales. Esta necesidad se vincula, en parte, con la heterogeneidad de perfiles que se agrupan bajo la denominación de FPM (Chapman, 2021, Giadas et al., 2024). Este término engloba profesionales procedentes de distintos contextos (universitarios o escolares) y con

Giadas, P., Muñiz-Rodríguez, L. y Rodríguez-Muñiz, L. J. (2026). Aproximación a un modelo de conocimiento de formadores de profesorado de matemáticas desde la práctica. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (pp. 298-305). SEIEM.

funciones diversas (docencia, investigación, supervisión de prácticas, etc.) que comparten su implicación en el desarrollo de la enseñanza de las matemáticas, en formación inicial y continua (Beswick y Goos, 2018). La diversidad de perfiles también se refleja en los enfoques metodológicos empleados, entre los que se encuentran entrevistas, cuestionarios, análisis documental u observación de la práctica (Castro Superfine et al., 2024). Entre ellos, la observación adquiere especial relevancia, dado que se asume que la práctica del FPM está respaldada por su conocimiento especializado. Observar la actuación profesional requiere, sin embargo, un instrumento que permita identificar y organizar el conocimiento especializado que el FPM moviliza en situaciones reales de formación. En la actualidad, no existen instrumentos diseñados específicamente para examinar el conocimiento especializado del FPM a partir de la observación de su práctica (Giadas et al., 2026). Ante esta carencia, algunos estudios recurren a modelos teóricos de conocimiento como marcos analíticos para interpretar la práctica profesional (Pascual, Rifo et al., 2024; Pérez-Montilla et al., 2025). Esta situación abre un interrogante relevante para la investigación sobre el conocimiento de los FPM: si los modelos teóricos de conocimiento disponibles permiten analizar lo que ocurre en la práctica profesional de los FPM. Dado que estos modelos no fueron concebidos como instrumentos de observación ni necesariamente construidos a partir del análisis sistemático de la práctica, resulta pertinente examinar hasta qué punto sus categorías teóricas pueden utilizarse para identificar evidencias del conocimiento especializado de los FPM a partir de la observación de su práctica en contextos reales de formación.

En esta comunicación se adopta el modelo *Mathematics Teacher Educators Specialised Knowledge* (MTESK), propuesto por Martignone et al. (2022), con el objetivo de examinar en qué medida dicho modelo permite identificar evidencias del conocimiento especializado de un FPM a partir de la observación de su práctica. Para ello se plantean las siguientes preguntas de investigación: ¿se observan en la práctica de un FPM los subdominios de conocimiento propuestos en el modelo MTESK?, ¿qué dificultades aparecen al identificar dichos subdominios en la práctica de un FPM?

MARCO TEÓRICO

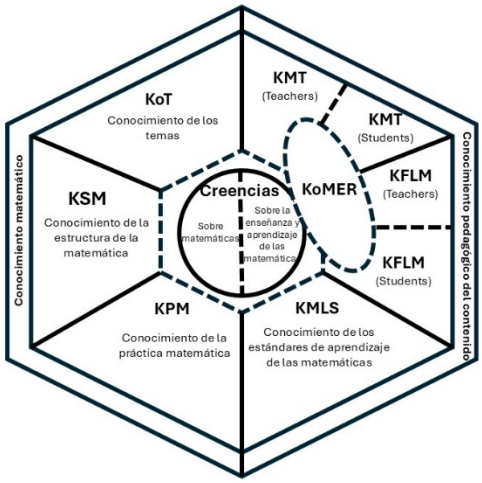
El modelo MTESK fue propuesto por Martignone et al. (2022) como una adaptación del modelo *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* (MTSK) desarrollado por Carrillo-Yáñez et al. (2018) con el objetivo de caracterizar el conocimiento especializado del FPM. Su desarrollo se basó en un estudio cualitativo exploratorio basado en las declaraciones de diversos FPM acerca de los conocimientos y características que consideraban necesarios para ejercer su labor. El análisis de estas respuestas, inicialmente interpretadas con las lentes del MTSK y posteriormente ampliadas, permitió identificar rasgos específicos del conocimiento del FPM y estructurarlos en tres dominios, cuya organización general se presenta en la Figura 1.

El primero dominio es el conocimiento matemático (MK)**,** que comprende el conocimiento de los contenidos matemáticos (KoT), su estructura (KSM) y las prácticas (KPM). Este conocimiento no se reduce al dominio técnico del contenido, sino que implica una comprensión profunda de las conexiones conceptuales y de la organización interna de las matemáticas, necesaria para analizar y fundamentar la formación de profesorado, en consonancia con la noción de metaconocimiento planteada por Beswick y Goos (2018). El segundo dominio corresponde al conocimiento pedagógico del contenido (PCK), que engloba el conocimiento sobre la enseñanza (KMT) y el aprendizaje de las matemáticas (KFLM). En el caso del FPM, este dominio no se limita a los procesos de enseñanza y aprendizaje de los estudiantes (Students), sino que se extiende también a los procesos formativos dirigidos al profesorado en formación (Teachers). Esta doble orientación hacia los estudiantes y hacia los docentes se ha conceptualizado en la literatura como una "doble mirada" (Reyes-Bravo et al., 2024). Asimismo, el PCK incorpora el conocimiento de la investigación en educación matemática (KoMER) como un recurso clave para fundamentar, analizar y orientar las decisiones formativas en el ámbito de la formación docente (Martignone et al., 2022), e incluye el conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS), tanto en el ámbito escolar como en el de la

formación del profesorado. El tercer dominio está constituido por las creencias y concepciones sobre las matemáticas y su enseñanza y aprendizaje, que ocupan una posición central en el modelo. Las creencias y concepciones (al igual que en el MTSK) no son algo independiente, sino que permean y dan sentido a los dominios MK y PCK, influyendo en la manera en que el FPM interpreta el contenido matemático, diseña propuestas formativas y comprende los procesos de aprendizaje.

Figura 3

Modelo MTESK



Nota. Adaptado de *What aspects can characterize the specialized knowledge of a mathematics teacher educator?* (p. 319) por F. Martignone et al., 2022.

MÉTODO

El estudio se enmarca en un enfoque cualitativo y adopta un diseño de estudio de caso descriptivo, adecuado para analizar en profundidad un fenómeno educativo en su contexto real (Cohen et al., 2018). Se observa a un FPM (Mario) experimentado con formación académica íntegramente en matemáticas (licenciatura y doctorado) y 16 años de experiencia en la formación inicial docente, seleccionado atendiendo a su accesibilidad y disposición para colaborar. La recogida de datos se llevó a cabo en una asignatura del Grado en Maestro/a en Educación Primaria de la Universidad de Oviedo centrada en la estocástica y su didáctica.

Se grabaron en vídeo las clases correspondientes a una semana de docencia, centradas en los gráficos estadísticos y su didáctica: una sesión de hora y media y otra de una hora. El objetivo fue obtener un registro detallado de la práctica del FPM y de las interacciones en el aula. La cámara, situada en una posición fija, permitió recoger la dinámica general de las sesiones. La participación se realizó con consentimiento informado, garantizando el tratamiento anónimo de los datos y con el respaldo del Comité de Ética de la Universidad de Oviedo. Las grabaciones fueron segmentadas en videoclips de ocho minutos, con el fin de facilitar el análisis detallado y reducir la ambigüedad interpretativa (Ingram et al., 2020). La segmentación dio lugar a 18 videoclips, cada uno de los cuales constituyó una unidad de análisis. Posteriormente, las grabaciones fueron transcritas y analizadas mediante un análisis de contenido deductivo (Cohen et al., 2018), tomando como marco teórico el modelo MTESK y apoyándose en el software MAXQDA para la organización y codificación de la información. El proceso de análisis se desarrolló en tres fases. En primer lugar, se realizó una lectura completa de las transcripciones de cada videoclip, para obtener una visión global. En segundo lugar, se categorizó cada unidad de análisis, identificando los subdominios del MTESK presentes. Tanto la lectura inicial como la categorización fueron realizadas de forma independiente por todos los investigadores del estudio. Finalmente, en una tercera fase, se procedió a la triangulación de los resultados, discutiendo aquellas unidades que presentaban mayor grado de desacuerdo hasta alcanzar consenso.

RESULTADOS

Se presentan los resultados organizados en torno a los tres dominios del MTESK. En el análisis se identificaron evidencias de todos los subdominios del modelo, que se ilustran mediante episodios representativos de su manifestación en la práctica del FPM.

MK

Se evidencia el subdominio KoT cuando Mario pone de manifiesto un conocimiento profundo sobre la naturaleza y las características de los gráficos estadísticos. Mario establece distinciones conceptuales entre varios tipos de representaciones gráficas y explicita los criterios que regulan su construcción. Asimismo, pone en juego su conocimiento sobre elementos estructurales clave, como el papel de la escala y su función en la coherencia de la representación.

> Mario: Eso [señala a un gráfico de coordenadas cartesianas] es un tipo de gráfico matemático donde es muy importante […] que los dos ejes tengan la misma escala. En los gráficos estadísticos, no siempre los ejes tienen la misma escala. Para empezar porque hay veces que en los ejes no se representan números, como en este ejemplo [muestra un diagrama de barras construido para una variable cualitativa nominal]. Aquí no hay números, ¿qué escala debo tener entre peras y uvas? Es una escala arbitraria ¿lo veis? Simplemente decido que cada fruta se separa de la otra fruta la misma distancia, pero no porque tenga que haber 17 cm porque sí. Sin embargo, en este eje vertical hay números. Ahí sí debo mantener una escala coherente con el sistema numérico que estoy representando. No puede haber el doble de distancia del 7 al 8 que del 3 al 4.

El subdominio KSM se evidencia cuando Mario establece una conexión entre la escala empleada en la representación gráfica de datos y la proporcionalidad. Al abordar el papel de la escala en los ejes de un gráfico, señala que esta determina la separación entre los valores representados y la vincula explícitamente con una regla de proporcionalidad. Esta intervención evidencia su comprensión de las relaciones entre diferentes contenidos matemáticos implicados en la construcción e interpretación de gráficos estadísticos.

> Mario: Claro, la escala en realidad es una regla de proporcionalidad. ¿Os acordáis? Claro, si yo tengo ejes, en el momento en que represento ejes interviene la escala, que es la que me dice cómo de separados tienen que estar los valores de ese eje. ¿Con qué está muy relacionada la escala? Con la proporción.

En relación con el subdominio KPM, se identifica una evidencia cuando Mario moviliza la práctica matemática de razonar y justificar. Al analizar si la magnitud proporcional a la frecuencia en los gráficos de sectores es el ángulo o el área del sector, Mario no ofrece una respuesta cerrada, sino que muestra que ambas afirmaciones son equivalentes. Para ello, recurre a la deducción de la fórmula del área de un sector circular como forma de fundamentar la relación entre ambas magnitudes.

> Mario: ¿Os acordáis de cómo se hacía esto? A ver si me acuerdo. Era, tengo que mirar la parte de...si todo el círculo tiene 360° si lo mido en grados, el cacho [*sic*], este correspondiente...el sector tiene grados α ¿no?, o sea que, α, si lo mido en grados, α entre [...] 360° es la porción, la parte del círculo, y como todo el círculo tiene πr^2, pues esa parte [...] α entre 360° de πr^2 es la que corresponde a ese sector.

PCK

Se aprecia una evidencia del conocimiento relacionado con el subdominio KMT (Teachers) cuando Mario recurre al uso de ejemplos y al planteamiento de preguntas como estrategia para enseñar los niveles de lectura de gráficos estadísticos (Arteaga et al., 2015). Mario hace alusión a un gráfico trabajado previamente, un gráfico de mosaico en el que se representan las temáticas de las canciones escuchadas en distintas décadas y lo utiliza como punto de partida para ejemplificar el tipo de cuestiones que pueden formularse en el aula. A través de preguntas orientadas a realizar valoraciones críticas y a proponer explicaciones vinculadas al contexto, dirige la atención hacia el nivel más avanzado de interpretación, leer detrás de los datos, mostrando una forma de trabajar este contenido.

Mario: Me voy al gráfico que os ponía antes […] el de las canciones. De acuerdo, una pregunta podría ser, ¿te parece que este gráfico te ayuda a representar la información? Tengo que hacer una valoración crítica, pero también podría preguntar ¿por qué crees…? ¿Qué vamos a mirar aquí? Por ejemplo, aquí… ¿Por qué crees que las canciones de fiesta aumentaron en los años 2000?

Respecto al subdominio KMT (Students), se manifiesta cuando Mario evidencia su conocimiento sobre recursos digitales susceptibles de ser utilizados por el futuro profesorado en el aula de Educación Primaria. Mario recomienda la página web del Instituto Nacional de Estadística y destaca, entre otras, la herramienta que permite consultar la frecuencia de nombres y apellidos. Además de presentar el recurso, muestra al futuro profesorado cómo utilizarlo e integrarlo en posibles actividades de aula, subrayando explícitamente el interés y la curiosidad que este tipo de actividad suele despertar en el alumnado de Educación Primaria y anticipando así su potencial motivador.

Mario: Bueno esto, fijaos que os lo recomiendo también, es la página web del INE, el Instituto Nacional de Estadística ¿vale? Ahí tenéis muchas estadísticas poblacionales españolas. Algunas, pues les suele resultar curioso, por ejemplo, apellidos y nombres, esto de que buscas cuántas personas se llaman o se apellidan como tú ¿vale?

El subdominio KFLM (Teachers) se identifica cuando Mario se refiere a las dificultades que pueden surgir en la formulación de preguntas asociadas a los distintos niveles de lectura de gráficos estadísticos. Tras proponer al futuro profesorado el diseño de este tipo de preguntas, Mario afirma que no espera que todas estén correctamente formuladas en un primer intento y les invita a compartirlas con tranquilidad. Esta intervención evidencia su conocimiento sobre cómo las experiencias previas y la comprensión que posee el futuro profesorado acerca de los niveles de lectura influyen en la manera en que abordan dichas tareas matemáticas. Asimismo, pone de manifiesto su conocimiento acerca del carácter progresivo del aprendizaje de este contenido y de la necesidad de que el error forme parte del proceso de construcción del conocimiento didáctico asociado a él.

Mario: Vamos a ir diciendo las preguntas que pusimos y vamos a ver qué problemas nos dan. No espero que lo tengáis todos bien a la primera, ni mucho menos, ¿vale? O sea que tranquilidad. Venga, empezamos con la de nivel 1, leer los datos. A ver ¿qué habéis puesto?

También se encuentran evidencias del subdominio KFLM (Students). Mario conoce los errores y dificultades habituales del alumnado de Educación Primaria en la interpretación de gráficos estadísticos. Mientras trabaja con un *treemap*, Mario señala que una fuente frecuente de error consiste en no comprender qué característica del gráfico debe relacionarse con la frecuencia representada. En particular, enfatiza que el alumnado de Educación Primaria debe entender que cuanto mayor es el tamaño del rectángulo, mayor es la frecuencia del valor representado.

Mario: Porque es una fuente habitual de errores entre vuestro alumnado. Si yo no sé qué es lo que estoy representando con el gráfico, es más fácil que me equivoque y lo haga mal. Si no tengo claro que aquí [en un *treemap*] lo que tiene que ser proporcional a la frecuencia es el área, es probable que lo interprete mal. ¿Me explico?

El subdominio KMLS se identifica a través del conocimiento del currículo de Educación Primaria. Durante la sesión, Mario consulta el currículo del Ministerio para mostrar los gráficos estadísticos que han de trabajarse en el primer ciclo y, al advertir la presencia de los histogramas, detecta que se ha desplazado por error al segundo ciclo. Esta rectificación inmediata pone de manifiesto su dominio de la secuenciación curricular de los contenidos estadísticos. Así, su familiaridad con la organización del currículo le permite reconocer el error y ajustar su intervención en tiempo real.

Mario: Mirad qué nos dice el currículo, me voy al currículo […] esta es la parte del sentido estocástico en el currículo del primer ciclo. Me he ido únicamente a la parte de saberes básicos que es donde aparecen mencionados los gráficos estadísticos. Fijaos en […] el primer ciclo. Aparecen gráficos estadísticos de la vida cotidiana ¿vale? […] Y los que menciona explícitamente son los pictogramas, gráficos de barras, espera… ¿esto es el primer ciclo? ¿histogramas? Perdón, esto es el segundo ciclo. Este debe ser el primer ciclo [el que quiere mostrar realmente].

Por último, el subdominio KoMER se evidencia cuando Mario introduce en su intervención referencias a experiencias fundamentadas en la investigación en educación matemática. Tras una actividad previa en la que el futuro profesorado había representado un gráfico manipulativo utilizando policubos, Mario amplía el repertorio de propuestas y menciona explícitamente una propuesta consistente en recoger datos sobre el color de los coches que pasan por el entorno escolar y trabajar posteriormente su representación manipulativa (Alsina, 2017), mostrando diferentes formas de abordar este tipo de tareas en el aula de Educación Primaria.

> Mario: Por ejemplo, una práctica que trabaja mucho ya en educación infantil el grupo de Girona es ponerse en la puerta del cole o en el patio y contar de qué color son los coches que pasan. Bueno, pues luego puedes tener previstos coches...puedes incluso jugar con la diversidad de tu clase porque les puedes decir, traed coches de casa, venga, los que tengáis coches, traed los de casa.

Beliefs

Se advierte un posicionamiento explícito de Mario acerca de qué entiende por matemáticas y cómo interpreta el currículo de Educación Primaria. Mario enfatiza que el currículo no se limita a la mera aplicación de procedimientos o la repetición de algoritmos, defendiendo una visión orientada al desarrollo competencial de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

> Mario: Esta es una de las cosas que queremos también que vosotros vayáis viendo al estudiar los gráficos estadísticos con la mirada que debéis tener de futuro profesorado. No se trata solamente de hacer. Eso se acabó. El currículo de matemáticas ya no es hacer […] Para sentirte competente en matemáticas no puede ser que yo os diga: hay esto, se hace así, repetidlo. Con eso no vamos a conseguirlo y el currículo ya no va de eso. Ya no iba hace tiempo, pero este último [la LOMLOE] está mucho más claro que no va de eso.

Dificultades de categorización

Durante el análisis de los videoclips se identificaron algunas evidencias cuya categorización resultó compleja. Un ejemplo se encuentra en el episodio en el que Mario introduce los niveles de lectura de gráficos estadísticos. Este contenido puede interpretarse, por un lado, como conocimiento matemático sobre la interpretación de gráficos y, por otro, como una herramienta para que el futuro profesorado valore la adecuación y dificultad de las preguntas que plantea al alumnado. En este sentido, la evidencia también refleja la denominada "doble mirada", ya que el conocimiento se orienta simultáneamente al aprendizaje del alumnado escolar y al del futuro profesorado, lo que hace que la evidencia pueda interpretarse desde más de un subdominio del modelo MTESK.

> Mario: Cuando hablamos de identificar, de leer un gráfico, no es leerlo y ya está. Como profesores, debemos tener un conocimiento de los distintos niveles de lectura que hay en un gráfico, porque tenemos que saber si la pregunta que le hacemos a nuestro alumnado es abordable o no es abordable por ese alumnado [...] en términos de valorar la dificultad de las tareas que tú propongas, sean tareas de evaluación o tareas para realizar en clase. Hay cuatro niveles de lectura fundamentalmente.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El estudio permite responder a las preguntas de investigación planteadas. En relación con la primera, *¿se observan en la práctica de un FPM los subdominios de conocimiento propuestos por el modelo MTESK?*, los resultados muestran que todos los subdominios se observan en la práctica del FPM analizado. Además, todos los videoclips examinados pudieron clasificarse en alguno de los subdominios del MTESK, sin que en las sesiones observadas aparezcan evidencias de otros tipos de conocimiento distintos a los contemplados en el modelo. En relación con la segunda pregunta, *¿qué dificultades aparecen al identificar los subdominios del modelo MTESK en la práctica de un FPM?*, el análisis reveló dificultades en la categorización de algunas evidencias, derivadas principalmente de la interrelación entre distintos tipos de conocimiento en la práctica (Aguilar-González et al., 2018). Esta complejidad se acentúa en situaciones en las que el FPM atiende simultáneamente al aprendizaje

del futuro profesorado y al del alumnado escolar (Reyes-Bravo et al., 2024), que dificulta la atribución de las evidencias a un único subdominio. En consecuencia, algunos conocimientos movilizados pueden interpretarse desde más de un subdominio, lo que pone de manifiesto los límites de una clasificación estricta cuando se analizan situaciones reales de formación. El análisis también plantea un interrogante sobre la naturaleza del conocimiento matemático movilizado por el FPM. Evidencias como el trabajo con los niveles de lectura de gráficos estadísticos suscitan la duda de si este tipo de conocimiento coincide con el conocimiento matemático propio del profesorado de matemáticas o si podría considerarse una forma de conocimiento matemático ampliado vinculada a la formación del profesorado (Beswick y Goos, 2018; Martignone et al., 2022).

Estas dificultades evidencian los límites de analizar el conocimiento del FPM únicamente a partir de la observación de su práctica. En este sentido, Giadas et al. (2026), al analizar la relación entre el modelo MTESK y un marco de observación de la práctica del profesorado de matemáticas, señalan que algunos subdominios del conocimiento pueden no ser fácilmente identificables únicamente mediante observación. Esta cuestión puede explicarse, en parte, porque el modelo MTESK no fue concebido como una herramienta para el análisis directo de la práctica, sino como un modelo teórico para caracterizar el conocimiento especializado del FPM. Por ello, su uso en estudios basados en observación requiere apoyarse en instrumentos intermedios que permitan relacionar las acciones observadas con el conocimiento especializado que las sustenta. En estudios previos se han empleado entrevistas posteriores a la observación para acceder al conocimiento que respalda la práctica del FPM (Pascual, Rifo et al., 2024; Pérez-Montilla et al., 2025). No obstante, dado que el propio modelo MTESK se construyó a partir de entrevistas a FPM y que no siempre es posible realizar entrevistas posteriores, los resultados de este estudio apuntan a la necesidad de desarrollar instrumentos específicamente orientados al análisis de la práctica. En esta línea, proponemos avanzar en la elaboración de pautas de observación que permitan analizar la práctica del FPM y relacionarla con el conocimiento especializado que la sustenta. Por otra parte, en relación con el alcance del estudio, los resultados se circunscriben al contexto analizado y deben interpretarse en relación con este. En este sentido, resulta pertinente continuar explorando la aplicabilidad del modelo en otros casos y contextos. Así, como línea futura de investigación, se plantea ampliar el análisis a FPM con perfiles y contextos diversos, con el fin de contrastar los hallazgos obtenidos y avanzar en el desarrollo de pautas de observación para el análisis del conocimiento del FPM en la práctica.

Agradecimientos

Trabajo financiado por los proyectos PID2024-155358NB-100 de la Agencia Estatal de Investigación de España y GRUPIN-IDE/2024/000713 de la Agencia de Ciencia, Competitividad e Innovación Empresarial Asturiana SEKUENS. Pablo Giadas ha sido financiado también por el proyecto PAPI-22-PF-18 de la Universidad de Oviedo.

Referencias

Aguilar-González, Á., Muñoz-Catalán, C., Carrillo-Yáñez, J., y Rodríguez-Muñiz, L. J. (2018). ¿Cómo establecer relaciones entre conocimiento especializado y concepciones del profesorado de matemáticas? *PNA, 13*(1), 41–61.

Alsina, Á. (2017). Contextos y propuestas para la enseñanza de la estadística y la probabilidad en Educación Infantil: un itinerario didáctico. *Épsilon - Revista de Educación Matemática, 34*(95), 25–48.

Arteaga, P., Batanero, C., Contreras, J. M., y Cañadas, G. R. (2015). Statistical graphs complexity and reading levels: A study with prospective teachers. *Statistique et enseignement, 6*(1), 3–23. https://doi.org/10.3406/staso.2015.1301

Beswick, K., y Goos, M. (2018). Mathematics teacher educator knowledge: What do we know and where to from here*? Journal of Mathematics Teacher Education*, *21*, 417–427. https://doi.org/10.1007/s10857-018-9416-4

Carrillo-Yáñez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M., y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236–253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Castro Superfine, A., Olanoff, D., Welder, R. M., y Prasad, P. V. (2024). A Review of Research on Mathematics Teacher Educator Knowledge: Mapping the Terrain. *Education Sciences, 14*(8), 810. https://doi.org/10.3390/educsci14080810

Chapman, O. (2021). Mathematics Teacher Educator Knowledge for Teaching Teachers. En M. Goos y K. Beswick (Eds.), *The Learning and Development of Mathematics Teacher Educators: International Perspectives and Challenges* (pp. 403–416). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-62408-8_21

Cohen, L., Manion, L., y Morrison, K. (2018). *Research Methods in Education* (8.ª ed.). Routledge. https://doi.org/10.4324/9781315456539

Giadas, P., Muñiz-Rodríguez, L., y Rodríguez-Muñiz, L. J. (2025). Mathematics teacher educators in the Spanish context: a glance at their beliefs and perceived competence. *LUMAT-B: International Journal on Math, Science and Technology Education, 10* (3), 1–16. https://journals.helsinki.fi/lumatb/article/view/2747

Giadas, P., Muñiz-Rodríguez, L., y Rodríguez-Muñiz, L. J. (2026). Tracing mathematics teacher educators' specialised knowledge through a classroom observation framework. En R. Mosvold, J. Fauskanger, F. Ferretti, y N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the Nineteenth ERME Topic Conference: Connecting the Learning of Mathematics Teaching to Practice* (pp. 436–443). Charles University y ERME.

Giadas, P., Pascual-Martín, M. I, Muñiz-Rodríguez, L., Rodríguez-Muñiz, L. J., y Contreras, L. C. (2024). Perfiles de formadores de profesores de matemáticas en el contexto universitario español. *PNA, 18*(5), 439–466. https://doi.org/10.30827/pna.v18i5.29287

Ingram, J., Lindorff, A., McCann, E., Riggall, A., y Sani, N. (2020). *TALIS Video Study National Report*. University of Oxford.

Martignone, F., Ferretti, F., y Rodríguez-Muñiz, L. J. (2022). What aspects can characterize the specialized knowledge of a mathematics teacher educator? *Educación Matemática, 34*(3), 301–328. https://doi.org/10.24844/EM3403.11

Pascual, M. I., Codes, M., Martín-Díaz, J. P., y Contreras, L. C. (2024). Perspectivas de dos formadores sobre la formación inicial de maestros de Educación Primaria. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 409–416). SEIEM.

Pascual, M. I., Rifo, L., Castilla, L., y Climent, N. (2024). Conocimiento matemático del formador de maestros para la enseñanza del razonamiento inferencial estadístico. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 401–408). SEIEM.

Pérez-Montilla, A., Cardeñoso, J. M., y Montes, M. Á. (2025). Una mirada al conocimiento del educador de docentes de matemáticas: un estudio de caso. *Enseñanza de las Ciencias, 43*(1), 23–40. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.6065

Reyes-Bravo, M., Pascual, M. I., Contreras, L. C., y Estrella, S. (2024). Doble mirada del formador de profesorado de matemáticas: oportunidad para identificar su conocimiento. *PNA, 18*(5), 467–493. https://doi.org/10.30827/pna.v18i5.29431

TSG-35 Working Group (2024). Knowledge and practice of mathematics teacher educators. En J. Wang (Ed.), *Proceedings of the 14th International Congress on Mathematical Education* (pp. 497–502). World Scientific.

DOMINIO AFECTIVO DOCENTE Y EXCLUSIÓN EN EL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR EN SECUNDARIA

Teachers´ affective domain and exclusion in mathematics classroom discourse in secondary education

Gómez-Pérez, O. y Pinto-Sosa, J.

Universidad Autónoma de Yucatán

Resumen

Se analiza la relación entre el dominio afectivo docente y el discurso matemático escolar con el acceso y la participación en clases de matemáticas de secundaria. Participaron 20 docentes de matemáticas de secundarias públicas de Halachó, Yucatán (México), que respondieron cuestionarios sobre creencias epistemológicas sobre las matemáticas y su enseñanza, estados afectivos y autoeficacia docente, se videograbaron seis de sus clases y se entrevistó a seis de ellos. Predominaron las creencias falibilistas y relacionales, junto con niveles elevados de autoeficacia y disposiciones afectivas positivas hacia la enseñanza de las matemáticas, así como patrones de regulación, validación y organización de la participación centrados en la figura docente; consistentes a través de distintos contenidos matemáticos. Los hallazgos muestran diferencias entre las concepciones docentes reportadas y las dinámicas discursivas observadas en el aula.

Palabras clave: *dominio afectivo docente; discurso matemático escolar; acceso epistémico; educación matemática; educación secundaria.*

Abstract

This study analyses the relationship between teachers' affective domain and mathematics classroom discourse in relation to access and participation in secondary mathematics classes. Participants were 20 mathematics teachers from public secondary schools in Halachó, Yucatán (Mexico), who completed questionnaires on epistemological beliefs about mathematics and its teaching, affective states, and teacher self-efficacy. In addition, six classes were video recorded and six teachers were interviewed. Falibilist and relational beliefs predominated, together with high levels of self-efficacy and positive affective dispositions toward mathematics teaching, as well as patterns of regulation, validation, and organisation of participation centred on the teacher across different mathematical contents. Findings show differences between teachers' reported conceptions and the discursive dynamics observed in the classroom.

Keywords: *teacher affective domain; mathematics classroom discourse; epistemic access; mathematics education; secondary education.*

INTRODUCCIÓN

En las últimas décadas, el dominio afectivo —creencias, actitudes y emociones asociadas a la enseñanza, aprendizaje y naturaleza matemática— cobró relevancia (McLeod, 1992) por influir en cómo las personas docentes y estudiantes se relacionan con el conocimiento y las prácticas escolares (Romero et al., 2023). En el profesorado, estas creencias y disposiciones afectivas hacia la enseñanza influyen en la organización del aula y las oportunidades de participación (Rodríguez-Barreto y García-Alonso, 2025); sin embargo, poco se conoce sobre su articulación con las dinámicas discursivas que estructuran la actividad matemática escolar.

Gómez-Pérez, O. y Pinto-Sosa, J. (2026). Dominio afectivo docente y exclusión en el discurso matemático escolar en secundaria. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (pp. 306-313). SEIEM.

Desde perspectivas críticas, se señala que las dinámicas escolares pueden producir formas de exclusión que limitan la participación y el acceso significativo al conocimiento (Skovsmose, 2005). Particularmente, la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME) sostiene que el discurso matemático escolar (dME) regula las formas legítimas de pensar, comunicar y hacer matemáticas, privilegiando ciertos modos de conocimiento y marginando otras formas de participación y construcción de significado (Cantoral et al., 2015; Montiel y Buendía, 2012). Así, la exclusión se comprende como un fenómeno discursivo y epistémico ligado a las condiciones de participación, argumentación y reconocimiento de los sujetos (Cantoral et al., 2005, Cantoral, 2013).

Por ello, resulta relevante analizar las concepciones docentes y su articulación con las prácticas discursivas que regulan la participación, validación y acceso al conocimiento en el aula. Si bien el dominio afectivo incluye emociones, actitudes y creencias (McLeod, 1989, 1992), la investigación se ha concentrado en creencias epistemológicas, actitudes, autoeficacia y disposiciones hacia la enseñanza (Philipp, 2007; Di Martino y Zan, 2010), debido al limitado desarrollo de instrumentos específicos para estudiar emociones docentes en contextos matemáticos escolares.

En este contexto, surge la pregunta de investigación: ¿cómo se relacionan las creencias y actitudes docentes, junto con sus disposiciones afectivas, con las configuraciones del discurso matemático escolar que regulan el acceso y la participación del alumnado en clases de matemáticas de secundaria?

El objetivo general es analizar la relación entre las creencias y actitudes docentes hacia las matemáticas y las configuraciones del discurso matemático escolar. Específicamente, se busca: (1) examinar las creencias epistemológicas y las actitudes del profesorado hacia las matemáticas y su enseñanza; (2) analizar las dinámicas del discurso matemático escolar en términos de regulación discursiva, posicionamiento epistémico y organización de la participación; y (3) explorar las relaciones y tensiones entre las disposiciones afectivas docentes y las configuraciones discursivas observadas.

FUNDAMENTACIÓN

El dominio afectivo ha sido reconocido como un componente relevante en la investigación en educación matemática. Desde los trabajos de McLeod (1989, 1992), este dominio se ha conceptualizado a partir de constructos como creencias, actitudes y emociones, los cuales influyen en la manera en que docentes y estudiantes interpretan y se relacionan con las matemáticas. En el caso del profesorado, estas disposiciones no solo configuran la relación personal con la disciplina, sino que también pueden influir en las decisiones didácticas y en la organización de la actividad matemática en el aula (Severiche Mendoza y González Gutiérrez, 2025). Asimismo, se ha señalado que estos subdominios presentan distintos niveles de estabilidad y especificidad: mientras las emociones suelen entenderse como respuestas más intensas y situadas, las actitudes y creencias constituyen disposiciones relativamente más estables que orientan la interpretación y actuación docente frente a la actividad matemática escolar (Hannula, 2012).

El estudio del dominio afectivo continúa concentrándose principalmente en el análisis de actitudes y ansiedad matemática mediante enfoques cuantitativos basados en cuestionarios (Rodríguez-Barreto y García-Alonso, 2025). No obstante, también se ha reconocido la necesidad de desarrollar investigaciones que articulen distintos subdominios afectivos e incorporen aproximaciones cualitativas orientadas al análisis de las interacciones y del discurso en el aula. Desde esta perspectiva, resulta relevante examinar cómo las creencias, actitudes y disposiciones afectivas docentes se relacionan con las formas de regulación discursiva, validación del conocimiento y organización de la participación que estructuran la actividad matemática escolar.

Las creencias y actitudes docentes constituyen componentes relevantes del dominio afectivo en educación matemática (McLeod, 1992; Hannula, 2012). Las creencias sobre las matemáticas, su enseñanza y el aprendizaje pueden oscilar entre concepciones absolutistas y falibilistas, así como

entre enfoques instrumentales y relacionales de la enseñanza (Ernest, 1991; Vesga-Bravo y Losada, 2017). A ello se suman las creencias de autoeficacia docente, relacionadas con la percepción de capacidad para enseñar matemáticas (Bandura, 1997). Por su parte, las actitudes hacia las matemáticas integran dimensiones conductuales, cognitivas y disposicionales vinculadas con la relación del profesorado con la actividad matemática y su enseñanza (Di Martino y Zan, 2010).

Diversas investigaciones han mostrado que las creencias y actitudes docentes junto con sus disposiciones afectivas pueden influir en las expectativas del profesorado, en la interpretación de las situaciones de enseñanza y en las formas de interacción que se establecen en el aula (García-González y Martínez-Sierra, 2016). En este sentido, el análisis del dominio afectivo docente no puede limitarse únicamente a las concepciones y disposiciones que los profesores reportan sobre las matemáticas y su enseñanza (Marbán et al., 2020), sino que requiere considerar también las prácticas desarrolladas en el aula y las dinámicas mediante las cuales se organiza la actividad matemática escolar.

Desde la perspectiva socioepistemológica, el discurso matemático escolar puede entenderse como el sistema de prácticas, normas y formas de validación que regulan la producción y circulación del conocimiento matemático en el aula (Cantoral, 2013; Cantoral et al., 2014). Este discurso organiza las interacciones entre docentes y estudiantes y establece qué formas de participación, argumentación y comunicación son legítimas dentro de la actividad matemática escolar. En este sentido, el acceso epistémico puede comprenderse como el conjunto de condiciones discursivas que posibilitan que los estudiantes participen, argumenten y sean reconocidos como sujetos legítimos dentro de la actividad matemática escolar (Planas, 2018).

Para analizar las condiciones de acceso resulta pertinente considerar tres dimensiones analíticas: regulación discursiva, posicionamiento epistémico y organización de la participación, ya que permiten examinar cómo se distribuye la autoridad matemática, quién valida las respuestas y cómo se estructuran las oportunidades de intervención del alumnado. Así, la exclusión no se comprende únicamente como ausencia de acceso o bajo rendimiento escolar, sino como el conjunto de mecanismos discursivos mediante los cuales ciertas formas de participación, argumentación o validación son restringidas dentro del discurso matemático escolar (Cantoral et al., 2005, Cantoral 2013). En este marco, categorías como hegemonía, atomización, autorreferencia, utilitariedad, linealidad e inmutabilidad pueden entenderse como mecanismos discursivos que condicionan las posibilidades de acceso y reconocimiento epistémico del alumnado (Montiel y Buendía, 2012).

METODOLOGÍA

Participantes y muestreo

Participaron cinco secundarias públicas del municipio de Halachó, Yucatán, México, elegidas por conveniencia. La muestra general estuvo conformada por 20 docentes de matemáticas de secundaria que respondieron cuestionarios sobre creencias epistemológicas, actitudes, disposiciones afectivas y autoeficacia docente. Posteriormente, se conformaron dos submuestras para las fases cualitativas: seis grupos seleccionados para la observación de aula y seis docentes identificados como informantes clave para la fase de entrevistas. Las clases observadas abordaron distintos contenidos matemáticos, incluyendo ecuaciones, geometría, gráficas y medidas de tendencia central.

Instrumentos

Se empleó una batería de instrumentos cuantitativos y cualitativos, sometidos previamente a juicio de expertos para garantizar su claridad conceptual, congruencia teórica, pertinencia y coherencia metodológica.

1. Cuestionario sociodemográfico y de trayectoria docente: Diseñado para caracterizar el perfil profesional, experiencia y contexto de las personas educadoras, incorporando preguntas abiertas sobre sus concepciones generales de la actividad matemática escolar.

2. Escala de actitudes hacia la enseñanza de las matemáticas: Desarrollada para este estudio a partir del modelo multidimensional de Di Martino y Zan (2010). Tras un proceso de validación de facie y una aplicación piloto con los 20 docentes participantes, el instrumento —que evalúa disposiciones afectivas, utilidad percibida y autoeficacia— mostró niveles adecuados de consistencia interna (alfa de Cronbach entre .82 y .90).
3. Cuestionario de creencias epistemológicas sobre las matemáticas: Adaptado de Vesga-Bravo y Losada (2017) para evaluar posturas absolutistas y falibilistas. Posterior a su revisión conceptual, validación de facie y pilotaje con los 20 participantes, demostró una consistencia interna óptima ($\alpha = .71$ para creencias falibilistas y $\alpha = .86$ para absolutistas).

A) Entrevista semiestructurada con actividad proyectiva: Basada en dibujos donde cada docente representó e interpretó una clase de matemáticas (Beisly y Ross, 2026). Esta estrategia facilitó la exploración profunda de emociones, actitudes, creencias y dinámicas de participación, favoreciendo la expresión de significados implícitos difíciles de recuperar mediante cuestionamientos directos.

B) Escala Observacional de Acceso Epistémico en Matemáticas (OSEA): Desarrollada específicamente para esta investigación con el fin de analizar la distribución de la legitimidad, la participación y la autoridad epistémica durante las interacciones en el aula (Gómez y Pinto, en prensa). Se fundamenta en el concepto de acceso epistémico y se organiza en tres dimensiones analíticas: regulación discursiva, posicionamiento epistémico y organización de la participación.

Procedimiento y análisis

El estudio se desarrolló desde un enfoque mixto exploratorio-secuencial en tres fases. En la primera, los docentes respondieron los cuestionarios cuantitativos; en la segunda, se realizaron observaciones videograbadas de seis clases de matemáticas segmentadas en inicio, desarrollo y cierre para su análisis (Edmonds, 2009); y en la tercera, entrevistas semiestructuradas. El análisis combinó procedimientos cuantitativos y cualitativos.

Los cuestionarios se analizaron mediante estadística descriptiva y análisis de consistencia interna. Se construyeron indicadores analíticos de exclusión a partir de reactivos de los cuestionarios de creencias y actitudes docentes alineados teóricamente con las categorías de Cantoral (2005, 2013): atomización, linealidad, hegemonía, utilitariedad, autorreferencia e inmutabilidad. Se calcularon coeficientes alfa de Cronbach con fines exploratorios ($\alpha = .55–.92$). Las videograbaciones se analizaron mediante la OSEA (Gómez y Pinto, en prensa), considerando regulación discursiva, posicionamiento epistémico y organización de la participación. Las entrevistas fueron analizadas mediante codificación temática en torno a creencias docentes, afectos hacia la enseñanza y decisiones didácticas relacionadas con la participación en el aula.

Se construyeron tres perfiles docentes: (a) perfil de creencias, integrado por creencias epistemológicas, de enseñanza y autoeficacia docente; (b) perfil afectivo, derivado de disposiciones positivas y negativas y de estados afectivos reportados por el profesorado; y (c) perfil de exclusión, construido a partir de las categorías derivadas de los cuestionarios de creencias y actitudes docentes. Se realizó una triangulación entre cuestionarios, observaciones y entrevistas para identificar convergencias y tensiones. El estudio siguió principios éticos para investigación con menores; se obtuvo consentimiento informado del profesorado, asentimiento del alumnado y anonimización de los datos.

RESULTADOS

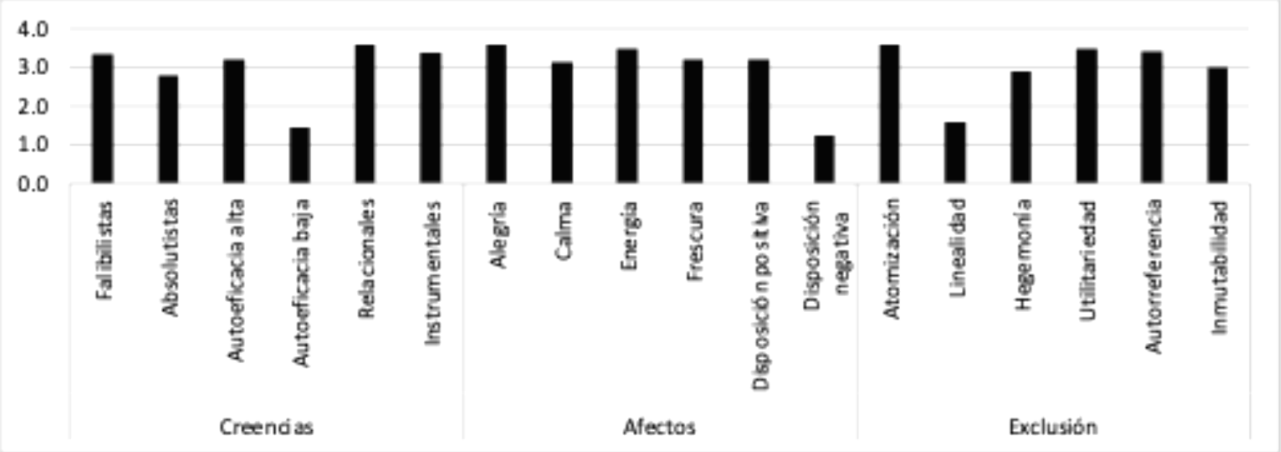
Perfiles docentes: creencias, afectos y exclusión

A partir de los cuestionarios aplicados se construyeron tres perfiles descriptivos del profesorado participante: un perfil cognitivo, un perfil afectivo y un perfil de exclusión del discurso matemático escolar. La Figura 1 muestra los perfiles descriptivos construidos a partir de los cuestionarios

aplicados al profesorado. En el plano cognitivo predominan las creencias falibilistas (*M* = 3.34) y relacionales (*M* = 3.58) frente a concepciones absolutistas (*M* = 2.79) e instrumentales (*M* = 3.39), junto con niveles elevados de autoeficacia docente (*M* = 3.21). En el plano afectivo se observan puntuaciones altas en alegría (*M* = 3.6), energía (*M* = 3.5), calma (*M* = 3.2) y disposición positiva hacia la enseñanza de las matemáticas (*M* = 3.2), mientras que la disposición negativa presenta el valor más bajo (*M* = 1.2). Finalmente, en el perfil de exclusión destacan mayores puntajes en atomización (M = 3.6), utilitariedad (*M* = 3.5) y autorreferencia (*M* = 3.4), seguidos por inmutabilidad (*M* = 3.0) y hegemonía (*M* = 2.9), mientras que linealidad presenta el promedio más bajo (*M* = 1.6).

Figura 1

Perfiles docentes: creencias, afectos y exclusión



Nota. Los puntajes corresponden a medias obtenidas en escalas con rango de respuesta de 1 a 4.

CONFIGURACIÓN DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR

El análisis de las videograbaciones permitió caracterizar el discurso matemático escolar a partir de tres dimensiones analíticas: regulación discursiva, posicionamiento epistémico y organización de la participación. Como muestra la Tabla 1, predominan las intervenciones de regulación docente en los tres segmentos de la clase, mientras que las acciones vinculadas con la organización de la participación presentan menor frecuencia. Aunque las clases observadas abordaban distintos contenidos matemáticos —como ecuaciones, geometría, gráficas y medidas de tendencia central—, las configuraciones discursivas mostraron patrones similares de regulación, validación y organización de la participación a lo largo de las sesiones observadas.

Tabla 1

Distribución de las dimensiones del discurso matemático escolar por segmento de la clase

Segmento de la clase	Regulación discursiva	Posicionamiento epistémico	Organización de la participación
Inicio	56	17	7
Desarrollo	66	22	15
Cierre	48	27	14

Nota. Los valores representan frecuencias de aparición de las dimensiones analíticas identificadas en las videograbaciones de clase.

Interpretaciones docentes sobre la enseñanza de las matemáticas

Los docentes describen la enseñanza de las matemáticas como un proceso que requiere motivación del alumnado, comprensión conceptual y práctica constante, destacando también la influencia de factores emocionales en el aprendizaje. Asimismo, en sus relatos se observa una valoración positiva de estrategias como el trabajo colaborativo entre estudiantes, el uso de recursos visuales o audiovisuales y la promoción de un ambiente de confianza que favorezca la participación del

alumnado en las actividades matemáticas. La Tabla 2 presenta algunas viñetas representativas del análisis de las entrevistas, organizadas de acuerdo con las categorías analíticas empleadas.

Figura 2

Frecuencia de categorías del discurso matemático escolar según segmento de la clase

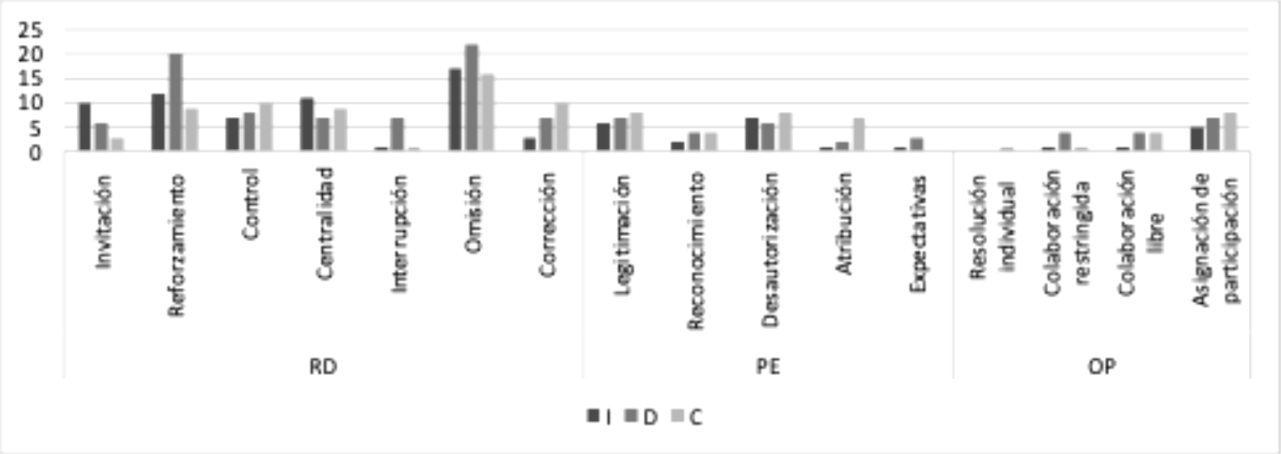


Tabla 2

Viñetas representativas del análisis de las entrevistas docentes

Categoría	Docente	Descripción	Cita
Creencias docentes	2	Vacíos matemáticos previos	«Muchos alumnos llegan con bases muy débiles desde primaria».
	3	Motivación del alumnado	«Si el alumno está motivado aprende mucho más rápido».
	7	Aprendizaje mediante práctica	«Las matemáticas son de práctica, si no practicas no aprendes».
Afectos hacia la enseñanza	16	Miedo a las matemáticas	«Muchos llegan diciendo que las matemáticas son difíciles».
	18	Influencia emocional docente	«Si yo llego deprimido y mis alumnos llegan deprimidos… ni yo lo voy a querer hacer y él menos lo va a querer aprender».
Didáctica docente	19	Trabajo colaborativo	«Se forman equipos donde ellos pueden hacer intercambio de ideas».

CONCLUSIONES

Los perfiles construidos a partir de los cuestionarios muestran que el profesorado participante presenta mayores puntajes en creencias falibilistas y relacionales que en concepciones absolutistas e instrumentales, junto con niveles elevados de autoeficacia, mostrando mayor reconocimiento de las matemáticas como un conocimiento construido y discutible, y menor adhesión a visiones centradas en la transmisión de procedimientos fijos y verdades únicas, así como niveles elevados de autoeficacia y disposiciones afectivas positivas hacia la enseñanza de las matemáticas. Estos resultados coinciden con investigaciones previas que señalan que las creencias y actitudes del profesorado influyen en la manera en que se interpretan las situaciones de enseñanza y se organizan las prácticas de aula (Ernest, 1989; Hannula, 2012; Di Martino y Zan, 2010).

El análisis de las videograbaciones muestra que la regulación, validación y organización de la participación en la actividad matemática se concentraron principalmente en la figura docente en la regulación del proceso de enseñanza, con predominio de intervenciones orientadas al control de la actividad y a la validación de las respuestas. En este sentido, la organización de la participación

aparece principalmente mediada por la asignación de la palabra por parte del docente, con menor presencia de dinámicas de interacción horizontal entre estudiantes.

Aunque las clases observadas abordaban distintos contenidos matemáticos, las configuraciones discursivas mostraron patrones relativamente consistentes en términos de regulación docente, validación del conocimiento y organización de la participación. Esto sugiere que ciertas formas de funcionamiento del discurso matemático escolar pueden mantenerse transversalmente a diversos contenidos matemáticos, configurando modos recurrentes de acceso y participación dentro de la actividad matemática escolar. Este resultado es consistente con estudios que han mostrado que las normas discursivas del aula de matemáticas suelen privilegiar formas de interacción centradas en el docente y en la validación institucional del conocimiento matemático (Sfard, 2008; Planas, 2018).

El profesorado destaca la importancia de la motivación del alumnado, el trabajo colaborativo y la comprensión conceptual de las matemáticas, así como la influencia de factores emocionales en el aprendizaje. Estas interpretaciones reflejan concepciones de la enseñanza que valoran la participación y el apoyo entre estudiantes. Sin embargo, al contrastar estas perspectivas con las dinámicas observadas en el aula, se identifican ciertas tensiones entre las concepciones expresadas por los docentes y la organización efectiva del discurso matemático escolar.

Estas tensiones pueden entenderse en relación con las formas históricamente estabilizadas de organización del conocimiento matemático escolar. El discurso matemático escolar se configura a partir de prácticas institucionalizadas de producción, validación y circulación del conocimiento, que pueden reproducir mecanismos de exclusión asociados a características como la atomización del contenido, la autorreferencia o la hegemonía del saber matemático formal (Cantoral, 2013). En este contexto, incluso cuando los docentes expresan concepciones orientadas hacia la comprensión o la colaboración, las dinámicas discursivas del aula pueden continuar organizándose a partir de estructuras que concentran la regulación y la legitimación del conocimiento en la figura docente.

Los resultados sugieren que la relación entre el dominio afectivo del profesorado y las dinámicas discursivas del aula no puede comprenderse únicamente a partir de las creencias o disposiciones declaradas por los docentes, sino que debe analizarse también en relación con las configuraciones discursivas e institucionales que estructuran la enseñanza de las matemáticas en contextos escolares concretos (Gómez y Pinto, en prensa).

Referencias

Bandura, A. (1997). *Self-efficacy: The exercise of control*. Freeman.

Beisly, A. y Ross, H. (2026). Draw Yourself Learning Math: How Drawings Reveal Multifaceted Identity in Children and Preservice Teachers. *Journal of Research in Childhood Education*, 1–25. https://doi.org/10.1080/02568543.2026.2658708

Cantoral, R. (2013). *Teoría socioepistemológica de la matemática educativa: Estudios sobre construcción social del conocimiento matemático*. Gedisa.

Cantoral, R., Farfán, R. M., Cordero, F., Alanís, J. A., Rodríguez, R. A. y Garza, A. (2005). *Desarrollo del pensamiento matemático*. Trillas.

Cantoral, R., Farfán, R. M., Lezama, J. y Martínez-Sierra, G. (2014). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 17*(1), 83–102. http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33509905

Cantoral, R., Montiel, G. y Reyes-Gasperini, D. (2015). Análisis del discurso matemático escolar en los libros de texto, una mirada desde la teoría socioepistemológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, (8), 9–28. https://doi.org/10.35763/aiem.v1i8.123

Di Martino, P. y Zan, R. (2010). "Me and maths": Towards a definition of attitude grounded on students' narratives. *Journal of Mathematics Teacher Education, 13*, 27–48. https://doi.org/10.1007/s10857-009-9134-z

Edmonds, S. (2009). *Video analysis and qualitative research*. Routledge.

Ernest, P. (1989). The knowledge, beliefs and attitudes of the mathematics teacher: A model. *Journal of Education for Teaching, 15*(1), 13–33. https://doi.org/10.1080/0260747890150102

Ernest, P. (1991). *The philosophy of mathematics education*. Falmer Press.

García-González, M. y Martínez-Sierra, G. (2016). Emociones en profesores de matemáticas: un estudio exploratorio. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 247-252). SEIEM.

Gómez, O. y Pinto, J. (en prensa). A Three-Dimensional Pyramid Model of Gendered Exclusion in Rural School Mathematical Discourse. *International Journal of Science and Mathematics Education*.

Hannula, M. S. (2012). Exploring new dimensions of mathematics-related affect: Embodied and social theories. *Research in Mathematics Education, 14*(2), 137–161. https://doi.org/10.1080/14794802.2012.694281

Marbán, J. M., Palacios, A. y Maroto, A. (2020). Desarrollo del dominio afectivo matemático en la formación inicial de maestros de primaria. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *18*, 73–86. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i18.286

McLeod, D. B. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 575–596). Macmillan.

Montiel, G. y Buendía, G. (2012). *El discurso matemático escolar y la exclusión*. Díaz de Santos.

Philipp, R. A. (2007). Mathematics teachers' beliefs and affect. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 257–315). Information Age Publishing.

Planas, N. (2018). Language as resource: A key notion for understanding the complexity of mathematics learning. *Educational Studies in Mathematics, 98*(3), 215–229. https://doi.org/10.1007/s10649-018-9810-y

Rodríguez-Barreto, C. y García-Alonso, I. (2025). Análisis del dominio afectivo en la SEIEM: tendencias y retos. In M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán y I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. 381–388). SEIEM.

Romero-García, C., Manzanal Martínez, A. I. y Palacios Ortega, A. (2023). Impacto del proceso de formación del maestro en su afectividad hacia las matemáticas. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *24*, 93–110. https://doi.org/10.35763/aiem24.4418

Severiche Mendoza, C. A. y González Gutiérrez, N. R. (2025). Mathematical beliefs and conceptions and their relationship to the teaching practices of elementary school teachers. *Pedagogical Constellations*, *4*(2), 727-751. https://doi.org/10.69821/constellations.v4i2.147

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge University Press.

Skovsmose, O. (2005). *Travelling through education: Uncertainty, mathematics, responsibility*. Sense Publishers.

Vesga-Bravo, G. y Losada, M. (2017). Creencias epistemológicas sobre las matemáticas en docentes de educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 20*(1), 45–67. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=724079928003

ANÁLISIS DE ARGUMENTOS Y LÉXICO ASOCIADOS A LA ALEATORIEDAD EN FUTUROS DOCENTES DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Analysis of arguments and vocabulary related to uncertainty among pre-service Primary Education teachers

Izagirre, A.[a] y Rodríguez-Alveal, F.[b]

[a]Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea (EHU), [b]Universidad del Bío-Bío

Resumen

La presente investigación tiene como propósito analizar los argumentos y el léxico del futuro profesorado de Educación Primaria acerca de la noción de aleatoriedad presente en una tarea de aula. La investigación sigue un enfoque metodológico cualitativo, donde se realiza un análisis de contenido de los argumentos entregados por 60 futuros docentes de Educación Primaria, distribuidos en 15 grupos y seleccionados mediante un muestreo no probabilístico. El futuro profesorado muestra niveles argumentativos medios al inicio que, tras la experimentación, se concentran en niveles superiores afines a la alfabetización estadística. Asimismo, relacionan el concepto aleatoriedad con nociones afines a la probabilidad intuitiva, como de conceptos coloquiales. En conclusión, el futuro profesorado de este estudio ha demostrado que la actividad práctica ha permitido adquirir conocimientos y habilidades afines a la alfabetización probabilística.

Palabras clave: *Aleatoriedad, futuro profesorado de Educación Primaria, probabilidad, estadística, léxico.*

Abstract

This research aims to analyse the arguments and lexicon of pre-service Primary Education teachers when discussing the concept of randomness in a contextualised task. The research follows a qualitative methodological approach, involving a content analysis of the arguments provided by 60 pre-service Primary Education teachers, distributed into 15 groups and selected through a non-probabilistic sampling. Initially, pre-service teachers show a medium level of argumentative skill. However, after carrying out the experiment these skills develop into higher levels of statistical literacy. Similarly, they relate the concept of randomness with notions related to intuitive probability and colloquial concepts. In conclusion, the pre-service primary education teachers in this study have shown that the practical activity have helped them develop probabilistic literacy knowledge and skills.

Keywords: *Randomness, pre-service primary education teachers, probability, statistics, lexicon.*

INTRODUCCIÓN

La aleatoriedad constituye una noción fundamental para comprender fenómenos caracterizados por la incertidumbre y variabilidad, tanto en probabilidad como en estadística. Desde la educación de la probabilidad, la aleatoriedad se relaciona con la imposibilidad de predecir resultados individuales en un experimento aleatorio, aunque sea posible reconocer ciertas regularidades globales en secuencias de resultados (Batanero et al., 2012). La ciudadanía interactúa constantemente con la aleatoriedad en la vida cotidiana. Por ejemplo, la siguiente canción que se escuchará en el modo aleatorio de una lista de reproducción o el número de estudiantes que llegarán tarde a clase. No obstante, como mencionan Renelle et al. (2021) "los seres humanos en general tienen una comprensión deficiente de la aleatoriedad" (p. 56), dado que aplican ideas erróneas acerca de este concepto. Cabe destacar que en

Izagirre, A. y Rodríguez-Alveal, F. (2026). Análisis de argumentos y léxico asociados a la aleatoriedad en futuros docentes de Educación Primaria. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (pp. 314-321). SEIEM.

la última década el concepto de aleatoriedad se ha introducido tempranamente en el currículo escolar de varios países, así como en los libros de texto de Educación Primaria (Rodríguez-Alveal et al., 2023). Sin embargo, algunos estudios han mostrado que en determinados libros de texto los conceptos de aleatoriedad y equiprobabilidad se presentan de manera equivalentes (Zisimo y Tasos, 2021), lo que puede dificultar la comprensión de los fenómenos aleatorios. Una explicación plausible es que la equiprobabilidad es una de las condiciones para hacer uso de la Regla de Laplace (Triola, 2018). Por este motivo, es primordial tanto la formación inicial como continua del profesorado para garantizar una adecuada enseñanza de la probabilidad (Batanero et al., 2012) como de sus nociones fundamentales, en particular, el relacionado con la aleatoriedad. En esta misma línea, Alsina (2019) menciona que la enseñanza de estos contenidos "es un reto para muchos docentes que no han recibido en su formación inicial los conocimientos didácticos y disciplinares necesarios para poder llevar a cabo una enseñanza eficaz en el aula" (p.1).

Acorde a lo mencionado anteriormente, el presente estudio tuvo como propósito analizar los argumentos y léxico utilizado por futuros docentes de Educación Primaria al interpretar una situación asociada a la noción de aleatoriedad. Concretamente: 1) Caracterizar los niveles argumentativos presentes en las repuestas del futuro profesorado, acorde a la taxonomía de Watson y Callingham (2003), antes y después de llevar a cabo el juego, y comparar los resultados; 2) Identificar el léxico probabilístico y estadístico empleado por el futuro profesorado para describir e interpretar la situación aleatoria planteada.

FUNDAMENTOS DE LA INVESTIGACIÓN

Aleatoriedad y alfabetización probabilística

La enseñanza de la probabilidad en el sistema escolar debe propender al desarrollo de una alfabetización probabilística, la cual se concibe como la capacidad de leer, interpretar y evaluar información de la vida diaria mediante el uso del lenguaje estadístico y probabilístico (Ben-Zvi y Garfield, 2004; Gal, 2002). Asimismo, esta alfabetización implica comprender símbolos, vocabulario y conceptos asociados a la estadística y la probabilidad para desenvolverse críticamente en contextos de la vida cotidiana (Gómez-Torres et al., 2015). En este contexto, la noción de aleatoriedad constituye una idea fundamental para comprender fenómenos caracterizados por la incertidumbre y variabilidad. Desde la educación probabilística, la aleatoriedad se relaciona con la imposibilidad de predecir resultados individuales en un experimento aleatorio, aunque sea posible identificar ciertas regularidades globales en secuencias de resultados (Batanero et al., 2012). De este modo, comprender la aleatoriedad implica reconocer la variabilidad inherente a los datos y coordinar interpretaciones intuitivas y frecuenciales de la probabilidad, evitando reducir el fenómeno aleatorio únicamente a la equiprobabilidad o a la ausencia de patrones aparentes.

En esta línea, el informe GAISE (2016) destaca que una buena comprensión de los conceptos probabilísticos y estadísticos favorece la capacidad del alumnado para interpretar situaciones de incertidumbre y argumentar a partir de datos. Asimismo, el lenguaje utilizado para describir fenómenos aleatorios desempeña un papel relevante en la construcción de significados probabilísticos. Kaplan et al. (2010) señalan que el vocabulario estadístico y probabilístico suele presentar ambigüedades para el alumnado, especialmente cuando se emplean términos coloquiales con significados diferentes en contextos cotidianos y académicos. En esta misma línea, Rodríguez-Alveal et al. (2024) observan que futuros docentes relacionan el concepto de aleatoriedad con términos como suerte, posibilidad, imprevisto y azar son las que tienen mayor peso semántico, evidenciando la presencia de significados intuitivos asociados a la probabilidad.

La noción de aleatoriedad entre el futuro profesorado

La comprensión de la aleatoriedad constituye una dificultad frecuente en el futuro profesorado, tal como evidencian Batanero et al. (2012) y, más recientemente, Hourigan y Leavy (2020) e Ingram (2024). Las ideas erróneas más comunes son: i) la falacia del jugador, es decir, pensar que resultados pasados afectan la probabilidad de los siguientes eventos sin comprender el concepto de independencia entre eventos; ii) la ley de los pequeños números, que surge al pensar que una muestra pequeña representa la población, sin considerar la alta variabilidad presente en experimentos reducidos; iii) la falacia de la conjunción, basada en pensar que dos eventos en conjunto tienen más probabilidad de ocurrir que sólo uno de ellos (Ingram, 2024; Hourigan y Leavy, 2020; Batanero et al., 2012). Diversas investigaciones destacan que dichas dificultades pueden superarse haciendo uso de contextos cercanos para el alumnado (Rossman, 2008), ofreciendo la oportunidad de llevar a cabo experimentos con material físico o digital o intercambiando y comparando resultados de diferentes muestras (Van Dijke et al., 2019).

En esta línea, Rodríguez-alveal y Maldonado-Fuentes (2023) en un análisis de los libros de texto de Educación Primaria en Chile, entregan evidencias de que las actividades relacionadas con el concepto de aleatoriedad se ajustan parcialmente a las directrices curriculares chilenas. Dichas actividades sobre aleatoriedad se abordan mediante el uso de dispositivos físicos como dados o ruletas, lo que puede favorecer el sesgo de la equiprobabilidad (Huerta, 2020).

MÉTODO

En el estudio se hizo uso de un enfoque cualitativo (McMillan y Schumacher, 2005) mediante un análisis de contenido, que permitió indagar en la forma de pensar y argumentar del futuro profesorado cuando se enfrenta a una tarea en la que interviene la noción de aleatoriedad.

Participantes y contexto

Se consideró un muestreo intencionado por disponibilidad (McMillan y Schumacher, 2005). La muestra estuvo compuesta por 60 futuros docentes de Educación Primaria de una universidad chilena, los cuales fueron agrupados libremente en 15 grupos de trabajo con 4 integrantes.

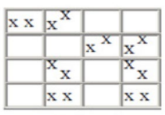
Instrumento

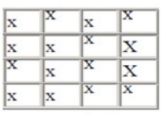
Para dar respuesta a los objetivos del estudio se utilizó la adaptación realizada por Serrano et al. (1999) a la tarea propuesta por Green (1982) asociado a una situación relacionada con un fenómeno aleatorio. La selección de esta tarea se fundamenta en que permite explorar cómo las personas participantes interpretan la variabilidad y el comportamiento de secuencias aleatorias a partir de una situación experimental sencilla y cercana. Asimismo, la actividad favorece la identificación de argumentos asociados a concepciones sobre la aleatoriedad y el uso de lenguaje probabilístico en contextos de incertidumbre.

Enunciado: Pablo realiza un juego en el que se dispone de 16 fichas numeradas del 1 al 16. Pone las fichas en una bolsa vacía. Después de mover la bolsa con fuerza para mezclar las fichas, elige una ficha con los ojos cerrados. Es la ficha con el número 7. Pablo pone una equis (x) en la casilla 7 y devuelve la ficha a la bolsa, antes de continuar el juego.

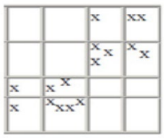
1	2	3	4
5	6	7x	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Se pidió a algunos niños que llevaran a cabo el juego de Pablo, eligiendo cada uno de ellos 16 veces una ficha de la bolsa. Los resultados obtenidos se indican a continuación.


Miguel


Luis


Jaime


María

1.- Antes de realizar el juego ¿Qué niño crees que no siguió las instrucciones del juego? Justifica.

2.- ¿Qué conceptos estadísticos y probabilísticos están presentes en la actividad realizada?

3.- Haciendo uso de una bolsa y fichas numeradas del 1 al 16, simule el juego y comente que observa.

4.- Teniendo presente los hallazgos del punto anterior ¿Qué niño hizo trampa? ¿Por qué? Justificar.

Análisis de datos

El análisis de los datos se llevó a cabo siguiendo un enfoque sistemático basado en el análisis de contenido (Bengtsson, 2016). En primer lugar, se aplicó el instrumento al futuro profesorado. En segundo lugar, se transfirieron las respuestas a una matriz de datos para facilitar su lectura y el análisis de las respuestas entregadas por el futuro profesorado de Educación Primaria. En tercer lugar, se clasificaron las respuestas acordes a la adaptación realizada por los autores de la taxonomía de Watson y Callingham (2003), ver Tabla 1, para una evaluación de la noción de aleatoriedad. Debido a que la naturaleza de la actividad no requiere el razonamiento proporcional, no se considera el nivel superior, *Crítico matemático*, definido por Watson y Callingham (2003).

Tabla 1

Niveles afines de alfabetización estadística acerca del concepto aleatoriedad

Nivel	Definición
Idiosincrático	Las respuestas reflejan creencias personales no basadas en principios estadísticos. Predomina una lectura básica de las representaciones realizadas y un reconocimiento elemental de variaciones de los datos sin proporcionar justificaciones estadísticas.
Informal	En este nivel los participantes entregan ideas intuitivas sin justificación probabilística/estadística. En la lectura de datos se privilegia el análisis cuantitativo como por ejemplo dar cuenta de la mayor frecuencia observada de los resultados (rachas), o el cálculo de ocurrencia de un suceso. Hay un reconocimiento de patrones en base a los cuales realizan predicciones intuitivas.
Inconsistente	En este nivel las ideas probabilísticas/estadísticas requeridas son más cualitativas que cuantitativas y las conclusiones pueden basarse en justificaciones insuficientes o no fundamentadas estadísticamente. Se utilizan expresiones coloquiales para referirse a la noción de aleatoriedad, como por ejemplo impredecible, azar, suerte.
Consistente no crítico	En este nivel no existe un cuestionamiento crítico de los datos entregados producto del experimento. Se realiza una descripción cualitativa donde se reconoce la variación de los datos sin entregar justificaciones fundamentadas probabilísticamente/estadísticamente, como ejemplo hacer mención a un muestreo con reposición, sin ahondar en su transformado teórico.
Crítico	En este nivel hay un uso apropiado de la terminología probabilística/estadística, como por ejemplo variación, homogeneidad, racha, aleatorio, probabilidad. Se reconoce la variación en los datos entregando justificaciones estadísticas y/o probabilísticas y además se realizan predicciones sin considerar el contexto de la situación problema.

Además, se analizó el léxico estadístico y probabilístico, identificando las palabras con mayor peso semántico en las argumentaciones de las personas participantes.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En este apartado se presenta la clasificación de los argumentos del futuro profesorado antes y después de llevar a cabo la extracción de fichas y, también, la caracterización del léxico utilizado.

Resultados preexperimentales

Los argumentos entregados por el futuro profesorado de Educación Primaria se clasificaron acorde a la Taxonomía de Watson y Callingham (2003), como se muestra en la Tabla 2.

Tabla 2

Clasificación de los argumentos preexperimentales del futuro profesorado

Nivel de razonamiento	Frecuencia	Porcentaje
Idiosincrático	3	20
Informal	2	13,33
Inconsistente	5	33,33
Consistente no crítico	5	33,33
Crítico	0	0
Total	15	100

El 20% de los grupos se encuentra en la categoría *Idiosincrático* (3/15), es decir, los comentarios realizados no proporcionan justificaciones estadísticas, como se muestra en las siguientes citas:

> Grupo 5: El niño que no siguió las instrucciones fue Luis, porque al momento de sacar una ficha la dejó fuera de la bolsa, siendo que en las instrucciones se especifica que se debe devolver.

> Grupo 12: El que no siguió las instrucciones del juego fue Luis, ya que Luis al parecer no devolvía el número sacado nuevamente a la bolsa, sino que solo lo sacaba y lo dejaba de lado.

En dichas citas predomina una descripción de la actividad acorde a lo mencionado en el enunciado. En el siguiente nivel, denominado *Informal*, se encuentra el 13,33% de los grupos (2/15) y, en este caso, el alumnado aporta el cálculo de la probabilidad de los sucesos, pero sin una justificación sólida:

> Grupo 1: Creemos que el niño que no siguió las instrucciones del juego, que en este caso sería cerrar los ojos es Luis, ya que cada número tiene la probabilidad de salir 1/16 veces, y como se ve en la imagen obtuvo todos los números sin repetir.

> Grupo 7: Miguel y Luis no siguieron las instrucciones porque Miguel tiene dos veces marcado cada número y Luis tiene todos los números de la tabla marcados y sin repetir cada uno.

En el nivel *Inconsistente*, se clasifica el 33,33% de los grupos (5/15) y encontramos justificaciones cualitativas no fundamentadas estadísticamente como muestran los siguientes ejemplos:

> Grupo 6: Quien no siguió las instrucciones del juego fue Luis debido a que los resultados obtenidos no son coherentes con el juego de azar y en base de eso creemos dos hipótesis:1) Hizo trampa, 2) No siguió las instrucciones del juego y no devolvió las fichas a la bolsa.

> Grupo 8: Luis no siguió las instrucciones del juego, ya que es probable que cada ficha que sacó no la devolvió de nuevo a la bolsa y por eso cada n.º de ficha le salió 1 vez.

El siguiente nivel, *Consistente no crítico*, es el nivel más alto alcanzado por el futuro profesorado antes de realizar el experimento (5/15; 33,33%). Encontramos justificaciones más elaboradas, aunque con vocabulario informal y se comienza a apreciar la variabilidad:

> Grupo 4: Comprobamos que el niño que no siguió correctamente las instrucciones del juego e hizo trampa fue Luis, puesto que sus casillas tenían una x. En cambio, las nuestras tenían más x en algunas casillas y en otras ninguna demostrando así la efectividad de este juego al azar por lo cual es irreal obtener resultados como los de Luis que son tan uniformes y parejos a comparación de los nuestros que son más realistas al jugar juegos de azar

debido a la variabilidad. Solo 3 de los 4 niños jugó de la manera correcta obteniendo resultados similares a los nuestros.

Grupo 10: Se puede asumir que Miguel y Luis hicieron trampa debido a lo inverosímil de sus respuestas, ya que tener resultados tan parejos en un juego de azar es muy poco probable, […] quizá Luis no comprendió la actividad y cada que sacaba una ficha esta lo dejaba fuera.

En estos argumentos de mayor nivel se identifica la variabilidad. Sin embargo, el futuro profesorado no comprende este concepto, ya que, considera que en los resultados presentados por Luis no hay variabilidad y utiliza de forma errónea los términos uniforme o parejo. En definitiva, al igual que Watson y Callingham (2003), encontramos argumentos de nivel medio, es decir, razonamientos que superan interpretaciones básicas, aunque no alcanzan el nivel de razonamiento superior.

Resultados postexperimentales

La Tabla 3 muestra una evolución hacia argumentos de mayor complejidad tras la realización de la actividad experimental, a excepción del Grupo 6, cuyas respuestas antes de la experimentación evidenciaban una argumentación más cualitativa incorporando el término azar para referirse a la aleatoriedad de la situación planteada, tal como se mostró en el apartado anterior. Sin embargo, tras llevar a cabo la extracción de fichas aporta un argumento centrado en las frecuencias absolutas:

Grupo 6: Ningún cuadro obtuvo los 16 números una sola vez. Al realizar las 5 repeticiones de 16 veces, lograron salir todos los números del 1 al 16. Mientras más repeticiones, más probabilidad hay de que salgan todos los números.

Además, tras la lectura de la última oración, no queda claro si asumen que se trata de un experimento sin reposición o si no conciben la idea de independencia entre las extracciones.

Tabla 3

Tabla de doble entrada con los resultados preexperimento y postexperimento

Pre \ Post	1. Idiosin.	2. Informal	3.Inconsistente	4. Con. no crí.	5. Crítico	Total (Pre)
Idiosincrático		***				3
Informal					**	2
Inconsistente		*		***	*	5
Con. no crí.				***	**	5
Crítico						0
Total (Post)	0	4	0	6	5	15

La realización del experimento permitió la presencia de una terminología probabilística y el reconocimiento de la variación. En consecuencia, el 33,33% de los grupos alcanzan el nivel *Crítico*:

Grupo 1: Luis hizo trampa ya que sus resultados son homogéneos y no hay variabilidad. Cada vez que se extrae una ficha de la población donde encontramos números del 1 al 16, siendo casi imposible que no se repitan los números ya que cuando se saca la ficha se vuelve a introducir.

Grupo 2: Luis es el niño que hace trampa ya que no se puede observar aleatoriedad ni variabilidad en sus resultados; por ello resulta imposible o casi imposible sacar todas las fichas del 1 al 16 una vez sin que al menos una se repita. Concluimos que pudo haber hecho trampa al extraer fichas y no devolverlas a la bolsa o las seleccionó y extrajo de manera consciente, debido a que la agrupación es homogénea en demasía, lo cual evita que exista una dispersión de los datos.

En estas justificaciones se observa una confusión respecto a la variabilidad de los datos, ya que el futuro profesorado interpreta erróneamente que en los resultados de Luis no hay variabilidad. Para ello, utilizan los términos uniforme, parejo u homogéneo, asociándolas a una ausencia de dispersión.

Léxico estadístico

El léxico probabilístico juega un rol importante en la transmisión de conocimientos (Chance, 2002) y es una de las habilidades asociadas a la alfabetización probabilística. En este contexto, el 33,33% de los 15 grupos relaciona el concepto de aleatoriedad con probabilidad lo cual es coherente a lo mencionado por Rodríguez-Alveal et al. (2024). Asimismo, relacionan la noción de aleatoriedad con conceptos afines a la probabilidad intuitiva (Batanero, 2005) como: posible, casi imposible, imposible, improbable. En esta misma línea, el futuro profesorado menciona conceptos coloquiales para referirse a la noción de aleatoriedad como mayor frecuencia, salieron todos, patrones, no son similares. Del mismo modo, el término posibilidad está presente en las palabras mencionadas por el futuro profesorado, lo cual está en la línea con lo expresado por Kaplan et al. (2010).

CONCLUSIONES

Los resultados preexperimentales coinciden con Watson y Callingham (2003), quienes señalan que los argumentos del alumnado se concentran en los niveles medios. Sin embargo, los argumentos postexperimentales se concentran en los niveles superiores. Estos resultados concuerdan con las recomendaciones de Van Dijke-Droogers et al. (2019), quienes destacan que la manipulación de materiales físicos favorece la comprensión de conceptos asociados a la alfabetización probabilística, como la aleatoriedad y la variabilidad. En esta línea, el futuro profesorado proporciona argumentos estadísticos y probabilísticos más competentes tras la realización del experimento. Concretamente, en los argumentos postexperimentales el alumnado, por un lado, referencia las frecuencias de los resultados, al igual que mencionaba Green (1982), y, por otro, menciona la variabilidad de los resultados, aunque en ocasiones mostrando una idea equivocada que conviene trabajar en el aula.

En relación con el léxico utilizado por el futuro profesorado para responder a las interrogantes planteadas, se observa que relaciona la noción de aleatoriedad con el azar, como así también con conceptos relacionados con la probabilidad intuitiva (Batanero, 2005), cuestión que también han reportado Rodríguez-Alveal et al. (2024) en poblaciones similares. Dichos resultados, invitan a los formadores del futuro profesorado a profundizar en la noción de aleatoriedad y considerar actividades prácticas que permitan explorar dicho concepto con el futuro profesorado de Educación Primaria.

Finalmente, cabe destacar que estos resultados deben interpretarse desde el carácter exploratorio del estudio, siendo la muestra intencionada y una única actividad. En consecuencia, las conclusiones no pretenden ser generalizables, sino aportar evidencias sobre cómo el futuro profesorado interpreta situaciones asociadas a la aleatoriedad y utiliza lenguaje probabilístico para argumentar sobre ellas.

Agradecimientos

Trabajo parcialmente financiado por el grupo GIU21/031 de la EHU.

Referencias

Alsina, A. (2019). La estadística y la probabilidad en educación infantil: un itinerario de enseñanza. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística.* https://www.ugr.es/~fqm126/civeest.html

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 8*(3), 247-263.

Batanero, C., Gómez, E., Serrano, L. y Contreras, J.M. (2012). Comprensión de la aleatoriedad por futuros profesores de Educación Primaria. *Journal of Research in Mathematics Education, 1*(3), 222-245. https://doi.org/10.4471/redimat.2012.13

Bengtsson, M. (2016). How to plan and perform a qualitative study using content analysis. *NursingPlus Open*, *2*, 8-14. https://doi.org/10.1016/j.npls.2016.01.001

Ben-Zvi, D. y Garfield, J. (2004). Statistical literacy, reasoning, and thinking: Goals, definitions, and challenges. En D. Ben-Zvi, y J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 3-15). Kluwer. https://doi.org/10.1007/1-4020-2278-6_1

GAISE. (2016). *Guidelines for assessment and instruction in statistics education college report 2016*. ASA.

Gal, I. (2002). Adults' Statistical literacy: Meanings, components, responsibilities. *International Statistical Review*, *70*(1), 1-25. https://doi.org/10.1111/j.1751-5823.2002.tb00336.x

Chance, B. (2002). Components of Statistical Thinking and Implications for Instruction and Assessment. *Journal of Statistics Education*, *10*(3). https://doi.org/10.1080/10691898.2002.11910677

Gómez-Torres, E., Contreras, J. M. y Batanero, C. (2015). Significados de la probabilidad en libros de texto para Educación Primaria en Andalucía. En C. Fernandez, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 73-87). SEIEM. http://hdl.handle.net/10045/51378

Green, D.R. (1982). *Probability concepts in school pupils aged 11-16 years* [Tesis doctoral no publicada]. Loughborough University of Technology.

Hourigan, M. y Leavy, A.M. (2020). Pre-service teachers' understanding of probabilistic fairness: analysis of decisions around task design. *International journal of mathematical education in science and technology, 51*(7), 997-1019. https://doi.org/10.1080/0020739X.2019.1648891

Huerta, P. (2020). Hipótesis y conjeturas en el desarrollo del pensamiento estocástico: Retos para su enseñanza y en la formación de profesores. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *23*(1), 79-102, https://doi.org/10.12802/relime.20.2313

Ingram, J. (2024). Randomness and probability: exploring student teachers' conception. *Mathematical thinking and learning, 26*(1), 1-19. https://doi.org/10.1080/10986065.2021.2016029

Kaplan, J., Fisher, D. G. y Rogness, N. T. (2010). Lexical ambiguity in statistics: How students use and define the words: Association, average, confidence, random and spread. *Journal of Statistics Education, 18*(2). https://doi.org/10.1080/10691898.2010.11889491

McMillan, J. H. y Schumacher, S. (2005). *Investigación educativa*. Pearson Addison.

Renelle, A., Budgett, S. y Jones, R. (2021). New Zealand teachers' generation problem misconceptions. *Teaching Statistics*, *43,* 56–61. https://doi.org/10.1111/test.12248

Rodríguez-Alveal, F. y Maldonado-Fuentes, A. C. (2023). Tipología de las preguntas sobre variabilidad en los textos escolares y su relación con la alfabetización y pensamiento estadístico. *Uniciencia, 37*(1), 65-83. https://doi.org/10.15359/ru.37-1.4

Rodríguez-Alveal, F., Maldonado-Fuentes, A. C. y Díaz-Levicoy, D. (2024). Lexical ambiguities in statistics declared by in training and in-service teachers. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 20*(4), em2422. https://doi.org/10.29333/ejmste/14359

Rossman, A. J. (2008). Reasoning about informal statistical inference: One statistician's view. *Statistics Education Research Journal, 7*(2), 5-19.

Serrano, L., Batanero, C. y Cañizares, M.J. (1999). Concepciones sobre distribuciones aleatorias planas en alumnos de secundaria. *Epsilon, 43-44*, 149-162.

Triola, M. (2018). *Estadística Aplicada*. Pearson Education.

Van Dijke-Droogers, M., Drijvers, P. y Bakker, A. (2019). Repeated sampling with a black box to make informal statistical inference accessible. *Mathematical Thinking and Learning, 21*(2), 1-23. https://doi.org/10.1080/10986065.2019.1617025

Watson, J. y Callinham, R. (2003). Statistical literacy: a complex hierarchical construct. *Statistical Education Research Journal, 2*(2), 3-46.

Zisimos B. y Tasos P. (2021). Understanding 15-year-old students' conceptions of randomness through their 'potential worlds': A qualitative analysis. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 52*(2), 237-258. https://doi.org/10.1080/0020739X.2019.1676928

PENSAMIENTO FUNCIONAL EN FUTUROS MAESTROS DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Functional thinking in future primary school teachers

Jiménez-Fernández, A. I., Torres, M. D. y Castro-Rodríguez, E.

Universidad de Granada

Resumen

En este estudio, describimos las regularidades y generalizaciones evidenciadas por un grupo de futuros maestros de primaria al resolver una tarea en un contexto funcional con representaciones tabular y gráfica. Los participantes fueron 46 estudiantes de segundo curso del Grado en Educación Primaria. Aplicamos una tarea basada en la función (y=x+4), y realizamos un análisis de contenido de las respuestas, centrándonos en las formas de expresar la regularidad y la generalización por los participantes. Los resultados muestran que, aunque la mayoría de los futuros maestros completan con éxito la tabla y el gráfico, encuentran dificultades para expresar la regularidad funcional de manera explícita, mediante la expresión simbólica o la continuidad en el gráfico. Predominan las estrategias basadas en la covariación y en la correspondencia.

Palabras clave: *educación primaria, generalización, maestros en formación inicial, pensamiento funcional, representación gráfica.*

Abstract

In this study, we describe the regularities and generalisations identified by a group of pre-service teachers whilst solving a task in a functional context using tabular and graphical representations. The participants were 46 second-year undergraduate students in Primary Education. We set a task based on the function (y=x+4) and carried out a content analysis of the responses, focusing on the ways in which the participants expressed regularity and generalisation. The results show that, although most pre-service teachers successfully completed the table and graph, they encountered difficulties in expressing the functional regularity explicitly, whether through symbolic expression or continuity in the graph. Strategies based on covariation and correspondence predominate.

Keywords: *functional thinking, generalisation, graphical representation, pre-service primary teachers, primary education.*

INTRODUCCION

El pensamiento algebraico es una línea actual de investigación a nivel internacional (e. g., Ellis y Ozgür, 2024; Narváez, et al., 2026). La necesidad de introducir el álgebra en las primeras etapas educativas ha sido resaltada desde hace décadas por los *"Principles and standards for school mathematics"* (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000). En este estudio nos centramos en el pensamiento funcional que ha sido considerado dentro de la corriente *early algebra* como una vía relevante hacia el aprendizaje del álgebra en los primeros cursos de educación primaria (e. g., Blanton y Kaput, 2011; Carraher y Schliemann, 2007). El actual currículo de educación primaria en España recoge el sentido algebraico como uno de los ejes fundamentales en el que se incluye el "reconocimiento de patrones y las relaciones entre variables, la expresión de regularidades o la modelización de situaciones con expresiones simbólicas" (Ministerio de Educación y Formación Profesional [MEFP], 2022, p. 24486). La inclusión del pensamiento funcional en el currículo conlleva que los maestros necesiten un conocimiento específico para impartir dicho tópico, es decir, han de

Jiménez-Fernández, A. I., Torres, M. D. y Castro-Rodríguez, E. (2026). Pensamiento funcional en maestros de educación primaria. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (pp. 322-329). SEIEM.

estar preparados para promover el desarrollo del pensamiento funcional en la etapa de primaria. Para favorecer el pensamiento funcional en educación primaria, Kaput y colaboradores (Blanton et al., 2011; Kaput, 2008) proponen cuatro prácticas algebraicas en el aula: (a) generalizar, (b) representar, (c) razonar y (d) justificar. Aquí atendemos a la generalización y su representación describiendo las regularidades que evidencia un grupo de futuros maestros de educación primaria al resolver una tarea de contexto funcional donde intervienen las representaciones tabular y gráfica.

Estudios previos con futuros maestros de primaria se han centrado en tareas relativas al álgebra temprana (e. g., Callejo y Zapatera, 2017; Oliveira et al., 2021). Callejo y Zapatera (2017) analizaron cómo 38 futuros maestros identificaban e interpretaban la comprensión de alumnos de primaria sobre la generalización de patrones lineales (crecimiento aditivo). Sus resultados revelaron que a los futuros docentes les resultaba más fácil identificar elementos matemáticos (como estructuras espaciales o numéricas) que interpretarlos pedagógicamente para inferir el nivel de comprensión del estudiante de primaria. Por su parte, Oliveira et al. (2021) examinaron las respuestas de 164 futuros maestros de primaria españoles y portugueses ante tareas de generalización donde interpretaron y relacionaron variables y representaciones. Los resultados mostraron que los futuros maestros portugueses usaron estrategias de diferencia recursiva (sumar término a término), mientras que los españoles prefirieron un enfoque más visual de correspondencia (relacionar la figura con su posición basándose en la imagen). Asimismo, Pincheira y Alsina (2024) aplicaron a 10 futuros maestros una tarea de funciones con sillas-mesas, pidiéndole a estos la regla general justificada. La mayoría de los participantes lograron escribir correctamente la regla general para encontrar el número de sillas para cualquier número de mesas y justificar su respuesta, es decir, los participantes demostraron que podían identificar la relación funcional entre las variables (sillas y mesas). En cuanto al diseño de tareas, Zapatera y Quevedo (2021) hallaron que, al pedir a 106 futuros maestros que creasen actividades dirigidas a alumnos de primaria para promover el pensamiento algebraico, la mayoría mostró una aritmetización de las situaciones. Los participantes tendieron a crear tareas con una única solución numérica, eliminando así el potencial para desarrollar el pensamiento funcional.

A pesar de que existen investigaciones con maestros en formación relativas al álgebra temprana, estas se han centrado en las estrategias de resolución, la formulación de reglas generales o la dificultad para transcender hacia lo numérico e interpretar la generalización, pero no han profundizado en las regularidades que estos evidencian y generalizan, ni en las representaciones propias del contexto funcional como la tabular o la gráfica. Esto es relevante porque las regularidades constituyen el núcleo del pensamiento funcional y determinan las generalizaciones, influyendo también en por ejemplo la capacidad para diseñar tareas en primaria. Por ello, nos proponemos en este trabajo describir las regularidades y generalizaciones evidenciadas por un grupo de futuros maestros de educación primaria al resolver una tarea en un contexto funcional con representaciones tabular y gráfica.

MARCO TEÓRICO

Pensamiento funcional y generalización

El pensamiento funcional abarca la comprensión y uso de relaciones entre cantidades covariables, representar y justificar estas relaciones de múltiples maneras, y razonar con fluidez con estas representaciones generalizadas para comprender y predecir el comportamiento funcional (Blanton et al., 2018). La generalización es una actividad clave dentro del pensamiento funcional. La actividad de generalizar implica identificar elementos comunes en todos los casos, identificar una regularidad; extender el razonamiento más allá del rango de origen, y derivar resultados más amplios de casos particulares (Blanton et al., 2018).

Desde unos pocos casos particulares puede evidenciarse una regularidad de diferentes formas que puede generalizarse. El estudio de las regularidades es fundamental ya que relacionan las variables existentes en una situación (Torres et al., 2018). Dentro de las regularidades que se pueden identificar se encuentran la covariación (se basa en analizar cómo dos cantidades varían simultáneamente, por

ejemplo, «cuando x aumenta en uno, y aumenta en dos»), la recursividad (o patrón recursivo consiste en identificar una variación o patrón dentro de una secuencia de valores de una sola variable) y la correspondencia (se basa en identificar una correlación entre pares de las variables (x e y), por ejemplo, «y es 2 veces x», es decir, dar la regla general) (Smith, 2008).

Representaciones

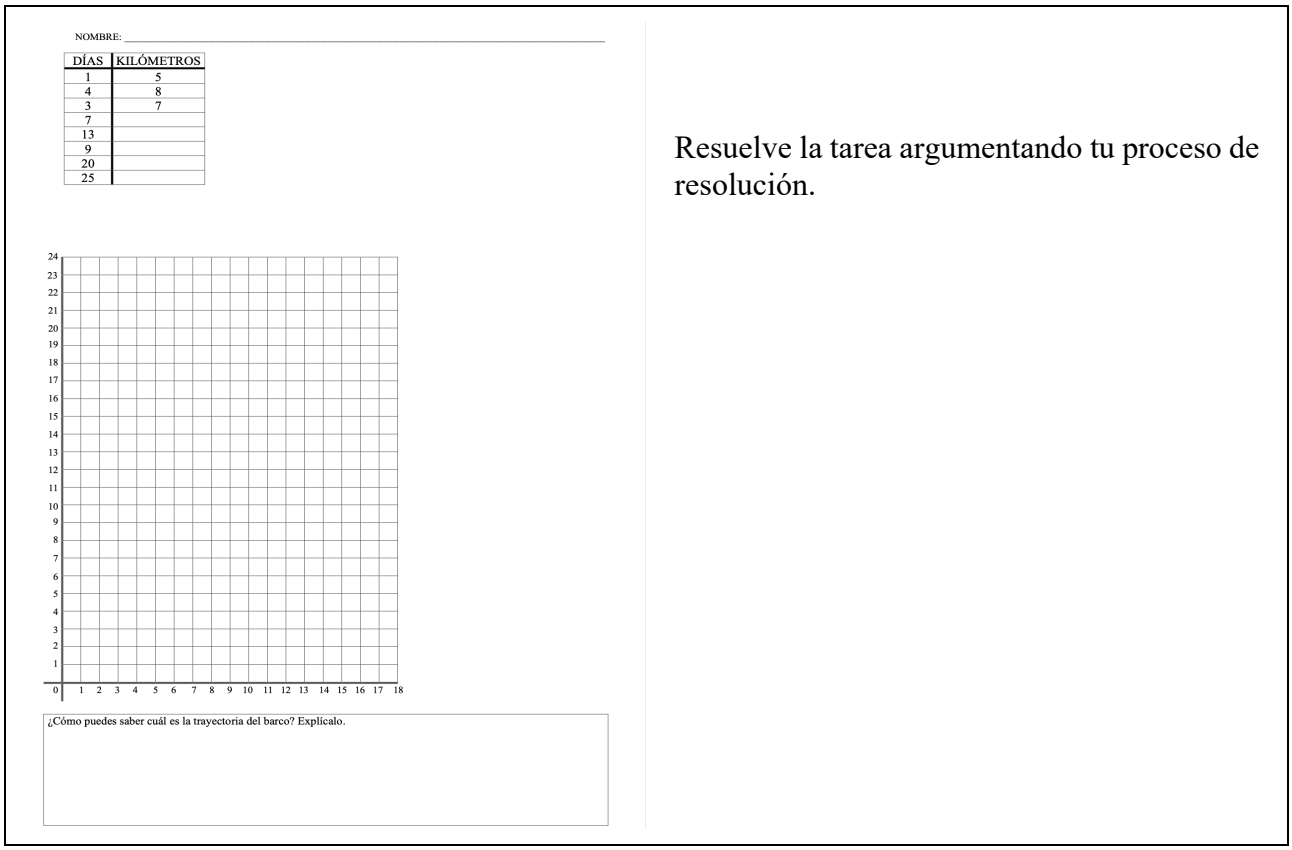
El pensamiento funcional incluye la generalización de las regularidades o relaciones entre cantidades que covarían, así como la expresión de estas regularidades utilizando diferentes representaciones, como el lenguaje natural, símbolos, tablas o gráficos (Blanton et al., 2011). Las representaciones matemáticas son aquellas herramientas que hacen presentes los conceptos y procedimientos matemáticos en el que los estudiantes registran y comunican su conocimiento sobre las matemáticas (Rico, 2009). Desde la perspectiva de Duval (1999), los registros de representación y sus transformaciones son clave para el pensamiento matemático. En nuestro estudio nos centramos en la traducción entre representaciones al pasar de la tabla al gráfico y de ambos, a la expresión simbólica. En concreto, trabajamos con dos tipos de representaciones: la tabular y la gráfica. Estas representaciones nos permiten organizar y visualizar la información, además de favorecer la identificación de regularidades y relacionar los datos expresados numéricamente en la tabla con su representación en el gráfico.

Las tablas de valores son herramientas para organizar y explorar regularidades funcionales en los primeros cursos de educación primaria (Torres et al., 2022). En la representación gráfica, el eje X muestra los valores de la variable independiente y el eje Y los valores de la variable dependiente. Las representaciones en el contexto de las funciones nos permiten observar diferentes maneras de expresar las regularidades. En este sentido, Cañadas et al. (2024) estudiaron cómo estudiantes de 3º y 4º de primaria construyeron e interpretaron gráficos cartesianos, mostrando que son capaces de inferir tendencias y generalizar desde la representación gráfica. En esta línea, Radford (2025) documenta cómo niños de 6º de primaria conceptualizan la covariación en gráficos cartesianos, evolucionando desde interpretaciones basadas en la percepción visual (donde ven el gráfico como un "mapa de puntos" del recorrido) hacia la comprensión de relaciones continuas entre variables (tiempo-distancia).

MÉTODO

Llevamos a cabo un estudio de carácter cualitativo y descriptivo. Al comienzo de curso, en la primera sesión, aplicamos una tarea a 46 estudiantes de la asignatura Enseñanza y Aprendizaje de la Matemática en Educación Primaria, del segundo curso del Grado de Educación Primaria de la Universidad de Granada. Anteriormente, los estudiantes han cursado una asignatura centrada en el desarrollo del conocimiento del contenido matemático (números y álgebra, geometría, medida, estadística y probabilidad). La tarea propuesta fue la siguiente:

> En un libro de educación primaria aparece la siguiente tarea:
>
> Bluey y Bingo se van de viaje en un crucero por el mar durante muchos días. Ellas están muy contentas por lo que preparan sus maletas. Llega el día de subirse a bordo del barco llamado "La brisa azul". El viento soplaba y movía las velas del barco mientras cruzaban el océano. El barco se movía tan rápido que a Bluey se le ocurrió un juego, por lo que avisa a Bingo y se lo explica, tienen que averiguar la trayectoria que está siguiendo su barco. ¡Ayudamos a Bluey y Bingo a conocer el rumbo que está siguiendo su barco!
>
> Para esto tienes la siguiente tabla y un gráfico con los que descubrir la trayectoria del barco.



Presentamos a los estudiantes una tabla de dos columnas con ocho casos particulares, de los cuales tres filas aparecen completadas. Para resolver la tarea, los estudiantes debían interpretar la tabla, transponer los datos de la tabla al gráfico y, por último, expresar la regularidad respondiendo a la pregunta "¿Cómo puedes saber cuál es la trayectoria del barco? Explícalo".

Realizamos un análisis de contenido de las respuestas. Las categorías (de tipo deductivo-inductivo) atienden a la manera en la que expresaban la regularidad implicada. El primer grupo de categorías son relativas a las regularidades evidenciadas en las respuestas dadas durante el trabajo con la representación gráfica, y el segundo grupo de categorías corresponden a las respuestas dadas de forma verbal-escrita.

Tabla 1

Categorías de analísis

Regularidades evidenciadas dadas sobre la representación gráfica	
• Une los puntos y traza una línea para indicar continuidad • Extiende los ejes	
Regularidades evidenciadas de forma verbal-escrita	
1. Expresa la regularidad usando la tabla	1.1 Covariación 1.2 Correspondencia 1.3 Correspondencia y covariación 1.4 Correspondencia y recursividad 1.5 Otras estrategias
2. Expresa la regularidad usando la gráfica	2.1 Covariación 2.2 Correspondencia
3. Expresa la regularidad usando la tabla y el gráfico	3.1. Correspondencia y covariación
4. Expresa la regularidad sin atender al gráfico ni a la tabla	4.1 Covariación 4.2 Correspondencia 4.3 Recursividad

RESULTADOS

Presentamos los hallazgos encontrados tras el análisis de las categorías (Tabla 1).

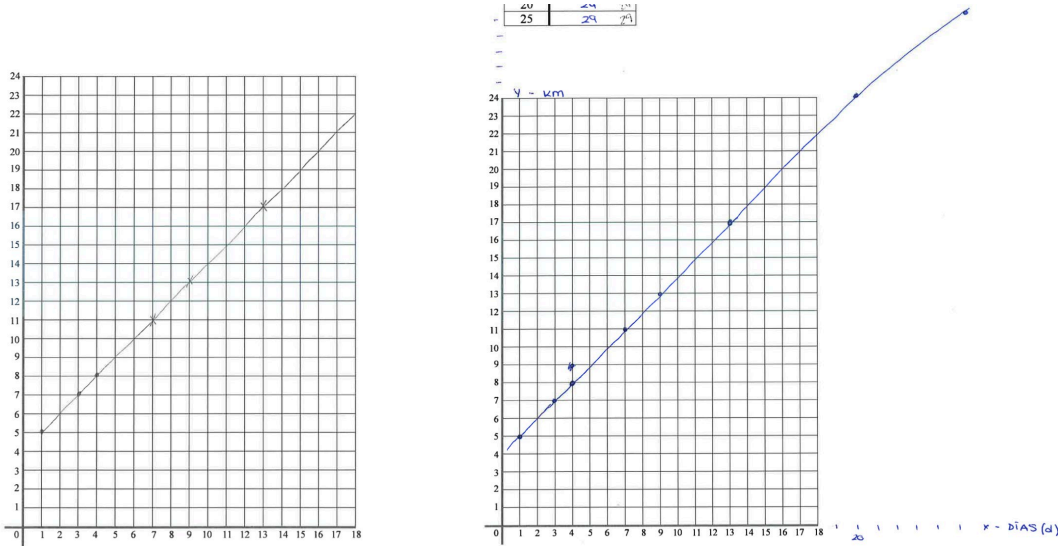
Resultados relativos a las respuestas dadas sobre la representación gráfica

Encontramos a 15 estudiantes que unen los puntos y prolongan el trazo mediante una línea o flecha más allá del último valor representado indicando continuidad (Figura 1a). Siete participantes extienden los ejes cartesianos para representar los puntos que quedaban fuera de la cuadrícula, donde dos de ellos solo lo ha hecho en el eje X y cinco en ambos ejes (Figura 1b). Los demás estudiantes se limitan a situar los puntos de forma aislada, por lo que no los unen, no extienden los ejes ni trazan una línea o flecha para indicar continuidad.

Figura 1

Representación gráfica: continuidad y extensión de ejes

(a) (b)



Resultados relativos a las respuestas dadas de forma verbal-escrita

Los estudiantes expresan regularidad haciendo uso de la tabla de la tarea, del gráfico, de ambos o detectan regularidad sin mencionar ningún elemento de la tarea. Identificamos cuatro estudiantes que no encontraron ninguna regularidad y dos que no contestaron a la pregunta final.

Expresa la regularidad usando la tabla

A partir de la tabla, los futuros maestros evidencian la regularidad mediante covariación (8), correspondencia (11), correspondencia y recursividad (1), correspondencia y covariación (1) y, otras estrategias (4).

Correspondencia

Los estudiantes que manifiestan correspondencia explican primero su procedimiento de obtención de la relación entre días y kilómetros “He hecho la cuenta (kilómetros - días) para los días 1, 3 y 4 nos damos cuenta de que en todas sale el mismo número, el 4. Para averiguar los kilómetros hay que sumar 4 a los días” y, finalmente formulan una regla del tipo “km=n.º día+4; y=x+4 o 4+n”.

Correspondencia y covariación

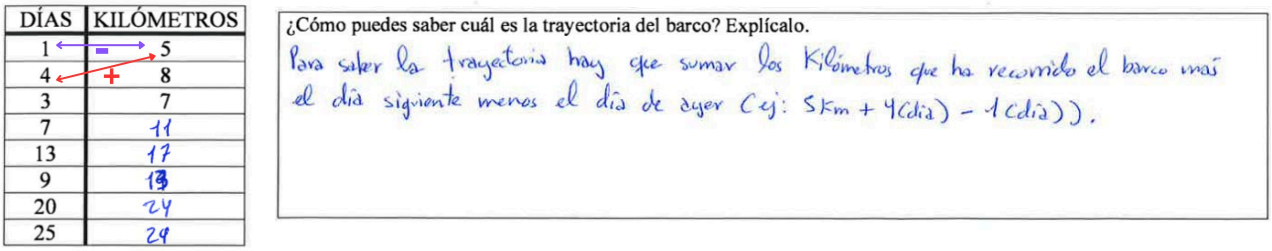
Nos encontramos con un estudiante: “Cada día se hace 1km más que el día anterior sabiendo que el día 1 tiene 5km, el 3 tiene 7km y el 4 tiene 8km, he podido sacar la fórmula de y=x+4”.

Otras estrategias

Cuatro estudiantes encontraron una regularidad al detectar un patrón entre los números de la tabla sin atender explícitamente ni a la correspondencia ni covariación combinando sumas y restas ente filas o columnas (ver Figura 2).

Figura 2

Estrategias de resolución basada en patrones numéricos desde la tabla



Expresa la regularidad usando el gráfico

En esta categoría nos encontramos a tres estudiantes que atendieron a la correspondencia y siete que atendieron a la covariación. La recursividad no ha sido una relación identificada por los estudiantes.

Correspondencia

Los participantes señalan que al unir los puntos se obtiene una línea recta cuya prolongación permite predecir la trayectoria del barco. Por ejemplo: "Lo que puedo observar sobre la trayectoria es que siguen un patrón creciente, es decir, kilómetros = días + 4. Por lo tanto, cada día que avanza hoy hay que sumar 4 kilómetros. Y si unimos los puntos sale una recta". Entre estos estudiantes solo encontramos a dos que lo expresan de manera simbólica "y=x+4".

Covariación

Los estudiantes se apoyan en el incremento constante de un kilómetro por día para completar la tabla y justificar su trayectoria. Un ejemplo sería: "Podemos saber la trayectoria del barco gracias a los datos que nos dan inicialmente. La trayectoria del barco iría hacia la derecha (en diagonal) y cada día avanza un kilómetro, a excepción del primero que avanzó 5".

Expresa la regularidad usando la tabla y el gráfico

Correspondencia y covariación

Nos encontramos que un futuro maestro atiende a la correspondencia en tabla y a la covariación en gráfico de forma verbal. En este caso, observamos que justifica la regla general a partir de los datos tabulados y, al mismo tiempo, recurre al gráfico para verificar visualmente la linealidad y la dirección de la trayectoria: "Para hallar la trayectoria del barco nos fijamos en los tres primeros datos que nos proporciona el problema. Sabemos que la diferencia entre los días y los km son 4 (así podemos ir contestando la tabla). Una vez averiguamos todos los km, podemos representar los datos en la tabla y observar que se forma una línea recta y que cuando sumamos un día, también lo hacen los km".

Expresa la regularidad sin atender al gráfico ni a la tabla

Dos estudiantes atendieron a la covariación, cuatro a la correspondencia y uno a la recursividad sin hacer referencia explícita ni a la tabla ni al gráfico en su justificación. Sus argumentos se basan en descripciones verbales, como "debido a los datos proporcionados, la única conclusión a la que podemos llegar es que avanza a 1km por día" (covariación), "he observado que cada día avanza 4 kilómetros por lo que he ido sumando 4 kilómetros a los demás días" (correspondencia) y, "lo primero es saber el n.º de km hechos cada día, organizando los días por orden. El segundo día añadiendo 1km

a los 5km del primer día y así, añadiendo 1km más a los 6km estimados del segundo día" (recursividad).

CONCLUSIONES

Los hallazgos revelan que, aunque la mayoría de los futuros maestros son capaces de completar la tabla y representar los puntos en el gráfico, no todos logran expresar la regularidad explícitamente y generalizar. Una parte de los futuros docentes recurren a regularidades recursivas o a procedimientos aritméticos sin explicitar la relación entre variables ni formular una regla general simbólica del tipo y=x+4. Este es el caso de los estudiantes que resolvieron la tarea mediante una estrategia de búsqueda de un patrón entre los números de la tabla. En este sentido, se evidencian dificultades en la coordinación de representaciones (tabla-gráfico-expresión simbólica) al analizar una relación funcional. Las representaciones se utilizan de forma procedimental e independiente: la tabla se completa mediante cálculos aritméticos y los valores se transponen al gráfico, pero sin establecer una conexión con la relación funcional. Estos resultados coinciden con las dificultades de conexión señaladas por Oliveira et al. (2021).

Además, el hecho de que algunos estudiantes prefieran el manejo y cálculo de valores concretos consecutivos, durante el trabajo con la tabla, hace que se difumine la componente de indeterminación propia del álgebra y del pensamiento funcional. Esto desencadena un tratamiento recursivo en lugar de covariacional, como refleja la aritmetización descrita por Zapatera y Quevedo (2021).

Por otra parte, la escasa representación de la continuidad en el gráfico (15 de 46 estudiantes) sugiere una interpretación discreta de la relación, donde el gráfico se concibe como un conjunto de puntos asociados a valores concretos y no como una generalización de la relación funcional. Esta tendencia se vincula con la aritmetización descrita por Zapatera y Quevedo (2021), donde los futuros maestros priorizan el cálculo de valores concretos y el uso de procedimientos recursivos en lugar de trabajar con la indeterminación funcional. Además, Radford (2025) muestra que estas interpretaciones basadas en la percepción visual conciben el gráfico como un "mapa de puntos". En este sentido, el uso de casos particulares mediado con el uso de estrategias recursivas podría estar impidiendo que los maestros en formación perciban la función como un proceso global y continuo en sus diferentes representaciones. En este estudio solo disponemos de los datos de 46 participantes, por lo que en próximos trabajos se podría ampliar. Además, los estudiantes únicamente recibieron la hoja con la tarea, por ello, el análisis se ha limitado a las producciones escritas. Esto se podría complementar con el uso de entrevistas para triangular los datos y profundizar en los resultados.

Agradecimientos

Este estudio se ha realizado con el apoyo del proyecto PID2024-157106NB-I00 financiado por fondos FEDER y en el seno del grupo FQM193. Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico.

Referencias

Blanton, M., Brizuela, B. M., Stephens, A., Knuth, E., Isler, I., Gardiner, A. M., Stroud, R., Fonger, N. L. y Stylianou, D. (2018). Implementing a framework for early algebra. En C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds. ICME-13 Monographs* (pp. 27-49). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_2

Blanton, M. L. y Kaput, J. J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization, advances in mathematics education: A global dialogue from multiple perspective* (pp. 5-23). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_2

Blanton, M., Levi, L., Crites, T. y Dougherty, B. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in Grades 3-5.* National Council of Teachers of Mathematics, NCTM.

Callejo, M. L. y Zapatera, A. (2017). Prospective primary teachers' noticing of students' understanding of pattern generalization. *Journal of Mathematics Teacher Education, 20,* 309-333. https://doi.org/10.1007/s10857-016-9343-1

Cañadas, M. C., Moreno, A. y Torres, M. D. (2024). First encounter with constructing graphs in the functional thinking approach to school algebra in 3rd and 4th grades. *ZDM Mathematics Education, 56*, 1059-1078. https://doi.org/10.1007/s11858-024-01627-2

Carraher, D. W. y Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning (Vol. 2,* pp. 669-705). NCTM e IAP.

Ellis, A. T. y Özgür, Z. (2024). Trends, insights, and developments in research on the teaching and learning of algebra. *ZDM Mathematics Education, 56*(2), 199-210. https://doi.org/10.1007/s11858-023-01545-9

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is the algebraic reasoning? En J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). Lawrence Erlbaum Associates. https://doi.org/10.4324/9781315097435-2

Ministerio de Educación y Formación Profesional [MEFP] (2022). Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. *Boletín Oficial del Estado (BOE), 52,* 24386-24504.

Narváez, R., Torres, M. D. y Cañadas, M. C. (2026). Analyzing the generalization process of fourth graders in a functional thinking context. En A, Abreu, J.V. Carvalho y R.A. Castanho (Eds.), *Perspectives and trends in education and technology, Volume 3. Selected Papers from ICITED25* (pp. 230-237). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-032-09074-4_23

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2000). *Principles and standards for school mathematics.* NCTM.

Oliveira, H., Polo-Blanco, I. y Henriques, A. (2021). Exploring prospective elementary mathematics teachers' knowledge: A focus on functional thinking. *Journal on Mathematics Education, 12*(2), 257-278. https://doi.org/10.22342/jme.12.2.13745.257-278

Pincheira, N. y Alsina, Á. (2021). Teachers' mathematics knowledge for teaching early algebra: A systematic review from the MKT perspective. *Mathematics, 9*, 2590. https://doi.org/10.3390/math9202590

Radford, L. (2025). Cartesian graphs and co-variational thinking in early algebra. *Proceedings of the Fourteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME14)*. Free University of Bozen-Bolzano; ERME. https://hal.science/hal-05199169v1

Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *PNA: Revista de investigación en Didáctica de la Matemática, 4*(1), 1-14. https://doi.org/10.30827/pna.v4i1.6172

Smith, E. (2008). El pensamiento representacional como marco para introducir las funciones en el currículo de primaria. En J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Álgebra en los primeros cursos* (pp. 133-163). LEA.

Torres, M. D., Brizuela, B. M., Moreno, A. y Cañadas, M. C. (2022). Introducing tables to second-grade elementary students in an algebraic thinking context. *Mathematics, 10*, 56. https://doi.org/10.3390/math10010056

Torres, M. D., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (2018). Estructuras, generalización y significado de letras en un contexto funcional por estudiantes de 2º de primaria. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 574-583). SEIEM.

Zapatera, A. y Quevedo, E. (2021). The initial algebraic knowledge of preservice teachers. *Mathematics, 9*(17), 2117. https://www.mdpi.com/2227-7390/9/17/2117

UN ANÁLISIS DE LAS COMPONENTES DE CONEXIÓN Y RAZONAMIENTO DE SENTIDO NUMÉRICO

An analysis of the connections and reasoning components of number sense

Jiménez-Rubiano, L.[a], Piñeiro, J. L.[b] y Ruiz-Hidalgo, J. F.[a]

[a]Universidad de Granada (España), [b]Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación (Chile)

Resumen

El sentido numérico se concibe como un sistema de componentes interrelacionadas que articulan conocimientos, habilidades y procesos cognitivos. Entre ellas, las componentes de relaciones y razonamientos poseen un carácter estructural, que no describen contenidos específicos sino conexiones y regulaciones entre los procesos. El objetivo es describir teóricamente ambas componentes a partir de un análisis de contenido de su significado, funciones y papel dentro del sistema de componentes de sentido numérico. Los resultados muestran que las relaciones actúan como eje integrador que organiza el conocimiento en redes de significado, mientras que los razonamientos cumplen una función reguladora al justificar, evaluar y validar procedimientos. Ambas componentes constituyen mecanismos transversales indispensables para la coherencia, flexibilidad y profundidad de sentido numérico.

Palabras clave: *habilidades numéricas, aprendizaje del número, relaciones, educación primaria.*

Abstract

Number sense is conceived as a system of interrelated components that integrate knowledge, skills, and cognitive processes. Among them, the components of connections and reasoning play a structural role, as they do not refer to specific mathematical content but rather to the connections and regulatory processes that organise the system. This study aims to provide a theoretical description of these two components through a content analysis of their meaning, functions, and role within the system of number sense components. The findings indicate that connections act as an integrating axis that organizes mathematical knowledge into networks of meaning, whereas reasoning performs a regulatory function by justifying, evaluating, and validating procedures. Together, these components operate as transversal mechanisms that support the coherence, flexibility, and depth of number sense.

Keywords: *numeracy skills, number learning, relationships, primary education.*

INTRODUCCIÓN

La noción de sentido numérico (SN) aún no cuenta con una definición plenamente consensuada en la literatura. No obstante, entre las diversas conceptualizaciones, existen elementos comunes que permiten describirlo como «la comprensión general que va desarrollando una persona al interpretar y usar conceptos numéricos y operacionales, relacionarlos y emitir juicios, lo que le permite ser versátil en el diseño de estrategias de cálculo y desenvolverse en contextos y situaciones diversas de la vida cotidiana» (Jiménez-Rubiano et al., 2024a, p. 23).

Actualmente, existe consenso en que el SN no constituye una habilidad aislada, sino un sistema cognitivo complejo donde las ideas matemáticas se modifican y articulan dinámicamente (p. ej., De Gamboa et al., 2024b; Sowder, 1992). Desde esta perspectiva, las componentes vinculadas a las relaciones, conexiones y razonamientos adquieren un papel particularmente relevante, ya que no solo describen habilidades específicas, sino que actúan como mecanismos estructuradores que integran y regulan el funcionamiento global del sistema. Bajo esta premisa, surge la necesidad de examinar con mayor profundidad las

Jiménez-Rubiano, L., Piñeiro, J. L. y Ruiz-Hidalgo, J. F. (2026). Un análisis de las componentes de conexión y razonamiento de sentido numérico. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (pp. 330-337). SEIEM.

componentes asociadas a las relaciones, conexiones y razonamientos, analizando cómo las conexiones intra- y extramatemáticas promueven la flexibilidad en el uso del conocimiento.

Un estudio previo mostró que, en el sistema de los números naturales, las componentes de conexión y razonamiento articulan representaciones, procedimientos e interpretaciones numéricas (Jiménez-Rubiano et al., 2024a). No obstante, al circunscribirse a los naturales, queda por determinar si dichas conexiones se conservan o se reconfiguran en otros sistemas numéricos, especialmente en fracciones y decimales, cuyos significados introducen relaciones epistemológicas y semióticas distintas. En consecuencia, el problema que aborda esta investigación consiste en la ausencia de una caracterización teórica que permita comprender cómo las componentes de conexión y razonamiento del SN se mantienen o se transforman al transitar entre distintos sistemas numéricos. En respuesta a este problema, el objetivo del estudio es analizar y profundizar en la descripción de la posible variación de estas relaciones entre componentes del SN según el sistema numérico considerado, aspecto que aún no ha sido abordado en la literatura. Aunque algunas normativas curriculares incluyen también los enteros negativos, en la investigación no los consideramos.

EL SENTIDO NUMÉRICO COMO SISTEMA DE COMPONENTES

Al no existir una definición consensuada de SN (Adamuz-Povedano, 2023; Ghazali et al., 2021; Whitacre et al., 2020), la literatura proporciona desde definiciones e indicadores de su desarrollo —porque los sujetos manifiestan la presencia de ciertas acciones—. Otros lo describen por medio de conjuntos de habilidades que lo caracterizan, denominadas componentes, que suelen estar descritas en términos de destrezas observables (Ghazali et al., 2021; Whitacre et al., 2020) y que permiten identificarlo y evaluarlo al tener elementos comunes (p. ej., NCTM, 2000; Reys y Yang, 1998). Siguiendo la caracterización de Sowder (1992), subrayamos como fundamental de un buen desarrollo del SN las capacidades de relacionar, emitir juicios, actuando con flexibilidad, frente a problemas que permiten emplear los números.

El estudio de SN ha evolucionado desde enfoques centrados en habilidades aisladas (p. ej., Yang, 2019) hacia perspectivas sistémicas que lo conciben como una red estructurada de componentes interdependientes (p. ej., Chen et al., 2017; Jiménez-Rubiano et al., 2024a, 2024b). Diversas propuestas teóricas distinguen componentes que describen habilidades específicas —como estimar o representar— y otras que cumplen funciones estructurales dentro del sistema. Entre estas últimas, destacan las componentes vinculadas con las conexiones y los razonamientos, cuyo rasgo distintivo es que no representan contenidos matemáticos particulares, sino procesos que articulan, conectan y regulan el funcionamiento global de SN (p. ej., De Gamboa et al., 2024b; McIntosh et al., 1992).

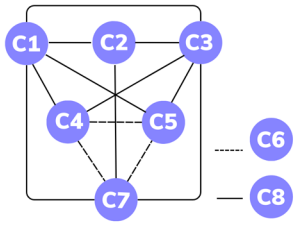
Los razonamientos y las conexiones matemáticas son situados como interconexiones a lo largo de las componentes del SN (McIntoch et al., 1992) o como elemento central de SN (De Gamboa et al., 2024a), debido a que el SN implica no solo el dominio de conceptos y operaciones, sino también la capacidad de establecer relaciones entre números, operaciones, representaciones y situaciones problemáticas y la capacidad de razonar los procesos (p. ej., De Gamboa et al., 2024a, 2024b; Jiménez-Rubiano et al., 2024; McIntosh et al., 1992). Estas relaciones son, por un lado, las conexiones matemáticas que se establecen entre dos objetos matemáticos ya sean conceptos, procedimientos, teoremas, argumentos o representaciones (Businskas, 2008; Dolores-Flores y García-García, 2017) y, por otro, las relaciones de las matemáticas con fenómenos de la vida real y con otras materias (extramatemáticas) (Businskas, 2008; Rodríguez-Nieto, 2025).

El desarrollo de SN supone, por tanto, no solo dominar contenidos, sino coordinar múltiples procesos de forma coherente y flexible. El estudio de Jiménez-Rubiano et al. (2024a) identifica ocho componentes basadas en fundamentos epistemológicos y funcionales de la matemática escolar. Dos relativas a: conexiones (C6) y razonamientos (C8); y las otra seis relativas al número y operaciones: representaciones del número (C1), interpretación y uso del número en contexto (C2), estructuras numéricas de cada sistema

relacional (C3), uso de las operaciones en contextos (C4), uso flexible de las propiedades de las operaciones (C5) y crear procedimientos menos convencionales (C7), (ver Figura 1).

Figura 1

Relación de componentes de SN para los números naturales (Jiménez-Rubiano et al., 2024a)



En el entramado de componentes, algunas describen acciones cognitivas específicas, mientras que las relaciones son descritas por capacidades de las componentes C6 y C8. Por lo que C6 y C8 tienen un carácter transversal y sin ellas las habilidades numéricas permanecerían como fragmentos de información sin cohesión funcional. Están definidas para los naturales como:

*C6. Conexión entre las operaciones***.** Alude a la comprensión de las operaciones como un sistema interconectado, de modo que el sujeto pueda establecer vínculos entre ellas y utilizarlas de forma flexible en la resolución de problemas (McIntosh et al., 1992). En consecuencia, las conexiones asociadas a C6 se hacen visibles cuando se articulan el uso flexible de las propiedades de las operaciones, la conexión entre operaciones y los procedimientos no convencionales de cálculo, cálculo mental, aproximación y estimación.

C8. Los razonamientos. Constituyen la secuencia argumentativa mediante la cual se establecen nuevas relaciones entre las unidades de información que integran un concepto (Rico, 1997), y se manifiestan cuando el sujeto reflexiona sobre los números, las operaciones y los resultados obtenidos, justificando los procedimientos empleados (Mcintosh et al., 1992). Así, las relaciones serán expresadas como conexiones entre capacidades intercomponentes y serán particulares para el sistema de los números naturales y generalizables a otros sistemas numéricos solo en algunos casos.

SISTEMA (RELACIONAL) NUMÉRICO

La noción de sistema numérico alude a un conjunto de números en el que intervienen al menos una operación como un sistema numérico (Skemp, 1993). Rico et al. (2020) sostienen que, puesto que estos conjuntos se organizan a partir de relaciones—como el orden total en los números naturales—, la organización de los contenidos matemáticos escolares debe atender no solo al objeto y a la operación, sino también a las relaciones que los articulan. En este marco, el sistema relacional numérico se entiende como un conjunto de objetos matemáticos vinculados entre sí. En el ámbito escolar no se requiere la noción de estructura matemática, pero estos sistemas se caracterizan por articular objetos, relaciones de orden y equivalencia, y operaciones binarias con propiedades específicas, como ocurre con los naturales, los decimales, las fracciones o los enteros. En este sentido, un sistema relacional numérico proporciona un marco para actuar matemáticamente de forma coherente, ya que establece reglas de funcionamiento y relaciones de orden, igualdad y equivalencia.

MÉTODO

El estudio adopta un enfoque teórico-conceptual basado en la perspectiva semántica del conocimiento matemático escolar (Rico, 2012), según la cual los significados matemáticos se organizan mediante contextos, representaciones, fenómenos y modos de uso que otorgan sentido a los contenidos matemáticos (p. ej., Ruiz-Hidalgo, 2016). Se realizó un análisis de contenido (Krippendorff, 2004) de los significados asociados a los sistemas relacionales numéricos naturales, fraccionarios y decimales, apoyado en investigaciones sobre significado y organización del conocimiento

matemático escolar (Castro y Ruiz-Hidalgo, 2015, Lupiáñez, 2016; Rico et al., 2008; entre otros). Complementariamente, se revisó literatura especializada sobre razonamiento numérico y SN en dichos sistemas. Se tomaron como categorías de análisis las componentes de conexiones y razonamientos tomadas de Jiménez-Rubiano et al. (2024a, 2024b). Las unidades de análisis estuvieron constituidas por fragmentos de texto que describen habilidades matemáticas, dificultades de aprendizaje, formas de razonamiento y usos de los números y las operaciones. La información se organizó mediante las categorías conexiones y razonamientos, lo que permitió identificar transformaciones de las habilidades asociadas al SN entre sistemas numéricos y describirlas.

COMPONENTE C6: CONEXIÓN ENTRE LAS OPERACIONES

Conectar implica identificar semejanzas, diferencias, equivalencias, inclusiones y correspondencias entre objetos matemáticos. En el ámbito operacional, esto supone reconocer regularidades, interpretar procedimientos y establecer vínculos entre representaciones, propiedades y significados de las operaciones. Por ejemplo, comprender que el producto en los números naturales suele amplificar mientras que en fracciones puede reducir (Tian y Siegler, 2018), explicar por qué funciona un algoritmo (Eli et al., 2011) o reconocer que un procedimiento cambia su interpretación según la representación utilizada.

Con el propósito de analizar cómo las conexiones se organizan en distintos sistemas numéricos, la categoría C6 se operacionaliza como un conjunto de conexiones estructurales entre propiedades de las operaciones, representaciones y procedimientos. Estas relaciones pueden clasificarse en tres niveles analíticos: 1) vínculos dentro de un mismo concepto, (p. ej., distintas representaciones de un número); 2) conexiones entre conceptos distintos, (p. ej., relación entre fracción y división; y 3) correspondencias entre sistemas relacionales numéricos, que permiten reconocer regularidades y transformaciones. Estos niveles evidencian que C6 funciona como un mecanismo de integración conceptual que organiza el conocimiento numérico operacional mediante redes de conexiones (p. ej., Eli et al., 2011). La Figura 2 recoge las manifestaciones empíricas de estas formas de conexión, derivadas de los elementos de significado. Esta separación tiene únicamente una función analítica y comparativa, ya que la componente de conexión se concibe como transversal, pero se manifiesta de forma distinta según los significados del sistema.

Figura 2

Elementos de significado de naturales, fraccionarios y decimales para conexiones

	Conexiones intra e interconceptuales (dentro del sistema)	*Conexiones intersistémicas (entre sistemas numéricos)*
Naturales	Conectar algoritmos con propiedades de las operaciones de los naturales Reconocer que un algoritmo dependiendo de la representación usada no puede interpretarse igual Reconocer hechos relacionados con la suma y el producto (p. ej., estabilidad del aumento en suma y producto) Identificar y diferenciar las relaciones de orden (identidad, igualdad y desigualdad) Descripción del proceso seguido en un cálculo con naturales	Establecimiento de regularidades iniciales respecto a otros sistemas (anticipación de cambios en fracciones y decimales)
Fraccionarios	Conectar algoritmos con propiedades de las operaciones de las fracciones Reconocer que un algoritmo dependiendo de la representación usada no puede interpretarse igual Identificación de efectos no invariantes de las operaciones (p. ej., el producto puede reducir) Identificar y diferenciar el proceso para determinar las relaciones de orden Descripción del proceso seguido en un cálculo con fracciones	Comparación con naturales: ruptura de la idea de "siempre aumenta" Primeras conexiones estructurales con decimales (equivalencia fracción–decimal)
Decimales	Reconocer que un algoritmo dependiendo de la representación usada no puede interpretarse igual Conectar algoritmos con propiedades de las operaciones de los decimales Comprensión de la variabilidad del efecto de las operaciones (no invariancia del producto o división) Identificar y diferenciar el proceso para determinar las relaciones de orden Descripción del proceso seguido en un cálculo con decimales	Traducción entre representaciones decimal, fraccionaria y porcentaje. Relación entre orden decimal y estructura posicional Establecer similitudes y diferencias entre los algoritmos estándar de naturales y decimales

Las habilidades asociadas a C6 permiten construir redes de conexiones entre propiedades, representaciones, procedimientos y significados de las operaciones. En este sentido, la componente de conexión puede interpretarse como una estructura transversal del SN para la operatoria, cuya función es articular y reorganizar el conocimiento matemático al transitar entre distintos sistemas numéricos.

COMPONENTE C8: RAZONAR SOBRE HECHOS, PROCEDIMIENTOS Y RESULTADOS

El razonamiento matemático incluye procesos metacognitivos tales como anticipar resultados, verificar coherencia, detectar errores, justificar decisiones (p. ej., García-García y Dolores-Flores, 2018) —dar cuenta y razón—. C8 implica que el sujeto se cuestione, tal cual lo manifiestan Reys y Barger (1992) mediante preguntas clave, el antes, el durante y el después de la resolución de una tarea. No se trata de un conjunto de habilidades estáticas, sino que está presente en aquellas acciones que facilitan la toma de decisiones acertadas (Businskas, 2008). La Figura 3 organiza los elementos de significado asociados a la componente C8 en naturales, fraccionarios y decimales. Para su análisis, se identificaron seis dimensiones: 1) razonamiento sobre representaciones, 2) comparación y diferenciación, 3) inferencia, 4) metacognición, 5) justificación de procedimientos y resultados y 6) razonamiento sobre hechos, procedimientos y resultados.

Figura 3

Elementos de significado de naturales, fraccionarios y decimales para razonamientos

	Intra e interconceptuales (dentro del sistema)	*Intersistémicas (entre sistemas numéricos)*	*Razonamientos más generales*
Naturales	Razonar sobre el uso de diferentes representaciones de naturales	Razonar frente al uso de pasar de una representación a otra entre sistemas relacionales numéricos	Utilizar metacognición Explicar la conveniencia o no de hacer cálculos exactos o aproximados en determinadas situaciones. Comparar y diferenciar Discutir la idoneidad de los resultados dentro de sus contextos. Justificar o argumentar "dar cuenta y razón"
Fraccionarios	Razonar sobre el uso de diferentes representaciones de fraccionarios	Razonar frente al uso de pasar de una representación a otra entre sistemas relacionales numéricos Razonar sobre las relaciones entre fraccionarios y decimales	
Decimales	Razonar sobre el uso de diferentes representaciones de decimales	Razonar frente al uso de pasar de una representación a otra entre sistemas relacionales numéricos	

La componente de razonamientos no depende de contenidos específicos ni de sistemas numéricos particulares. Así, se convierte en componente estructuradora de SN con un mecanismo regulador que supervisa el uso del conocimiento matemático y es responsable de organizar el conocimiento en redes coherentes cuando se trabaja con naturales, fraccionarios y decimales.

REFLEXIONES FINALES

Los resultados permiten enriquecer la descripción de las componentes de conexión y razonamiento y ratificar que no son meras capacidades específicas de los objetos matemáticos, sino conexiones entre los descriptores de las demás componentes, que abarcan a todos los sistemas numéricos considerados. Al fortalecer estas conexiones y razonamientos asociados, se construye una red que facilita la transferencia de conocimientos y la flexibilidad estratégica del SN. Esto cobra especial relevancia si se considera que muchas de las dificultades de aprendizaje en matemáticas se explican por la incapacidad del estudiantado para relacionar procedimientos, representaciones y significados (Rodríguez-Nieto, 2025). En este sentido, los hallazgos de esta investigación son coherentes con los planteamientos de McIntosh et al. (1992) y Sowder (1992), en la medida en que dichas interconexiones apuntan a un proceso de supervisión que articula el SN con la metacognición. Así,

una persona con buen SN no solo llega al resultado, sino que reflexiona sobre los números y las operaciones involucradas.

Mientras que las conexiones establecen «puentes» conceptuales intra y extramatemáticos de las operaciones al igual que la componente de razonamiento, esta última también actúa como el mecanismo regulador que justifica y valida esos puentes mediante el razonamiento y la reflexión sobre las propias acciones. Entonces la componente de razonamiento se describe como la secuencia argumental necesaria para establecer nuevas relaciones entre unidades de información. Estas conexiones son las que facilitan el tránsito entre sistemas numéricos (de naturales a fraccionarios y a decimales) (p. ej., De Gamboa et al., 2024b). Así entendido, el conocimiento matemático adopta un carácter funcional ya que debe ser activado al interpretar o resolver situaciones. Esta concepción del conocimiento matemático se ajusta a la orientación funcional que el desarrollo curricular actual defiende sobre el aprendizaje de las matemáticas escolares (Ruiz-Hidalgo, 2016), por lo que la orientación funcional del aprendizaje escolar numérico se materializa a través de estas componentes transversales.

En la estructura reticular de SN, las componentes de conexiones y razonamientos representan aquellos procesos cognitivos de orden superior que vinculan el SN con la metacognición. Las conexiones (C6) relacionan el uso flexible de propiedades (C5) con procedimientos no convencionales (C7), mientras los razonamientos (C8) atraviesan todo el modelo, permitiendo que el conocimiento del sistema (C3), los diferentes usos del número (C2) y las representaciones (C1) se utilicen de manera intencional y razonada. Esta interpretación se sustenta en las ideas de Eli et al. (2011), De Gamboa et al. (2024b) y García-García y Dolores-Flores (2018).

CONCLUSIONES

Las componentes de conexiones y razonamientos se consolidan como ejes organizadores estructurales del SN. Su análisis revela que el desarrollo efectivo del SN trasciende el dominio procedimental hacia la capacidad de relacionar o conectar conceptos y razonar, elementos esenciales para resolver problemas y evaluar la comprensión conceptual.

Tal como indica NCTM (2000), «el SN debería avanzar hacia niveles cada vez más complejos de construcción de ideas y destrezas, de reconocimiento y uso de relaciones para resolver problemas de conexión de nuevos aprendizajes con los anteriores» (p. 81). Las conexiones actúan como mecanismos integradores de procedimientos, mientras, los razonamientos operan como mecanismos que conectan conocimiento, regulan metacognitivamente la coherencia conceptual, validando y justificando la actividad matemática. Ambas, configuran la base estructural de un SN flexible, crítico y significativo.

Esta caracterización ratifica la organización propuesta por Jiménez-Rubiano et al. (2024a) y explica parte de la flexibilidad del SN para los sistemas numéricos estudiados. Futuras investigaciones podrían verificar estas componentes en otros sistemas numéricos y diseñar secuencias didácticas para su desarrollo en educación primaria.

Referencias

Adamuz-Povedano, N. (2023). Treinta años de investigaciones sobre desarrollo del sentido numérico en educación primaria. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 11-25). SEIEM. https://seiem.es/docs/actas/26/Seminarios/011.pdf

Businskas, A. M. (2008). *Conversations about connections: How secondary mathematics teachers conceptualize and contend with mathematical connections* [Doctoral dissertation]. Simon Fraser University.

Castro, E. y Ruiz-Hidalgo, J. F. (2015). Aritmética de los números naturales: estructura multiplicativa. En I. Segovia y L. Rico (Coords.), *Matemáticas para maestros de Educación Primaria* (pp. 99-122). Pirámide.

Chen, F., Yan, Y. y Xin, T. (2017). Developing a learning progression for number sense based on the rule space model in China. *Educational Psychology,* 37(2), 128-144. https://doi.org/10.1080/01443410.2016.1239817

De Gamboa, G., Caviedes, S. y Badillo, E. (2024a). El papel de las conexiones intramatemáticas en el aprendizaje de los números decimales. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *25*, 131-149. https://doi.org/10.35763/aiem25.6399

De Gamboa, G., Caviedes, S. y Badillo, E. (2024b). Conexiones y razonabilidad en el desarrollo del sentido numérico. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 177-184). SEIEM.

Dolores-Flores, C. y García-García, J. (2017). Conexiones intramatemáticas y extramatemáticas que se producen al resolver problemas de Cálculo en contexto: un estudio de casos en el nivel superior. *Bolema, 31*(57), 158-180. https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a08

Eli, J. A., Mohr-Schroeder, M. J. y Lee, C. W. (2011). Exploring mathematical connections of prospective middle-grades teachers through card-sorting tasks. *Mathematics Education Research Journal, 23*(3), 297-319. https://doi.org/10.1007/s13394-011-0017-0

García-García, J. y Dolores-Flores, C. (2018). Intra-mathematical connections made by high school students in performing Calculus tasks. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 49*(2), 227-252. https://doi.org/10.1080/0020739X.2017.1355994

Ghazali, M., Mohamed, R. y Mustafa, Z. (2021). A systematic review on the definition of children's number sense in the primary school years. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, *17*(6). https://doi.org/10.29333/ejmste/10871

Jiménez-Rubiano, L., Piñeiro, J. L. y Ruiz-Hidalgo, J. F. (2024a). Sentido numérico: relación de sus componentes desde el significado del número natural. *Revista de Educación de la Universidad de Granada, 31,* 19-34. https://doi.org/10.30827/reugra.v31.30760

Jiménez-Rubiano, L., Piñeiro, J. L. y Ruiz-Hidalgo, J. F. (2024b). Transición entre sistemas numéricos para describir el sentido numérico. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 329-336). SEIEM.

Krippendorff, K. (2004). *Content analysis: An introduction to its methodology*. SAGE

Lupiáñez, J. L. (2016). Sistemas de representación. En L. Rico y A. Moreno (coords.). *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria* (pp. 119-136). Pirámide.

McIntosh, A., Reys, B. J. y Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics, 12*(3), 2-8.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standars for school mathematics.*

Reys, B. J. y Barger, R. (1992). *Developing number sense in the middle grades* (3rd repr.). National Council of Teachers of Mathematics.

Reys, R. E. y Yang, D. (1998). Relationship between computational performance and number sense among sixth- and eighth-grade students in Taiwan. *Journal for Research in Mathematics Education*, *29*(2), 225-237. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.29.2.0225

Rico, L. (1997). *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. Horsori.

Rico, L. (2012). Aproximación a la investigación en Didáctica de la Matemática. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 1*, 39-63. https://doi.org/10.35763/aiem.v1i1.4

Rico, L., Marín, A., Lupiáñez, J. L. y Gómez, P. (2008). Planificación de las matemáticas escolares en secundaria. El caso de los números naturales. *SUMA*, *58*, 7-23.

Rico, L., Martín-Fernández, E. y Ruiz-Hidalgo, J. F. (2020). Significados y sistemas en trigonometría escolar. En E. Castro-Rodríguez, E. Castro, P. Flores y I. Segovia (Coords.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Enrique Castro* (pp. 197-220). Octaedro.

Rodríguez-Nieto, C. A. (2025). The extended Theory of Connections (ETC) and its contributions to Mathematics Education: Some reflections on the path taken. *Math-Edu: Jurnal Ilmu Pendidikan Matematika*, *10* (1), 108-133.

Ruiz-Hidalgo, J. F. (2016). Sentido y modos de uso de un concepto. En L. Rico y A. Moreno (Eds.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria* (pp. 139-151). Pirámide.

Skemp, R. R. (1993). *Psicología del aprendizaje de las matemáticas* (2a. ed.). Morata.

Sowder, J. (1992). Estimation and number sense. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 371-389). MacMillan.

Tian, J. y Siegler, R.S. (2018). Which type of rational numbers should students learn first? *Educational Psychology Review,* 30, 351-372. https://doi.org/10.1007/s10648-017-9417-3

Yang, D. C. (2019). Development of a three-tier number sense test for fifth-grade students. *Educational Studies in Mathematics, 101*, 405–424. https://doi.org/10.1007/s10649-018-9874-8

Whitacre, I., Henning, B. y Atabaş, Ş. (2020). Disentangling the research literature on number sense: Three constructs, one name. *Review of Educational Research, 90*(1), 95-134. https://doi.org/10.3102/0034654319899706

MIRAR PROFESIONALMENTE OPORTUNIDADES DE ARGUMENTACIÓN EN LA INTERACCIÓN EN CLASE DE MATEMÁTICAS. UN ESTUDIO EMPÍRICO BASADO EN VIÑETAS

Noticing opportunities for argumentation in mathematics classroom interaction. A vignette-based empirical study

Kuntze, S.[a], Ivars, P.[b] y Fernández, C.[b]

[a]Ludwigsburg University of Education, [b]Universidad de Alicante

Resumen

Una de las competencias a desarrollar en los estudiantes para maestro es la competencia mirar profesionalmente las situaciones de enseñanza-aprendizaje (noticing) de las matemáticas. En educación matemática, la adquisición de esta competencia, entendida como la capacidad de razonar basándose en el conocimiento, es esencial, e implica que el análisis de situaciones de aula esté centrado en criterios de calidad, como la calidad argumentativa de la interacción en clase. Como hay poca evidencia empírica sobre la mirada profesional de la calidad argumentativa, este estudio se centra en explorar cómo un grupo de estudiantes para maestro analizan una viñeta representando una situación de aula con una actuación mejorable de la maestra. Los resultados muestran una mirada profesional limitada de los estudiantes para maestro, y sugieren la necesidad de desarrollar este aspecto de la mirada profesional.

Palabras clave: *mirar profesionalmente (noticing), razonamiento argumentativo, futuros maestros, viñetas.*

Abstract

One of the relevant competences to be developed in future mathematics teachers is the professional noticing related to teaching-learning situations. In mathematics education, building up this competence, understood in particular as knowledge-based reasoning, is essential and implies that the analysis of classroom situations is focused on quality criteria, such as on the argumentation quality of classroom interaction. As there is little empirical evidence on teachers' noticing of the argumentation quality in the classroom, this study focuses on exploring how a group of pre-service teachers analyse a vignette representing a classroom situation with non-optimal teacher (re)actions. Results show a limited noticing of the pre-service teachers with regard of argumentation quality in the classroom and suggest the need to develop this aspect of noticing in pre-service teachers.

Keywords: *noticing, argumentative reasoning, pre-service teachers, vignettes.*

INTRODUCCIÓN

La matemática como disciplina científica está marcada por su cultura única de argumentación (Heintz, 2000). En consecuencia, promover la argumentación en la enseñanza escolar, en particular en la interacción con y entre el alumnado en clase, puede jugar un papel determinante en la realización de prácticas matemáticamente significativas en el aula. No se trata de exigir desde el primer momento un nivel alto de formalización ni tampoco centrarse únicamente en la elaboración de pruebas matemáticas, ya que la complejidad de demostrar puede bloquear el acceso del alumnado a actividades de generar y aducir argumentos o razones (Hanna, 1998). En esta comunicación entendemos la noción de argumento basándonos en Toulmin (2003), poniendo el foco en que las

Kuntze, S., Ivars, P. y Fernández, C. (2026). Mirar profesionalmente oportunidades de argumentación en la interacción en clase de matemáticas. Un estudio empírico basado en viñetas. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (pp. 338-345). SEIEM.

afirmaciones estén conectadas con referencias a un "datum", que justifica las afirmaciones, por ejemplo, en la interacción en el aula de matemáticas. En la interacción en clase, considerada como una actividad interindividual, es posible identificar criterios de calidad argumentativa, y el papel del maestro es el de estimular y mantener una calidad argumentativa alta.

Para establecer una cultura argumentativa en la interacción en el aula de matemáticas, la mirada profesional (Fernández et al., 2018; Sherin et al., 2011) de los maestros es esencial, puesto que las oportunidades para generar una argumentación deben ser identificadas – matemáticamente, pero también en relación con el pensamiento matemático del alumnado en la situación particular de clase (Kuntze y Krummenauer, 2024). En este contexto, aspectos de la discursividad (Cohors-Fresenborg, 2019; Cohors-Fresenborg y Kaune, 2007) pueden ser utilizados para describir la calidad argumentativa de la interacción en clase. Por ejemplo, durante el intercambio de argumentos se requiere accesibilidad a los argumentos expresados y una precisión suficiente de referencia en la interacción: Si un comentario a un argumento no se refiere con precisión a éste, la coherencia de la interacción puede perderse rápidamente. Además, los comentarios argumentativos pueden retroalimentarse de la accesibilidad a lo que se ha dicho anteriormente; por ejemplo, notas escritas en la pizarra o repeticiones orales de argumentos expresados por otros alumnos pueden ayudar en ese contexto. Estos criterios han sido descritos como normas de discursividad (Cohors-Fresemborg, 2019; Cohors-Fresenborg y Kaune, 2007). La noción de discursividad describe "actividades realizadas para apoyar la coherencia y precisión de una discusión" y proviene de la metacognición (Cohors-Fresenborg, 2019, p. 2). El término "discursividad negativa" denota una violación de las normas de discursividad (Cohors-Fresemborg, 2019; Cohors-Fresenborg y Kaune, 2007; Nowińska y Praetorius, 2017). Un ejemplo de discursividad negativa es omitir una referencia clara a una declaración o a un argumento anterior ya que, la falta de referencia clara dificulta la comprensión de lo que ha sido dicho sobre argumentos anteriores. Otro ejemplo de discursividad negativa es introducir un argumento nuevo sin relacionarlo con un argumento ya presente en el discurso. Este acto puede perturbar el desarrollo de los argumentos iniciales en la interacción en clase, dificultando las referencias exactas de argumentos a declaraciones anteriores (Cohors-Fresenborg, 2019; Nowińska y Praetorius, 2017).

La discursividad negativa puede verse como una limitación para la calidad argumentativa de la interacción en el aula. Por tanto, la mirada profesional de la discursividad negativa por parte de los maestros es importante para mantener un nivel suficiente de discursividad – por ejemplo, mediante el aviso al alumnado de la necesidad de respetar las reglas de discursividad, o a través de otras intervenciones en el aula, como notas escritas en la pizarra o repeticiones orales de argumentos expresados por otros alumnos. En el contexto de este estudio, frente a una teoría más amplia vinculada a la discursividad (Cohors-Fresenborg, 2019; Nowińska y Praetorius, 2017), nos limitamos a criterios particularmente significativos para la calidad argumentativa de la interacción en el aula como los presentados en el párrafo anterior.

Otro criterio importante en el marco de la mirada profesional del docente es el de identificar oportunidades para un razonamiento argumentativo en clase (Kuntze y Krummenauer, 2024), matemáticamente y con relación al pensamiento matemático del alumnado – por ejemplo, las dificultades (o errores) que aparecen en las interacciones de aula muy frecuentemente representan oportunidades de argumentación.

Considerando la falta de evidencias empíricas sobre la competencia de mirar profesionalmente las oportunidades de argumentación y la calidad argumentativa de la interacción en el aula, este estudio se centra en explorar la mirada profesional de estudiantes para maestro cuando analizan la argumentación en una situación de clase de matemáticas.

MARCO TEÓRICO

Una de las competencias docentes clave a desarrollar en los futuros maestros de matemáticas es la mirada profesional (p.ej. Amador et al., 2021; Sherin et al., 2011). Esta competencia, es vista como la capacidad de analizar las situaciones de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas usando elementos específicos del conocimiento matemático y de didáctica de las matemáticas (Fernández et al., 2018; Kuntze y Friesen, 2018). Por tanto, implica la capacidad de razonar usando un conocimiento profesional ("professional knowledge", Kuntze, 2012; Shulman, 1986). Investigaciones previas sobre la mirada profesional se han focalizado en diferentes aspectos de la competencia, como el pensamiento matemático de los estudiantes (p.ej. Fernández et al., 2018; Jacobs et al., 2010), los materiales curriculares (p.ej. Amador et al., 2017), o el lenguaje (p.ej. González-Forte y Planas, 2024). Otra línea de investigación se ha centrado en la mirada profesional basada en criterios específicos (p. ej., Kuntze et al., 2021), es decir, en analizar si los futuros docentes son capaces de emplear criterios significativos para analizar un aspecto concreto de la clase de matemáticas. Por ejemplo, criterios específicos sobre el uso de representaciones de objetos matemáticos (p.ej. Friesen y Kuntze, 2016) o criterios de calidad al trabajar en tareas de modelización (Hartmann et al., 2023).

Dado que la matemática como ciencia se caracteriza por su cultura única de argumentación (Heintz, 2000), centrar el foco de la competencia de mirar profesionalmente en el análisis, y en la calidad, de las oportunidades de argumentación resulta esencial también en la enseñanza de las matemáticas. Esto incluye la argumentación presente en pruebas matemáticas, pero también formas de argumentación menos formales y elaboradas (Krummenauer et al., 2019; Kuntze, 2008; Reiss y Renkl, 2002; Stylianides et al., 2016) que emergen en la interacción de clase. En este contexto, los aspectos descritos previamente en la introducción actúan como criterios significativos para una mirada profesional orientada a la calidad argumentativa. En consecuencia, pueden identificarse los siguientes seis criterios como significativos (no considerados como exhaustivos) para la mirada profesional de la calidad argumentativa (Cohors-Fresemborg, 2019; Cohors-Fresenborg y Kaune, 2007; Nowińska y Praetorius, 2017; más detalle en Kuntze y Krummenauer, 2024):

- Identificar oportunidades de argumentación al nivel de contenidos matemáticos: El docente debe seguir el pensamiento del alumnado en relación con el contenido matemático e identificar aspectos que podrían ser expuestos en una discusión argumentativa para enriquecer la argumentación del alumnado.
- Asegurar la accesibilidad de las argumentaciones del alumnado entre sus pares: La accesibilidad de argumentaciones puede lograrse desacelerando el ritmo de la argumentación, repitiendo los argumentos con las propias palabras del alumnado, visualizándolos en la pizarra y estructurándolos de manera que se clarifique cuál es el argumento y qué afirmación apoya.
- Referirse de manera precisa y explícita a las afirmaciones que hayan aparecido previamente en la interacción en clase. Este criterio fomenta la comprensión y la claridad del discurso.
- Evitar cambiar de tema prematuramente cuando aún sea posible o necesario profundizar en la argumentación.
- Incluir la mayor cantidad posible de alumnado en el discurso activo y evitar diálogos uno-a-uno entre maestro y alumnos individuales (en los que el resto del grupo no interviene).
- Fomentar el metaconocimiento sobre la argumentación mediante reflexiones retrospectivas sobre actividades previas de razonamiento argumentativo.

Objetivos y preguntas de investigación

Nuestro objetivo es explorar la mirada profesional de estudiantes para maestro (EPM) cuando analizan la argumentación en una situación de clase de matemáticas representada en una viñeta.

Teniendo en cuenta los seis criterios sobre la calidad argumentativa introducidos anteriormente, este objetivo general se particulariza en la siguiente pregunta de investigación:

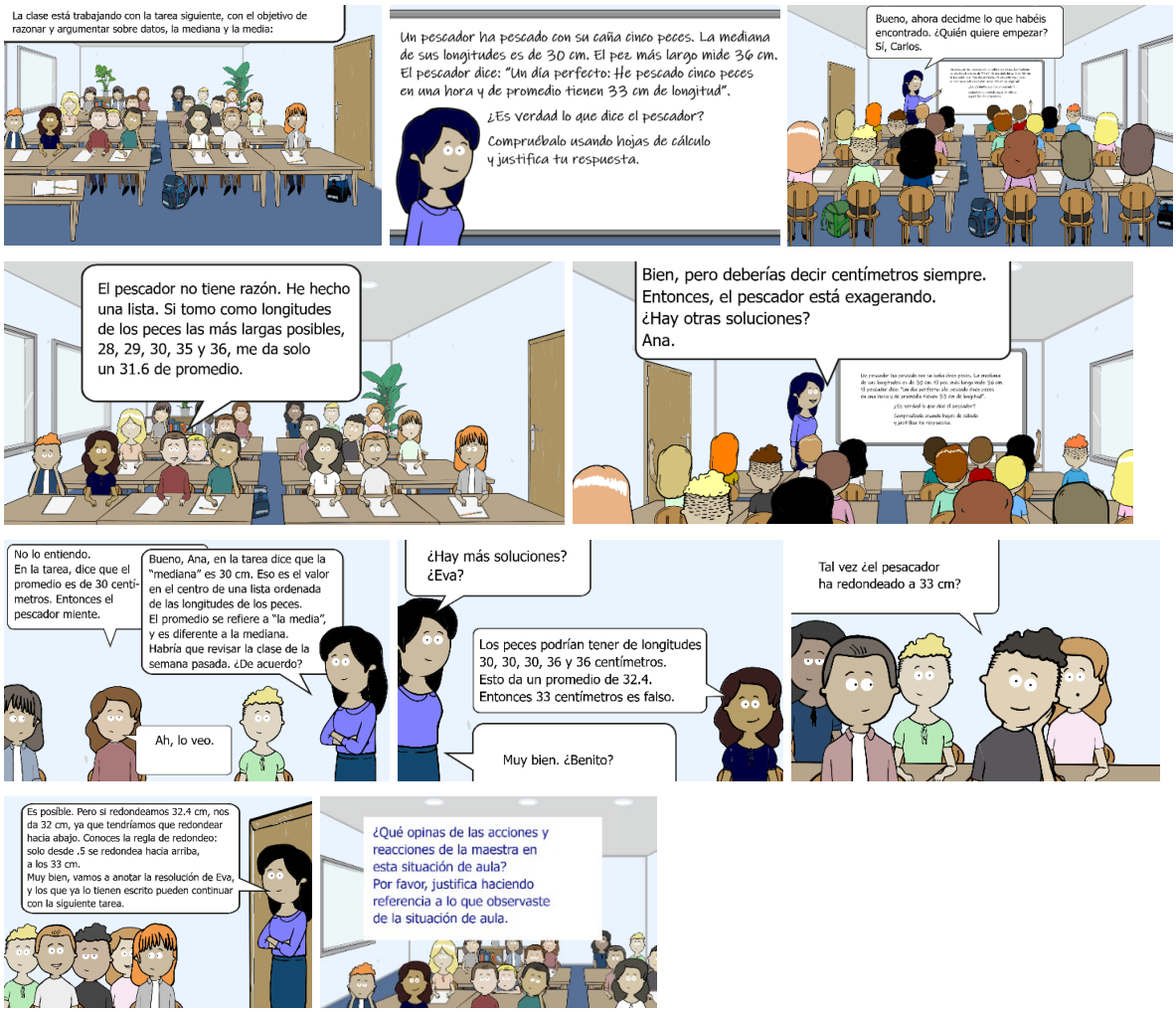
- ¿Cómo se articula la mirada profesional de los EPM cuando analizan una situación de enseñanza-aprendizaje representada en una viñeta en la que la actuación de la docente es mejorable en cuanto a los criterios introducidos anteriormente?

METODOLOGÍA

Los participantes fueron 60 EPM de Ludwigsburg University of Education (Alemania). Estos EPM estaban participando en cuatro seminarios diferentes: un seminario sobre representaciones de objetos matemáticos en clase (N_1=15), un seminario sobre modelización (N_2=10), un seminario que acompaña el semestre de prácticum (N_3=22) y un seminario focalizado en la enseñanza de grupos de alumnos heterogéneos (N_4=13). Ninguno de estos seminarios tenía como objetivo particular abordar los procesos argumentativos ni las oportunidades de razonamiento argumentativo. Esto justifica que nuestro estudio sea de carácter exploratorio en relación con el objetivo de investigación de explorar la mirada profesional específica de los EPM sin preparación específica. Los EPM resolvieron la viñeta que se presenta en la Figura 1 en su propio seminario.

Figura 1

Viñeta en forma de cómic (Kuntze y Krummenauer, 2024). Fuente: elaboración propia.



La viñeta presenta una situación de aula con estudiantes de 12 a 14 años, en la que acciones mejorables de la maestra pueden identificarse en relación con los criterios (1) a (6) introducidos anteriormente. La maestra no aprovecha la oportunidad de contraargumento (1) ya que se podrían

usar los valores 30.4 y 36.4 (es decir, 30.4; 30.4; 30.4; 36.4; 36.4) resultando en un promedio de 32.8 (que redondeado sería 33) lo que confirmaría la frase del pescador, la maestra no asegura la accesibilidad óptima de los argumentos del alumnado entre sus pares, ya que estos no se fijan ni se visualizan en la pizarra, ni son repetidos por sus pares (2), además no insiste en referencias precisas, por ejemplo, cuando Benito interviene con una idea nueva (3), cambia de tema prematuramente en varias ocasiones cuando hubiera sido posible una mayor argumentación (4), interactúa con los alumnos de manera individual, sin incluir a más compañeros (5), y no aprovecha las oportunidades para fomentar el metaconocimiento sobre formas de argumentación mediante reflexiones retrospectivas sobre actividades previas de razonamiento argumentativo (6).

La pregunta final de la viñeta que debían responder los EPM es abierta "¿Qué opinas de las acciones y reacciones de la maestra en esta situación de aula? Por favor, justifica haciendo referencia a lo que observaste de la situación de aula." El objetivo de enseñanza relativo a la argumentación se menciona al inicio de la viñeta, en la primera imagen. De este modo, la mirada profesional específica no se estimuló explícitamente mediante la pregunta, y fue la propia viñeta, con las características de la situación de aula, el origen del *noticing* o *no-noticing* de los EPM.

Los datos son las respuestas de los EPM a la pregunta abierta de la viñeta. Estos datos fueron analizados de manera interpretativa (*content analysis*, Mayring, 2015) según los criterios descritos en la parte teórica (Kuntze y Krummenauer, 2024) obteniendo códigos. Tras estos códigos basados en estos criterios, las respuestas también fueron analizadas de manera exploratoria ("bottom-up") con respeto a la evaluación de la argumentación en la situación de aula por los futuros maestros.

ANÁLISIS Y RESULTADOS

Para responder a las preguntas de investigación y mostrar resultados de la codificación, presentamos ejemplos que fueron seleccionados para representar la diversidad de respuestas:

Algunas de las respuestas eran relativamente cortas. Un ejemplo es EPM#21, quien respondió:

> "Observaciones sobre las acciones y reacciones de la maestra: En la clase sobre mediana y media la maestra trata a los alumnos con aprecio y de manera amable. Ella corrige a los alumnos, si por ejemplo una unidad no es mencionada. Esto muestra que reacciona de manera matemáticamente correcta y que corrige. En algunas situaciones, por ejemplo, cuando indica la diferencia entre mediana y media de manera muy específica, podría haber dado más detalle, según mi opinión. Alumnos con más dificultades seguramente no han podido seguir esta situación y hubieran necesitado una explicación más detallada. El uso de la pizarra también hubiera ayudado. Es estupendo que [la maestra] quiera entender muchos procedimientos de resolución y que apoye a los alumnos en eso positivamente." (EPM#21, traducido)

En esta respuesta, no hay referencia a criterios vinculados a la calidad argumentativa ni a oportunidades de razonamiento argumentativo. Lo que, según el EPM#21, falta parece estar más vinculado a las explicaciones dadas por la maestra que a promover la actividad argumentativa del alumnado. Por tanto, en esta respuesta no se identifican ninguno de los códigos (1) a (6). Además, no se identifican evaluaciones con respeto a la actividad argumentativa u objetivos de argumentación.

En la respuesta del EPM#11 se observa que primero describe la situación, identifica varios aspectos positivos y también aspectos críticos de la actuación de la maestra. Uno de los cinco puntos críticos destacado por este EPM es el punto c):

> "c) poca promoción de la argumentación matemática autónoma [individual]. La maestra indica varias veces reglas o resultados correctos, pero no se encuentra una negociación colectiva de argumentos matemáticos:
>
> o No se puede observar que insista en las justificaciones ('¿Cómo has llegado a eso?')
>
> o No se observan visualizaciones (en la pizarra) o contraejemplos en la discusión colectiva.

o No hay clarificación de la contradicción entre las dos propuestas (por ejemplo [entre] los 31.6 cm de Carlos vs. los 32.4 cm de Eva)

La clase está manejada más de manera centrada en la maestra que orientada en los alumnos."

Posteriormente, EPM#11 concluye que, entre otros puntos calificados como "potencialmente inhibitorios": "[...] la argumentación matemática es superficial" y "[...] el terminar la discusión prematuramente hace que el resultado correcto sea más importante que la comprensión".

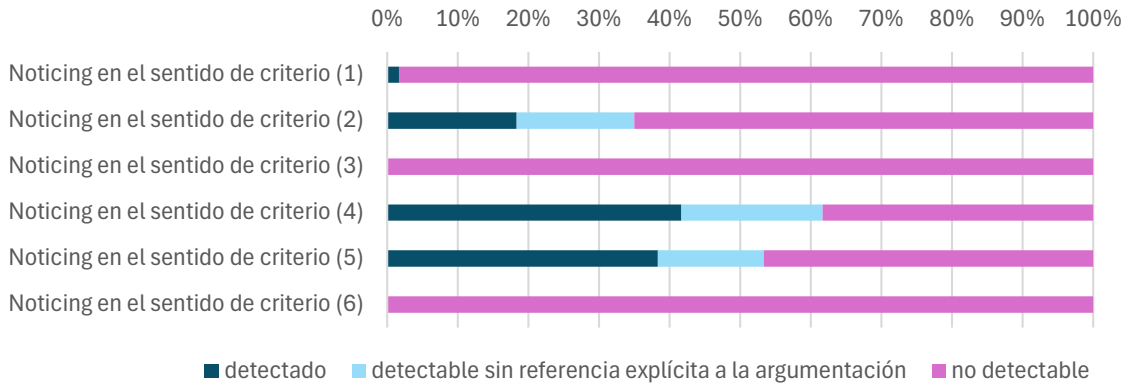
El análisis de esta respuesta muestra que el EPM#11 menciona varias acciones de la maestra que serían mejorables para promover la argumentación. EPM#11 evalúa la interacción como "superficial" y señala que diferentes cuestiones que podrían haber sido discutidas se han cerrado prematuramente (criterio 4). No obstante, en el análisis del EPM#11 el criterio de referenciar de manera precisa vinculado a la discursividad (criterio 3) no es detectable, como tampoco la oportunidad argumentativa relacionada con el análisis matemático de la tarea (criterio 1) ni el criterio de metaconocimiento de la argumentación (criterio 6). Como el EPM#11 señala que no hay una "negociación colectiva de argumentos matemáticos", se le asignó el código de inclusión en el discurso argumentativo (criterio 5). También destaca la falta de "visualizaciones" para apoyar la argumentación, que es un elemento relevante para el criterio 2 de asegurar la accesibilidad de las argumentaciones entre pares.

En la respuesta, hay más aspectos relevantes para la argumentación, la evaluación de que "la argumentación matemática es superficial" se basa en varias observaciones y características específicas de la actuación, como, por ejemplo, la ausencia en la viñeta de estrategias por parte de la maestra para "insistir en justificaciones".

La Figura 2 muestra las frecuencias de aparición de los códigos (criterios) en las respuestas de los 60 EPM. Se observan, en general, bajas frecuencias de *noticing* en los EPM. Los criterios a los que atendieron en mayor medida fueron: (2) asegurar la accesibilidad de las argumentaciones del alumnado entre sus pares; (4) evitar cambiar de tema prematuramente cuando es posible o necesaria más argumentación; (5) incluir la mayor cantidad posible de alumnado en el discurso activo y evitar diálogos uno-a-uno entre la maestra y alumnos particulares.

Figura 2

Diagrama con frecuencias relativas a los criterios (1) a (6). Fuente: Elaboración propia.



DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En primer lugar, nos gustaría señalar las limitaciones del estudio: es un estudio exploratorio y no representativo. En este estudio, solo un grupo de EPM alemanes ha analizado una única viñeta por lo que no se pueden generalizar los resultados. No obstante, es posible responder a la pregunta de investigación formulada. Los resultados señalan que los EPM que han participado en este estudio mostraron una mirada profesional poco desarrollada en cuanto a la actuación mejorable de la maestra en la situación de aula. Los criterios relacionados con la calidad argumentativa y con el uso de

oportunidades de razonamiento argumentativo no han jugado un papel significativo en la mirada profesional (Sherin et al., 2011) de los EPM. Es posible que esto sea consecuencia de la falta de un modelo mental sobre cómo podría desarrollarse una interacción con carácter argumentativo. Las bajas frecuencias de mirada profesional con respeto a los criterios relevantes a la discursividad sugieren que los EPM no disponían de suficiente conocimiento sobre las posibilidades que las normas de la discursividad ofrecen para la calidad de interacción en el aula (Kuntze, 2012; Kuntze y Friesen, 2018). Los resultados pueden fomentar el desarrollo de viñetas para profundizar en la investigación empírica sobre la competencia mirar profesionalmente las oportunidades de argumentación, pero también para la formación de los EPM a través de reflexiones sobre situaciones en el aula focalizadas en criterios de calidad argumentativa (Kuntze y Krummenauer, 2024).

Además, las creencias de los EPM sobre la interacción en clase pueden haber jugado un papel relevante (Kuntze, 2012) y ponen de manifiesto la necesidad de desarrollo, no sólo en relación con cómo la interacción puede aprovecharse para promover actividades de argumentación en el aula, sino también respecto a lo que se requiere para una argumentación de calidad entre el alumnado. El estudio pone de relieve la necesidad de desarrollar la competencia de mirar profesionalmente vinculada a la calidad argumentativa y al uso de oportunidades de razonamiento argumentativo en los programas de formación inicial y continua del profesorado.

Agradecimientos

Esta investigación se ha realizado, en parte, con el apoyo del proyecto CIAICO/2024/150 de la Generalitat Valenciana (Conselleria de Educación, Cultura, Universidades y Empleo).

Referencias

Amador, J., Bragelman, J. y Castro Superfine, A. (2021). Prospective teachers' noticing: A literature review of methodological approaches to support and analyse noticing. *Teaching and Teacher Education, 99*, https://doi.org/10.1016/j.tate.2020.103256

Amador, J. M., Males, L. M., Earnest, D. y Dietiker, L. (2017). Curricular noticing: Theory on and practice of teachers' curricular use. In E. O. Schack, M. H. Fisher y J. A. Wilhelm (Eds.), *Teacher noticing: Bridging and broadening perspectives, contexts, and frameworks* (pp. 427–443). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-46753-5_25

Cohors-Fresenborg, E. (2019). Metacognitive and discursive activities – an intellectual kernel of classroom discussions in learning mathematics. En Jankvist, U. T., Van den Heuvel-Panhuizen, M. y Veldhuis, M. (Eds.). *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME11).* Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME.

Cohors-Fresenborg, E. y Kaune, C. (2007). Modelling classroom discussions and categorizing discursive and metacognitive activities. *Proceedings of CERME5* (pp. 1180–1189). ERME.

Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G., Valls, J. y Callejo, M.L. (2018). Noticing students' mathematical thinking: characterization, development and contexts. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 13,* 39-61. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i13.229

Friesen, M. y Kuntze, S. (2016). Teacher students analyse texts, comics and video-based classroom vignettes regarding the use of representations - Does format matter? En Csíkos, C., Rausch, A. y Szitányi, J. (Eds.). *Proceedings of the 40th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* (Vol. 2, pp. 259–266). PME.

González-Forte, J. M. y Planas, N. (2024). Cómo miran profesionalmente los futuros maestros el vocabulario, las explicaciones y los ejemplos en la enseñanza de fracciones. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 297-304). SEIEM.

Hanna, G. (2000). Proof, Explanation and Exploration: An Overview. *Educational Studies in Mathematics, 44*, 5–23. https://doi.org/10.1023/a:1012737223465

Hartmann, S., Krummenauer, J. y Kuntze, S. (2023). Mathematics teachers' analysis of modelling situations in the classroom: A vignette-based study. En Drijvers, P., Csapodi, C., Palmér, H., Gosztonyi, K. y Kónya, E. (Eds.). *Proceedings of the Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13).* (pp. 1193-1200) Alfréd Rényi Institute of Mathematics and ERME.

Heintz, B. (2000). *Die Innenwelt der Mathematik. Zur Kultur und Praxis einer beweisenden Disziplin.* [The inside world of mathematics. On the culture and practice of a proving science]. Springer.

Jacobs, V. R., Lamb, L. L. C. y Philipp, R. A. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(2), 169–202. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.41.2.0169

Krummenauer, J. y Kuntze, S. (2019). Primary students' reasoning and argumentation based on statistical data. En Jankvist, U. T., Van den Heuvel-Panhuizen, M. y Veldhuis, M. (Eds.). *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME11).* Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERM.

Kuntze, S. (2008). Fostering geometrical proof competency by student-centred writing activities. En O. Figueras O., Cortina, J.L., Alatorre, S., Rojano, T. y Sepúlveda, A. (Eds.), *Proceedings of joint meeting PME32 and PME-NA XXX* (Vol. 3, pp. 289-296). PME.

Kuntze, S. (2012). Pedagogical content beliefs: global, content domain-related and situation-specific components. *Educational Studies in Mathematics, 79*(2), 273-292. https://doi.org/10.1007/s10649-011-9347-9

Kuntze, S. y Friesen, M. (2018). Teachers' criterion awareness and their analysis of classroom situations. En E. Bergqvist, M. Österholm, C. Granberg y L. Sumpter (Eds.), *Proceedings of the 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 275-282). PME.

Kuntze, S. y Krummenauer, J. (2024). Promoting discourse and argumentation in mathematics classroom interaction as a challenge for pre-Service teachers – vignette-based learning opportunities as a possible solution pathway. En J. Morska y A. Rogerson (Eds.), *Building on the past to prepare for the future. Proceedings of the 18th International Conference of The Mathematics Education for the Future Project, Bologna* (pp. 173-181). WTM. https://doi.org/10.37626/GA9783959872881.0.32

Kuntze, S., Friesen, M., Krummenauer, J., Skilling, K., Fernández, C., Ivars, P., Llinares, S., Samková, L. y Healy, L. (2021). Multi-criterion noticing: Pre-service teachers' difficulties in analysing classroom vignettes. En M. Inprasitha, N. Changsri y N. Boonsena (Eds.). *Proceedings of the 44th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 173-183). PME.

Mayring, P. (2015). *Qualitative Inhaltsanalyse*. [Qualitative Content Analysis]. Beltz.

Nowińska, E. y Praetorius, A.-K. (2017). Evaluation of a rating system for the assessment of meta-cognitive-discursive instructional quality. En T. Dooley y G. Gueudet (Eds.), *Proceedings of CERME10* (pp. 3121–3128). DCU Institute of Education and ERME.

Reiss, K. y Renkl, A. (2002). Learning to prove: The idea of heuristic examples. *ZDM, 34*(1), 29–35. https://doi.org/10.1007/bf02655690

Sherin, M., Jacobs, V. y Philipp, R. (Eds.). (2011). *Mathematics teacher noticing. Seeing through teachers' eyes*. Routledge.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4–14. https://doi.org/10.3102/0013189X015002004

Stylianides, A. J., Bieada, K. N. y Morselli, F. (2016). Proof and argumentation in mathematics education. En A. Gutiérrez, G. C. Leder y P. Boero (Eds.), *The second handbook of research on the psychology of mathematics education.* (pp. 315–351). Sense.

Toulmin, S. (2003). *The use of argument* (2. Ed.). University Press.

LA PERSISTENCIA DEL MODELO PARTE-TODO FRENTE AL SIGNIFICADO DE MEDIDA: UN ESTUDIO SOBRE EL RAZONAMIENTO DE MAESTROS EN FORMACIÓN ANTE TAREAS DE MULTIPLICACIÓN DE FRACCIONES.

The persistence of the part–whole interpretation over the measurement meaning: evidence from pre-service primary teachers' reasoning in fraction multiplication tasks

López, A., Arias, M., Lascorz-Lozano, L., Mengual, E. y Rodríguez-Crespo, M.

Universidad de Zaragoza

Resumen

Esta investigación analiza el conflicto cognitivo que surge en futuros maestros de Educación Primaria al interpretar una tarea de multiplicación de fracciones desde el modelo de medida. La muestra fue intencional y estuvo compuesta por 18 estudiantes del grado de Maestro en Educación Primaria de la Universidad de Zaragoza. Los participantes debían justificar el proceso de resolución de un estudiante hipotético que utiliza únicamente representaciones gráficas. El objetivo es analizar en qué medida el significado parte–todo, predominante en la instrucción escolar, actúa como obstáculo para reconocer la fracción como una unidad de medida iterable. Como señalan Fazio y Siegler (2020), comprender las fracciones como magnitudes en una escala numérica es un predictor clave del éxito matemático. El análisis de las producciones escritas revela dificultades para pasar de la partición visual a la justificación conceptual del algoritmo desde el significado de medida.

Palabras clave: *conflicto cognitivo, fracción como medida, número racional, significado parte-todo.*

Abstract

This study examines the cognitive conflict that arises in pre-service primary teachers when interpreting a fraction multiplication task from a measurement perspective. The sample consisted of 18 pre-service teachers who were asked to justify the solution of a hypothetical student using only graphical representations. The aim is to analyse to what extent the part–whole meaning—predominant in school instruction—acts as an obstacle to recognising fractions as iterable units of measure. As noted by Fazio and Siegler (2020), understanding fractions as magnitudes on a numerical scale predicts later mathematical success; however, the bias towards dividing a discrete whole often limits teachers' explanations of multiplicative processes. Analysis of the written responses reveals difficulties in moving from visual partitioning to a conceptual justification based on measurement.

Keywords: *Fraction as measurement, fraction multiplication, part–whole meaning, pre-service primary teachers.*

INTRODUCCIÓN

La investigación en educación matemática ha mostrado que el número racional puede interpretarse desde distintos significados. Tal como lo señala Kieren (1980), Freudenthal (1983) y posteriormente Behr et al., (1992) a las fracciones se les puede asociar el significado de parte–todo, operador, cociente, razón y medida. La comprensión conceptual de la fracción implica la capacidad de movilizar estos significados en función de las situaciones matemáticas en las que aparece.

López, A., Arias, M., Lascorz-Lozano, L., Mengual, E. y Rodríguez-Crespo, M. (2026). La persistencia del modelo parte-todo frente al significado de medida: un estudio sobre el razonamiento de maestros en formación ante tareas de multiplicación de fracciones. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (pp. 346-353). SEIEM.

En la enseñanza escolar se suele privilegiar el significado parte–todo, generalmente asociado a representaciones de partición de un todo geométrico, lo que puede limitar la comprensión de otros significados necesarios para interpretar situaciones matemáticas más complejas (Escolano y Gairín, 2005). En el currículo de Aragón se plantea que "una enseñanza de las fracciones basada fundamentalmente en el modelo parte-todo obstaculiza la comprensión de estas como una forma de representación de un nuevo tipo de número, pero número, al fin y al cabo: el número racional" (Gobierno de Aragón, 2022)

Este trabajo forma parte de una investigación centrada en la comprensión del número racional en la Educación Primaria. En ese sentido, el estudio se centra en una tarea en la que se presenta la resolución gráfica de una multiplicación de fracciones interpretada desde el modelo de medida, donde una fracción representa una cantidad de magnitud y la otra actúa como operador. A los futuros maestros se les solicita justificar los distintos pasos de la resolución realizada por un estudiante hipotético. A partir de esta tarea analizamos qué significados de la fracción movilizan los futuros docentes al interpretar representaciones gráficas, qué posibles evidencias se tienen sobre el uso de la fracción con el significado de medida, la posible incidencia del significado parte–todo, fuertemente arraigado en la instrucción escolar, como obstáculo para comprender la fracción como unidad de medida iterable. En consecuencia, nos planteamos los siguientes objetivos: (1) caracterizar los significados de fracción que ponen en evidencia los futuros maestros en sus producciones escritas, (2) identificar, en las producciones escritas, evidencias del uso de la fracción con el significado de medida. (3) identificar evidencias del significado parte–todo como obstáculo en la comprensión de la fracción como medida.

MARCO TEÓRICO

La fracción como medida

Diversos estudios han destacado la importancia de comprender las fracciones como magnitudes. Fazio y Siegler (2020) señalan que la comprensión de las fracciones como magnitudes en una escala numérica constituye un predictor significativo del éxito matemático posterior. Sin embargo, el predominio de interpretaciones basadas en la partición de un todo discreto puede limitar la capacidad de los estudiantes para interpretar fracciones en contextos multiplicativos.

En el contexto de este trabajo de investigación, se ha definido el significado de la medida de la siguiente manera. En general, dada una cantidad de magnitud (m) y una unidad de medida (u) de la misma magnitud, la fracción *(a/b)u* expresa la medida de la cantidad de magnitud *m*. *El denominador de la fracción* (b) indica que para poder efectuar la medida hemos utilizado "subunidades" de medida *(1/b)* de unidad. También, que se ha fraccionado la unidad de medida en b partes iguales. El numerador de la fracción (a) indica el número de "subunidades" de medida de unidad *(1/b)* que es necesario utilizar para completar la cantidad de magnitud *m*. Además, se sabe que a y b son naturales y b no es cero.

De manera general, la fracción como medida se interpreta como la expresión de una cantidad de magnitud respecto de una unidad de referencia. El denominador indica la subdivisión de la unidad en partes iguales y el numerador expresa el número de subunidades necesarias para medir la cantidad considerada. Por otra parte, la multiplicación de fracciones modeliza situaciones en las que una fracción representa la medida de una cantidad de magnitud y otra fracción actúa como operador sobre ella. La operación expresa, por tanto, una transformación de la medida inicial, lo que exige coordinar la unidad de referencia, la construcción de subunidades y la interpretación de la fracción como cantidad iterable y no únicamente como parte de un todo (Escolano, 2007).

Parte todo como obstáculo

El significado de fracción como parte-todo se ha usado históricamente, en el aula, como un recurso para introducir de manera temprana la representación de las fracciones de una manera intuitiva

utilizando la idea de contar partes de un todo (Behr et al., 1992). Aunque este enfoque facilita una primera aproximación al concepto, diversos estudios han señalado que su uso exclusivo puede generar dificultades para comprender otros significados del número racional (Rico, 1997; Castro, 2008). En ese sentido, el significado parte-todo puede operar como un obstáculo cuando se estabiliza como significado dominante. Su énfasis en la partición de un todo en partes iguales favorece la interpretación de la fracción como una cantidad menor o igual que la unidad, lo que dificulta la comprensión de fracciones impropias y la transición hacia otros significados, como medida, cociente, razón u operador (Simon et al., 2018; Diputra et al., 2023).

Escolano y Gairín (2005) se plantean un conjunto de interrogantes en torno al significado de parte-todo, entre otras se cuestionan el por qué se prioriza su utilización en el aula. Por otra parte, Escolano (2007) señala que la enseñanza sustentada en el modelo parte-todo crea obstáculos didácticos: obstaculiza la formación de concepciones adecuadas de la fracción, obstaculiza la separación conceptual del número racional y del número natural. Por su parte, Gairín y Muñoz (2005) plantean esa separación argumentando que en el significado parte todo se utiliza la percepción visual para hacer traslaciones por medio de un doble recuento, entre representaciones gráficas y simbólicas describiendo una situación estática. Mientras que el significado de medida configura en número racional como un número medida que se obtiene después de un proceso que implica tomar decisiones sobre la técnica de medida y el fraccionamiento de la unidad. Otros autores, como Wilkins y Norton (2018) señalan que la iteración es el eslabón perdido en el estudio de las fracciones. En su estudio, plantean que muchos estudiantes pueden dividir una unidad, pero fallan al concebir que una fracción como 5/4 es el resultado de repetir cinco veces una unidad de medida de tamaño 1/4. Concluyen que enseñar la medida sin trabajar la iteración previamente genera brechas en la comprensión de fracciones.

METODOLOGÍA Y ANÁLISIS

Este estudio es descriptivo y está basado en el análisis de producciones escritas. La muestra fue de carácter intencional y estuvo compuesta por 18 estudiantes del grado de Maestro en Educación Primaria de la Universidad de Zaragoza (Campus Huesca). Estas producciones fueron seleccionadas por presentar un patrón común de abordaje de la tarea. En todas ellas, los maestros en formación toman como punto de partida la representación gráfica incluida en el enunciado, la reproducen y trabajan sobre ella para responder a la tarea.

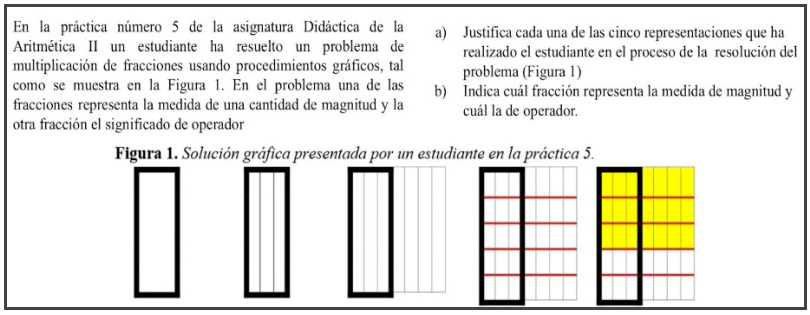
Los participantes habían trabajado previamente el significado de fracción desde el modelo de medida en el contexto de la asignatura Didáctica de la Aritmética II (seis sesiones teóricos-prácticas de 110 minutos cada una). Las actividades desarrolladas incluían situaciones de medición, representación e interpretación de operaciones con fracciones, orientadas a la construcción e iteración de subunidades, la reinterpretación de la unidad de referencia y el uso de la fracción como operador sobre una cantidad de magnitud. La multiplicación de fracciones se introdujo mediante tareas en las que una fracción representaba una cantidad de magnitud y la otra actuaba como operador sobre dicha cantidad, coordinando así los significados de medida y operador. Las actividades realizadas durante las sesiones fueron tomadas y adaptadas de las tareas propuestas en Escolano (2007).

La tarea seleccionada para este estudio se centra en la interpretación de una resolución gráfica de un problema de multiplicación de fracciones. En la consigna se informa que una de las fracciones representa la medida de una cantidad de magnitud y la otra tiene significado de operador. Los maestros en formación deben responder a dos cuestiones a partir de la solución gráfica presentada por un estudiante hipotético. Tienen que justificar cada una de las cinco representaciones realizadas durante el proceso de resolución e identificar cuál fracción corresponde al significado de medida y cuál al significado de operador. Desde el punto de vista matemático, la tarea exige coordinar dos significados del número racional. La fracción con significado de medida expresa una cantidad de magnitud en relación con una unidad de referencia, mientras que la fracción con significado de

operador actúa sobre esa cantidad, transformándola al tomar una parte de ella. Por ello, la resolución gráfica no se reduce a aplicar el algoritmo de multiplicación de fracciones, sino que requiere interpretar la unidad, las particiones sucesivas, la cantidad fraccionaria representada y la acción del operador sobre dicha cantidad. En este sentido, la tarea permite indagar si los estudiantes distinguen entre representar una cantidad fraccionaria y operar sobre ella mediante otra fracción. En la Figura 1 se muestra el enunciado de la tarea presentada a los maestros en formación.

Figura 1

Enunciado de la tarea.



Las unidades de análisis corresponden a cada una de las respuestas escritas elaboradas por los estudiantes ante la tarea propuesta, incluyendo explicaciones verbales, representaciones gráficas y expresiones simbólicas utilizadas para justificar el procedimiento. El análisis de los datos se realizó mediante un proceso de categorización cualitativa de las respuestas dadas a la tarea, en las producciones escritas. La codificación se llevó a cabo mediante un proceso de triangulación entre los investigadores que incluyó discusión y consenso en los casos de discrepancia. Las dimensiones de análisis se vinculan con conocimientos abordados previamente en la propuesta formativa. En particular, antes de la tarea analizada, los futuros maestros habían trabajado actividades orientadas al estudio del significado de la fracción como medida, mediante situaciones de medición, representación e interpretación de operaciones. En estas actividades se discutió que la fracción no solo puede expresar una parte de un todo dividido en partes iguales, sino también la medida de una cantidad de magnitud respecto de una unidad, la iteración de una subunidad y la acción de un operador sobre una cantidad. Sobre la base de la propuesta formativa y el marco teórico, se han definido las dimensiones de análisis a priori. Las categorías se construyeron y refinaron a partir de una revisión previa de las producciones escritas de los maestros en formación. En este sentido, el sistema de categorías adoptado tiene carácter mixto.

Dimensión 1. Esta dimensión analiza si el estudiante identifica que la fracción se construye a partir de una unidad repetible y que puede surgir una nueva subunidad (1/15). Para esta dimensión se han establecido cinco categorías. (1) U0: Unidad implícita. El estudiante describe el dibujo, pero no menciona la unidad ni su papel en la construcción de la fracción, (2) U1: Unidad como todo geométrico. La unidad se interpreta únicamente como “la figura completa” o “el rectángulo entero”, (3) U2: Unidad como referencia de partición. Se reconoce que la unidad se divide en partes iguales (tercios), pero sin interpretarla como unidad de medida iterable, (4) U3: Unidad como medida iterable. El estudiante explica que la fracción surge al iterar una subunidad (ej. 7 veces 1/3) y (5) U4: Reconstrucción de nueva subunidad. Se reconoce explícitamente que al subdividir en quintos aparece una nueva subunidad (1/15).

Dimensión 2. Esta dimensión identifica qué significado conceptual de fracción utiliza el estudiante. Para esta dimensión se han establecido tres categorías. (1) FPT: Parte-todo. La fracción se interpreta como partes de un todo dividido incluso cuando la cantidad supera la unidad, (2) FTR: Transición. Aparecen referencias a medida, pero mezcladas con parte-todo y (3) FM: Fracción como medida. La fracción se interpreta como cantidad de magnitud construida mediante iteración de una subunidad.

Dimensión 3. Esta dimensión estudia si el estudiante comprende que una fracción opera sobre una magnitud. Para esta dimensión se han establecido cuatro categorías. (1) M0: Descripción gráfica. El estudiante solo describe el dibujo sin justificar la operación, (2) M1: Procedimiento sin significado. Reconoce el resultado, pero no explica el proceso multiplicativo, (3) M2: Interpretación parcial del operador. Reconoce que una fracción modifica la otra, pero sin explicación completa y (4) M3: Fracción como operador. Explica que una fracción actúa como operador sobre la magnitud representada por la otra.

RESULTADOS

Ya hemos indicado que los maestros en formación reproducen mediante dibujos las cinco partes que componen la respuesta del alumno hipotético presentada en la tarea. A partir de esta representación, se observan diferentes formas de respuesta. Cuatro maestros en formación complementan el dibujo realizando marcas o coloreando partes de la figura y acompañan su explicación con justificaciones verbales y numéricas. Un participante realiza marcas en la representación gráfica, pero responde únicamente mediante expresiones numéricas. Diez maestros en formación explican la situación combinando argumentos verbales y numéricos, mientras que tres se limitan a proporcionar respuestas exclusivamente numéricas.

Por otra parte, se ha caracterizado la actuación de los maestros en formación a partir de las dimensiones, categorías y códigos de análisis previamente establecidos. Se definen perfiles de actuación (ver Tabla 1). Cada perfil refleja una forma particular de interpretar la unidad, movilizar significados de la fracción y comprender la multiplicación de fracciones.

Tabla1

Perfiles de actuación de maestros en formación

Perfil	Dimensión-categorías	Descripción
P1 – Dominio parte-todo	U1, FPT, M0-M1	Interpretación basada en partes de un todo. No se reconoce la subunidad ni el operador.
P2 – Transición	U2-U3, FTR, M1-M2	Mezcla de explicaciones parte-todo y medida. Comprensión parcial del operador.
P3 – Uso de fracción como medida	U4, FM, M2-M3	Reconoce subunidad, iteración y operador. Justifica el resultado como medida.

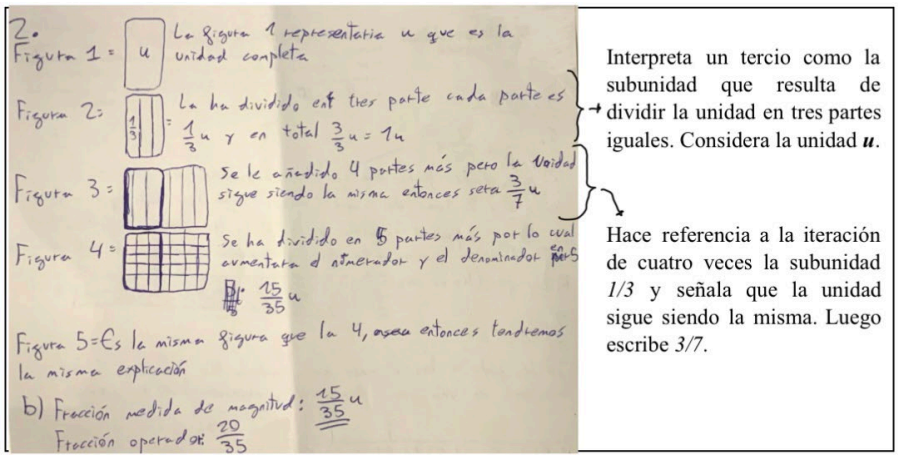
El análisis de las producciones permitió identificar tres perfiles de actuación en los maestros en formación a partir de las dimensiones y categorías establecidas. El perfil P1 corresponde a aquellos estudiantes cuyas respuestas se apoyan predominantemente en el significado parte–todo de la fracción. En este perfil, la unidad es interpretada como un todo geométrico (U1), generalmente identificado con "la figura completa" o "el rectángulo entero", sin considerar su función como unidad de medida iterable. En coherencia con ello, las producciones movilizan principalmente el significado parte–todo (FPT), centrándose en la identificación de partes coloreadas o subdivisiones de la figura. En relación con la multiplicación de fracciones, las respuestas se limitan a describir la representación gráfica o a reconocer el resultado obtenido, sin explicar el proceso multiplicativo ni la acción de una fracción sobre la otra (M0–M1). Este perfil pone en evidencia un predominio del modelo parte–todo que dificulta interpretar la fracción como medida y comprender la multiplicación como transformación de una magnitud.

El perfil P2 incluye a los estudiantes que comienzan a reconocer algunos elementos asociados al significado de medida, aunque todavía de manera inestable o parcialmente coordinada con el modelo parte–todo. En este perfil, la unidad ya no se interpreta únicamente como un todo geométrico, sino como una referencia susceptible de subdividirse en partes iguales (U2) o como una cantidad construida mediante la repetición de una subunidad (U3). Sin embargo, estas ideas conviven con interpretaciones propias del significado parte–todo. Por ello, las respuestas se clasifican en una

categoría de transición (FTR), ya que los estudiantes hacen referencias a la iteración de subunidades o a la medida de cantidades, pero continúan apoyándose en el reconocimiento visual de partes de un todo. En la comprensión de la multiplicación de fracciones, los estudiantes reconocen que una fracción modifica a la otra o identifican parcialmente el carácter operatorio de la operación, aunque sin desarrollar una explicación completa del proceso multiplicativo (M1–M2). Este perfil refleja una transición conceptual entre el predominio del significado parte–todo y la construcción de la fracción como medida. A manera de ejemplo se muestra, en la Figura 2, la producción escrita del estudiante E32. En este caso se puede visualizar la coexistencia de los dos significados. Inicialmente reconoce la unidad y expresa 1/3 *u*. Hace la referencia a la iteración de la subunidad "parcialmente" porque indica 4 veces en lugar de 7 veces la subunidad (1/3)*u* y luego escribe la fracción 3/7 (en lugar de 7/3). Esta fracción (3/7) ya no tiene el sentido de la medida. El estudiante sigue pensando en partes de un todo incluso cuando la cantidad supera la unidad. Este resultado coincide con lo planteado por Gairín y Muñoz (2005), Escolano (2007) y Diputra et al., (2023).

Figura 2

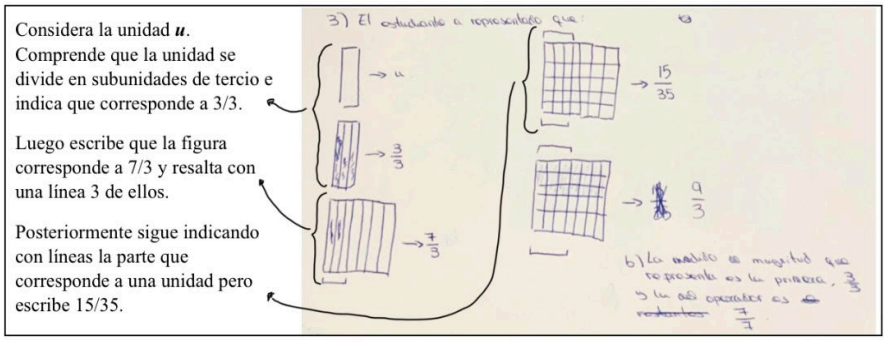
Respuesta dada por el E32 a la tarea



Otro ejemplo de este perfil lo mostramos en la Figura 3. Se corresponde con la producción escrita del estudiante E34. En su respuesta se puede observar que reconoce la unidad, es capaz de identificar la iteración de 7 veces la subunidad 1/3. Hasta este momento se mantiene en el significado de fracción como medida: ha identificado de manera adecuada la unidad y ha realizado correctamente la iteración de la subunidad tercios y lo ha escrito de manera adecuada 7/3. Pero en el siguiente paso escribe la fracción 15/35. El número 35 coincide con las partes en las que le ha quedado dividido el rectángulo completo. Esto lo interpretamos como una señal que está cambiando el significado de medida y se aproxima, en esta parte, al significado de la fracción como parte-todo. Es decir, no mantiene estable el significado de la medida y vuelve sobre el significado de parte-todo.

Figura 3

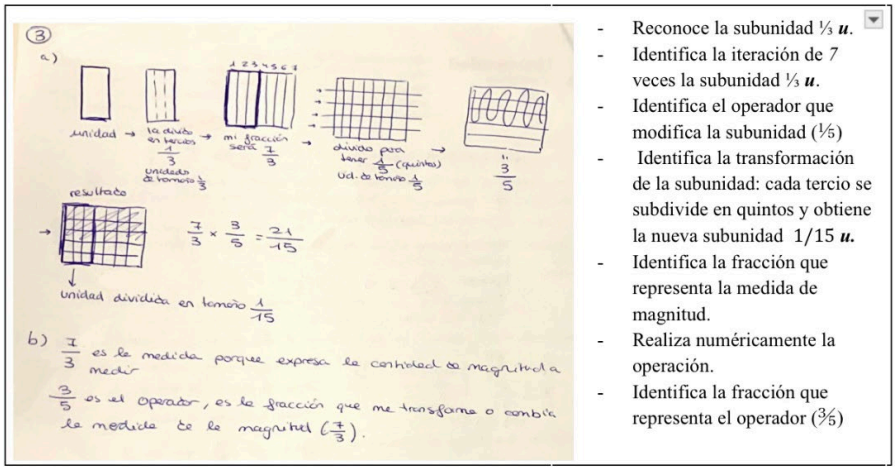
Respuesta dada por el E34 a la tarea



Finalmente, el perfil P3 reúne a aquellos estudiantes que interpretan la fracción desde el significado de medida y logran coordinar esta interpretación con el significado de operador. En este perfil, los estudiantes reconocen explícitamente que, al subdividir los tercios en quintos, emerge una nueva subunidad de medida; 1/15 (U4). La fracción se interpreta como una cantidad de magnitud construida mediante la iteración de una subunidad (FM) y las respuestas muestran una comprensión más elaborada de la relación entre unidad, subunidad y cantidad medida. Asimismo, los estudiantes reconocen que una fracción actúa como operador sobre la magnitud representada por la otra, explicando que el resultado de la multiplicación surge de aplicar una transformación sobre una cantidad previamente determinada (M2–M3). Aunque en algunos casos la explicación del proceso multiplicativo no está completamente desarrollada, este perfil evidencia una coordinación más estable entre los significados de medida y operador. A manera de ejemplo se muestra, en la Figura 4, la producción escrita del estudiante E89. En su respuesta se puede observar que identifica la unidad, reconoce la subunidad y la representa de manera adecuada, también identifica la iteración de la subunidad, es capaz de identificar la transformación de la subunidad y de escribirla de manera adecuada, distingue entre fracción-medida y fracción-operador. Este resultado se relaciona con lo planteado por Wilkins y Norton (2018) sobre el aprendizaje de la fracción desde la medida.

Figura 4

Respuesta dada por el E89 a la tarea



Los resultados obtenidos muestran que la mayoría de los futuros maestros no moviliza de manera estable el significado de fracción como medida en sus producciones escritas. La mitad de los estudiantes muestran el significado de parte-todo desde el inicio (9 estudiantes), otro grupo, de cuatro estudiantes, muestran una coexistencia de los significados de medida y parte todo, mientras que 5 estudiantes muestran el significado de la fracción como medida de manera adecuada.

CONCLUSIONES

El análisis de las producciones escritas de los futuros maestros permitió caracterizar los significados de fracción que ponen en evidencia al interpretar una tarea de multiplicación de fracciones basada en representaciones gráficas. La identificación de los perfiles constituye una aportación de este estudio.

Un hallazgo especialmente significativo del estudio es que el cambio desde una interpretación de la fracción como medida hacia una interpretación centrada en el modelo parte–todo aparece principalmente en el momento en que la tarea exige reinterpretar la unidad y coordinar nuevas subunidades. Mientras varios estudiantes logran inicialmente interpretar 7/3 *u* como iteración de 7 veces 1/3 *u*, algunos abandonan posteriormente esta interpretación cuando deben reconocer la aparición de 1/15 como nueva subunidad de medida. En ese momento, las explicaciones pasan de centrarse en la relación entre unidad, subunidad e iteración a describir únicamente la partición del rectángulo o el recuento de partes. Lo que interpretamos como una evidencia del abandono del

significado de medida y persistencia del significado parte-todo. Por otra parte, existen evidencias que sugieren el uso de la fracción con el significado de medida por parte de maestros en formación asociado con su proceso formativo, como se observa en la producción del estudiante E89 presentada en la Figura 3.

Los resultados muestran que, incluso después de haber trabajado el significado de fracción desde el modelo de medida, el significado parte–todo continúa organizando gran parte de las interpretaciones de los futuros maestros. Estos hallazgos ponen de manifiesto la necesidad de seguir desarrollando propuestas formativas que favorezcan la coordinación entre distintos significados de la fracción y promuevan la comprensión del número racional como medida de magnitudes.

Agradecimientos

Este trabajo se ha desarrollado dentro del grupo de investigación S60_26R "Investigación en Educación Matemática" financiado por el Gobierno de Aragón.

Referencias

Behr, M. J., Harel, G., Post, T. y Lesh, R. (1992). Rational number, ratio, and proportion. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 296–333). Macmillan.

Castro, E. (2008). *Pensamiento numérico y educación matemática*. Universidad de Granada.

Diputra, K. S., Suryadi, D. y Prabawanto, S. (2023). Analysis of the Elementary School Students' Learning Obstacles: A Case Study on the Concept of Fractions. *Al Ibtida: Jurnal Pendidikan Guru MI. 10*(1) 13-28. https://doi.org/10.24235/al.ibtida.snj.v10i1.13078

Escolano Vizcarra, R. (2007). *Enseñanza del número racional positivo en educación primaria: Un estudio desde los modelos de medida y cociente* (Tesis doctoral). Universidad de Zaragoza. https://zaguan.unizar.es/record/84666?ln=es

Escolano, R. y Gairín, J. M. (2005). Modelos de medida para la enseñanza de números racionales en educación primaria. *UNIÓN Revista Latinoamericana de Educación Matemática 1,* 17–35.

Fazio, L. K. y Siegler, R. S. (2020). Teaching fractions. En S. Loewenstein y E. Horne (Eds.), *The Cambridge handbook of thinking and reasoning* (pp. 555–577). Cambridge University Press.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. D. Reidel Publishing Company.

Gairín Sallán, J. M. y Muñoz Escolano, J. M. (2005). El número racional positivo en la práctica educativa: Estudio de una propuesta editorial. En A. Maz, B. Gómez y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática IX* (pp. 147-154). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM).

Gobierno de Aragón. (2022). Decreto 52/2022, de 27 de abril, del Gobierno de Aragón, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas de la Educación Primaria en la comunidad autónoma de Aragón. *Boletín Oficial de Aragón*, núm. 91, de 11 de mayo de 2022.

Kieren, T. E. (1980). The rational number construct: Its elements and mechanisms. En T. E. Kieren (Ed.), *Recent research on number learning* (pp. 125-149). ERIC/SMEAC.

Rico, L. (1997). Consideraciones sobre el currículo de matemáticas para educación secundaria. En L. Rico (Coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 15–38). Horsori / ICE Universidad de Barcelona.

Simon, M. A., Placa, N., Avitzur, A. y Kara, M. (2018). Promoting a concept of fraction-as-measure: A study of the Learning Through Activity research program. *Journal of Mathematical Behavior, 52*, 122–133. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2018.03.004

Wilkins, J. L. M. y Norton, A. (2018). Learning progression toward a measurement concept of fractions. *International Journal of STEM Education, 5*(1), Article 27. https://doi.org/10.1186/s40594-018-0119-2

MANIFESTACIÓN DEL TALENTO MATEMÁTICO EN UNA TAREA DE GENERALIZACIÓN

Manifestation of mathematical talent in a generalisation task

López-Moreno, M.[a], Torrente-Imbernon, L.[b] y Montejo-Gámez, J.[a]

[a]Universidad de Granada, [b]Centro de Magisterio La Inmaculada

Resumen

Este trabajo investiga las características que manifiesta el alumnado de secundaria con talento matemático durante el proceso de resolución de una tarea de generalización. Para ello, se realizó un estudio de dos casos basados en un chico y una chica de 14 y 15 años respectivamente, cuyos procesos de resolución de la tarea se registraron y analizaron a partir de unas categorías a priori *basadas en las características del talento documentadas en la literatura. Los resultados obtenidos mostraron gran parte de dichas características, entre las que destacaron la capacidad de generalización de los participantes, la creación de representaciones propias para organizar los datos, y la flexibilidad para modificarlas. Estos hallazgos se discuten frente a las características del talento matemático identificadas en investigaciones previas.*

Palabras clave: *talento matemático, educación secundaria, estudio de caso, generalización, flexibilidad*

Abstract

This study investigates the characteristics exhibited by secondary school mathematically talented students during the resolution process of a generalisation task. To this end, a case study was conducted involving a 14-year-old boy and a 15-year-old girl, whose problem-solving processes were recorded and analysed using a priori *categories based on the characteristics of mathematical talent documented in the literature. The results obtained captured many of these characteristics. Among these, their ability to generalise, the creation of their own representations to organise data, and the flexibility to modify them stood out. These findings are analysed in relation to the characteristics of mathematical talent identified in previous research.*

Keywords: *mathematical talent, secondary education, case study, generalisation, flexibility*

INTRODUCCIÓN, ANTECEDENTES Y OBJETIVO DE LA INVESTIGACIÓN

La atención educativa al alumnado con talento está garantizada por la normativa curricular LOMLOE, que señala que las administraciones educativas deben adoptar las medidas necesarias para identificar al alumnado talentoso, valorar sus necesidades y adoptar planes de actuación. En el caso de las matemáticas, autores como Leikin (2021) subrayaron que el desarrollo del alumnado con talento matemático plantea desafíos relevantes, relacionados con los entornos, actividades de aprendizaje y un profesorado adecuados. Abordar estos desafíos es, por tanto, una cuestión de interés para la investigación en educación matemática.

La conceptualización de talento matemático en este ámbito tiene como referencia el trabajo de Krutetskii (1976), que entendió el talento matemático como la aglutinación de habilidades que, potencialmente, conllevan el éxito en la actividad matemática. A partir de este trabajo, se han desarrollado numerosos estudios centrados en observar las acciones de alumnado de talento matemático con el fin de desarrollar de esta noción (p. e., Freiman, 2006; Greenes, 1981; Jaime y Gutiérrez, 2021; Leikin, 2021). Aunque no hay consenso entre todos los autores, hay rasgos

López-Moreno, M., Torrente-Imbernon, L. y Montejo-Gámez, J. (2026). Manifestación del talento matemático en una tarea de generalización. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (pp. 354-361). SEIEM.

compartidos que dan una idea acerca de cómo se entiende actualmente el talento matemático: (i) involucra un desempeño matemático destacado, que puede diferenciarse del rendimiento académico en la asignatura escolar; (ii) presenta un carácter relativo respecto del contexto educativo en el que se ubica el alumnado de talento; (iii) tiene una componente biológica, que es susceptible de ser desarrollada. Esta tercera característica, alineada con modelos del desarrollo del talento de la psicología, invita a considerar que la expresión del talento depende de catalizadores internos, asociados a la personalidad o la motivación, o externos como el contexto o las actividades que desarrolla la persona (Gagné, 2021).

Bajo esta perspectiva, el profesorado de matemáticas tiene la posibilidad de estimular el talento de su alumnado a través de la promoción de actividades desafiantes, y las de generalización de patrones proporcionan oportunidades para ello. La resolución de este tipo de tareas, ampliamente estudiadas en la literatura por su contribución al desarrollo del pensamiento algebraico (p. e. Callejo et al., 2016; Narváez et al., 2025), involucra el desarrollo por parte del alumnado de una serie de acciones que la literatura describe como características del talento matemático. En efecto, la identificación de patrones invita al alumnado a formular conjeturas e hipótesis, que están conectadas con la capacidad de generalización (Freiman, 2006; Greenes, 1981; Krutetskii, 1976), y existen estudios recientes, como los de Girit Yildiz y Durmaz (2021) o Ureña et al. (2024) que utilizaron tareas de patrones para observar características propias del talento matemático. Entre ellas destaca la flexibilidad, rasgo señalado por múltiples autores sobre talento matemático (p. e. Freiman, 2006; Greenes, 1981; Krutetskii, 1976), y cuya potencialidad para identificar el talento se ha investigado en estudios recientes como el de Mora et al. (2023). No obstante, y a pesar de los antecedentes mencionados, en la actualidad hay pocos trabajos centrados en comprender las características del talento matemático que se observan durante el proceso de identificación de patrones, cuando este proceso es imprescindible (el alumnado debe detenerse a analizar la situación). Esta falta de antecedentes motiva el interés de la siguiente pregunta de investigación: *¿Qué características del talento matemático emergen en el proceso de resolución de una tarea de generalización?*

Antecedentes

La investigación sobre talento matemático incluye trabajos que examinan las respuestas de estudiantes de talento ante cierto tipo de tareas desafiantes, como son las de visualización (p. e., Ramírez et al., 2010; Ramírez y Flores, 2017), modelización matemática (p. e., Ferrando et al., 2024), o problemas con apartados de complejidad creciente, o que requieren planteamientos novedosos frente a apartados anteriores (Mora et al., 2023). Entre este tipo de investigaciones, destacan aquellas centradas en la generalización. Krutetskii (1976) relacionó el talento matemático con la generalización de objetos, relaciones y operaciones matemáticas, y la interpretación de estos elementos ha dado lugar a literatura diversa. Estudios como los de Montejo-Gámez et al. (2020), o Mora et al. (2024) pusieron el foco en la generalización de estrategias, mientras que otros se centraron en la identificación de patrones. Entre estos últimos, que son de interés principal para este estudio, destacan trabajos como el de Girit Yildiz y Durmaz (2021) que investigaron las estrategias empleadas por estudiantes de talento ante patrones lineales y no lineales y encontraron su tendencia a razonar visualmente ante los primeros y numéricamente ante los no lineales. Por su parte, Ureña et al. (2024) analizaron las características de talento matemático que emergen en la resolución de tareas que involucran generalización, observando como resultados la búsqueda de estrategias eficientes y de representaciones simbólicas, así como una mayor complejidad en sus generalizaciones.

Objetivo

En virtud de la literatura descrita, se fija como objetivo del trabajo describir de las características del talento matemático que expresan dos estudiantes de secundaria durante la resolución de una tarea desafiante de identificación de patrones.

METODOLOGÍA

Para alcanzar el objetivo planteado, se llevó a cabo un estudio exploratorio de carácter cualitativo enfocado en la investigación de dos estudiantes pertenecientes a un programa de enriquecimiento en matemáticas: Aurora y Alfonso, cuyos nombres se han modificado para proteger su identidad. Estos participantes fueron seleccionados debido a los resultados de sus evaluaciones psicométricas. Aurora, de origen extranjero, tenía 15 años y llevaba los dos últimos en España en el momento del estudio. Comenzó dos cursos por debajo de su edad, pero su rendimiento le permitió alcanzar el 4º curso de la ESO. Obtuvo un CI de 124 (percentil 95) en la prueba de factor g-R (Cattell et al., 2017) con un intervalo de confianza de 115-133 (al 95% de confianza), y sus resultados en el subtest "Números" de la escala EFAI-3 (Santamaría et al., 2005) la situaron en el percentil 87. Por su parte, Alfonso tenía 14 años en el momento del estudio, cursaba 4º ESO, ya que fue adelantado de curso tras diagnosticarle altas capacidades y mantenía un rendimiento excelente en todas las materias escolares. Obtuvo un CI de 143 (percentil 99) en la prueba de factor g-R con un intervalo de confianza de 134-152 (al 95% de confianza), y sus resultados en el subtest "Números" lo situaron en el percentil 97.

La tarea elegida para el estudio fue inspirada por el algoritmo para fijar el domingo de Pascua:

> **Tarea (Años *Especiales*).** El Tercer Milenio empezó de una forma especial: el 1 de enero de 2001 fue lunes. Además, fue martes en 2002, fue miércoles en 2003, etc. Explica en qué años el 1 de enero coincide con un lunes, y justifica razonadamente tu respuesta.

El algoritmo, diseñado por Gauss, requiere considerar años bisiestos, y su corrección cada 100 años, por lo que no se esperaba que los participantes obtuvieran la matematización precisa de esta situación. Esta característica hace que la tarea sea pertinente para activar ciertas características del talento matemático. En primer lugar, era esperable que los estudiantes razonaran de forma heurística para identificar el patrón de los primeros 28 años, lo que tiene relación con el pensamiento divergente propio del talento (Freiman, 2006). Un análisis más detallado de los datos correspondientes a los primeros 28 años puede evidenciar capacidades singulares para organizar y gestionar datos (Greenes, 1981) y la identificación de la secuencia de años 6-11-6-5 dentro del mismo, que resuelve *localmente* la tarea e involucra la capacidad de generalización señalada.

Para la recogida de datos se diseñó un guion con preguntas para conocer si los estudiantes habían entendido el enunciado y con pistas para superar bloqueos evidentes, o para atender demandas explícitas de ayuda de los participantes. Estos guiones fueron utilizados por una investigadora para dirigir las dos sesiones, una por participante, en las que se registraron sus procesos de resolución mediante vídeo. El esquema de estas sesiones fue (i) entrega del enunciado e inicio de la grabación en vídeo, (ii) planteamiento de las preguntas orientadas a la comprensión de la tarea, (iii) trabajo autónomo del/de la estudiante, solo interrumpido por su demanda, o por bloqueo evidente y sostenido, en el que se preguntaba la razón del atasco y se ofrecían pistas, y (iv) cierre de la sesión y solicitud de aclaraciones por parte de la investigadora sobre la resolución dada. En los momentos (i)-(iii), solo se interactuó con el estudiante solo cuando ella/él mostraba un bloqueo evidente, o lo solicitaba expresamente. En (iv), la investigadora solicitó aclaraciones sobre el proceso de resolución que le habían dejado dudas. Al término de las sesiones, se dispuso de dos registros de vídeo incluyendo las respuestas a las preguntas iniciales, los procesos de resolución y las aclaraciones correspondientes, y dos producciones escritas, una por participante.

Análisis de datos

Para el análisis de los datos se identificaron categorías a priori a partir de características del talento matemático extraídas de la literatura (Freiman, 2006; Greenes, 1981; Krutetskii, 1976). Estas se muestran en la Tabla 1 organizadas en torno a tres dimensiones principales: percepción y memoria matemática, procesamiento de la información matemática y actitud matemática.

Tabla 1

Categorías a priori *establecidas para el estudio*

Dimensión	Característica
Percepción y memoria matemática	- Comprensión de la estructura formal y la clave de un problema - Generaliza relaciones, objetos y operaciones matemáticas - Memoria matemática
Procesamiento de la información matemática	- Desarrollo de estrategias efectivas y organización de los datos - Pensamiento lógico en relaciones espaciales, numéricas y simbólicas - Optimización del pensamiento matemático - Flexibilidad en el proceso mental o en el manejo de datos - Originalidad en la interpretación o en la forma de trabajar. Pensamiento divergente
Actitud matemática	- Persistencia para terminar las tareas - Interés por la calidad de la solución - Pensamiento crítico

El proceso de análisis de datos llevado a cabo se organizó en cuatro pasos para cada vídeo: (1) visionado inicial, para estructurar el proceso de resolución de la tarea, y que llevó a identificar los *hitos* (acontecimientos que originaron o modificaron las estrategias del estudiante), y las *fases* (periodos de tiempo dedicados a actividades específicas). Estos elementos se representaron en una línea temporal para cada resolución, que permitieron visualizar los procesos (Figura 1). (2) Segundo visionado y transcripción completa de las grabaciones de vídeo. (3) Análisis de las características del talento, que partió de la revisión de cada hito y la selección de *evidencias*, que fueron episodios en los que había indicios de talento. Se encontraron 8 en la resolución de Aurora y otros 8 en la de Alfonso. Estas 16 evidencias constituyeron las unidades de análisis del estudio, que se fueron relacionando con las categorías *a priori*. (4) Finalmente, se recorrieron las categorías para comprobar si alguna de las evidencias podría interpretarse como parte de la categoría, admitiéndose que una misma evidencia podría pertenecer a dos categorías. Una vez realizado, se completó una tabla con la frecuencia con la que aparecían las características analizadas (se muestra en el apartado de resultados). Estos cuatro pasos fueron llevados a cabo por la investigadora que dirigió las sesiones de trabajo y verificados por el investigador. En el paso (3) la investigadora elaboró una preselección de evidencias, que fue corroborada por su compañero. En el paso (4), ambos investigadores realizaron un análisis conjunto de tres evidencias. A continuación, la investigadora completó el análisis para el resto de evidencias, discutiendo posibles dudas con el investigador hasta alcanzar el consenso.

RESULTADOS E INTERPRETACIÓN

La Figura 1 ilustra de forma gráfica la evolución de los procesos de resolución de ambos estudiantes. La descripción de resultados se apoya en el transcurso de los eventos en cada proceso, que permite ir discutiendo las evidencias de talento más relevantes que se encontraron en cada caso.

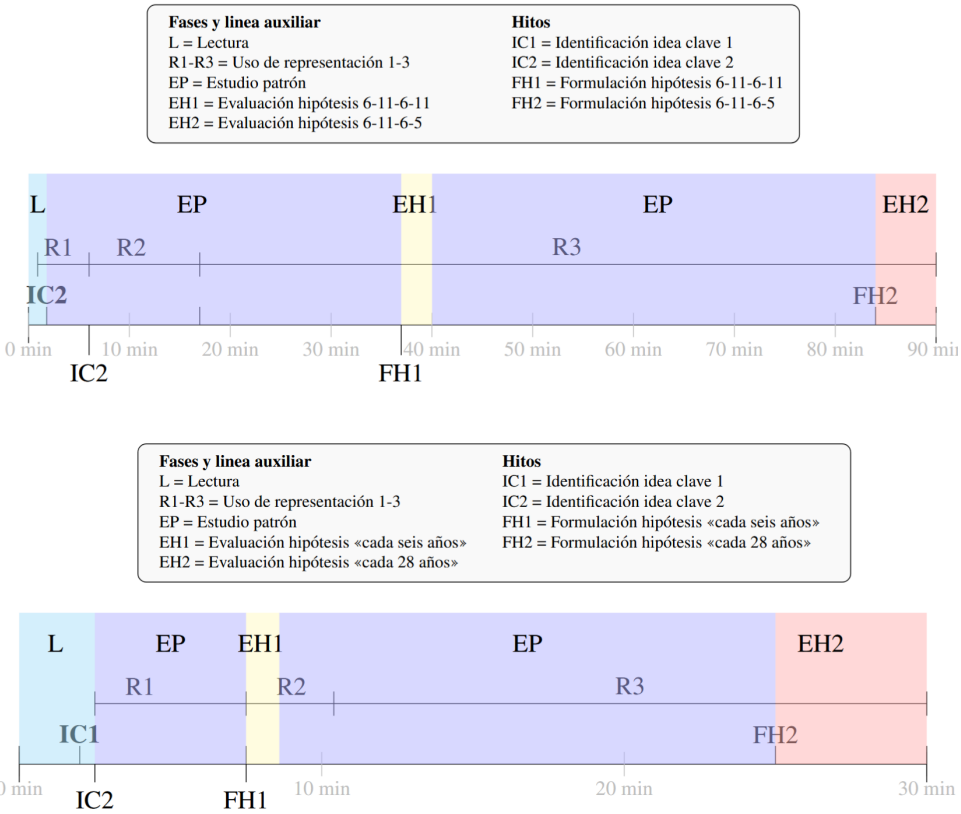
Características del talento matemático en Aurora

Tras la lectura inicial del enunciado, Aurora comenzó a estructurar la información mediante una representación propia que refinó en tres fases. Inicialmente, utilizó un formato de columnas combinadas con marcas visuales para indicar el día de inicio de cada año, y posteriormente le añadió los días de la semana como etiquetas (Figura 2a). Finalizó, alrededor del minuto 20, en un esquema simplificado de tres columnas: año, día de la semana en la que se inicia y día de finalización. Usando esta representación, codificó los saltos producidos por los años bisiestos añadiendo "+1 día" y resaltó visualmente los años que comienzan en lunes (Figura 2b). Esta autonomía para crear y modificar representaciones va encaminada a la comprensión de la estructura formal del problema (el patrón), mientras que la evolución entre representaciones refleja su búsqueda de optimización del pensamiento matemático.

Hacia el minuto 6, y de forma paralela al desarrollo de sus representaciones, Aurora identificó con rapidez las dos variables estructurales de la tarea: la duración estándar de un año, equivalente a 52 semanas y un día, y la existencia de los años bisiestos. Esta identificación le llevó a plantear y refutar de manera casi inmediata una primera hipótesis sobre una repetición del calendario cada siete años. El descarte temprano de esta conjetura, fundamentado en la introducción de la alteración que produce el año bisiesto, constituye un indicio de pensamiento lógico en relaciones numéricas, pensamiento crítico y flexibilidad para abandonar ideas previas frente a nuevas evidencias.

Figura 1

Líneas temporales de los procesos de resolución de la tarea. Arriba: Aurora. Debajo: Alfonso



Hacia el minuto 30, Aurora verbalizó la lógica subyacente a los saltos en el calendario, deduciendo que el día extra de un año bisiesto desplaza los días de inicio y fin de los años consecutivos. Esta idea le llevó a formular una nueva conjetura sobre la existencia de un patrón periódico del tipo 6-11-6-11 (min 37), lo que incide en la búsqueda de comprender la estructura formal del problema. En lugar de asumir directamente la validez de su conjetura, Aurora expresó su intención de comprobarla empíricamente, acción que denota pensamiento crítico.

Tras comprobar que dicho patrón inicial no era válido, la estudiante continuó hasta el minuto 85, momento en el que logró establecer la hipótesis válida y generalizar matemáticamente la relación al definir el subpatrón definitivo de repetición 6-11-6-5. Este desenlace condujo al éxito en el desarrollo de estrategias efectivas e ilustró la capacidad de la estudiante para generalizar el patrón.

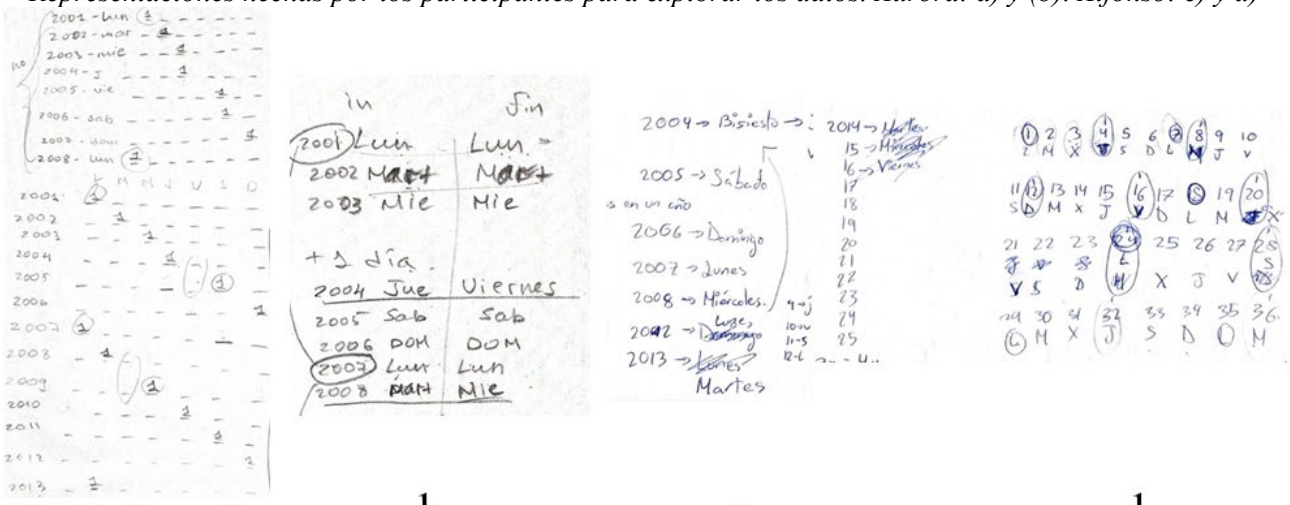
Características del talento matemático en Alfonso

Este participante comenzó con la identificación inmediata de las claves matemáticas del problema antes de proceder al estudio empírico del patrón. Tras la lectura del enunciado, registró por escrito la división de 365 entre 7, obteniendo un cociente de 52 y resto 1, hallando así una de las claves de la tarea. Al poco tiempo, explicitó también la existencia de años bisiestos, lo que constituye un indicio de comprensión de la estructura formal de la tarea. Al igual que ocurrió con Aurora, la evolución de

las representaciones de Alfonso reflejó su interés por la optimización del pensamiento matemático. De esta manera, Alfonso transitó por tres representaciones de forma muy fluida: inició con dos columnas convencionales donde omitió la escritura de ciertos años, evolucionó hacia una simplificación numérica anotando solo los dos últimos dígitos del año a partir de 2014 (Figura 2c) y, finalmente, hizo una representación lineal muy sintética estructurada por filas, asociando los dígitos del año a una única letra inicial para el día de la semana (Figura 2d). Esta evolución sugiere flexibilidad en el uso de datos, originalidad procedimental y apreciación por la claridad de la solución.

Figura 2

Representaciones hechas por los participantes para explorar los datos. Aurora: a) y (b). Alfonso: c) y d)



Una vez establecida su representación óptima, Alfonso verbalizó sus razonamientos lógicos subyacentes a las relaciones numéricas, al argumentar que los años regulares con 365 días provocaban un salto de un día en el calendario semanal, mientras que los años bisiestos uno de dos días. Basándose en esto, hacia el minuto 6 formuló una primera conjetura, que fue el primer indicio de generalización. No obstante, el pensamiento crítico del alumno se manifestó apenas dos minutos después, cuando descartó explícitamente esta hipótesis inicial tras comprobarla.

Alfonso entonces reanudó el estudio sistemático del patrón, culminando hacia el minuto 18 con la formulación de una segunda y definitiva hipótesis. Logró identificar la secuencia temporal correcta (2001, 2007, 2018, 2024, 2029, 2035) y estableció la generalización matemática de la relación al concluir que el calendario se repite en ciclos exactos de 28 años. Sustentó esta afirmación argumentando que la acumulación de siete años bisiestos compensaba el desfase de los días extra acumulados, equivaliendo al salto de una semana completa. Esta deducción final apoya que el estudiante comprendió la estructura del problema, así como su capacidad para el pensamiento lógico en relaciones numéricas, permitiéndole alcanzar la solución generalizada en 30 minutos.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIÓN

Este estudio investiga cómo se expresa el talento matemático durante el proceso de resolución de una tarea de generalización con un patrón periódico de ciclo extenso en un contexto real. La contribución del trabajo es la observación de emergencia del talento durante un proceso de generalización complejo. La síntesis de los datos obtenidos se muestra en la Tabla 2, que recoge una alta frecuencia de características relacionadas con la percepción y la memoria matemática, entre las que destaca la comprensión de la estructura formal y clave de un problema (Freiman, 2006; Krutetskii, 1976), que se ha relacionado principalmente con los episodios de descubrimiento de ideas clave. También se observaron numerosos datos relacionados con el procesamiento de la información, como la originalidad en la forma de trabajar (Greenes, 1981), que se ilustra en las representaciones mostradas

en la Figura 2. Por el contrario, se observó un número menor de evidencias relacionadas con la actitud matemática.

Tabla 2

Frecuencia de las características del talento encontradas en cada estudiante

Dimensión	Característica	Aurora	Alfonso
Percepción y memoria matemática	Comprensión de la estructura formal y la clave de un problema	4	5
	Generaliza relaciones, objetos y operaciones matemáticas	3	2
	Memoria matemática	4	2
Procesamiento de la información matemática	Desarrollo de estrategias efectivas y organización de los datos	3	2
	Pensamiento lógico: relaciones espaciales, numéricas y simbólicas	2	3
	Optimización del pensamiento matemático	1	1
	Flexibilidad en el proceso mental o en el manejo de datos	2	1
	Originalidad en la interpretación o en la forma de trabajar. Pensamiento divergente	4	2
Actitud matemática	Persistencia para terminar las tareas	-	-
	Interés por la calidad de la solución	1	1
	Pensamiento crítico	2	1

Desde el punto de vista cualitativo, el estudio ha proporcionado evidencia de la capacidad de generalización de los estudiantes, de manera que Aurora aisló empíricamente un subpatrón periódico interno (6-11-6-5), mientras que Alfonso dedujo teóricamente la repetición del ciclo de 28 años. Este tipo de destrezas son consistentes con estudios como los de Girit Yildiz y Durmaz (2021), Mora et al. (2024), o Ureña et al. (2024), que documentan las características de la generalización que muestra el alumnado de talento y con autores como Freiman (2006), Greenes (1981) y Krutetskii (1976) que incluyen la capacidad de generalización como un rasgo propio del talento.

Otra característica relevante de talento matemático identificada en el estudio es la creación y ajuste de representaciones personales para la recopilación y organización de datos, que se muestra en la Figura 2. La observación de representaciones propias está alineada con los resultados obtenidos por Montejo-Gámez et al. (2020), que documentaron notaciones personales de estudiantes de talento, y con autores como Greenes (1981) que enfatiza la originalidad, y Leikin (2021) que destaca la creatividad como rasgo relevante asociado al talento matemático. Además, la capacidad de modificar las representaciones observada está vinculada a la flexibilidad, rasgo observado en estudiantes de talento matemático (p. e. Freiman, 2006; Greenes, 1981; Krutetskii, 1976; Mora et al., 2023).

El estudio realizado presenta limitaciones, más allá de las asociadas a los estudios de caso, que deben señalarse en este punto. En primer lugar, el uso de categorías *a priori* entraña el riesgo de introducir sesgo en la interpretación de los datos. No obstante, se desarrolló este tipo de análisis debido al carácter exploratorio del estudio, ya que no se partía de una expectativa sólida sobre los resultados que se obtendrían, por lo que se prefirió partir de una base teórica. Otra limitación identificada está relacionada con la sesión de trabajo. A pesar de que se dejó a los participantes trabajar y se evitó al máximo conversar con ellos, la complejidad de la tarea utilizada invita a desarrollar un protocolo de interacciones (entrevistas, determinar el tiempo previo a interacciones, etc.) que permita minimizar el efecto de las interacciones durante el proceso de resolución. Finalmente, se plantea la duda sobre en qué medida los datos recogidos son exclusivos del alumnado con talento matemático, lo que visibiliza la pertinencia de realizar estudios comparativos para profundizar en qué rasgos son propios del talento. Otra línea de trabajo futuro sería la de complementar este estudio con otros focalizados en patrones desafiantes de naturaleza diversa, lo que permitiría dar una idea más amplia y profunda de cómo se expresa el talento matemático durante el proceso de generalización. Este tipo de trabajo es el que se busca desarrollar en próximas investigaciones.

Referencias

Callejo, M. L., García-Reche, Á. y Fernández, C. (2016). Pensamiento algebraico temprano de estudiantes de educación primaria (6-12 años) en problemas de generalización de patrones lineales. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 10,* 5-25. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i10.106

Cattell, R. B., Cattell, A. K. S. y Weiss, R. H. (2017). *Factor g-R: Test de Inteligencia No Verbal - Revisado* [Manual]. TEA Ediciones.

Ferrando, I., Segura, C. y Castillo-Medina, J. (2024). Regular and talented students' behaviour when solving modelling tasks: Are there differences? En H.-S. Siller, V. Geiger y G. Kaiser (Eds.), *Mathematical Modelling Education in Disruptive Times*, (pp. 401-411). Springer Nature. https://doi.org/10.1007/978-3-031-53322-8_32

Freiman, V. (2006). Problems to discover and to boost mathematical talent in early grades: A challenging situations approach. *The Mathematics Enthusiast, 3*(1), 51-75. https://doi.org/10.54870/1551-3440.1035

Gagné, F. (2021). *Differentiating Giftedness from Talent*. Routldege. https://doi.org/10.4324/9781003088790

Girit Yildiz, D. y Durmaz, B. (2021). A gifted high school student's generalization strategies of linear and nonlinear patterns via Gauss's approach. *Journal for the Education of the Gifted, 44*(1), 56-80. https://doi.org/10.1177/0162353220978295

Greenes, C. (1981). Identifying the gifted student in mathematics. *Arithmetic Teacher, 28*(6), 14-17.

Jaime, A. y Gutiérrez, A. (2021). La alta capacidad matemática: Caracterización, identificación y desarrollo. *La Gaceta de la RSME, 24*(3), 597-621.

Krutetskii, V. (1976). *The Psychology of Mathematical Abilities in School Children.* University of Chicago Press.

Leikin, R. (2021). When practice needs more research: The nature and nurture of mathematical giftedness. *ZDM - Mathematics Education, 53*(7), 1579-1589. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01276-9

Montejo-Gámez, J., Fernández-Plaza, J. A. y Ramírez, R. (2020). Talento matemático en la resolución de un problema de generalización. En E. Castro-Rodríguez, E. Castro, P. Flores y I. Segovia (Coords.). *Investigación en educación matemática. Homenaje a Enrique Castro* (pp. 121-138). Octaedro.

Mora, M., Gutiérrez, Á. y Jaime, A. (2023). Descriptores para analizar la flexibilidad en la resolución de problemas como indicador de talento matemático. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 395-402). SEIEM.

Mora, M., Ramírez, R., Gutiérrez, A. y Jaime, A. (2024). Traits of generalization of problem solution methods exhibited by potential mathematically gifted students when solving problems in a selection process. *ZDM - Mathematics Education, 56*(6), 1257-1272. https://doi.org/10.1007/s11858-024-01625-4

Narváez, R., Adamuz-Povedano, N. y Cañadas, M. C. (2025). Análisis bibliométrico sobre pensamiento algebraico en educación infantil y primaria en Scopus. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 27,* 43-65. https://doi.org/10.35763/aiem27.5825

Ramírez, R. y Flores, P. (2017). Habilidades de visualización de estudiantes con talento matemático: comparativa entre los test psicométricos y las habilidades de visualización manifestadas en tareas geométricas. *Enseñanza de las Ciencias, 35*(2), 179-196. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2152

Ramírez, R., Flores, P. y Castro, E. (2010). Visualización y talento matemático: una experiencia docente. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 499-510). SEIEM.

Santamaría, P., Arribas, D., Pereña, J. y Seisdedos, N. (2005). *EFAI-3: Evaluación Factorial de las Aptitudes Intelectuales-3* [Manual]. TEA Ediciones.

Ureña, J., Beltrán-Meneu, M. J. y Ramírez, R. (2024). Rasgos de talento matemático en estudiantes de secundaria. Generalización en un contexto funcional. *PNA, 19*(1), 53-79. https://doi.org/10.30827/pna.v19i1.28279

LESSON STUDY COMO METODOLOGÍA DE DESARROLLO PROFESIONAL DEL PROFESORADO DE MATEMÁTICAS PARA LA SOSTENIBILIDAD

Lesson study as a professional development method for mathematics teachers for sustainability

López-Serentill, P. y Alsina, A.

Universitat de Girona

Resumen

La integración de la sostenibilidad en la educación matemática plantea desafíos significativos para el profesorado. Desde este marco, el objetivo del estudio es analizar cómo la metodología Lesson Study configura un espacio de reflexión y reconstrucción didáctica que posibilita la articulación entre sostenibilidad y educación matemática. El estudio adopta un enfoque interpretativo de carácter exploratorio y se basa en el análisis de cuestionarios iniciales y de las situaciones de aprendizaje diseñadas por 11 docentes de educación primaria de cinco centros. Los resultados muestran que las creencias iniciales del profesorado tienden a vincular la sostenibilidad con prácticas matemáticas predominantemente descriptivas. No obstante, el proceso de Lesson Study sugiere desplazamientos hacia usos más analíticos del conocimiento matemático y una ampliación del rol de las matemáticas en contextos de sostenibilidad.

Palabras clave: *sostenibilidad, educación matemática, Lesson Study, creencias del profesorado, desarrollo profesional docente.*

Abstract

The integration of sustainability into mathematics education poses significant challenges for teachers. Within this framework, the aim of the study is to analyse how the Lesson Study methodology creates a space for reflection and didactic reconstruction that enables the articulation between sustainability and mathematics education. The study adopts an exploratory interpretative approach and is based on the analysis of initial questionnaires and the learning situations designed by 11 primary school teachers from five schools. The results show that teachers' initial beliefs tend to link sustainability with predominantly descriptive mathematical practices. However, the Lesson Study process promotes shifts towards more analytical uses of mathematical knowledge and an expansion of the role of mathematics in sustainability contexts.

Keywords: *sustainability, mathematics education, Lesson Study; teacher beliefs; teacher professional development.*

INTRODUCCIÓN

En los últimos años, la relación entre educación matemática y la sostenibilidad ha adquirido una relevancia creciente dentro de la investigación en educación matemática (Alsina y Vásquez, 2025; Guerrero et al., 2026). Diversos estudios han señalado la necesidad de repensar el papel de la educación matemática ante desafíos globales caracterizados por la complejidad, la interdependencia y la incertidumbre (Coles et al., 2024; Vorhölter et al., 2025). Desde esta perspectiva, las matemáticas dejan de concebirse exclusivamente como un conjunto de herramientas técnicas para situarse también como un marco estructurante que posibilita describir, analizar e interpretar fenómenos del mundo real.

López-Serentill, P. y Alsina, A. (2026). Lesson Study como metodología de desarrollo profesional del profesorado de matemáticas para la sostenibilidad. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (pp. 362-368). SEIEM.

No obstante, la integración de la sostenibilidad en la educación matemática plantea desafíos significativos: curriculares, socioafectivos, etc. (López-Serentill et al., 2024; Makramalla et al., 2025). Investigaciones recientes muestran que el profesorado suele percibir la sostenibilidad como un dominio temático más próximo a otras áreas curriculares, particularmente las ciencias, manifestando dificultades para identificar conexiones matemáticas conceptualmente significativas (Just et al., 2025; Vásquez et al., 2023). Estas tensiones no remiten únicamente a cuestiones curriculares, sino también a las representaciones docentes sobre el conocimiento matemático, su función en contextos sociales complejos y las posibilidades de la enseñanza de las matemáticas para abordar problemáticas contemporáneas.

En este contexto, el desarrollo profesional docente emerge como un eje central. La literatura ha destacado la relevancia de generar espacios formativos que permitan al profesorado problematizar sus propias concepciones, explorar nuevas formas de articular contenidos matemáticos y reconstruir significados didácticos en relación con contextos complejos (Kaiser y Sriraman, 2006). Entre las metodologías que han mostrado un potencial significativo en este ámbito, el *Lesson Study* se ha consolidado como un enfoque particularmente fértil en la educación matemática para promover procesos de reflexión, análisis y reconstrucción de la práctica docente (Alsina et al., 2025; Lewis, 2002).

El presente estudio se sitúa en esta línea, analizando cómo la participación del profesorado en un proceso de *Lesson Study* contribuye a la reconstrucción de sus representaciones sobre la articulación entre sostenibilidad y educación matemática, a partir de los cuestionarios iniciales y de las situaciones de aprendizaje diseñadas en el marco del Proyecto de Generación de Conocimiento *GreenMath*.

MARCO TEÓRICO

El desarrollo profesional docente constituye un eje central en la investigación en educación matemática, particularmente en contextos donde se promueve la incorporación de enfoques innovadores o la integración de nuevas demandas curriculares. Lejos de concebirse como un proceso meramente técnico, el desarrollo profesional implica transformaciones en las formas en que el profesorado interpreta el conocimiento matemático, sus finalidades educativas y las decisiones que configuran la práctica de aula (Alsina et al., 2025; Ponte, 1994). En este sentido, las creencias de los docentes operan como un mediador fundamental en cualquier proceso de transformación.

La integración de la sostenibilidad en la educación matemática sitúa al profesorado ante un escenario particularmente complejo. Ernest (2002), por ejemplo, ha señalado que la sostenibilidad suele percibirse como un dominio temático externo a las matemáticas, generando tensiones vinculadas tanto a la selección de contenidos como a la naturaleza del conocimiento matemático movilizado.

En este contexto, la literatura ha destacado la relevancia de generar dispositivos formativos que permitan al profesorado tomar consciencia de sus creencias, explorar nuevas relaciones entre contenido matemático y contexto y reconstruir significados didácticos en torno a la práctica (Kaiser y Sriraman, 2006). Entre las metodologías que han mostrado un potencial significativo en esta línea, la metodología *Lesson Study* se ha consolidado como un enfoque particularmente fértil para promover procesos de reflexión sistemática, análisis colectivo y reconstrucción de la enseñanza (Lewis, 2002; Dudley, 2013).

Lesson Study se fundamenta en la idea de que el conocimiento profesional docente se desarrolla mediante la investigación colaborativa de la propia práctica. A través de ciclos iterativos de diseño, implementación, observación y reflexión conjunta, esta metodología favorece procesos de explicitación, negociación y transformación del conocimiento didáctico (Lewis, 2002).

Investigaciones previas han señalado que esta metodología posibilita no solo la mejora de propuestas de aula, sino también la reconfiguración de las formas en que el profesorado conceptualiza el contenido matemático, la actividad del alumnado y la naturaleza de las tareas (Dudley, 2013).

Desde esta perspectiva, *Lesson Study* puede entenderse como un espacio epistemológico de reconstrucción didáctica, en el que las decisiones sobre contenidos, representaciones y prácticas matemáticas son objeto de análisis colectivo (Quaresma et al., 2018). Este enfoque puede resultar particularmente relevante en contextos como la sostenibilidad, donde el profesorado se enfrenta a la necesidad de reinterpretar el papel de las matemáticas en relación con fenómenos complejos del mundo real.

METODOLOGÍA

El estudio se sitúa en el marco del Proyecto *GreenMath*, orientado a explorar la integración de la sostenibilidad en la educación matemática mediante procesos de diseño colaborativo y reflexión sistemática sobre la práctica docente. La investigación adopta un enfoque interpretativo de carácter exploratorio (Cohen et al., 2017), para analizar cómo la participación del profesorado en un proceso de *Lesson Study* configura dinámicas de desarrollo profesional docente.

Participaron 11 docentes de educación primaria (10-12 años) pertenecientes a cinco centros educativos (cuatro catalanes y uno vasco). En cada centro se constituyeron equipos de trabajo formados por profesorado del propio centro, acompañados por especialistas en didáctica de las matemáticas y en educación para la sostenibilidad. Los docentes recibieron dos sesiones de formación docente sobre la metodología *Lesson Study* y sobre educación para la sostenibilidad y competencias de sostenibilidad, a cargo de expertos en la materia. El trabajo posterior se organizó a través de ciclos de *Lesson Study* que incluyeron fases de diseño conjunto, implementación en el aula y reflexión colectiva sobre las situaciones de aprendizaje desarrolladas.

Para analizar tanto las creencias iniciales del profesorado como la configuración de las propuestas didácticas construidas, así como posibles desplazamientos en las concepciones didácticas del profesorado, en este estudio iniciático presentamos los resultados derivados tanto de los cuestionarios iniciales dirigidos al profesorado como de los documentos de diseño de las situaciones de aprendizaje correspondientes a las primeras fases del ciclo de *Lesson Study*.

El análisis se desarrolló mediante procedimientos de contenido temático (Cohen et al., 2017), orientados a identificar regularidades en las formas en que el profesorado conceptualiza la sostenibilidad, selecciona contenidos matemáticos y atribuye funciones al conocimiento matemático en contextos de sostenibilidad.

RESULTADOS

El análisis de la información recogida permitió identificar regularidades significativas tanto en las creencias de los docentes como en la configuración de las situaciones de aprendizaje diseñadas durante el proceso de *Lesson Study*.

En relación con las creencias iniciales del profesorado, los resultados de la Tabla 1 muestran una tendencia a conceptualizar la sostenibilidad predominantemente en términos de problemáticas ambientales, frecuentemente vinculadas a contextos cercanos y observables. Esta orientación se hace particularmente visible en las respuestas a la pregunta “Describe sintéticamente una actividad que hayas llevado a cabo (o crees que podrías llevar a cabo) en relación con la sostenibilidad”. De forma recurrente, los docentes mencionan iniciativas asociadas al ahorro de recursos, actividades vinculadas al análisis del entorno próximo o propuestas de sensibilización ante problemáticas ambientales concretas.

Tabla 1

Descripción de las actividades descritas por los docentes en relación con la sostenibilidad

Tipo de actividad identificada	*Descripción*	*% de Docentes*
Gestión y consumo de recursos	Actividades centradas en el ahorro o análisis del consumo de recursos (agua, energía).	18,2%
Residuos y acciones ambientales directas	Propuestas vinculadas a la recogida de residuos y limpieza de entornos (p. ej., Clean Up Day).	27,3%
Sensibilización y alfabetización ambiental	Actividades orientadas a la concienciación mediante tareas de lectura, reflexión o análisis conceptual.	27,3%
Investigación y análisis de fenómenos ambientales	Propuestas basadas en la recogida y comparación de datos sobre variables ambientales.	18,2%
Proyectos de contextualización ambiental	Situaciones de aprendizaje centradas en problemáticas ambientales amplias (p. ej., bosques).	9,1%

Estas respuestas sitúan la sostenibilidad fundamentalmente en contextos experienciales y cotidianos, donde predominan enfoques de concienciación y análisis de fenómenos ambientales, mientras que se omiten otros focos relevantes de la sostenibilidad como el cultural y el económico. Asimismo, se observa que muchas de las actividades descritas se articulan en áreas curriculares distintas de las matemáticas, lo que sugiere que la sostenibilidad se percibe inicialmente como un ámbito transversal más próximo a otras disciplinas.

Esta tendencia se refuerza en las respuestas a la pregunta "Describe sintéticamente una actividad que hayas llevado a cabo (o crees que podrías llevar a cabo) en relación con la sostenibilidad dentro del área de matemáticas". En este caso, la mayoría de las propuestas se concentran en prácticas matemáticas de carácter descriptivo, especialmente aquellas vinculadas a la recogida, organización y representación de datos. El dominio estadístico emerge como el espacio matemático más recurrentemente identificado por el profesorado, destacando actividades centradas en la elaboración e interpretación de gráficos.

Tabla 2

Descripción de las actividades descritas por los docentes en relación con la sostenibilidad y matemáticas

Sentido matemático movilizado	*Descripción*	*% de Docentes*
Sentido estocástico	Actividades centradas en la recogida, organización y representación de datos (por ejemplo, elaboración de gráficos de barras a partir de residuos recogidos, análisis de datos ambientales, interpretación de gráficos).	72,7%
Sentido numérico	Propuestas vinculadas a cálculos numéricos, estimaciones y comparaciones de magnitudes (por ejemplo, cálculo de consumos, costes, cantidades de recursos, estimaciones de impacto).	45,5%
Sentido de la medida	Referencias a la cuantificación o estimación de magnitudes físicas (por ejemplo, litros de agua, masa de residuos, consumo energético).	18,2%
Sentido espacial	Aparición puntual de contextos vinculados a distancias o representaciones espaciales (por ejemplo, cálculo o estimación de distancias).	9,1%
Sentido algebraico	No se identifican referencias explícitas en las actividades descritas en el cuestionario inicial.	0%

Este patrón sugiere que la integración de la sostenibilidad en la educación matemática se articula prioritariamente a través de usos del conocimiento matemático orientados a describir y visualizar información cuantitativa. En este sentido, resulta particularmente significativa la ausencia de referencias explícitas al sentido algebraico, lo que indica que las actividades descritas inicialmente rara vez incorporan formas de razonamiento centradas en el análisis de relaciones estructurales, dependencias funcionales o procesos de modelización.

Cabe señalar que algunas respuestas indican la ausencia de experiencias previas en educación para la sostenibilidad que involucren directamente las matemáticas, lo que refuerza la idea de que la articulación entre sostenibilidad y educación matemática no constituye aún una práctica consolidada en todos los contextos docentes.

No obstante, el análisis de las situaciones de aprendizaje diseñadas en el marco del *Lesson Study* revela desplazamientos relevantes en las formas en que se configura el conocimiento matemático.

Tabla 3

Presencia de las matemáticas en las SA diseñadas

Situación de aprendizaje	*Contenido matemático*	*Disciplinas implicadas*
Consumo energético del centro y ahorro de energía	Interpretación de facturas reales (kWh, coste, IVA), relaciones entre variables, porcentajes, estimación, recogida de datos y gráficos estadísticos	Matemáticas, Ciencias, Tecnología
Ineficiencia térmica de las aulas	Números enteros y decimales, medida, comparación de datos térmicos, área y volumen, representación de datos	Matemáticas, Ciencias, Tecnología
Residuos en la playa	Recogida y organización de datos, frecuencias, gráficos estadísticos, uso de escalas	Matemáticas, Conocimiento del medio natural y social
Sostenibilidad en el consumo alimentario	Clasificación, estimación de magnitudes, porcentajes, comparación de precios, estimación de distancias, gráficos estadísticos	Matemáticas, Conocimiento del medio natural y social
Envío de material escolar (ONG)	Organización de datos (inventario), medida (peso), cálculo numérico (costes), razonamiento proporcional, interpretación de mapas y distancias	Matemáticas

En la Tabla 3 se puede ver que, aunque las prácticas estadísticas continúan ocupando un lugar central, las propuestas incorporan progresivamente usos más analíticos del razonamiento matemático. En particular, se observa la movilización de las matemáticas para formular hipótesis, estimar escenarios, comparar alternativas y explicitar relaciones entre variables en contextos de sostenibilidad.

Estos desplazamientos no remiten únicamente a la diversificación de contenidos matemáticos, sino también a transformaciones en el rol atribuido a las matemáticas. En las situaciones de aprendizaje analizadas, las matemáticas dejan de operar exclusivamente como herramienta de representación o cálculo para configurarse como marco estructurante del análisis de los fenómenos considerados.

Finalmente, aun cuando no se requería explícitamente el diseño de propuestas interdisciplinares, la mayoría de las situaciones de aprendizaje incorporaron conexiones con otras disciplinas, particularmente vinculadas al ámbito científico. Esta tendencia sugiere que la complejidad de las problemáticas abordadas favorece configuraciones didácticas en las que el conocimiento matemático se articula con otros marcos disciplinares.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Las creencias iniciales del profesorado muestran una conceptualización de la sostenibilidad predominantemente vinculada a problemáticas ambientales y, en el ámbito matemático, asociada principalmente a prácticas de carácter descriptivo, especialmente dentro del sentido estocástico, en concordancia con estudios previos (Vásquez et al., 2023). Esta tendencia sitúa inicialmente a las matemáticas como herramienta para describir y visualizar información cuantitativa, más que como un marco estructurante del análisis de fenómenos complejos. En este sentido, la ausencia de referencias explícitas al sentido algebraico resulta particularmente significativa, al sugerir que formas de razonamiento relacional o procesos de modelización no emergen de manera espontánea en las propuestas inicialmente evocadas por el profesorado.

Sin embargo, el análisis de las situaciones de aprendizaje diseñadas en el marco del *Lesson Study* evidencia desplazamientos relevantes en las formas en que se configura el conocimiento matemático. Aunque las prácticas estadísticas continúan ocupando un lugar central, las matemáticas se movilizan progresivamente como un recurso analítico que permite formular hipótesis, estimar escenarios, comparar alternativas y explicitar relaciones entre variables en contextos de sostenibilidad. Estos desplazamientos no remiten únicamente a una diversificación de contenidos, sino a transformaciones en el rol atribuido a las matemáticas, que pasan de operar como herramienta de representación a configurarse como marco estructurante del análisis (Just et al., 2025). No obstante, estos resultados no permiten afirmar de forma concluyente que el proceso de *Lesson Study* haya favorecido específicamente el desarrollo del sentido algebraico o de procesos de modelización explícita, ya que estas dimensiones continúan siendo menos visibles que otras.

Desde esta perspectiva, los resultados refuerzan la idea de que el tránsito desde concepciones predominantemente descriptivas hacia usos más analíticos del conocimiento matemático no parece constituir un proceso automático. Por el contrario, estos desplazamientos parecen depender de dinámicas de reflexión colectiva, explicitación de decisiones didácticas y problematización de la práctica, elementos que la metodología *Lesson Study* favorece de manera sistemática (Quaresma et al., 2018). En este sentido, dicha metodología se configura como un espacio epistemológico en el que el profesorado no solo rediseña tareas, sino que reconstruye significados en torno al contenido matemático y su función en contextos complejos.

Asimismo, aun cuando no se requería explícitamente el diseño de propuestas interdisciplinares, la mayoría de las situaciones de aprendizaje incorporaron conexiones con otras disciplinas. Esta regularidad sugiere que la complejidad inherente a las problemáticas de sostenibilidad favorece configuraciones didácticas en las que el conocimiento matemático se articula con otras disciplinas, reforzando la pertinencia de enfoques interdisciplinares para el desarrollo de competencias vinculadas a la sostenibilidad.

Como limitación, el estudio adopta un carácter exploratorio, con una muestra reducida y centrado en representaciones docentes y análisis de diseños didácticos. En consecuencia, los resultados deben interpretarse como indicios situados que permiten comprender tendencias y posibilidades de la metodología analizada, pero no como evidencias generalizables a otros contextos. Como línea de continuidad, en futuras investigaciones se pretende profundizar en las fases del ciclo de *Lesson Study* de implementación en el aula y de reflexión conjunta llevadas a cabo con los docentes, para poder analizar el impacto del proyecto tanto en el razonamiento del alumnado como en el desarrollo de competencias para la sostenibilidad.

Agradecimientos

Investigación financiada por el Proyecto GREENMATH (PID2023-150962OB-I00).

Referencias

Alsina, Á., Pincheira, N. y Franco, J. (2025). Mathematics teachers' professional development: A systematic review of training methods. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 21*(3), em2595. https://doi.org/10.29333/ejmste/16041

Alsina, Á. y Vásquez, C. (2025). Professional development and teacher agency in Mathematics Teacher Education for Sustainability. *Mathematics Education Research Journal 37*, 215-238. https://doi.org/10.1007/s13394-024-00488-y

Cohen, L., Manion, L. y Morrison, L. (2017). *Research methods in education* (8ª edition). Routledge.

Coles, A., Solares-Rojas, A. y le Roux, K. (2024). Socio-ecological gestures of mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 116,* 165-183. https://doi.org/10.1007/s10649-024-10318-4

Dudley, P. (2013). Teacher learning in lesson study: What interaction-level discourse analysis revealed about how teachers utilised imagination, tacit knowledge of teaching and fresh evidence of pupils learning, to develop practice knowledge and so enhance their pupils' learning. *Teaching and Teacher Education, 34*, 107–121. https://doi.org/10.1016/j.tate.2013.04.006

Ernest, P. (2002). Empowerment in mathematics education. *Philosophy of Mathematics Education Journal*, *15*(1), 1-16.

Guerrero-Ortiz, C., Camacho-Machín, M. y Hitt, F. (2026). Sustainability competencies in mathematics education: Insights from individual and collective modelling. *European Journal of Science and Mathematics Education, 14*(1), 85-103. https://doi.org/10.30935/scimath/17625

Just, J., Siller, H.-S. y Vorhölter, K. (2025). Directions of intentionalities in education for sustainable development in mathematics education: A systematic literature review. *Educational Studies in Mathematics*. https://doi.org/10.1007/s10649-025-10449-2

Quaresma, M., Winsløw, C., Clivaz, S., Ponte, J. P., Shúilleabháin, A. N. y Takahashi, A. (Eds.). (2018). *Mathematics Lesson Study Around the World: Theoretical and Methodological Issues*. Springer International Publishing.

Kaiser, G. y Sriraman, B. (2006) A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 38, 302–310. https://doi.org/10.1007/BF02652813

Lewis, C. (2002). *Lesson study: A handbook of teacher-led instructional change*. Research for Better Schools.

López-Serentill, P., Alsina, Á., Gual Oliva, M. y Pincheira, N. (2024). Integrating Sustainability in Mathematics Education: An Approach to the Spanish Primary Curriculum. *Journal of Sustainability Research, 6*, e240058. https://doi.org/10.20900/jsr20240058

Makramalla, M., Coles, A., Le Roux, K. y Wagner, D. (2025). Mathematics education for sustainable futures: A strengths-based survey of the field to invite further research action. *Educational Studies in Mathematics, 119*(3), 535-556. https://doi.org/10.1007/s10649-025-10389-x

Ponte, J. P. (1994). Mathematics teachers' professional knowledge. En J. P. Ponte y J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th PME Conference* (Vol. 1, pp. 195–210). PME.

Vásquez, C., Seckel, M. J. y Rojas, F. (2023). Conectando la educación estadística y la sostenibilidad: creencias del profesorado de Educación Primaria. *Avances De Investigación En Educación Matemática*, (23), 127–146. https://doi.org/10.35763/aiem23.5415

Vorhölter, K., Siller, H. S., Just, J., Orschulik, A. B. y Zieriacks, C. (2025). Education for Sustainable Development in mathematics classrooms. *Environmental Education Research*, 1-30. https://doi.org/10.1080/13504622.2025.2565461

FUNDAMENTACIÓN Y PLANIFICACIÓN DE UNA PROPUESTA DE FORMACIÓN DEL PROFESORADO DE MATEMÁTICAS CON EL ENFOQUE STEAM: UN ANÁLISIS DESDE LA FACETA ECOLÓGICA DEL GAID-FORMADOR

Foundations and planning of a mathematics teacher education programme with a STEAM approach: an analysis from the ecological facet of the GAID-formator

Martins, A. C.[a], Tinti, D. S.[a], Burgos, M.[b] y Sette, P. F.[a]

[a]Universidade Federal de Ouro Preto, [b]Universidade de Granada

Resumen

Este trabajo analiza la fundamentación y la planificación de una propuesta de formación continua para profesores de Matemáticas en una escuela pública de Minas Gerais - Brasil, en el contexto de un proyecto de innovación en educación básica. La propuesta busca fomentar prácticas pedagógicas innovadoras a partir del enfoque STEAM. La investigación utiliza registros de reuniones, documentos curriculares y anotaciones de la formadora. El análisis se centra en la faceta ecológica de la Guía de Análisis de Idoneidad Didáctica para el formador. Los resultados muestran que la planificación estuvo influenciada por orientaciones curriculares, demandas de los docentes y características del contexto escolar. También se evidenció la búsqueda de interdisciplinariedad e innovación didáctica. Se concluye que la planificación de la formación docente implica considerar múltiples condicionantes del contexto educativo.

Palabras clave: *Formación del profesorado; GAID-Formador; Enfoque STEAM; Prácticas pedagógicas innovadoras; Faceta Ecológica.*

Abstract

This study analyses the rationale and planning of a continuing professional development proposal for Mathematics teachers in a public school in Minas Gerais, Brazil, within the context of an innovation project in basic education. The proposal seeks to promote innovative pedagogical practices based on the STEAM approach. The research uses records of meetings, curricular documents, and notes from the teacher educator. The analysis focuses on the ecological facet of the Didactic Suitability Analysis Guide for teacher educators. The results show that the planning process was influenced by curricular guidelines, teachers' demands, and characteristics of the school context. It also revealed a search for interdisciplinarity and didactic innovation. It is concluded that planning teacher education involves considering multiple constraints of the educational context.

Keywords: *Teacher professional development; GAID-Trainer; STEAM approach; Innovative pedagogical practices; Ecological Facet.*

INTRODUCCIÓN

En las últimas décadas, diversas iniciativas educativas han promovido cambios en las prácticas pedagógicas de la educación básica, especialmente en la enseñanza de Ciencias y Matemáticas. En este marco, el enfoque STEAM (Science, Technology, Engineering, Arts and Mathematics) se presenta como una alternativa para fomentar la integración de áreas, el pensamiento crítico y la resolución de problemas en contextos significativos (Rossi et al., 2025).

Martins, A. C., Tinti, D. S., Burgos, M. y Sette, P. F. (2026). Fundamentación y planificación de una propuesta de formación del profesorado de matemáticas con el enfoque STEAM: un análisis desde la faceta ecológica del GAID-formador. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (pp. 369-376). SEIEM.

Por un lado, la incorporación de enfoques innovadores exige procesos de desarrollo profesional docente basados en la reflexión sobre la práctica y la construcción colectiva de nuevas formas de organización pedagógica. Según Cunha (2008), la innovación se sustenta en la reflexión crítica, donde la duda y la inseguridad forman parte del proceso de toma de decisiones profesionales. Por otro, el trabajo colaborativo constituye un elemento clave en el aprendizaje y desarrollo profesional docente, al favorecer el intercambio de experiencias y la producción compartida de conocimientos, configurándose como espacios relevantes para la formación del profesorado (Fiorentini, 2004; Tinti et al., 2023).

En este contexto, el objetivo de este trabajo es analizar el proceso de fundamentación y planificación de una propuesta formativa dirigida a profesores de Matemáticas de una escuela de educación básica de una red pública de enseñanza. Se pretende identificar cómo influyeron en la construcción de la propuesta formativa diferentes elementos del contexto educativo, como orientaciones curriculares, demandas de la escuela participante, características del grupo de profesores y objetivos del proyecto de investigación. Con el fin de abordar estas cuestiones, la investigación adopta como referente teórico-metodológico, la Guía de Análisis de la Idoneidad Didáctica de Procesos de Desarrollo Profesional Docente (GAID-Formador), desarrollada por Godino (2024), que ofrece un marco analítico para apoyar el análisis, valoración y reflexión de la adecuación desde el punto de vista didáctico de las experiencias de formación docente.

MARCO TEÓRICO

La teoría de la idoneidad didáctica viene motivada por la necesidad de desarrollar herramientas teórico-metodológicas que permitan pasar de una didáctica descriptiva-explicativa a una didáctica orientada hacia la intervención en el aula, esto es, del análisis y descripción de los procesos educativos, al diseño, implementación y evaluación de la enseñanza y el aprendizaje (Breda et al., 2018; Godino, 2024). La idoneidad didáctica se refiere al grado en que un proceso instruccional logra un aprendizaje significativo de los estudiantes de unas Matemáticas ricas, teniendo en cuenta circunstancias personales, contextuales y temporales (Godino, 2024).

La teoría de la idoneidad didáctica aporta, por un lado, una estructuración en categorías (facetas, componentes) del sistema de criterios para la fundamentación, diseño, implementación y evaluación de las experiencias educativas. Por otro, enunciados explícitos de criterios de idoneidad con diferentes niveles de concreción para las diferentes facetas y componentes que determinan y condicionan los procesos instruccionales: epistémica, cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional y ecológica. Los criterios de idoneidad didáctica determinan normas de corrección basadas en supuestos teóricos explícitos sobre el conocimiento matemático, su enseñanza y aprendizaje, asumidos por el Enfoque Ontosemiótico (EOS), que incorporan el consenso de la comunidad interesada en la educación matemática. Estos principios, a priori orientan sobre cómo se deben hacer las cosas, y a posteriori, permiten valorar el proceso de enseñanza y aprendizaje implementado.

Desde la perspectiva de la formación del profesorado, los criterios de idoneidad didáctica orientan la reflexión sobre la calidad de los procesos instruccionales dirigidos a profesores de matemáticas en sus dos componentes: matemática y didáctico-matemática. En este sentido, la GAID-Formador constituye el sistema de categorías de conocimientos y competencias profesionales del formador que intervienen en el diseño, implementación y evaluación de los procesos de formación de profesores de matemáticas.

Entre las distintas facetas de la idoneidad didáctica, este estudio centra su atención en la faceta ecológica. La faceta ecológica se refiere a las relaciones entre los procesos de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas y el conjunto de condiciones institucionales, curriculares, culturales y sociales que influyen y regulan dichas prácticas. Se asume que las decisiones didácticas tomadas por profesores y formadores no pueden comprenderse únicamente a partir de aspectos internos al contenido matemático o a las interacciones en el aula, sino que también deben analizarse en función

de las normas, valores, expectativas y orientaciones que caracterizan el contexto educativo en el que se desarrollan estas prácticas.

> El proceso formativo debe promover em los profesores conocimientos, habilidades y disposiciones para que los procesos de instrucción matemática que diseñen e implementen estén em concordancia con el proyecto educativo del centro y la sociedad, teniendo en cuenta los condicionamientos del entorno en que se desarrolla y las innovaciones basadas en la investigación educativa (Godino 2024, p. 340).

Los procesos de enseñanza están insertos en sistemas institucionales que establecen objetivos educativos, currículos, materiales didácticos, formas de evaluación y modos de organización del trabajo pedagógico. Estos elementos influyen en la selección y organización de los contenidos, en las estrategias didácticas adoptadas y en las posibilidades de innovación pedagógica. De este modo, el análisis de la faceta ecológica permite comprender cómo las prácticas educativas se articulan con tales condicionantes y cómo profesores y formadores negocian, reinterpretan o adaptan estas orientaciones en el desarrollo de sus acciones pedagógicas.

En el campo de la formación del profesorado, la dimensión ecológica resulta particularmente relevante, ya que las propuestas formativas se sitúan en contextos institucionales específicos y necesitan dialogar con las demandas y condiciones reales del trabajo docente. En este sentido, Godino (2024) propone un conjunto de criterios de idoneidad parciales y específicos para analizar la faceta ecológica de los procesos de formación didáctico-matemática del profesorado. Estos criterios orientan la reflexión sobre los condicionantes institucionales, curriculares y socioculturales que influyen en la organización y el desarrollo de las experiencias formativas. En la Tabla 1 se presentan dichos criterios.

Tabla 1

Criterios sobre la faceta ecológica del proceso formativo (Adaptado de Godino, 2024, p. 359)

Criterios parciales	Criterios específicos
El proceso formativo debería estar en concordancia con el proyecto educativo del centro y la sociedad, teniendo en cuenta los condicionamientos del entorno en que se desarrolla y las innovaciones basadas en la investigación educativa.	El proceso formativo debería tener en cuenta: a. Las orientaciones curriculares sobre desarrollo profesional docente y su fundamentación. b. Los resultados de la investigación en formación de profesores. c. La búsqueda, selección y adaptación de buenas prácticas que impliquen el uso del contexto real y la interdisciplinariedad en la formación de profesores, así como el uso de la tecnología. d. Los condicionantes y restricciones del entorno social en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas y su didáctica (factores económicos, políticos, culturales). e. La formación en valores democrático.

La faceta ecológica implica reconocer que la fundamentación y planificación de la formación se desarrollan en relación con las directrices y el contexto educativo, con la intención de contribuir a la formación socioprofesional de una manera integral. En este marco, el enfoque STEAM se incorpora como referencia al promover propuestas interdisciplinares sólidas basadas en problemas contextualizados que atienden a demandas curriculares y de innovación educativa (Martins y Tinti, 2025). En este sentido, el STEAM no se limita a integrar áreas, sino que favorece que los profesores analicen, adapten y diseñen prácticas que articulen contenidos matemáticos con otras disciplinas en coherencia con su práctica profesional (Diego-Mantecón et al., 2022).

METODOLOGÍA

Esta investigación se caracteriza como un estudio de naturaleza cualitativa, orientado a comprender el proceso de fundamentación y planificación de una propuesta formativa en el contexto de la

formación continua de profesores de Matemáticas, considerando la complejidad de las decisiones y condicionantes que atraviesan la práctica docente (Minayo, 2001).

La acción formativa se desarrolló en el marco de un proyecto de colaboración entre universidad y escuela, dirigido a profesores de Matemáticas de una institución pública de Minas Gerais (Brasil), con participación puntual de docentes de Geografía y Biología. Se organizó a través de encuentros on-line (agosto–octubre de 2025), estructurados en tres momentos: (i) identificación de demandas y problematización de la práctica docente, evidenciando dificultades como el compromiso del alumnado, la presión de evaluaciones externas y los desafíos de la interdisciplinariedad; (ii) introducción y discusión del enfoque STEAM mediante el análisis de situaciones contextualizadas, como el consumo energético y los apagones; y (iii) diseño colaborativo de propuestas didácticas, destacándose el proyecto "Desafíos de los apagones: propuestas de soluciones basadas en energías limpias", que integró contenidos de Matemáticas, Geografía y Biología. Durante el proceso, se elaboraron actividades, se seleccionaron contenidos y se definieron estrategias didácticas en diálogo con el contexto escolar. La formadora actuó como mediadora, orientando las discusiones, sistematizando ideas y articulando aportes teóricos y metodológicos, configurando la formación como un espacio de interacción entre investigación en Educación Matemática y experiencia docente.

El estudio se centra en las etapas de fundamentación y planificación de la propuesta formativa descrita anteriormente. Estas etapas implicaron la consideración de diversos elementos específicos de la dimensión ecológica, tales como: las orientaciones curriculares vigentes; las demandas expresadas por los profesores y por la institución escolar; las características del grupo de docentes participantes; y los objetivos del proyecto de investigación en el que se inscribe la formación.

Los datos proceden de múltiples fuentes: registros de reuniones con los profesores, anotaciones reflexivas de la formadora, documentos curriculares (Currículo de Referencia de Minas Gerais) y materiales de planificación, como guiones y propuestas didácticas. Las anotaciones se diferencian de los registros de reuniones en que estos recogen interacciones colectivas, mientras aquellas corresponden a un proceso individual de reflexión y sistematización. El análisis interpretativo de los datos tomó como referente el sistema de indicadores de la faceta ecológica de la GAID-Formador (Tabla 1). El objetivo fue identificar evidencias de cómo los distintos condicionantes del contexto educativo influyeron en la definición de los objetivos, en la organización de las actividades formativas y en la orientación metodológica de la propuesta.

ANÁLISIS DE LA DIMENSIÓN ECOLÓGICA EN LA FUNDAMENTACIÓN Y PLANIFICACIÓN DE LA PROPUESTA FORMATIVA

El análisis del proceso de fundamentación de la propuesta formativa permitió identificar diferentes elementos del contexto educativo que influyeron en las decisiones tomadas durante estas fases de la formación. En este proceso, es posible identificar en el objetivo de la propuesta formativa aspectos que conectan con indicadores de la faceta ecológica, tales como las conexiones entre áreas del conocimiento, las orientaciones curriculares, las posibilidades de innovación didáctica, las condiciones socioprofesionales del profesorado y las relaciones entre la enseñanza escolar y el contexto social del alumnado. Con el fin de hacer explícita esta relación, el análisis se organiza en función de los criterios de la faceta ecológica del GAID-Formador.

Alineación con las orientaciones curriculares (criterio a)

Un aspecto relevante identificado en el proceso de planificación se refiere a la relación con las orientaciones curriculares, lo que corresponde al indicador de alineación con las directrices institucionales de la faceta ecológica. Esta relación se evidencia cuando la propuesta formativa se fundamenta en el Currículo de Referencia de Minas Gerais, documento que orienta la enseñanza en

la red estatal y que está alineado con la Base Nacional Común Curricular de Brazil. Como se señala en el documento curricular:

> La selección de las prácticas de enseñanza del componente curricular de las Matemáticas contempla, entre otras, la utilización de actividades investigativas, el trabajo colaborativo y el estudio sistemático en cada etapa de enseñanza (Minas Gerais, 2018, p. 654).

La adopción de elementos asociados al enfoque STEAM fue considerada como una posibilidad para favorecer esta perspectiva, ya que permite situar conceptos matemáticos en situaciones que involucran conocimientos de las ciencias, la tecnología, la ingeniería y las artes, en procesos de investigación de un problema real de la sociedad.

Esta decisión se concretó en la planificación de actividades en las que los profesores debían analizar datos reales de consumo energético, organizar información en tablas y gráficos y discutir posibles interpretaciones en relación con problemáticas sociales, lo que evidencia la articulación entre las orientaciones curriculares y las propuestas desarrolladas en la formación.

En este sentido, se presentó a los profesores el enfoque STEAM, ya que algunos no lo conocían. Uno de los profesores participantes expresó:

> "Era una aproximación que no conocía. Pasé a entenderla como una forma de hacer el aprendizaje más dinámico y orientado a la resolución de problemas reales, valorando tanto el razonamiento lógico como la expresión creativa". (Reunión realizada el 20/08/2025).

En este contexto, la incorporación de estrategias basadas en la investigación, la resolución de problemas y el desarrollo de actividades interdisciplinarias fue considerada como una alternativa para ampliar las formas de abordaje de los contenidos en el aula.

Apertura a la innovación didáctica (criterio c)

La incorporación del enfoque STEAM puede interpretarse como una respuesta a la búsqueda de innovación didáctica, lo que se relaciona con el indicador de apertura a la innovación pedagógica de la faceta ecológica. Esta decisión refleja una tentativa de ampliar las formas de abordaje de los contenidos matemáticos en la escuela participante. Esta apertura se materializó en el diseño de la propuesta interdisciplinar "Desafíos de los apagones: propuestas de soluciones basadas en energías limpias", elaborada durante la fase de diseño colaborativo de la formación, en la que los profesores participaron activamente en la definición de actividades y contenidos.

En lo que se refiere a las conexiones intra e interdisciplinares, se puede observar que, durante la fase de planificación, se buscó construir propuestas que permitieran establecer articulaciones entre diferentes contenidos de las Matemáticas y, al mismo tiempo, aproximar esta área a otros campos del conocimiento. En este sentido, la propuesta de proyecto se estructuró a partir de la colaboración entre distintas áreas, como se puede observar en el fragmento de la propuesta de formación.

> "Geografía: Estudiar la matriz energética global, brasileña y de la ciudad; relacionar la localización geográfica, el clima y la infraestructura energética; realizar un levantamiento de casos de apagones en el mundo, en Brasil y en la ciudad. (sala de informática). Matemáticas: organizar datos de consumo en tablas y gráficos; comparar costos y eficiencia entre fuentes renovables y no renovables; realizar proyecciones de consumo y demanda energética. Biología: analizar los impactos de las fuentes de energía en la biodiversidad y en la salud; discutir las ventajas ambientales de las energías limpias." (Fragmento documentos producidos durante el proceso de planificación de la formación, 2025)

Esta articulación se evidencia particularmente en la propuesta de trabajar el tema de las energías renovables mediante el análisis de datos. En este contexto, se prevé el uso de gráficos y porcentajes para examinar información sobre el consumo energético, lo que permite establecer conexiones entre

contenidos matemáticos, especialmente de estadística y proporcionalidad, y problemáticas socioambientales actuales.

Adaptación a las condiciones socioprofesionales del profesorado (criterio d)

Otro elemento relevante se refiere a la adaptación socioprofesional y cultural de la propuesta formativa. El proceso de planificación tuvo en cuenta las demandas presentadas por los profesores de la escuela participante, así como las características del contexto en el que desarrollan su práctica pedagógica. Las dificultades y experiencias compartidas por los docentes contribuyeron a orientar la definición del tema de la formación y de las estrategias a explorar. Un aspecto que se evidenció fue el cansancio y descontento de los profesores en relación con las exigencias vinculadas a las evaluaciones externas:

> Una posible dificultad se relaciona con la conciliación de los diferentes plazos y demandas del sistema educativo. Lamentablemente, las demandas cotidianas son numerosas y cada vez resulta más difícil desarrollar propuestas de carácter interdisciplinar. (Reunión realizada el 20/08/2025).

Este descontento puede interpretarse como un condicionante que limita las posibilidades de innovación pedagógica e incluso como un posible conflicto vinculado a la interpretación de las demandas curriculares. En este sentido, se pensó en una formación que dialogara con las condiciones reales de trabajo y con las necesidades identificadas en el cotidiano escolar. Asimismo, se reconoce la importancia de generar espacios de coordinación y diálogo entre los docentes, considerados fundamentales para garantizar la calidad de la práctica pedagógica, especialmente cuando el trabajo educativo exige la articulación entre diferentes áreas del conocimiento y la colaboración entre profesores de distintas especialidades, lo que requiere la integración adecuada de saberes para favorecer procesos de enseñanza y aprendizaje de carácter interdisciplinario (Falcó-Solsona, 2025).

Educación en valores y relación con el contexto social (criterio e)

Además, la planificación también consideró aspectos relacionados con la educación en valores y con la relación entre la enseñanza y el entorno social de los estudiantes. La propuesta buscó favorecer la elaboración de actividades que aproximaran los contenidos matemáticos a situaciones presentes en la vida cotidiana, posibilitando la discusión de problemas que dialogan con diferentes dimensiones de la realidad social. Sobre esto, en una reunión de presentación del proyecto y de escucha de las demandas de los docentes, uno de los profesores señaló:

> Podríamos, por ejemplo, tratar el tema de la energía renovable, incorporando datos estadísticos y analizando el impacto que tiene en el medio ambiente y en la sociedad, discutiendo también las cuestiones sociales involucradas. (Reunión realizada el 20/08/2025).

Estas decisiones se concretaron en la selección de problemáticas como el consumo energético y las energías renovables, que permiten abordar no solo contenidos matemáticos, sino también cuestiones sociales y ambientales, favoreciendo una aproximación crítica a la realidad. Esta perspectiva contribuye a ampliar el significado atribuido a la enseñanza de las Matemáticas, al evidenciar sus posibilidades de aplicación y su relación con otras áreas del conocimiento.

Articulación entre universidad y escuela (criterios b y d)

Por último, es importante considerar que el propio proceso de fundamentación de la formación estuvo influenciado por la alianza establecida entre la universidad y la escuela de educación básica participante del proyecto. Esta articulación se concretó en las reuniones iniciales de diagnóstico y en las fases de diseño de la formación, en las que los profesores participaron activamente en la definición de temas, actividades y enfoques, mientras que la formadora aportó referentes teóricos y orientaciones metodológicas.

> Durante la planificación de la formación, se propusieron marcos teóricos y ejemplos basados en el enfoque STEAM para ampliar el trabajo interdisciplinar. A lo largo de las discusiones, los profesores

> reinterpretaron estas propuestas según su contexto, identificando posibilidades y limitaciones para su implementación. Este proceso evidenció la necesidad de adaptar los referentes teóricos a las condiciones institucionales y a la práctica docente cotidiana. (Anotación de la formadora, 2025)

Esta articulación creó condiciones para la construcción de un espacio de diálogo entre diferentes perspectivas, en el cual los conocimientos producidos en el campo de la investigación en Educación Matemática pudieron ponerse en interlocución con las experiencias y saberes construidos por los profesores en el ejercicio de su práctica. Este resultado corrobora el estudio de Silva y Tinti (2021) al defender la importancia de planificar espacios de formación con miras a movilizar el conocimiento especializado de los docentes. En este sentido, la planificación de la formación fue delineándose a partir de la interacción entre referentes teóricos y las demandas concretas del contexto escolar, configurando un proceso de construcción que procuró articular diferentes dimensiones del trabajo pedagógico.

CONSIDERACIONES FINALES

El presente estudio tuvo como objetivo analizar el proceso de fundamentación y planificación de una propuesta formativa dirigida a profesores de Matemáticas, a partir de los criterios de la faceta ecológica del GAID-Formador. El análisis permitió identificar cómo diferentes elementos del contexto educativo influyeron en la definición de los objetivos, en la organización de las actividades formativas y en la orientación metodológica de la propuesta.

Los resultados evidencian que la planificación de la formación estuvo fuertemente condicionada por la reflexión (Cunha, 2008) y por distintos factores del entorno institucional y profesional. Entre ellos se destacan las orientaciones curriculares vigentes, particularmente el Currículo de Referencia de Minas Gerais (Minas Gerais, 2018); las demandas y preocupaciones expresadas por los profesores participantes; las condiciones socioprofesionales del contexto escolar; y los objetivos del propio proyecto de investigación que dio origen a la iniciativa formativa. Estos elementos contribuyeron a orientar la selección del enfoque STEAM como una posibilidad para promover prácticas pedagógicas innovadoras y favorecer la articulación entre diferentes áreas del conocimiento. Asimismo, el análisis muestra que la incorporación de propuestas interdisciplinares, basadas en problemáticas del contexto social -como el estudio de las energías renovables-, permitió establecer posibles conexiones entre los contenidos matemáticos y situaciones relevantes para la vida de los estudiantes. Desde la perspectiva de la faceta ecológica del GAID-Formador (Godino, 2024), estas decisiones reflejan una búsqueda por articular la formación docente con la enseñanza de las Matemáticas, las orientaciones curriculares, las demandas del contexto escolar y con los desafíos contemporáneos de la educación. Otro aspecto relevante se refiere al papel del trabajo colaborativo entre universidad y escuela en la construcción de la propuesta formativa (Fiorentini, 2004; Tinti et al., 2023). Esta articulación posibilitó un espacio de diálogo entre los conocimientos producidos en el campo de la investigación en Educación Matemática y las experiencias profesionales de los docentes participantes, favoreciendo la elaboración de una propuesta que buscó responder tanto a las orientaciones teóricas como a las necesidades concretas del contexto escolar.

Al mismo tiempo, el estudio permite señalar algunas limitaciones del análisis realizado. Aunque el GAID-Formador ofrece un marco analítico relevante para examinar distintos aspectos implicados en la organización de procesos formativos, el enfoque adoptado en este trabajo -centrado específicamente en la faceta ecológica- no permite profundizar en otros elementos igualmente relevantes, como los conocimientos didáctico-matemáticos movilizados por la formadora durante el proceso de planificación y desarrollo de la formación. En este sentido, futuras investigaciones podrían ampliar el análisis considerando otras facetas de la idoneidad didáctica, así como explorar con mayor profundidad los conocimientos profesionales implicados en la actuación de los formadores de profesores de Matemáticas. Tales estudios pueden contribuir a comprender con mayor detalle los

procesos de diseño, implementación y análisis de propuestas formativas orientadas a la innovación en la enseñanza de las Matemáticas.

Agradecimientos

Este trabajo se realizó con el apoyo de la Capes/Brasil, de la Fundación de Apoyo a la Investigación del Estado de Minas Gerais - FAPEMIG (APQ 05497-23) y del Proyecto PID2022-139748NB-I00 financiado por MICIU/AEI /10.13039/501100011033 y por FEDER, UE.

Referencias

Breda, A., Font, V., Lima, V. M. R. y Pereira, M. V. (2018). Componentes e indicadores de los criterios de idoneidad didáctica desde la perspectiva del enfoque ontosemiótico. *Transformación, 14*(2), 162-176.

Cunha, M. I. (2008). *Inovações pedagógicas: O desafio da reconfiguração de saberes na docência universitária*. Universidade de São Paulo.

Diego-Mantecón, J. M., Ortiz-Laso, Z. y, Blanco, T. F. (2022). Reflexiones del Open STEAM Group sobre el impacto del enfoque integrado del contenido en el aprendizaje de las matemáticas. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 81-94). SEIEM

Fiorentini, D. (2004). A didática e a prática de ensino mediadas pela investigação sobre a prática. In J. P. Romanowski, P. L. O. Martins, y S. R. Junqueira (Orgs.), *Conhecimento local e conhecimento universal: Pesquisa, didática e ação docente* (Vol. 1, pp. 243-257). Champagnat.

Falcó-Solsona, P. J., Sala-Sebastià, G., Breda, A., Font, V. y Vanegas, Y. (2025). Uso de los criterios de idoneidad didáctica en una situación de aprendizaje interdisciplinar. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. 172-179). SEIEM.

Godino, J. D. (2024). *Enfoque ontosemiótico en la educación matemática: Fundamentos, herramientas y aplicaciones*. Aula Magna.

Martins, A. C. y Tinti, D. S. (2025). A abordagem STEAM como ferramenta para inovação educacional. In D. S. Tinti (Org.), *Práticas inovadoras no Ensino de Ciências e de Matemática: perspectivas teóricas e metodológicas* (pp. 41-49). Livraria da Física.

Minas Gerais. Secretaría de Estado de Educación. (2018). *Currículo de referencia de Minas Gerais: Educación infantil y enseñanza fundamental*. SEE/MG.

Minayo, M. C. (2001). *Investigación social: Teoría, método y creatividad* (18.ª ed.). Vozes.

Rossi, M., Diogo, R. C. y Mello, G. J. (2025). Investigações sobre o uso da abordagem STEAM na prática escolar: estado do conhecimento entre 2017 a 2022. *Ensaio Pesquisa em Educação em Ciências, 27, 1-28.* https://doi.org/10.1590/1983-2117-53892

Silva, J. F y Tinti, D. S. (2021). Planning of training spaces and the mobilization of Didactic-Mathematical Knowledge: a look at the Pedagogical Residency Program. *Revemop, 3, 1-26.* https://doi.org/10.33532/revemop.e202136

Tinti, D. S., Silva, W. R. y Manrique, A. L. (2023). Analyzing Indications of Characteristic and Constitutive Aspects of the Collaborative Work of Teachers who Teach Mathematics. *REMat, 20,* 1-17.

Tinti, D. S. (2025). *Prácticas innovadoras en la enseñanza de ciencias y de matemáticas: Perspectivas teóricas y metodológicas* (Vol. 1). LF Editorial.

PERCEPCIÓN DEL PROFESORADO SOBRE SU CONOCIMIENTO Y FORMACIÓN EN DISCALCULIA

Teachers' perceptions of their knowledge and training on dyscalculia

Meaños-Asensi, R., Casas-Mirás, J. M. y Pérez-Rodríguez, M.

Centro de Investigación e Tecnoloxía Matemática de Galicia (CITMAga), Universidade de Vigo

Resumen

La discalculia es un trastorno del aprendizaje poco investigado y escasamente detectado. Desde el marco del Mathematical Knowledge for Teaching (MKT) y los componentes del Pedagogical Content Knowledge (PCK), la integración del Conocimiento del Contenido y los Estudiantes (KCS) en la formación docente puede favorecer la identificación de indicios de discalculia, mientras que el Conocimiento del Contenido y la Enseñanza (KCT) y el Conocimiento del Contenido y el Currículo (KCC) pueden favorecer la aplicación de estrategias de intervención. Este estudio analiza la percepción del profesorado de Educación Primaria sobre sus conocimientos y formación para identificar e intervenir ante este trastorno. Se diseñó un cuestionario validado al que respondieron 105 docentes de Galicia, analizando su fiabilidad y consistencia interna. Además, se realizó un análisis descriptivo e inferencial. Los resultados evidencian un conocimiento limitado sobre la discalculia y carencias en la formación inicial y continua del profesorado.

Palabras clave: *discalculia, conocimiento del profesorado, formación del profesorado, dificultad matemática, Mathematical Knowledge for Teaching.*

Abstract

Dyscalculia is a learning disorder for which research is limited, and detection is often under-reported. Within the framework of Mathematical Knowledge for Teaching (MKT) and the components of Pedagogical Content Knowledge (PCK), the integration of Content and Student Knowledge (KCS) into teacher training has been shown to facilitate the identification of early signs of dyscalculia. Furthermore, the integration of Content and Teaching Knowledge (KCT) and Knowledge of Content and Curriculum (KCC) support the application of intervention strategies. The present study analyses primary school teachers' perceptions of their knowledge and training in identifying and addressing this disorder. A validated questionnaire was designed and completed by 105 teachers in Galicia, and its reliability and internal consistency were analysed. A descriptive and inferential analysis was also conducted. The results indicate a paucity of knowledge regarding dyscalculia and deficiencies in initial and ongoing teacher training.

Keywords: *dyscalculia, teacher knowledge, teacher training, mathematical difficulty, Mathematical Knowledge for Teaching.*

INTRODUCCIÓN

La discalculia es "un trastorno específico de las habilidades especiales para las matemáticas, sin un defecto simultáneo en las habilidades mentales generales" (Kosc, 1974, p. 48). Su prevalencia en población escolar se sitúa entre el 4.5% y el 10.48% (Meaños-Asensi et al., 2026), cifras similares a las de otras dificultades específicas del aprendizaje (DEA) como, por ejemplo, la dislexia 5.17-10.91% (Cubilla-Bonnetier, 2024) o el Trastorno Específico del Lenguaje (TEL), 2.8-10.1% (Reilly et al., 2010). Sin embargo, continúa siendo una dificultad insuficientemente reconocida en el ámbito educativo, lo que limita la detección temprana, el acceso a recursos y la implementación de intervenciones basadas en evidencias (Butterworth et al., 2011; Espina et al., 2022). Además, debido

Meaños-Asensi, R., Casas Mirás, J. M. y Pérez Rodríguez, M. (2026). Percepción del profesorado sobre su conocimiento y formación en discalculia. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (pp. 377-384). SEIEM.

al carácter acumulativo del aprendizaje matemático, las dificultades no abordadas en Educación Primaria (EP) pueden persistir en etapas posteriores y afectar al desarrollo académico, personal y laboral (Geary et al., 2009; Morgan et al., 2009; Kaufmann y von Aster, 2012).

Es por ello que la detección temprana de la discalculia adquiere un papel fundamental e ineludible. Geary et al. (2009) y Morgan et al. (2009) evidencian que las dificultades matemáticas pueden identificarse desde los primeros años escolares. En ese sentido, diversos autores subrayan la importancia de sistemas para detectar a estudiantes en riesgo mediante herramientas que diferencien la discalculia de otro tipo de dificultades en matemáticas (por ejemplo, Gersten et al., 2005; Desoete et al., 2012). La investigación sobre discalculia ha abordado principalmente sus manifestaciones, así como la identificación temprana y evaluación de las dificultades matemáticas (por ejemplo, Geary et al., 2009; Gersten et al., 2005), especialmente desde la psicología y la neurología (Meaños-Asensi et al., 2026; Espina et al., 2022). No obstante, desde el contexto de la educación matemática, no se debe obviar la relevancia del desempeño del profesorado y su conocimiento, tanto en la identificación inicial de indicios como en la adaptación de la enseñanza a las necesidades del alumnado. Desde el modelo MKT, el conocimiento de las dificultades de aprendizaje del alumnado transforma el conocimiento del contenido en PCK, constituyendo este un elemento clave en la atención del profesorado al alumnado con discalculia para anticipar dificultades de aprendizaje (KCS), seleccionar estrategias adecuadas (KCT) y organizar los contenidos matemáticos según las necesidades del alumnado (KCC) (Ball et al., 2008).

Ante esta situación, cabe preguntarse si el profesorado de EP dispone de conocimientos y formación necesaria para identificar indicios de discalculia y aplicar estrategias adecuadas en el aula. Si bien son numerosos los estudios sobre el conocimiento del profesorado en otras DEA (por ejemplo, Soriano-Ferrer y Echegaray-Bengoa, 2016; Moreno Tallón et al., 2024; Akram et al., 2009; Vargas Rivera, 2022), es menor el número de investigaciones acerca del conocimiento del profesorado sobre la discalculia (Chideridou et al., 2016), y en comparación con otros trastornos (Butterworth, 2005). En general, estos estudios evidencian un conocimiento limitado de la discalculia y una formación insuficiente para su identificación e intervención educativa, destacando la necesidad de mejorar su formación inicial o continua (Sousa et al., 2017; Kunwar y Sharma, 2020; Mutlu et al., 2022). Asimismo, otros análisis señalan que variables como la experiencia profesional y la formación específica pueden relacionarse con un mayor conocimiento docente (Sousa et al., 2016; Graves, 2018; Mutlu et al., 2022; de Almeida Horsae Dias et al., 2013; Adhikari, 2014).

El presente estudio tiene como objetivo “analizar la percepción del profesorado de EP sobre sus conocimientos y formación en discalculia, así como su relación con la experiencia y la especialidad docente”. A partir de ello, se plantean tres hipótesis: (H1) “El profesorado de EP percibe un escaso conocimiento sobre la discalculia de forma mayoritaria”; (H2) “El profesorado de EP percibe que la discalculia es un contenido que se aborda escasamente en su formación inicial y continua"; y (H3) “El profesorado de EP percibe que, en comparación con otros trastornos de aprendizaje con prevalencia similar, la discalculia recibe menos atención en sus formaciones inicial y continua”.

METODOLOGÍA

La presente investigación adopta un enfoque cuantitativo de modalidad no experimental descriptiva a través de cuestionario. El estudio se dirigió al profesorado de todos los centros educativos de EP de la Comunidad Autónoma de Galicia. Contó con una muestra no probabilística de 105 participantes que participaron voluntaria y anónimamente tras recibir una invitación a participar en el estudio a través del correo electrónico institucional, donde se informó sobre los objetivos de la investigación, la confidencialidad y tratamiento de los datos personales. Para la recogida de información se diseñó, validó y difundió (a través de Google Forms, de abril a junio de 2023) un cuestionario *ad hoc*, ante la ausencia de instrumentos completos validados que se ajustasen de manera íntegra al objetivo del

estudio. A continuación, se realizaron análisis de fiabilidad, consistencia interna y validez de constructo y un estudio estadístico de los resultados.

En la elaboración del cuestionario se consideraron diversos instrumentos, como la Escala de Conocimientos y Creencias sobre la Dislexia del Desarrollo (Soriano-Ferrer y Echegaray-Bengoa, 2016) y la Escala de Conocimientos sobre las DEA (Guzmán et al., 2015). Por otro lado, se tomó como referencia la redacción de los ítems de la subescala "Conocimientos previos" en el estudio de Lacave Rodero et al. (2016). Además, el diseño siguió las pautas metodológicas de Mcmillan y Schumacher (2005) y Babbie (2000), considerando los elementos PCK del MKT (Ball et al., 2008).

El instrumento consta de 60 ítems distribuidos en dos bloques, predominando las preguntas cerradas en sentido positivo de tipo categorizado con escala de 1 a 4 y preguntas métricas sobre frecuencia de determinadas acciones formativas. Con el objetivo de caracterizar la muestra e identificar posibles subgrupos, el primer bloque (10 ítems) corresponde con la dimensión sociodemográfica (sexo, edad, antigüedad, centro, titulación), experiencia previa ante alumnado con discalculia y especialidad docente, como en Soriano-Ferrer y Echegaray-Bengoa (2016) y Guzmán et al. (2015). Este bloque permitió el análisis transversal de los datos en función de variables como edad, experiencia con alumnado con discalculia y especialidad. El segundo bloque (Tabla 1), se estructura en cinco dimensiones (de D1 a D5, 50 ítems) relacionadas con la discalculia, en línea con el dominio PCK y sus componentes KCS, KCT y KCC. Tres de ellas (D1, D4 y D5) derivan de las subescalas propuestas por Soriano-Ferrer y Echegaray-Bengoa (2016) y Guzmán et al. (2015), mientras que las dos restantes se centran en la formación inicial y continua del profesorado.

Tabla 1.

Dimensiones del cuestionario relacionadas con la discalculia

Dimensión y ejemplo de ítem	PCK
D1: "Conocimiento sobre el concepto discalculia" (4 ítems)	KCS
Ej.: Comprendo el concepto de discalculia (trastorno específico de las habilidades especiales para las matemáticas, sin un defecto simultáneo en las habilidades mentales generales) y sus manifestaciones.	
D2: "Formación inicial como docente en discalculia y otros trastornos del aprendizaje" (10 ítems)	
Ej.: Durante mi formación inicial como docente, adquirí las competencias necesarias para dar respuesta a las necesidades educativas del alumnado con los siguientes trastornos del aprendizaje: (discalculia, TEL, dislexia, disgrafía, TDAH)	KCS KCT
D3: "Formación continua en discalculia y otros trastornos del aprendizaje" (20 ítems)	
Ej.: Durante mi formación continua, he consultado las siguientes fuentes sobre discalculia: (cursos; charlas o conferencias científicas; libros o revistas educativas; recursos de internet)	KCS KCT
D4: "Conocimiento sobre herramientas y criterios de detección ante la discalculia" (8 ítems)	
Ej.: Conozco que algunas personas con discalculia son capaces de contar, pero no son capaces de relacionar una cantidad a un número.	KCS
D5: "Conocimiento sobre procedimientos de actuación ante la discalculia" (8 ítems)	
Ej.: Conozco materiales y actividades manipulativas que ayudan a trabajar diferentes áreas de debilidad del alumnado con discalculia.	KCT KCC

La validación del contenido del cuestionario se realizó en dos fases: juicio de expertos (6) en didáctica de las matemáticas y prueba piloto con docentes (16) de EP, realizándose ajustes en aquellos ítems que presentaban dificultades de interpretación.

Tras la recogida de datos se constató una alta fiabilidad y consistencia interna de las dimensiones D1-D5 del cuestionario (Alfa de Cronbach>0.7), tanto global (0.969) como en cada una de las dimensiones (D1, 0.867; D2, 0.926; D3, 0.954; D4, 0.956; D5, 0.962). Se mantuvieron todos los ítems, ya que su eliminación no afectaba a la fiabilidad del cuestionario. En cuanto a la validez del constructo, se comprobó la pertinencia de realizar un análisis factorial (prueba de esfericidad de Bartlett, $p<0.001$; KMO=0.9). Un AFC basado en la estructura de las dimensiones indicó un ajuste deficiente del modelo (CFI=0.656; IFI=0.659; RMSEA=0.133). Ante estos resultados, se realizó un AFE con método de máxima verosimilitud y rotación oblimin. Tras aplicar un análisis paralelo y analizar las varianzas y las cargas de los factores obtenidos y el gráfico de sedimentación, con el fin de obtener una estructura más interpretable, se pudo ajustar el modelo a tres factores. El primer factor, "Conocimiento sobre la discalculia" (20 ítems de D1, D4 y D5) explicó el 30.5% de la varianza, el segundo factor, "Formación continua en discalculia y en otros trastornos del aprendizaje" (20 ítems de D3), el 18.6% y el tercero, "Formación inicial del profesorado en discalculia y en otros trastornos del aprendizaje" (10 ítems de D2), el 13.0%. Finalmente, se llevó a cabo un análisis descriptivo de cada dimensión, examinando posteriormente posibles diferencias en los factores según la especialidad del profesorado y según la experiencia previa con alumnado con discalculia (pruebas T-Student, Kruskal-Wallis y Mann-Whitney U).

RESULTADOS

Los datos sociodemográficos mostraron que la mayoría de los participantes fueron mujeres (82.857%), con desempeño docente en centros públicos (76.190%) y cuya capacitación era únicamente grado universitario (73.333%). Además, la experiencia laboral fue equilibrada, destacando que un 28.571% del profesorado contaba con más de 20 años de experiencia.

En cuanto a las tres variables que se utilizarán en el análisis de los resultados (edad, especialidad docente y experiencia con alumnado con discalculia): la distribución de la muestra por grupos de edad fue de 21-30 años (13.208%), de 31-40 años (30.476%), de 41-50 años (31.429%), de 51-60 años (20.755%), de 61 años en adelante (3.774%); se identificaron tres grupos de especialidad docente, profesorado de EP (48.387%), profesorado con especialidad psicopedagógica (22.222%) y profesorado con otras especialidades (29.366%); en relación a la experiencia con alumnado con discalculia, únicamente 25 docentes indicaron haber tenido casos diagnosticados en el aula. En ese grupo, tras eliminar un valor atípico, la media de alumnado diagnosticado atendido a lo largo de su carrera docente fue de 3.193±2.316.

A continuación, los resultados se presentan según los factores obtenidos en el AFE: "Conocimiento sobre la discalculia", "Formación continua en discalculia y en otros trastornos del aprendizaje", "Formación inicial del profesorado en discalculia y en otros trastornos del aprendizaje". Para cada uno de estos factores, se analiza la existencia de diferencias significativas según la especialidad del profesorado y la experiencia con alumnado con discalculia. Adicionalmente, los resultados correspondientes a la "Formación inicial del profesorado en discalculia y en otros trastornos del aprendizaje" se relacionan con la variable "edad".

Conocimiento sobre la Discalculia

En la dimensión D1, dirigida a analizar la percepción del conocimiento del profesorado sobre la discalculia, correspondiente con el dominio KCS, con preguntas del tipo "Soy consciente de las diversas características de la discalculia, dado que no se trata de un trastorno uniforme y existen sistemas de clasificación basado en las manifestaciones que presentan los estudiantes", el profesorado reflejó un conocimiento mínimo (1.993±0.701). La dimensión D4, "Conocimiento sobre herramientas y criterios de detección ante la discalculia", incluye preguntas del tipo "Conozco que algunas personas con discalculia intercambian dígitos de aspecto similar (por ejemplo: 3 y 8)", con el fin de profundizar en el KCS. El profesorado valoró con puntuaciones bajas su conocimiento sobre criterios de detección y herramientas (2.187±0.824). En relación con D5, "Conocimiento sobre

procedimientos de actuación ante la discalculia", se utilizaron preguntas como "Conozco recursos y ajustes metodológicos que se pueden realizar para estudiantes con discalculia cuya área de dificultad es el lenguaje matemático", para abordar el KCT y KCC, obteniendo una percepción de conocimiento bajo en estrategias y procedimientos de actuación (2.086±0.786).

Por otra parte, en el conocimiento global sobre la discalculia (D1, D4 y D5) la prueba Kruskal-Wallis indicó diferencias significativas en función de la especialidad ($p=0.002$), mientras que la prueba T-Student mostró diferencias según la experiencia previa con alumnado con discalculia ($p<0.001$). En ambos casos, el profesorado con especialidad psicopedagógica, así como quienes habían trabajado con alumnado con discalculia, presentaron percepciones más positivas de su conocimiento, aunque las medias se mantuvieron en niveles bajos.

Formación Continua en Discalculia y en otros Trastornos del Aprendizaje

Los resultados sobre la formación continua del profesorado, relacionados con el KCS y el KCT, mostraron que esta consulta principalmente recursos en internet (2.657±1.099), por encima de otras actividades formativas como cursos (1.752±0.841), congresos o conferencias (1.667±0.816) y libros o revistas educativas (2.105±1.055). La comparación con otras DEA reveló que la discalculia es el ámbito respecto al que se realizan menos consultas y actividades formativas, en contraste con, por ejemplo, la dislexia (recursos en internet: 3.104±0.935; cursos: 2.264±0.908; congresos o conferencias: 2.104±0.883; libros o revistas educativas: 2.528±0.928). Asimismo, se encontraron diferencias significativas según la especialidad (Mann-Whitney U, $p<0.001$) y la experiencia previa (Kruskal-Wallis, $p=0.003$). El profesorado especialista en psicopedagogía, así como quienes tenían experiencia con alumnado con discalculia, realizaban más consultas y actividades formativas que el profesorado de EP u otras especialidades, aunque las medias no alcanzaron los valores más altos de la escala.

Formación Inicial en Discalculia y en otros Trastornos del Aprendizaje

El profesorado valoró con puntuaciones bajas, la información recibida sobre discalculia durante su formación inicial (2.019±1.028) y la adquisición de competencias para intervenir en el aula (1.686±0.837), aspectos relacionados con el KCS y el KCT. La comparación con otras DEA evidenció que la discalculia es la DEA con menor presencia en la formación docente, siendo, como en el caso de dislexia: información recibida: 2.811±0.977; competencias adquiridas: 2.302±1.016.

Por grupos edad, los resultados mostraron que los participantes que puntuaron más bajo la información recibida durante su formación inicial fueron los de 21-30 años (1.929±1.141) seguido de: 41-50 (1.941±0.919), 31-40 (2.000±0.842), +60 (2.000±1.414) y 51-60 (2.227±1.307). En cuanto a las competencias adquiridas, el grupo que puntuó más bajo fue el de 31-40 (1.563±0.669), seguido de: 41-50 (1.618±0.739), +60 (1.750±0.957), 21-30 (1.786±0.975) y 51-60 (1.864±1.082). Las pruebas estadísticas confirmaron diferencias significativas según la especialidad (Kruskal-Wallis, $p=0.013$) y la experiencia previa (T-Student, $p=0.05$). El profesorado con especialidad psicopedagógica y aquellos con experiencia previa valoraron de forma más positiva su formación inicial en discalculia, aunque las medias se situaron en los valores más bajos de la escala.

DISCUSIÓN

Conocimiento sobre la Discalculia

Los resultados evidencian debilidades en distintos componentes del conocimiento vinculados al PCK en relación con la discalculia (Ball et al., 2008). Las evidencias pueden relacionarse con limitaciones en el KCS, ya que muestran una percepción de bajo conocimiento sobre manifestaciones de la discalculia. Además, las bajas puntuaciones obtenidas en el conocimiento de herramientas y criterios de detección, así como en estrategias de intervención, sugieren posibles debilidades en el KCT, para seleccionar e implementar estrategias ajustadas a las necesidades del alumnado, y en el KCC, para

comprender cómo las dificultades asociadas a la discalculia pueden afectar al aprendizaje de los contenidos matemáticos del currículo. Diferentes estudios respaldan esta idea, revelando que los docentes carecen de los conocimientos necesarios para reconocer y abordar las necesidades educativas del alumnado con discalculia y se sienten inseguros a la hora de intervenir (Sousa et al., 2016; Kunwar y Sharma, 2020; Mutlu et al., 2022; Espina et al., 2024). De Almeida Horsae Dias et al. (2013), señala que estos resultados son preocupantes debido a que la detección temprana de discalculia recae, en gran medida, en el profesorado.

En relación con la especialidad del profesorado y la experiencia docente, los resultados sugieren un mayor desarrollo del PCK tanto en el profesorado con especialidad psicopedagógica como en el de más trayectoria, aunque en ambos casos persisten debilidades en los tres componentes. En la misma línea, Sousa et al. (2016) y Mutlu et al. (2022) observaron en el profesorado especialista un mayor conocimiento de estrategias de intervención, pero no de las características o manifestaciones del trastorno. Los resultados del estudio también son coherentes con investigaciones que demostraron que los docentes con formación específica o con mayor antigüedad docente tiene más conocimientos sobre este trastorno (de Almeida Horsae Dias et al., 2013; Adhikari, 2014; Kunwar y Sharma, 2020; Sousa et al., 2016; Graves, 2018; Mutlu et al., 2022). Sin embargo, Chideridou et al, (2016) no encontraron ninguna relación entre los conocimientos y la antigüedad docente o la formación específica del profesorado de Educación Secundaria.

Formación Inicial y Continua del Profesorado

Las evidencias también muestran que la formación del profesorado en discalculia es escasa, tanto en la formación inicial, en la que los contenidos relacionados con la discalculia son poco frecuentes; como en la continua, en la que perciben una escasa formación sobre este trastorno. Esto último se puede atribuir a una falta de interés por parte del profesorado o a una carencia en la oferta de formación. Kunwar y Sharma (2020) confirman una falta de contenidos destinados a tratar la discalculia en la formación inicial de los docentes y una escasa participación el profesorado en cursos que la abordan. Desde el MKT, la escasa presencia de contenidos relacionados con la discalculia en la formación podría dificultar tanto la comprensión de las manifestaciones y necesidades del alumnado con este trastorno (KCS), como el desarrollo de estrategias didácticas y de intervención ajustadas (KCT y KCC). La formación inicial docente podría estar condicionada por la edad del profesorado, considerando que el término discalculia fue introducido por primera vez por Kosc (1974). Sin embargo, los resultados muestran que el grupo de 21 a 30 años es el que peor valora la información recibida durante su formación inicial. Además, aunque este grupo se sitúa entre los que mejor valoran las competencias adquiridas, las puntuaciones continúan siendo bajas dentro de la escala. A pesar de que no se localizaron estudios que abordasen específicamente esta cuestión, investigaciones previas han señalado que una mayor experiencia docente se asocia con una mayor confianza en los propios conocimientos (Sousa et al., 2017; Graves, 2018).

La formación se percibió mayor en los grupos de especialidad psicopedagógica y con experiencia previa ante alumnado con discalculia, observándose diferencias significativas. No obstante, Sousa et al. (2022) y Mutlu et al. (2022) apuntan a que la formación del profesorado especialista puede estar abordando la intervención en discalculia, pero no las manifestaciones y el reconocimiento. Por otro lado, Adhikari (2024) concluye que, aunque el profesorado tiene experiencia con alumnado con discalculia, no es un contenido que se aborde en su formación, lo que explica el escaso conocimiento sobre el trastorno. El estudio revela que las otras DEA reciben una mejor cobertura en los programas de formación inicial, así como una mayor dedicación durante la formación continua. Sin embargo, la puntuación de la formación en esas otras DEA también es baja, lo cual corrobora la percepción de formación realmente escasa en discalculia como se ha indicado arriba.

CONCLUSIONES

Los resultados del estudio confirman las tres hipótesis planteadas. En efecto, se constata un conocimiento limitado del profesorado sobre la discalculia, tanto en su identificación como en la planificación de la respuesta educativa (H1). Asimismo, se evidencia una escasa presencia de la discalculia en la formación inicial y continua del profesorado, lo que podría explicar parte de las debilidades detectadas en los distintos componentes del conocimiento docente (H2). Además, los resultados muestran que otros DEA reciben una mayor presencia en la formación docente, tanto inicial como continua, en comparación con la discalculia (H3). Se percibe una relación positiva entre la especialidad o la experiencia docente con el conocimiento y formación en discalculia. En conjunto, los resultados ponen de manifiesto la necesidad de analizar profundamente la formación del profesorado en relación con la discalculia, así como reforzarla dentro de los programas formativos docentes, con el fin de mejorar la detección temprana y la intervención educativa en el aula. Desde la perspectiva del MKT, esta formación debería atender al desarrollo del KCS, KCT y KCC, para mejorar la identificación, la comprensión de dificultades y el diseño de respuestas educativas ajustadas, ya que se observan limitaciones para reconocer el trastorno y para diseñar e implementar estrategias didácticas.

Referencias

Adhikari, K. (2014). *Assessment of the awareness of dyscalculia among primary teachers: A case study of Chuhandanda VDC* [Tesis de maestría, Tribhuvan University].

Akram, G., Thomson, A.H., Boyter, A.C. y McLarty, M. (2009). ADHD and the role of medication: Knowledge and perceptions of qualified and student teachers. *European Journal of Special Needs Education, 24*, 423-436. https://doi.org/10.1080/08856250903223088

Babbie, E. (2000). *Fundamentos de la investigación social.* International Thomson Editores.

Ball, D.L., Thames, M.H. y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes it Special? *Journal of Teacher Education, 59*(5). https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Butterworth, B. (2005). The development of arithmetical abilities. *Journal of Child Psychology and Psychiatry, 46*(1), 3–18. https://doi.org/10.1111/j.1469-7610.2004.00374.x

Butterworth, B., Varma, S. y Laurillard, D. (2011). Dyscalculia: from brain to education. *Science, 332*(6033), 1049-1053.

Chideridou-Mandari, A., Padeliadu, S., Karamatsouki, A., Sandravelis, A. y Karagiannidis, C. (2016). Secondary mathematics teachers: What they know and don't know about dyscalculia. *International Journal of Learning, Teaching and Educational Research*, *15*(9), 84-98.

Cubilla-Bonnetier, D. (2024). Prevalencia de la dislexia el desarrollo en español: un metaanálisis. *Revista Argentina de Ciencias del Comportamiento, 16*(3), 1-13. https://doi.org/10.32348/1852.4206.v16.n3.38343

Desoete, A., Ceulemans, A., De Weerdt, F. y Pieters, S. (2012). Can we predict mathematical learning disabilities from symbolic and non-symbolic comparison tasks in kindergarten? Findings from a longitudinal study. *British Journal of Educational Psychology, 82*(1), 64-81. https://doi.org/10.1348/2044-8279.002002

de Almeida Horsae Dias, M., Medeiros de Britto Pereira, M. y Van Borsel, J. (2013). Assessment of the awareness of dyscalculia among educators. *Audiology - Communication Research*, *18*(2), 93-100.

Espina, E., Marbán, J. M. y Maroto, A. (2022). Una mirada retrospectiva a la investigación en discalculia desde una aproximación bibliométrica. *Revista de Educación, 396*, 205-234. https://doi.org/10.4438/1988-592X-RE-2022-396-535

Espina, E., Prieto, J. M. M. y Maroto, A. (2024). Creencias del profesorado sobre la discalculia. En *Investigación en Educación Matemática XXVII: Córdoba, 4, 5 y 6 de septiembre de 2024* (p. 579). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Gersten, R., Jordan, N. C. y Flojo, J. R. (2005). Early Identification and Interventions for Students with Mathematics Difficulties. *Journal of Learning Disabilities, 38*(4), 293-304. https://doi.org/10.1177/00222194050380040 30

Graves, T. L. (2018). *Teacher knowledge and perception of mathematics disabilities and dyscalculia* [Tesis doctoral, University of Wyoming]. Figshare.

Guzmán, R., Correa, A. D., Arvelo, C. N. y Abreu, B. (2015). Conocimiento del profesorado sobre las dificultades específicas de aprendizaje en lectura y escritura. *Revista de Investigación Educativa, 33*(2), 289-302. https://doi.org/10.6018/rie.33.2.211101

Johnson, F. y Roy, F.G. (2026). Mathematics Teachers' Pedagogical Content Knowledge in Strengthening Conceptual Understanding in Students with Learning Disabilities: A Practice-Based Conceptual Synthesis. *Education Sciences*, *16*(2), 1-23. https://doi.org/10.3390/educsci16020176

Kaufmann, L. y von Aster, M. (2012). The diagnosis and management of dyscalculia. *Deutsches Ärzteblatt International, 109*(45), 767-778.

Kosc Ladislav, P.D. (1974). Developmental Dyscalculia. *Journal of Learning Disabilities, 7*(3), 46-59. https://doi.org/10.1177/002221947400700309

Kunwar, R. y Sharma, L. (2020). Exploring teachers´ knowledge and students´ status about dyscalculia at basic level students in Nepal. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 16*(12). https://doi.org/10.29333/ejmste/8940

Lacave, C., Molina, A.I., Fernández Guerrero, M. y Redondo, M.A. (2016). Análisis de la fiabilidad y validez de un cuestionario docente. *ReVisión*, *9*(1).

McMillan, J. y Schumacher, S. (2005). *Investigación Educativa*. Pearson Educación, S.A.

Meaños-Asensi, R., Casas Mirás, J.M. y Pérez Rodríguez, M. (2026). Manifestaciones y prevalencia de la discalculia en Educación Primaria: estado del arte. *Educación Matemática, 38*(1). https://doi.org/10.24844/em3801.03

Moreno Tallón, F., Rodrigo Sánchez, A. y Villatoro Moral, S. (2024). Estudio de caso sobre la percepción de docentes ante el alumnado con trastorno específico del lenguaje desde el marco inclusivo. *Contextos educativos: Revista de educación*, (34), 83-105. https://doi.org/10.18172/con.6020

Morgan, P. L., Farkas, G. y Wu, Q. (2009). Five-year growth trajectories of kindergarten children with learning difficulties in mathematics. *Journal of Learning Disabilities, 42*(4), 306-321. https://doi.org/10.1177/0022219408331037

Mutlu, Y., Çalişkan, E. F. y Yasul, A. F. (2022). We asked teachers: Do you know what dyscalculia is? *International Online Journal of Primary Education (IOJPE)*, *11*(2), 361-378.

Reilly, S., Wake, M., Ukoumunne, O.C., Bavin, E., Prior, M., Cini, E., Conway, L., Eadie, P. y Bretherton, L. (2010). Predicting language outcomes at 4 years of age: findings from Early Language in Victoria Study. *Pedriatrics, 126*(6), 1530-1537. https://doi.org/10.1542/peds.2010-0254

Soriano-Ferrer, M. y Echegaray-Bengaa, J. (2016). Conocimientos de los maestros acerca de la dislexia del desarrollo. *Aula abierta, 44*(2), 2016, 63-69. https://doi.org/10.1016/j.aula.2016.01.001

Sousa, P., Días, P.D. y Cadime, I. (2016). Predictors of primary school teachers´ knowledge about developmental dyscalculia. *European Journal of Special Needs Education, 32*(2), 204-220. https://doi.org/10.1080/08856257.2016.1216635

Vargas Rivera, E. S. (2022). Detección temprana de la disgrafía desde el ejercicio profesional docente. *Revista Científica Retos de la Ciencia*, *6*(12), 13-24. https://doi.org/10.53877/rc.2017.01.01

ESTRATEGIAS Y ERRORES DE FUTUROS MAESTROS EN LA RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA DE MEDIDA INDIRECTA

Prospective primary teachers' strategies and errors in solving an indirect measurement problem

Mengual, E., Arias, M., Lascorz-Lozano, L., López, A. A. y Rodríguez-Crespo, M.

Universidad de Zaragoza

Resumen

Este estudio analiza las estrategias y errores de estudiantes del grado de Educación Primaria al resolver una tarea PISA de medida indirecta que consiste en estimar el área de la superficie de la Antártida a partir de un mapa con escala. Participaron 101 futuros maestros de la Universidad de Zaragoza. Las producciones se sometieron a un análisis de contenido para identificar las estrategias utilizadas y los errores asociados. Los resultados muestran un predominio de estrategias de modelización geométrica y descomposición de superficies, así como errores frecuentes relacionados con el uso de la escala y de las unidades de área, lo que evidencia dificultades en la coordinación de las magnitudes implicadas en la medición indirecta.

Palabras clave: *medida indirecta, área, estrategias de resolución, formación de maestros, errores.*

Abstract

This study analyses the strategies and errors exhibited by Primary Education students when solving a PISA indirect measurement task that involves estimating the area of Antarctica from a scaled map. A total of 101 prospective teachers from the University of Zaragoza participated in the study. The written responses were analysed through content analysis to identify the strategies employed and the associated errors. The results show a predominance of strategies based on geometric modelling and surface decomposition, as well as frequent errors related to the use of the scale and area units, revealing difficulties in coordinating the magnitudes involved in indirect measurement.

Keywords: *indirect measurement, area, problem-solving strategies, teacher education, errors.*

INTRODUCCIÓN

En determinadas situaciones no es posible obtener una medida directamente, por lo que es necesario establecer relaciones entre magnitudes para estimar una cantidad. Estas situaciones dan lugar a tareas de medida indirecta, en las que se han identificado dificultades relacionadas con el uso de escalas, la estimación y el cálculo de áreas (Chamorro, 2001; Montejo-Gámez et al., 2023; Smith et al., 2011).

Para el presente estudio se ha seleccionado el problema "Superficie de un continente", liberado del Programme for International Student Assessment (PISA) 2000, donde se requiere estimar el área de una superficie a partir de un mapa con escala. Los resultados obtenidos en esta prueba evidencian la complejidad de la tarea, ya que únicamente el 10,9 % del alumnado español respondió correctamente, frente al 19,3 % de media de la OCDE (Instituto Nacional de Evaluación Educativa, s. f.; OECD, 2009).

Esta tarea permite analizar los conocimientos y estrategias que los futuros maestros ponen en juego en una situación de medida indirecta antes de recibir formación específica, lo que puede aportar información relevante para orientar procesos de formación sobre la enseñanza de la medida. Por ello, este trabajo tiene como objetivos: (1) analizar las estrategias de resolución utilizadas por los

Mengual, E., Arias, M., Lascorz-Lozano, L., López, A. A. y Rodríguez-Crespo, M. (2026). Estrategias y errores de futuros maestros en la resolución de un problema de medida indirecta. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (pp. 385-392). SEIEM.

estudiantes del grado de Educación Primaria para estimar el área de una superficie irregular a partir de una representación cartográfica con escala, (2) caracterizar los errores que emergen durante la resolución y (3) analizar el grado de éxito asociado a las distintas estrategias empleadas.

MARCO TEÓRICO

La medida indirecta

La medida indirecta se refiere a situaciones en las que el valor de una magnitud no puede obtenerse mediante medición directa, por lo que es necesario establecer relaciones con otras magnitudes medibles (Albarracín et al., 2026; Pizarro et al., 2016). Este proceso implica construir un modelo que permita deducir el valor buscado a partir de otras medidas. Un ejemplo habitual aparece en mapas o maquetas, donde la escala establece una relación de proporcionalidad entre las longitudes representadas y las reales (Fiol y Fortuny, 1990). En el caso del área, este proceso suele implicar la construcción de un modelo geométrico basado en mediciones auxiliares y en el uso de relaciones matemáticas o fórmulas para estimar el área de una superficie (Rojas y Albarracín, 2024; Albarracín et al., 2026).

La medida del área

La medición del área implica comprender el área como una magnitud bidimensional y coordinar conocimientos relacionados con la conservación del área, la estructuración espacial, el uso de unidades de área y las relaciones multiplicativas presentes en las fórmulas de área (Clements y Sarama, 2015; Smith et al., 2016; Caviedes et al., 2024). Sin embargo, en la práctica escolar suele predominar la memorización de equivalencias entre unidades y la aplicación de fórmulas, prestándose menor atención a los procesos de medición y estimación (Chamorro, 2001). Este enfoque, relacionado con la aritmetización de la medida (Chamorro y Belmonte, 1988; Mengual et al., 2016, 2017), puede reducir los problemas de área a cálculos mecánicos desvinculados de la comprensión de la superficie como magnitud.

Estrategias de medición y estimación de un área

Medir un área plantea diversos desafíos para los estudiantes. Entre ellos destacan la comprensión de la conservación del área, el significado de las unidades de medida, la estructuración del espacio, la comprensión de las fórmulas de área y la distinción entre área y perímetro (Smith et al., 2016). El área se conserva bajo muchas transformaciones geométricas, lo que implica reconocer que el espacio ocupado por una región no cambia, aunque su forma se modifique mediante desplazamientos, particiones o recomposiciones (Clements y Sarama, 2015; Smith et al., 2016).

Una estrategia fundamental para desarrollar la comprensión del área consiste en el uso de pavimentaciones o recubrimientos mediante unidades cuadradas, que permiten cubrir una superficie sin huecos ni superposiciones y posteriormente realizar un conteo de unidades. Este tipo de actividades favorece la comprensión de las relaciones multiplicativas que subyacen a las fórmulas del área (Smith et al., 2016).

Olmo et al. (1989) identifican distintas estrategias para estimar el área de figuras irregulares. Entre ellas se encuentra la adición repetida, basada en iterar unidades de área para cubrir la superficie; la estrategia de longitud por anchura, que consiste en estimar dimensiones lineales y aplicar una fórmula de área; y la reestructuración, que implica transformar la figura mediante procesos de descomposición y recomposición para facilitar el cálculo de su área. En el caso de superficies irregulares, la medición del área suele implicar procesos de aproximación, lo que introduce la noción de error asociada a la estimación de medidas. La relevancia del error depende del contexto de la tarea y del grado de precisión requerido en la medición (Olmo et al., 1989).

Dificultades detectadas en tareas de medida del área

En el caso específico de la medición del área, se han identificado dificultades relacionadas con el uso de escalas, la interpretación de la relación entre longitudes y áreas, así como con la aplicación incorrecta o el desconocimiento de fórmulas para calcular áreas (Alguacil et al., 2016). Asimismo, en tareas de estimación y medida de magnitudes con futuros maestros se han descrito errores conceptuales, de medición, de uso de instrumentos, de unidades y de cálculo, además de dificultades en la comprensión de los resultados obtenidos (López-Serentill, 2022; Nortes y Nortes, 2023). También se han identificado dificultades específicas relacionadas con el uso y la interpretación de las unidades de área. Sosa-Martín et al. (2024) muestran que muchos futuros docentes omiten las unidades de medida o las utilizan de forma imprecisa al formular problemas de área, tratándolas en ocasiones como etiquetas desvinculadas del significado de la magnitud. Estas dificultades se relacionan, en parte, con el tratamiento escolar de la medida, en el que suele predominar la memorización de equivalencias entre unidades y la aplicación de fórmulas frente a los procesos de medición y estimación (Chamorro, 2001; Zacharos, 2006). En conjunto, estos errores reflejan problemas más profundos en la comprensión del área como magnitud bidimensional y en la coordinación entre las magnitudes implicadas.

El problema de la "Superficie de un continente" presenta dos dificultades que han sido señaladas en otros estudios: el uso de la escala y el carácter abierto de la tarea. En relación con la primera, Montejo-Gámez et al. (2023) señalan que el trabajo con representaciones a escala puede generar dificultades, especialmente cuando el alumnado debe relacionar las unidades del dibujo con las unidades correspondientes en la realidad. Por otra parte, el carácter abierto de las tareas de estimación puede generar tanto oportunidades de aprendizaje como obstáculos para los estudiantes, ya que les exige tomar decisiones sobre los procedimientos de resolución (Smith et al., 2011).

METODOLOGÍA Y ANÁLISIS

Este estudio adopta un diseño exploratorio-descriptivo basado en el análisis de las producciones de 101 estudiantes del grado de Educación Primaria de la Universidad de Zaragoza, que aún no habían cursado asignaturas relacionadas con la didáctica de las matemáticas. La tarea utilizada fue el problema "Superficie de un continente", liberado por PISA 2000 (Figura 1). Los estudiantes resolvieron el problema de forma individual y explicaron el procedimiento seguido, pudiendo realizar anotaciones, cálculos o dibujos sobre el mapa. Las respuestas escritas constituyeron el corpus de análisis. Las producciones se sometieron a un análisis de contenido (Krippendorff, 2004) dentro de un enfoque de métodos mixtos (Creswell, 2014). La unidad de análisis estuvo formada por segmentos de las producciones escritas —expresiones matemáticas, cálculos o dibujos— que evidenciaban el procedimiento utilizado.

Las estrategias de resolución empleadas por los estudiantes se identificaron a partir de las producciones escritas. El sistema de categorías se construyó mediante la revisión de la literatura sobre medición y estimación de áreas (Clements y Sarama, 2015; Olmo et al., 1989; Smith et al., 2016) y un análisis exploratorio de las respuestas. A continuación, se llevó a cabo un proceso de triangulación entre investigadores para consensuar la codificación de las estrategias. Paralelamente, los investigadores identificaron errores presentes en las producciones de los estudiantes. A partir de este análisis exploratorio se elaboró un sistema de categorías de error, consensuado posteriormente por el equipo investigador. Seguidamente, se realizó un segundo proceso de triangulación entre investigadores para categorizar los errores identificados en cada producción de acuerdo con el sistema establecido.

Finalmente, se realizó un análisis cuantitativo calculando la frecuencia de cada estrategia y error, así como el porcentaje de éxito de las distintas estrategias de resolución. Se consideraron correctas las estimaciones comprendidas entre 12.000.000 y 18.000.000 km², siguiendo los criterios de corrección establecidos por PISA 2000 (Instituto Nacional de Evaluación Educativa, s. f.).

Figura 1

Problema "Superficie de un continente" (Instituto Nacional de Evaluación Educativa, s. f.)

A continuación, se presenta un mapa de La Antártida.



Pregunta 1 *21 22 23 24 25 11 12 13 14 01 02 99*

Estima el área de la Antártida utilizando la escala que acompaña al mapa.

Muestra cómo has hecho los cálculos y explica cómo has hecho tu estimación
(Puedes dibujar sobre el mapa, si te es útil para hacer la estimación.)

RESULTADOS

Estrategias de resolución identificadas

- *A. Modelización geométrica mediante un círculo*. El estudiante aproxima el área de la Antártida mediante un círculo que cubre la mayor parte del continente. Para ello identifica una distancia máxima en el mapa o traza un círculo sobre la representación, mide el radio o el diámetro y utiliza la escala para transformar la medida a kilómetros. A partir de esta longitud calcula el área aplicando la fórmula del área del círculo.
- *B. Recubrimiento mediante figuras planas*. Los estudiantes estiman el área descomponiendo o recubriendo la superficie con figuras geométricas simples, como rectángulos, triángulos o cuadrados. Tras medir sus dimensiones sobre el mapa, calculan el área de cada figura y utilizan la escala —antes o después del cálculo— para estimar el área real de cada una. Finalmente suman las áreas de todas las figuras para aproximar el área de la Antártida.
- *C. Modelización mediante producto bidimensional*. En esta estrategia el área de la Antártida se aproxima a partir de dos dimensiones principales perpendiculares mostrando implícita o explícitamente un rectángulo. Los estudiantes miden estas longitudes en el mapa y calculan el área mediante el producto de ambas, aplicando la escala antes o después del cálculo para estimar el área real.
- *D. Inscripción en una figura plana y sustracción de áreas*. Los estudiantes inscriben la Antártida dentro de una figura plana mayor cuya área resulta fácil de calcular. Posteriormente identifican las regiones de dicha figura que no pertenecen al continente, calculan sus áreas y las restan del área total.
- *E. Mallado de la superficie.* Los estudiantes superponen una cuadrícula sobre el mapa y cuentan los cuadrados que cubren total o parcialmente la superficie del continente. Tras determinar el área real correspondiente a cada unidad mediante la escala, multiplican este valor por el número de cuadrados para estimar el área total.

Las estrategias identificadas pueden agruparse en tres formas de estimación del área de superficies irregulares: aproximación mediante figuras geométricas simples (A y C), descomposición de superficies (B y D) y pavimentación mediante unidades de área (E), en consonancia con procesos descritos en la literatura sobre enseñanza de la medida y del área (Clements y Sarama, 2015; Olmo et al., 1989; Smith et al., 2016).

De las 101 respuestas analizadas, 3 estudiantes dejaron la tarea en blanco, 2 calcularon únicamente una longitud y otros 2 calcularon el perímetro de la figura. En estos casos no se llegó a realizar una estimación del área. Entre las 94 respuestas en las que se intentó estimar el área de la superficie del continente, 23 (24,5 %) utilizaron la estrategia A, 29 (30,8 %) la estrategia B, 25 (26,6 %) la estrategia C, 9 (9,6 %) la estrategia D y 8 (8,5 %) la estrategia E. La mayoría de los estudiantes recurrió a estrategias de modelización geométrica o descomposición de la superficie: las estrategias A, B y C concentran 77 de las 94 respuestas (81,9 %). En cambio, la inscripción en un rectángulo y sustracción de áreas (D) y el mallado (E) fueron poco frecuentes.

Errores identificados

- *Er1. Error por no utilizar la escala.* El estudiante realiza cálculos sobre el mapa sin transformar las medidas del plano a las medidas reales. Por ejemplo, algunos estudiantes calculan el área directamente sobre el mapa y expresan el resultado en km² sin aplicar la escala para transformar las medidas del plano en medidas reales.
- *Er2. Error en el cambio de unidades longitudinales al utilizar la escala.* El estudiante aplica incorrectamente la relación entre las unidades de longitud del plano y las unidades correspondientes en la realidad. Por ejemplo, se asume que 1 cm del mapa equivale directamente a 200 km porque la escala está dividida en intervalos de 200 km, sin considerar la longitud real del segmento representado en la escala gráfica.
- *Er3. Error en el cambio de unidades de área al utilizar la escala.* El estudiante no coordina adecuadamente la relación cuadrática entre las unidades de longitud y las unidades de área. Por ejemplo, algunos estudiantes transforman el área obtenida en cm² a km² aplicando la escala de manera lineal, sin considerar que la conversión entre unidades de área implica una relación cuadrática.
- *Er4. Error en el recubrimiento con más de una figura geométrica.* El estudiante aproxima el área utilizando varias figuras planas, pero el recubrimiento obtenido presenta huecos o solapamientos entre las figuras empleadas que alteran la estimación del área.
- *Er5. Error en la obtención de una medida directa auxiliar.* El estudiante comete errores al calcular alguna de las medidas necesarias para estimar el área. Por ejemplo, se realizan mediciones poco precisas sobre el mapa —desviaciones de apenas un milímetro— que, al aplicar la escala, generan diferencias considerables en la estimación final del área.
- *Er6. Error en el uso de unidades de medida de área.* El estudiante utiliza unidades incorrectas o las omite al expresar el resultado del área. Por ejemplo, algunos estudiantes obtienen una estimación numéricamente razonable, pero expresan el resultado en km o sin indicar unidades, en lugar de utilizar km².
- *Er7. Error en el uso de una fórmula de área.* El estudiante selecciona incorrectamente una fórmula para calcular el área de una figura plana. Por ejemplo, se utilizan expresiones como base + altura en lugar de fórmulas multiplicativas para calcular áreas, o aplican fórmulas correspondientes a otras figuras geométricas.
- *Er8. Error de cálculo.* El estudiante comete errores aritméticos (de suma, resta, multiplicación o división) durante el proceso de resolución.

Estas categorías permiten distinguir entre errores vinculados al uso de la escala (Er1–Er3), errores relacionados con el proceso de medición (Er4–Er6), errores relativos al uso de fórmulas de área (Er7) y errores de cálculo aritmético (Er8). Esta distinción permite analizar no solo si la estimación obtenida se sitúa dentro del intervalo considerado correcto, sino también los distintos tipos de errores presentes durante el proceso de medida indirecta.

Relación entre estrategias, errores y éxito

Los resultados obtenidos para cada estrategia se presentan en la Tabla 1.

Tabla 1

Distribución de los errores identificados y porcentaje de aciertos según la estrategia utilizada.

	Errores									*Aciertos*
Estrategia	Er1.	Er2.	Er3.	Er4.	Er5.	Er6.	Er7.	Er8.	TOTAL	(%)
A	2	4	0	0	0	7	3	6	22	34,8 %
B	1	0	8	1	1	5	4	1	21	30,4 %
C	2	0	1	2	5	1	3	3	17	8,7 %
D	3	0	1	0	0	7	1	0	12	21,7 %
E	1	0	0	0	0	1	0	0	2	4,3 %
TOTAL	9	4	10	3	6	21	11	10	74	34,0 %

En total se registraron 74 errores en las 94 respuestas analizadas. El análisis de estos errores permite identificar cuatro grandes tipos de dificultades en la resolución del problema. En primer lugar, aparecen errores relacionados con el uso de la escala (Er1–Er3), que incluyen la no utilización de la escala o la conversión incorrecta de unidades lineales o de área. En total se registran 23 casos. En segundo lugar, se observan errores relacionados con el proceso de medición (Er4–Er6), que incluyen el recubrimiento de superficies, el cálculo de medidas auxiliares y el uso de unidades de área. Este grupo es el más numeroso, con 30 casos, destacando especialmente el uso incorrecto de unidades de área (Er6), con 21 casos. En tercer lugar, se identifican errores relacionados con el uso de fórmulas de área (Er7), con 11 apariciones, en las que los estudiantes seleccionan una fórmula inadecuada. Finalmente, aparecen errores de cálculo aritmético (Er8), con 10 casos, correspondientes a errores en operaciones necesarias para obtener la estimación final del área.

En relación con las estrategias utilizadas, se observa que las estrategias A, B y C concentran también la mayor parte de los errores, lo cual es esperable dado que son las estrategias más utilizadas por los estudiantes. No obstante, el análisis conjunto de estrategias y resultados muestra diferencias importantes en términos de éxito. La estrategia A (modelización mediante un círculo) presenta el mayor porcentaje de estimaciones correctas (34,8 %), seguida de la estrategia B (30,4 %) y de la estrategia D (21,7 %). Por el contrario, las estrategias C (8,7 %) y E (4,3 %) presentan porcentajes de éxito considerablemente menores.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Los resultados muestran que los futuros maestros recurren principalmente a estrategias de modelización geométrica y descomposición de superficies para estimar áreas irregulares, en consonancia con investigaciones previas sobre resolución de tareas de área (Caviedes et al., 2024; Olmo et al., 1989). Asimismo, aunque en la práctica escolar suele predominar la aplicación de fórmulas y procedimientos algorítmicos (Chamorro, 2001), las estrategias identificadas muestran que muchos estudiantes son capaces de desarrollar procesos de estimación, descomposición y reorganización geométrica de superficies irregulares, aunque las dificultades aparecen posteriormente en la ejecución de cálculos, el uso de escalas o la expresión de unidades.

El análisis de los errores permite identificar dificultades relacionadas con el uso de la escala, la interpretación de la relación entre longitudes y áreas y el uso de unidades y fórmulas de área, aspectos que ya han sido señalados en investigaciones previas sobre medición del área (Alguacil et al., 2016; López-Serentill, 2022; Nortes y Nortes, 2023). En particular, los errores asociados al uso de la escala evidencian dificultades para coordinar las relaciones de proporcionalidad implicadas en la interpretación de representaciones a escala, en línea con lo señalado por Montejo-Gámez et al. (2023). Asimismo, la elevada frecuencia de errores en el uso de unidades de área sugiere una comprensión limitada del significado de la unidad de medida, que en muchos casos parece interpretarse como una etiqueta añadida al resultado numérico (Barrett et al., 2011). Este resultado coincide con lo señalado por Sosa-Martín et al. (2024), quienes identifican omisiones y usos imprecisos de las unidades de área en problemas formulados por futuros maestros.

Las diferencias de éxito entre estrategias podrían relacionarse con la complejidad de los procesos matemáticos implicados en cada aproximación. La estrategia A presenta el mayor porcentaje de aciertos, posiblemente porque requiere coordinar un número reducido de medidas y cálculos. Del mismo modo, las estrategias B y D podrían verse favorecidas por el predominio escolar de procedimientos vinculados al uso de fórmulas de área y la descomposición de superficies (Chamorro, 2001; Zacharos, 2006). Por el contrario, la estrategia C presenta porcentajes de éxito considerablemente menores, posiblemente debido a la dificultad de aproximar el área de una superficie irregular mediante un producto bidimensional cuando la forma del continente no se ajusta claramente a un rectángulo. Finalmente, la escasa frecuencia y el bajo porcentaje de éxito de la estrategia E sugieren que los procedimientos de pavimentación o mallado (Clements y Sarama, 2015; Smith et al., 2016) podrían tener una menor presencia en la experiencia escolar previa de los estudiantes (Mengual et al., 2016, 2017).

Finalmente, los resultados evidencian la necesidad de reforzar en la formación inicial del profesorado la comprensión de los procesos implicados en la medida indirecta, especialmente aquellos relacionados con la estimación, el uso de escalas y la coordinación entre magnitudes lineales y superficiales.

Agradecimientos

Este trabajo se ha desarrollado dentro del grupo de investigación S60_26R "Investigación en Educación Matemática" financiado por el Gobierno de Aragón.

Referencias

Albarracín, L., Rojas, F. y Torregrosa, A. (2026). Estrategias de medida indirecta: un enfoque de trabajo colaborativo en el terreno. *Enseñanza de las Ciencias*, *44*(1), 165-182. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.6474

Alguacil, M., Boqué, M. C. y Pañellas, M. (2016). Dificultades y errores en conceptos matemáticos básicos de los estudiantes para maestro. *Revista INFAD De Psicología. International Journal of Developmental and Educational Psychology, 1* (1)*,* 419-430. https://doi.org/10.17060/ijodaep.2016.n1.v1.162

Barret, K.E., Cullen, C., Sarama, J., Clements, D.H.; Klanderman, D., Miller, A. y Rumsey, C. (2011). Children's unit concepts in measurement: a teaching experiment spanning grades 2 through 5. *ZDM Mathematics Education*, *43*, 637–650. https://doi.org/10.1007/s11858-011-0368-8

Caviedes, S., De Gamboa, G. y Badillo, E. (2024). Mathematical connections involved in area measurement processes. *Research in Mathematics Education*, *26*(2), 237-257. https://doi.org/10.1080/14794802.2024.2370333

Chamorro, M. C. (2001). Las dificultades en la enseñanza-aprendizaje de las magnitudes en educación primaria y ESO. En M. C. Chamorro (Coord.), *Dificultades en el aprendizaje de las matemáticas* (pp. 79-122). Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.

Chamorro, M. C. y Belmonte, J. M. (1988). *El problema de la medida: Didáctica de las magnitudes lineales*. Síntesis.

Clements, D. H. y Sarama, J. (2015). *El aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas a temprana edad: el enfoque de las trayectorias de aprendizaje*. Learning Tools.

Creswell, J. W. (2014). *Research design: Qualitative, quantitative, and mixed methods approaches* (4th ed.). Sage.

Fiol, M. L. y Fortuny, J. M. (1990). *Proporcionalidad directa. La forma y el número.* Síntesis.

Instituto Nacional de Evaluación Educativa. (s. f.). *Superficie de un continente* [Recurso didáctico]. Educalab. http://educalab.es/inee/evaluaciones-internacionales/preguntas-liberadas-pisa-piaac/preguntas-pisa-matematicas/geometria

Krippendorff, K. (2004). *Content analysis: An introduction to its methodology* (2nd ed.). Sage.

López-Serentill, P. (2022). Categorización de los errores de los estudiantes para maestro de primaria en tareas de medida de magnitudes. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 363-371). SEIEM.

Mengual, E., Gorgorió, N. y Albarracín, L. (2016). Las actividades de medida en el libro de texto: un estudio de caso. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 345-354). SEIEM.

Mengual, E., Gorgorió, N. y Albarracín, L. (2017). Análisis de las actividades propuestas por un libro de texto: El caso de la medida. *REDIMAT, 6*(2), 136-163. https://doi.org/10.17583/redimat.2017.2415

Montejo-Gámez, J., Fernández-Ahumada, E., Martínez-Jiménez, E. y Adamuz-Povedano, N. (2023). Análisis de modelos para la estimación de cantidades irregularmente distribuidas. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 387-394). SEIEM.

Nortes, M. R. y Nortes, A. (2023). Medida de tiempos: un estudio con maestros en formación. *Números, 113*, 9-24.

OECD. (2009). *Take the Test: Sample Questions from OECD's PISA Assessments*. OECD Publishing.

Olmo, M. A., Moreno, F. y Gil, F. (1989). *Superficie y volumen: ¿algo más que el trabajo con fórmulas?* Síntesis.

Pizarro, N., Albarracín, L. y Gorgorió, N. (2016). Caracterización de las tareas de estimación y medición de magnitudes. *Números, 91,* 91-103.

Rojas, F. y Albarracín, L. (2024). Uso de actividades de medidas indirectas en la formación de maestros. *Números, 116*, 23-42.

Smith, J. P., van den Heuvel-Panhuizen, M. y Teppo, A. R. (2011). Learning, teaching, and using measurement: introduction to the issue. *ZDM Mathematics Education, 43*, 617-620. https://doi.org/10.1007/s11858-011-0369-7

Smith, J. P., Males, L. M. y Gonulates, F. (2016). Conceptual limitations in curricular presentations of area measurement: One nation's challenges. *Mathematical Thinking and Learning, 18*(4), 239-270. https://doi.org/10.1080/10986065.2016.1219930

Sosa-Martín, D., García-Alonso, I. y Bruno, A. (2024). Uso de las unidades de área en problemas formulados por futuros profesores de primaria. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 505-512). SEIEM.

Zacharos, K. (2006). Prevailing educational practices for area measurement and students' failure in measuring areas. *The Journal of Mathematical Behavior*, *25*(3), 224-239. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2006.09.003

ESTRATEGIAS ARGUMENTATIVAS DE ESTUDIANTES DE TERCER CURSO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

Argumentative strategies of third-year secondary education students

Milanesio, B.[a], Burgos, M.[b] y Rosso, F.[c]

[a]Universidad Complutense de Madrid, [b]Universidad de Granada, [c]Instituto Ramón Menéndez Pidal

Resumen

Dada la relevancia de la demostración en el desarrollo de la competencia matemática, distintos autores han explorado su introducción en los primeros cursos de educación secundaria. Sin embargo, en el contexto escolar argentino, estas investigaciones son escasas. Este trabajo busca caracterizar las estrategias argumentativas de estudiantes argentinos de tercer curso en un contexto aritmético, y estudiar cómo la puesta en común, guiada por la docente, favorece la construcción del conocimiento en relación con la demostración. Se adopta una metodología cualitativa basada en el análisis de contenido. Los principales resultados muestran un predominio de prácticas que no permiten demostrar las conjeturas emergentes, aunque también se evidencia el uso de ejemplos genéricos y argumentaciones deductivas apropiadas. Se aprecia también que la discusión colectiva favorece la construcción de un significado adecuado de conjetura y el avance hacia su demostración.

Palabras clave: *argumentación, demostración, aritmética, estudiantes de nivel secundario.*

Abstract

Given the relevance of proof in the development of mathematical competence, various authors have explored its introduction in the early years of secondary education. However, within the Argentine school context, such studies remain scarce. This paper aims to characterize the argumentative strategies of Argentine third-year students in an arithmetic context, and to examine how whole-class discussion, guided by the teacher, supports the construction of knowledge related to proof. A qualitative methodology based on content analysis is adopted. The main results show a predominance of practices that do not enable the demonstration of emerging conjectures, although the use of generic examples and appropriate deductive argumentations is also evident. The findings further indicate that collective discussion fosters the construction of an adequate understanding of conjecture and progress toward its proof.

Keywords: *argumentation, proof, arithmetic, secondary school students.*

INTRODUCCIÓN

A pesar de que, desde la investigación en Educación Matemática se insiste en la importancia de involucrar al estudiantado en la demostración desde las primeras etapas educativas (Stylianides et al., 2017), la demostración ocupa aún un lugar marginal en el contexto escolar a nivel internacional (Stylianides y Stylianides, 2022). En consecuencia, al avanzar hacia niveles educativos superiores, el estudiantado produce argumentos que no alcanzan los estándares de una demostración válida (Arce y Conejo, 2019; Milanesio y Burgos, 2024).

En este escenario, Stylianides y Stylianides (2022) señalan que la participación del alumnado en la práctica de la demostración en el contexto escolar depende fundamentalmente de la disposición y capacidad del profesorado para enseñarla e ilustrar su importancia. Esto implica no solo trabajar con argumentos deductivos sino también con actividades asociadas, como la generación de conjeturas o el uso de ejemplos. En esta línea, algunos investigadores, en colaboración con docentes, han

Milanesio, B., Burgos, M. y Rosso, F. (2026). Estrategias argumentativas de estudiantes de tercer curso de Educación Secundaria. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (pp. 393-400). SEIEM.

promovido el trabajo con la demostración en los primeros cursos de educación secundaria (Klock, 2025). Sin embargo, en el contexto argentino, son escasos los estudios que analizan cómo el estudiantado de estos cursos participa en actividades de demostración y el papel que desempeña la puesta en común. Los trabajos existentes se concentran en niveles superiores de secundaria, y, en general, no abordan el rol de la puesta en común (Giayetto et al., 2024; Markiewicz et al., 2021).

Este estudio forma parte de una investigación más amplia orientada a promover el trabajo con la demostración en los primeros cursos de educación secundaria en el contexto argentino, particularmente en el ámbito de la aritmética, uno de los campos menos explorados en investigaciones sobre demostración (Klock, 2025). Como señalan Stylianides et al. (2017), estas se han concentrado en contextos geométricos (por ejemplo, Larios-Osorio et al., 2017). En particular, este estudio busca aportar evidencia sobre las estrategias argumentativas que desarrolla el estudiantado y las discusiones que se generan en la puesta en común, con el docente como guía. Nos proponemos abordar las siguientes preguntas: ¿Qué estrategias argumentativas moviliza el alumnado de tercer curso al resolver un problema que requiere formular una conjetura y justificarla? ¿Cómo contribuye la puesta en común a la construcción del conocimiento sobre demostración? Para analizar las estrategias, empleamos el modelo de Toulmin (2003). Asimismo, incluimos aspectos de la puesta en común orientados a iniciar al estudiantado en la demostración como parte del trabajo matemático.

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

Argumentación, justificación y demostración

Consideramos la *argumentación* como un proceso que lleva a formular afirmaciones matemáticas y proporcionar evidencia para apoyarlas (Staples y Conner, 2022). Distinguimos *argumentación constructiva* -contribuye a la construcción de una conjetura- y *estructurante* -valida una conjetura previamente construida- (Pedemonte y Buchbinder, 2011). La *justificación* se entiende como una argumentación estructurante que persigue aportar las razones que sustentan afirmaciones ya establecidas (Staples y Conner, 2022). En el contexto escolar, la *demostración* no solo debe contemplar la validez disciplinar, sino también su significatividad dentro de la comunidad (Larios-Osorio et al., 2017). Por ello, la concebimos como una argumentación estructurante cuyo producto utiliza aserciones aceptadas como verdaderas y disponibles para la comunidad, emplea modos de argumentación válidos y conocidos por la comunidad o dentro de su alcance conceptual, se comunica con formas de expresión apropiadas, dentro del alcance conceptual (Stylianides et al., 2017).

El modelo de Toulmin

El *argumento*, como producto de un proceso de argumentación, está compuesto por cuatro elementos básicos (Toulmin, 2003): *conclusión,* afirmación u opinión cuyo valor se trata de establecer; *datos*, hechos que apoyan la conclusión; *garantía*, reglas generales que posibilitan que el paso de los datos a la conclusión sea legítimo; *respaldo*, otras certezas que le otorgan autoridad a la garantía. En una *argumentación abductiva*, el trabajo con casos particulares (datos) conduce a la formulación de una conjetura que actúa como conclusión (Soler-Álvarez y Manrique, 2014). La garantía está determinada por regularidades que se identifican en los datos y el respaldo alude a que tales regularidades se extienden al caso general. En una *argumentación inductiva,* se parte de una conjetura y se comprueba si es verdadera. Los datos corresponden a la conjetura y la garantía involucra su verificación en casos concretos, de lo que se deriva su aceptación como verdadera (conclusión), aun siendo insuficiente para inferir su validez (Soler-Álvarez y Manrique, 2014). El respaldo soporta la extensión al caso general a partir de la comprobación en ejemplos. En una *argumentación mediante ejemplo genérico* se razona sobre un ejemplo concreto para validar la afirmación y luego se eleva al caso general (Rø y Arnesen, 2020). El dato es el argumento efectuado para el ejemplo concreto. Este argumento-dato se eleva al caso general, sirviendo de garantía la regularidad observada en el trabajo con el ejemplo. Finalmente, en una *argumentación deductiva* se aplica una proposición general $r: p \rightarrow q$ (garantía) a

un dato dado p_1, caso particular de p, para obtener la conclusión q_1, caso particular de q (Molina et al., 2019). La garantía está respaldada por una teoría que la hace válida (Arce y Conejo, 2019).

El uso de este marco permite identificar la función de los elementos argumentativos en las producciones del estudiantado y así, clasificarlas según el tipo de argumentación desarrollado.

METODOLOGÍA

Se adopta una metodología cualitativa con la intención de describir las estrategias en la construcción de una conjetura y su justificación. Los participantes fueron 29 estudiantes de tercer curso (14-15 años) de un colegio de Argentina (año 2025). En el momento de recogida de datos, el alumnado había estudiado recientemente contenidos sobre divisibilidad en números naturales. Además, había trabajado problemas que involucraban la formulación de conjeturas a partir del análisis de ejemplos, pero no había abordado la demostración. Si bien el instrumento de recogida de datos incluía tanto problemas en los que la conjetura a justificar aparecía explícitamente en el enunciado, como otros en los que esta debía construirse antes de su justificación, en este estudio nos centramos en el análisis del problema incluido en la Figura 1, propuesto para su resolución individual en un tiempo de 30 minutos. A continuación, la docente llevó a cabo la puesta en común con la intención de discutir las estrategias emergentes y su adecuación para validar el conocimiento implicado.

Figura 1

Instrumento de recogida de datos

Problema. ¿Es posible encontrar algún conjunto de cuatro números naturales consecutivos cuya suma sea múltiplo de 3?

a) Escribir la condición que deben cumplir cuatro números consecutivos para que su suma sea múltiplo de 3.

b) Justifica por qué se puede asegurar que, en esos casos, la suma será siempre múltiplo de 3.

Se emplea el análisis de contenido (Cohen et al., 2018). En primer lugar, dos de las autoras analizaron de manera independiente las respuestas completas. Esto supuso: a) la identificación de los elementos del modelo de Toulmin a partir de la función de los enunciados y clasificación según los tipos de argumentación definidos en el marco teórico; b) la asignación del grado de corrección, atendiendo a la definición de demostración adoptada: *correcta* (C), si se formula una conjetura adecuada y se garantiza su validez general; *parcialmente correcta* (PC), si se enuncia una conjetura pertinente o parcialmente pertinente, pero la justificación no permite valorar su validez general, o bien no presenta justificación alguna; *incorrecta* (I), en otro caso. En segundo lugar, se contrastaron las codificaciones individuales y se discutieron casos representativos con la tercera autora, sin registrarse discrepancias.

RESULTADOS

El estudiantado recurrió a la abducción para elaborar una conjetura, lo que muestra el papel de los ejemplos (cuatro sumandos consecutivos, algunos iniciados en múltiplo de 3 y otros no) para hallar regularidades. Sin embargo, solo el 24,1% formuló una conjetura adecuada ("siempre que un conjunto de cuatro naturales consecutivos empiece por un múltiplo de 3, la suma daría un múltiplo de 3", E14); el resto, una parcialmente pertinente (62,1%, ver Figura 2) o errónea (13,8%, "siempre hay que empezar y terminar con un múltiplo de 3 o de cualquier número, por ejemplo, si tiene que ser múltiplo de 4 podes empezar con el 8 y terminar en el 12 y va a dar múltiplo de 4", E24). Como muestra la Tabla 1, predominó una estrategia inductiva -insuficiente- para justificar la conjetura, y en una tercera parte, no se incluyó justificación, lo que evidencia un desconocimiento de la (necesidad) de demostración. De hecho, solo en cuatro respuestas se desarrollaron argumentaciones deductivas.

A continuación, describimos las estrategias más frecuentes, complementando el análisis con la información recabada durante la puesta en común. Cuando se empleó la argumentación inductiva (estructurante), esta se utilizó principalmente para justificar una conjetura parcialmente adecuada derivada de la abducción (constructiva), tal como E1 (Figura 2).

Tabla 1

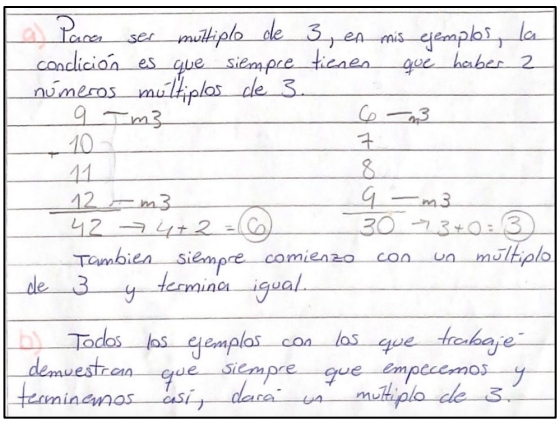
Tipo de estrategia según el grado de corrección de la respuesta

Estrategia en la justificación de la conjetura	Grado de pertinencia			Total
	I	PC	C	
Inductiva	1	9	0	10
Abductiva	0	4	0	4
Ejemplo genérico	0	2	0	2
Deductiva	0	0	4	4
Ausente	3	6	0	9
Total	4	21	4	29

En el ítem a), E1 identificó una regularidad (garantía) a partir de analizar casos particulares (datos), que le permitió asegurar primero que, para que la suma de cuatro consecutivos sea múltiplo de 3, debe haber dos múltiplos de 3, y a continuación, que el primero y el último deben ser múltiplos de 3 (conclusión-conjetura). No apreció que es suficiente asegurar que el primero o el último sea múltiplo de 3 para que la suma de los cuatro consecutivos lo sea. En el ítem b), refirió a los ejemplos previos para asegurar que la verificación en ellos (garantía de la argumentación inductiva) demuestra que "siempre" que se empiece y termine con un múltiplo de 3, la suma será múltiplo de 3 (conclusión-conjetura), siendo esto insuficiente para demostrar. En otros casos, el estudiantado recurrió a ejemplos distintos de los utilizados en la argumentación abductiva, para garantizar la validez de la conjetura.

Figura 2

Solución de E1 a los ítems a) y b)



En la puesta en común, ante la pregunta de la profesora (P) "si alguien tuviera que contarle a un compañero que no está presente qué descubrieron hoy, ¿qué le dirían?", el alumnado enunció diversas conjeturas, entre las que surgió la de E1. El diálogo colectivo, guiado por la profesora, permitió reconocer que la condición referida a que el último número sea múltiplo de 3 no es necesaria, si se parte de que el primero lo es.

P: ¿Por qué no es necesario pedir que el primero y el último sean múltiplos de tres?

E12: Porque los múltiplos de tres están cada tres.

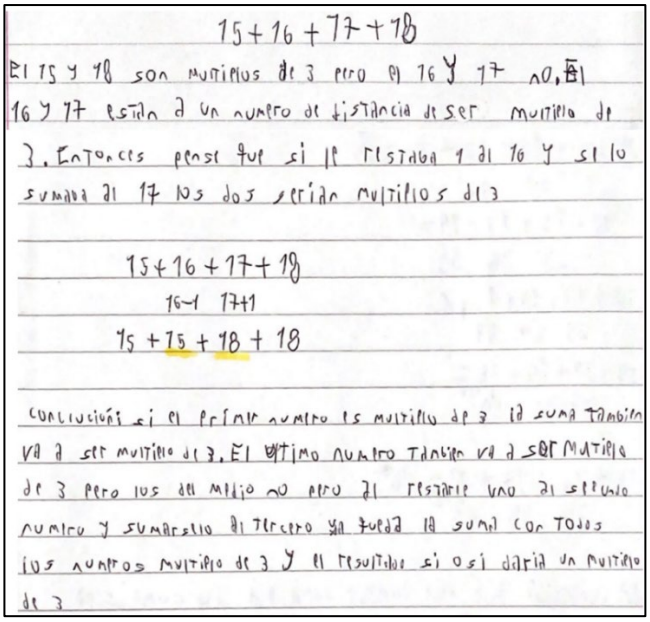
P: Entonces si el primero es múltiplo de 3, el último va a ser múltiplo de 3.

Cuando el alumnado utilizó el mismo tipo de argumentación (abductiva) tanto para conjeturar como para justificar, procedió de manera similar a E3, quien propuso ejemplos de cuatro naturales consecutivos, y tras analizarlos, afirmó: "para que nos dé, tiene que haber entre uno o dos múltiplos de 3" (conjetura inadecuada). Posteriormente, al responder al ítem b) indicó "la a)", de forma que la argumentación permite a E3 tanto construir como justificar una conjetura (Pedemonte y Buchbinder, 2011). En otros casos, el estudiantado recurrió al uso de un ejemplo genérico para justificar una

conjetura apropiada. Por ejemplo, E9 concluyó, mediante la abducción, que "para que la suma sea múltiplo de 3, el primer número que elijas tiene que ser múltiplo de 3" (argumentación constructiva) y, a continuación, procedió como se muestra en la Figura 3 (argumentación estructurante).

Figura 3

Solución de E9 al ítem b)



E9 razona a partir de un ejemplo de la suma de cuatro consecutivos (dato-argumento). Reconoce que el primer y último número son múltiplos de 3 y que los dos del medio pueden reescribirse como un múltiplo de 3, empleando la compensación de la suma en ℕ (restándole 1 al segundo y sumándolo al tercero) y la propiedad que indica que la suma de múltiplos de 3 es múltiplo de 3. A partir de esto, E9 eleva el argumento al caso general al afirmar "el resultado sí o sí daría un múltiplo de 3" (conclusión). Aunque en algunas comunidades de aula, esta argumentación podría aceptarse como válida (Dogan y Williams-Pierce, 2021), en esta, la profesora deja claro que es necesaria una acción adicional para garantizar la validez general de la conjetura. En el siguiente diálogo se observa la construcción de una argumentación mediante ejemplo genérico a partir del caso $12 + 13 + 14 + 15$, así como la necesidad de recurrir a otra justificación que trascienda el uso del caso particular.

E18: También pasa que la suma del segundo y tercer número después del múltiplo de 3 da múltiplo.

P: [Señala el 13 y 14 en la pizarra] ¿Qué tiene este [13] con respecto al 12?

E12: Uno tiene diferencia de 1 [13], y el otro diferencia de 2 [14].

P: Este [refiere al 15] ¿por qué no hace falta pensarlo?

E6: Porque ya es múltiplo.

E12: Porque ya es "más 3". Ya es múltiplo.

P: Entonces tengo dos múltiplos de 3, 12 y 15. ¿La suma de dos múltiplos de 3 es múltiplo de 3?

Varios: Si.

P: Si, ahí usamos una propiedad. Y estos [13, 14] sabemos que no son múltiplos de 3, pero este [13] es un múltiplo de 3 más 1, y este [14] es un múltiplo de 3 más 2. ¿Cómo se dieron cuenta que eso siempre es múltiplo de 3?

E14: Porque 12 ya es múltiplo de 3 y se tacha, y $1 + 2$ te da 3, que es múltiplo.

P: Entonces estamos apelando a "suma de múltiplos de 3 es múltiplo de 3". Bien. Pero eso le pasa a estos números. Supongamos que cada uno probó con 10 ejemplos y acá hay 30 estudiantes, habremos probado con 300 ejemplos. ¿Hemos probado con todos?

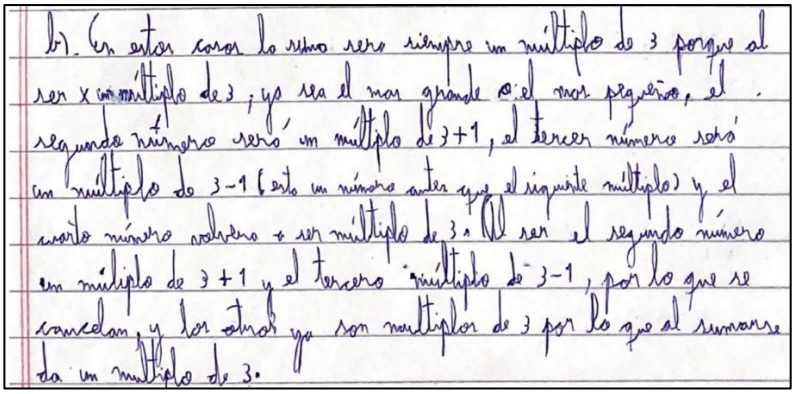
Varios: No.

E2: No terminas jamás.

Finalmente, en las prácticas escritas que desarrollaron argumentaciones deductivas (argumentación estructurante - demostración), se observa el uso de distintas propiedades como garantías. Por ejemplo, E6 (Figura 4) indicó que, en la suma de cuatro consecutivos, el segundo es uno más que el primero y el tercero es uno menos que el último (dato). En consecuencia, estos términos "se cancelan" (compensación en la suma), obteniéndose la suma de múltiplos de 3 (garantía). Con esto, E6 concluye que la suma de cuatro consecutivos es múltiplo de 3. Aunque recurre al lenguaje simbólico (usando x para representar al primer número múltiplo de 3), posteriormente no trabaja con esta representación.

Figura 4

Solución de E6 al ítem b)



Por su parte, E8 y E18 argumentaron que el primer y último consecutivo son múltiplos de 3, y que la suma de los dos del medio también lo es para concluir que la suma de cuatro consecutivos es múltiplo de 3. Por último, se presenta el diálogo de la construcción colectiva de la demostración de la conjetura.

P: ¿Cómo podríamos hacer una justificación, una demostración de que esta ley es verdadera para cualquier conjunto de cuatro números consecutivos?

Varios: Con la x, la n.

P: ¿Qué quiere decir la x, la n?

Varios: Un número cualquiera.

P: ¿Cómo podríamos escribir entonces esa condición?

E5: Si a y d son múltiplos de 3, la suma de b y c va a ser múltiplo de 3.

E5 se refiere a a, b, c, d como los cuatro números naturales consecutivos y reflexiona sobre el carácter (múltiplo de 3) de la suma de los dos sumandos centrales, algo observado en algunas respuestas. La profesora persigue que el alumnado atienda al significado como consecutivos de los sumandos:

P: Bien, voy a escribirlo [P escribe en la pizarra $a\ b\ c\ d$]. ¿El b tiene algo que ver con el a?

E5: Es $a + 1$

P: ¿El c tiene algo que ver con el a?

Varios: Es $a + 2$

P: ¿Y el d?

Varios: $a + 3$

P: Tengo un número cualquiera, el siguiente, el siguiente y el siguiente. Si los sumo, ¿cuánto da?

E14: $4a + 6$ (…)

P: Hallamos una expresión general de cuatro consecutivos y quiero ver cuándo es múltiplo de 3.

E16: a tiene que ser múltiplo de 3.

P: El 6 [de $4a + 6$] es múltiplo de 3, ya está. La suma de dos múltiplos de 3 me da múltiplo de 3.

En esta discusión se llega a probar que, si a es un múltiplo de 3 entonces $a + (a + 1) + (a + 2) + (a + 3)$ es múltiplo de 3. Es decir, una condición suficiente para que la suma de cuatro números naturales consecutivos sea múltiplo de 3 es que el primero de ellos lo sea. No se avanza en la necesidad de dicha condición, pues excede a lo esperado en este contexto.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En este trabajo, analizamos las estrategias de estudiantes argentinos de tercer curso de secundaria al resolver un problema que involucra la construcción de una conjetura y su justificación, así como el rol del docente durante la puesta en común y su contribución al desarrollo de la demostración. El uso de la abducción para generar conjeturas acerca de cuándo la suma de cuatro consecutivos es múltiplo de tres, pone de manifiesto el papel de los ejemplos en estos procesos (Aricha-Metzer y Zaslavsky, 2019). Si bien la mayoría formuló conjeturas parcialmente correctas, la discusión con la docente contribuyó a refinarlas. En relación con las justificaciones, inicialmente presentaron limitaciones al proponer argumentos que no permitían demostrar las conjeturas, en consonancia con estudios previos (Giayetto et al., 2024; Markiewicz et al., 2021). Predominaron los argumentos inductivos, que si bien son valiosos pues ofrecen una intuición sobre la veracidad de la conjetura, no permiten comprender las razones que la sustentan (Aricha-Metzer y Zaslavsky, 2019). No obstante, el análisis también muestra el desarrollo de ejemplos genéricos, que destacan la razón estructural por la que la conjetura es válida (Klock, 2025) y la presencia de demostraciones, regidas por argumentos deductivos.

La diversidad de argumentaciones identificadas constituye un aspecto central para el trabajo con la demostración, ya que ofrece oportunidades para concientizar al estudiantado sobre sus diferencias (Klock, 2025). En particular, durante la discusión, la profesora retoma un caso concreto, y junto con el grupo de estudiantes, analizan las posibles razones por las que la conjetura podría ser válida. Asimismo, pone de manifiesto que esta argumentación no es suficiente para demostrarla, lo que contribuye a la construcción de un significado apropiado del objeto *conjetura* y al avance hacia una demostración. En este proceso, se observa que el estudiantado recurre al lenguaje simbólico para representar la suma de cuatro consecutivos y establecer relaciones entre estos.

Este trabajo busca contribuir a la escasa investigación sobre la demostración en los primeros cursos de secundaria en Argentina, aportando evidencia sobre cómo el alumnado de esta edad participa en actividades asociadas a la demostración. Los resultados muestran que es capaz de construir argumentaciones próximas a la demostración e incluso demostraciones, sin necesidad de recurrir a una formalidad excesiva. Asimismo, se evidencia el papel del docente en la puesta en común, al retomar argumentaciones aun cuando no son adecuadas, y promover la necesidad de una demostración que cumpla con los estándares de la disciplina. En investigaciones futuras contemplaremos la ampliación de la muestra a otros cursos, y profundizaremos en las perspectivas del docente sobre el uso de la demostración y cómo pueden incidir en el desempeño del estudiantado.

Agradecimientos

Investigación realizada como parte del proyecto de investigación PID2022-139748NB-100 financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033/ y FEDER.

Referencias

Arce, M. y Conejo, L. (2019). Razonamientos y esquemas de prueba evidenciados por estudiantes para maestro: relaciones con el conocimiento matemático. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 163-172). SEIEM.

Aricha-Metzer, I. y Zaslavsky, O. (2019). The nature of students' productive and non-productive example-use for proving. *Journal of Mathematical Behavior, 53*, 304-322. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.09.002

Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2018). *Research methods in education*. Routledge. https://doi.org/10.4324/9781315456539

Dogan, M. y Williams-Pierce, C. (2021). The role of generic examples in teachers' proving activities. *Educational Studies in Mathematics, 106*(1), 133-150. https://doi.org/10.1007/s10649-020-10002-3

Giayetto, M., Markiewicz, M. E. y Etchegaray, S. (2024). Significados personales en la formulación y argumentación de conjeturas en estudiantes de la escuela secundaria. *Uniciencia, 38*(1), 1-21. https://doi.org/10.15359/ru.38-1.1

Klock, S. I. (2025). Arguments and group discussions: Middle-school students' initial work with mathematical arguments. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 1-21. https://doi.org/10.1080/0020739X.2024.2328347

Larios-Osorio, V., Pino-Fan, L. R. y González, N. (2017). Esquemas argumentativos de estudiantes de secundaria en ambientes de geometría dinámica. *Avances de Investigación en Educación Matemática-AIEM,* (12), 39-57. https://doi.org/10.35763/aiem.v1i12.143

Markiewicz, M. E., Etchegaray, S. C. y Milanesio, B. (2021). Análisis ontosemiótico de procesos de validación en estudiantes del último año de la escuela secundaria. *Revista UNION, 17*(62).

Milanesio, B. y Burgos, M. (2024). Significados personales sobre la demostración matemática de estudiantes al inicio de la educación superior. *Educación Matemática, 36*(3), 206-241. https://doi.org/10.24844/EM3603.08

Molina, O., Font, V. y Pino-Fan, L. (2019). Estructura y dinámica de argumentos analógicos, abductivos y deductivos: un curso de geometría del espacio como contexto de reflexión. *Enseñanza de las Ciencias, 37*(1), 93-116. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2484

Pedemonte, B. y Buchbinder, O. (2011). Examining the role of examples in proving processes through a cognitive lens: The case of triangular numbers. *ZDM, 43*, 257-267. https://doi.org/10.1007/s11858-011-0311-z

Rø, K. y Arnesen, K. K. (2020). The opaque nature of generic examples: The structure of student teachers' arguments in multiplicative reasoning. *Journal of Mathematical Behavior, 58*. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2019.100755

Soler-Álvarez, M. N. y Manrique, V. (2014). El proceso de descubrimiento en la clase de matemáticas: los razonamientos abductivo, inductivo y deductivo. *Enseñanza de las Ciencias, 32*(2), 191-219. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1026

Staples, M. y Conner, A. (2022). Introduction: Conceptualizing argumentation, justification, and proof in mathematics education. En K. Bieda, A. Conner, K. Kosko y M. Staples (Eds.), *Conceptions and consequences of mathematical argumentation, justification, and proof* (pp. 1-10). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-80008-6

Stylianides, A. J. y Stylianides, G. J. (2022). Introducing students and prospective teachers to the notion of proof in mathematics. *Journal of Mathematical Behavior, 66*. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2022.100957

Stylianides, G. J., Stylianides, A. J. y Weber, K. (2017). Research on the teaching and learning of proof: Taking stock and moving forward. En J. Cai (Ed.), *Compendium for Research in Mathematics Education* (pp. 237-266). National Council of Teachers of Mathematics.

Toulmin, S. (2003). *The Uses of Arguments.* Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9780511840005

PERFILES DE ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN SECUNDARIA EN RELACIÓN CON LAS MATEMÁTICAS Y EL USO DE INTELIGENCIA ARTIFICIAL

Secondary education student profiles in relation to mathematics and the use of artificial intelligence

Mohamed-Chemlali, N.[a], Hossein-Mohand, H.[b] y Hossein-Mohand, H.[b]

[a]Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED), [b]Universidad de Granada

Resumen

Este estudio analiza la relación entre el uso de herramientas de inteligencia artificial, la relación del alumnado con las matemáticas y sus estrategias de estudio en estudiantes de educación secundaria de la ciudad de Melilla. Se realizó un estudio cuantitativo transversal con 689 estudiantes mediante cuestionario digital y análisis multivariante. El análisis factorial identificó tres dimensiones (uso de inteligencia artificial, relación con las matemáticas y estrategias de estudio) y el análisis de conglomerados permitió identificar tres perfiles de estudiantes. Los resultados muestran que el perfil con una relación más positiva con las matemáticas y mayor dedicación al estudio presenta el mayor rendimiento académico, mientras que el uso de inteligencia artificial por sí solo no se asocia necesariamente con mejores resultados.

Palabras clave: *educación matemática, inteligencia artificial, estrategias de estudio, rendimiento académico, educación secundaria*

Abstract

This study examines the relationship between the use of artificial intelligence tools, students' attitudes towards mathematics and their study strategies in secondary education students from Melilla (Spain). A quantitative cross-sectional study was conducted with 689 students using a digital questionnaire and multivariate analyses. Exploratory factor analysis identified three dimensions (AI use, relationship with mathematics and study strategies), and cluster analysis revealed three student profiles. Results show that students with a more positive relationship with mathematics and greater study dedication achieve higher academic performance, while AI use alone is not necessarily associated with better results.

Keywords: *mathematics education, artificial intelligence, study strategies, academic achievement, secondary education*

INTRODUCCIÓN

El aprendizaje de las matemáticas en educación secundaria constituye una prioridad en las políticas educativas actuales, donde se promueve el desarrollo de competencias orientadas a interpretar, modelizar y resolver problemas en distintos contextos (Niss y Højgaard, 2019). En este marco, el currículo incorpora de forma creciente herramientas digitales como apoyo al aprendizaje, entre ellas tecnologías basadas en inteligencia artificial (IA) capaces de generar explicaciones, resolver ejercicios o apoyar el estudio de contenidos matemáticos (Van Vaerenbergh y Pérez-Suay, 2021; Kasneci et al., 2023; Bond et al., 2024).

En este estudio, la referencia a las matemáticas se concreta en la matemática escolar de educación secundaria, entendida como el conjunto de contenidos y prácticas propios de la asignatura en esta

Mohamed-Chemlali, N., Hossein-Mohand, H. y Hossein-Mohand, H. (2026). Perfiles de estudiantes de educación secundaria en relación con las matemáticas y el uso de inteligencia artificial. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (pp. 401-408). SEIEM.

etapa. En particular, el análisis considera la relación del alumnado con contenidos como álgebra, funciones, números, estadística y probabilidad, así como con prácticas habituales de estudio matemático, entre ellas la resolución de ejercicios, el repaso de contenidos, el uso de apuntes, el empleo de videotutoriales y la preparación de pruebas. De este modo, el uso de herramientas de IA no se analiza como una práctica tecnológica general, sino como un recurso potencialmente vinculado al estudio y aprendizaje de contenidos matemáticos escolares.

La incorporación de estas herramientas plantea nuevos retos para la investigación en educación matemática, especialmente en relación con la forma en que el alumnado integra estos recursos en sus hábitos de estudio y cómo su uso se relaciona con variables tradicionalmente asociadas al aprendizaje de las matemáticas, como la motivación, el interés por la asignatura, el autoconcepto o la dedicación al estudio (García-Alonso et al., 2021; Hossein-Mohand y Hossein-Mohand, 2023; Schukajlow et al., 2023). Analizar conjuntamente estas dimensiones permite identificar posibles perfiles de estudiantes y examinar su relación con el rendimiento académico, una aproximación que ha sido utilizada en investigaciones recientes para comprender distintos patrones de implicación académica del alumnado en matemáticas (Tuominen-Soini et al., 2020; Widlund et al., 2024).

El presente estudio analiza estas variables en una muestra de estudiantes de educación secundaria de distintos centros educativos de la ciudad de Melilla, un contexto caracterizado por una elevada heterogeneidad sociocultural del alumnado. Teóricamente, el trabajo se sitúa en la intersección de tres ejes teóricos relevantes para la educación matemática: la relación afectivo-motivacional del alumnado con las matemáticas, las estrategias de estudio vinculadas al aprendizaje autorregulado y el uso de herramientas de IA como apoyo al estudio matemático. Desde esta perspectiva, el rendimiento en matemáticas no se interpreta únicamente como resultado de la exposición a recursos tecnológicos, sino como consecuencia de la articulación entre actitudes hacia la asignatura, hábitos de estudio y formas de uso de dichos recursos.

En primer lugar, la relación del alumnado con las matemáticas constituye una dimensión ampliamente estudiada en educación matemática. Variables como el interés por la asignatura, la motivación, las emociones académicas y la disposición hacia la resolución de tareas matemáticas influyen en la implicación del alumnado y en su persistencia ante la dificultad. La investigación reciente ha señalado que los procesos afectivos y motivacionales son componentes esenciales para comprender el aprendizaje matemático, ya que condicionan la participación del alumnado y la forma en que afronta los contenidos y problemas de la asignatura (Schukajlow et al., 2023; Widlund et al., 2024).

En segundo lugar, las estrategias de estudio se vinculan con la forma en que el alumnado organiza, regula y sostiene su aprendizaje. El tiempo dedicado al estudio, la frecuencia de repaso, el uso de apuntes, libros de texto o videotutoriales no constituyen simples hábitos aislados, sino indicadores de una determinada forma de implicación académica. Desde el enfoque del aprendizaje autorregulado, estas prácticas permiten interpretar cómo el alumnado planifica, supervisa y ajusta su proceso de aprendizaje, especialmente en una asignatura como matemáticas, donde la comprensión conceptual y la práctica razonada resultan fundamentales (Kim et al., 2020; Widlund et al., 2024).

En tercer lugar, las herramientas de IA introducen nuevas posibilidades y desafíos en el aprendizaje de las matemáticas. Estas tecnologías pueden proporcionar explicaciones, resolver ejercicios, ofrecer ejemplos y apoyar el estudio autónomo; sin embargo, su valor educativo depende del modo en que son utilizadas por el alumnado. Un uso frecuente de IA no implica necesariamente una mejora del aprendizaje si no se integra en estrategias orientadas a la comprensión, la reflexión y la resolución razonada de problemas matemáticos (Bond et al., 2024; Kasneci et al., 2023; Zawacki-Richter et al., 2019). Por ello, en este estudio el uso de IA se analiza como una dimensión del perfil de aprendizaje del alumnado, y no como una variable tecnológica aislada.

Desde este marco, la identificación de perfiles de estudiantes permite analizar cómo se combinan estas tres dimensiones en la experiencia escolar. Esta aproximación resulta pertinente porque permite

superar análisis centrados en variables independientes y observar configuraciones más amplias de aprendizaje. En consecuencia, el objetivo general es analizar la relación entre el uso de herramientas de IA en el estudio de contenidos matemáticos escolares, la relación del alumnado con las matemáticas y las estrategias de estudio, con el fin de identificar perfiles de estudiantes y examinar su relación con el rendimiento académico en matemáticas. De forma específica, se pretende: a) identificar las dimensiones latentes asociadas al uso de IA para el estudio de las matemáticas; b) determinar perfiles de estudiantes a partir de dichas dimensiones; c) analizar las diferencias en el rendimiento académico en matemáticas entre los perfiles identificados; y d) examinar la posible relación entre la pertenencia a dichos perfiles y variables sociodemográficas como el género y el nivel educativo.

En relación con estos objetivos se plantean las siguientes hipótesis de investigación: H1) las variables relacionadas con el aprendizaje de las matemáticas se organizan en dimensiones diferenciadas asociadas al uso de IA, la relación con las matemáticas y las estrategias de estudio; H2) existen perfiles diferenciados de estudiantes en función de su uso de IA, su relación con las matemáticas y sus estrategias de estudio; H3) los perfiles presentan diferencias estadísticamente significativas en el rendimiento académico en matemáticas; y H4) la pertenencia a los perfiles no depende significativamente del género ni del nivel educativo del alumnado.

METODOLOGÍA

Diseño de investigación

Se realizó un estudio cuantitativo, no experimental y transversal mediante un diseño ex post facto. Para identificar perfiles se aplicaron técnicas de análisis multivariante, incluyendo un análisis factorial exploratorio y un análisis de conglomerados. Posteriormente se analizaron las diferencias entre los perfiles en el rendimiento académico en matemáticas y en variables sociodemográficas.

Participantes

La muestra estuvo formada por 689 estudiantes de Educación Secundaria Obligatoria y educación postobligatoria de distintos centros educativos de la ciudad de Melilla (España), seleccionados mediante muestreo incidental. Para los análisis multivariantes se utilizaron 499 casos válidos tras excluir los cuestionarios con valores perdidos. La participación fue voluntaria y anónima.

Instrumento

La recogida de datos se realizó mediante un cuestionario digital administrado a través de *Google Forms*. El cuestionario original incluía 174 ítems organizados en nueve dimensiones y formulados mayoritariamente mediante una escala Likert de cinco puntos, además de preguntas sociodemográficas. Para el presente estudio se seleccionaron 26 ítems relacionados con tres ámbitos del aprendizaje de las matemáticas: el uso de IA como apoyo al estudio de la asignatura, la relación afectivo-motivacional del alumnado con las matemáticas y las estrategias de estudio empleadas para preparar y comprender los contenidos matemáticos. El bloque de uso y actitud hacia la IA en matemáticas incluyó los ítems AIA (IA ayuda a realizar ejercicios), CUS (frecuencia semanal de uso de IA), ILJ (horas de uso de IA entre semana), IAF (horas de uso de IA en fin de semana), UHI (uso de IA mientras se estudia), CHE (uso de IA para aprender o repasar), MTI (motivación para estudiar con IA), TIA (interés por herramientas de IA), AMI (preferencia por aprender con IA) y CIA (dificultad para usar IA). El bloque de relación con las matemáticas incluyó TGM (gusto por las matemáticas), MGA (motivación por la asignatura), GBA (interés por álgebra), GBF (interés por funciones), GBN (interés por números), GBE (interés por estadística y probabilidad), TCM (dificultad para aprobar matemáticas), MPM (motivación del profesorado) y MEF (motivación por el futuro). El bloque de estrategias de estudio incluyó LJM (horas de estudio entre semana), VSM (horas de estudio en fin de semana), DSE (días de estudio de matemáticas), ULT (uso del libro de texto), UAE (uso de apuntes de clase), UVI (uso de videotutoriales) y UAI (uso de apuntes de internet). La

consistencia interna se analizó por bloques de contenido, obteniéndose valores adecuados para relación con las matemáticas (α = .820) y uso y actitud hacia la IA en matemáticas (α = .767), y un valor aceptable, aunque más moderado para estrategias de estudio (α = .638). Como variables de rendimiento académico en matemáticas se consideraron la nota media en la asignatura (NMP), la nota del primer trimestre (NPT) y la nota del segundo trimestre (NST).

Procedimiento de recogida de datos

El cuestionario fue revisado y autorizado por la Unidad de Programas Educativos de la Dirección Provincial del Ministerio de Educación y Formación Profesional en Melilla. Tras contactar con los centros participantes, la recogida de datos se realizó durante el año 2024 mediante un cuestionario digital administrado en aulas de informática a través de *Google Forms*, previa obtención del consentimiento informado de las familias. La participación fue voluntaria y anónima y durante la aplicación del cuestionario se contó con la supervisión del profesorado o del equipo investigador. El estudio fue aprobado por el Comité de Ética de la Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED) (Ref. 31-SISH-EDU-2024).

Técnicas de análisis de datos

El análisis estadístico se realizó con IBM SPSS Statistics. En primer lugar, se llevaron a cabo análisis descriptivos de las variables sociodemográficas y de los principales ítems del cuestionario. Los ítems inversos TCM y CIA fueron recodificados antes de los análisis. Asimismo, se estimó la consistencia interna de los bloques de ítems mediante el alfa de Cronbach. Posteriormente se realizó un análisis factorial exploratorio, técnica adecuada para identificar la estructura latente de un conjunto de variables observadas y reducirlas a dimensiones interpretables (Hair et al., 2019; Tabachnick y Fidell, 2019). Se utilizó factorización de eje principal con rotación oblicua Oblimin, dado que se esperaba relación entre las dimensiones vinculadas al aprendizaje matemático. La adecuación de los datos se comprobó mediante los índices KMO y la prueba de esfericidad de Bartlett. A partir de las puntuaciones factoriales se identificaron perfiles de estudiantes mediante análisis de conglomerados jerárquico (método de Ward), para explorar la solución de grupos y posteriormente k-means, para optimizar la asignación de los casos. Las diferencias entre clústeres en el rendimiento académico se analizaron mediante ANOVA con comparaciones post hoc de Tukey, y la relación entre clústeres y variables sociodemográficas mediante pruebas χ^2 de Pearson.

RESULTADOS

Estructura factorial de las variables analizadas: contraste de H1

Con el objetivo de analizar la estructura de las variables relacionadas con el aprendizaje de las matemáticas, el uso de herramientas de IA y los hábitos de estudio del alumnado, se realizó un análisis factorial exploratorio sobre los ítems seleccionados.

Tabla 7

Resultados del análisis factorial exploratorio

Factor	Variable	Carga factorial
Factor 1 – Uso y actitud hacia la IA	AIA	0,730
	CUS	0,699
	ILJ	0,696
	IAF	0,682
	UHI	0,636
	CHE	0,615
	MTI	0,607

Factor	Variable	Carga factorial
	TIA	0,397
	UAI	0,330
	AMI	0,326
Factor 2 – Relación con las matemáticas	TGM	0,855
	MGA	0,775
	GBA	0,652
	GBF	0,643
	GBN	0,542
	GBE	0,467
	TCM (recodificada)	0,459
	MPM	0,353
Factor 3 – Estrategias de estudio	LJM	0,774
	VSM	0,645
	DSE	0,634

Nota. Método de extracción: factorización de eje principal. Método de rotación: Oblimin con normalización Kaiser. KMO = 0,813. Prueba de esfericidad de Bartlett: $\chi^2(325) = 3999{,}60$, $p < 0{,}001$. Los tres factores explican 34,47% de la varianza total.

Los resultados del análisis factorial exploratorio se presentan en la Tabla 1. Los indicadores de adecuación muestral confirmaron la pertinencia del análisis (KMO = 0,813; prueba de esfericidad de Bartlett $\chi^2(325) = 3999{,}60$, $p < 0{,}001$). Los tres factores extraídos explican el 34,47% de la varianza total y permiten diferenciar tres dimensiones vinculadas al aprendizaje matemático: uso y actitud hacia la IA, relación con las matemáticas y estrategias de estudio. El primer factor agrupa variables relacionadas con la utilización de IA como apoyo al estudio; el segundo integra variables afectivo-motivacionales asociadas a la asignatura; y el tercero reúne indicadores de tiempo y frecuencia de estudio. Estos resultados respaldan la H1, al mostrar que las variables analizadas se organizan en tres dimensiones diferenciadas.

Identificación de perfiles de estudiantes: contraste de H2

A partir de las puntuaciones factoriales obtenidas, se realizó un análisis de conglomerados para determinar si existían perfiles de estudiantes en función de las tres dimensiones identificadas.

Tabla 2

Centros de los clústeres obtenidos a partir de las puntuaciones factoriales

Factor	Clúster 1	Clúster 2	Clúster 3
Factor 1 (uso y actitud hacia la IA)	1,153	-0,447	-0,513
Factor 2 (relación con las matemáticas)	-0,305	-0,544	0,734
Factor 3 (estrategias y dedicación al estudio)	0,116	-0,654	0,498

Nota. Puntuaciones factoriales estandarizadas obtenidas mediante k-means. Tamaño de los clústeres: C1 = 147, C2 = 167, C3 = 185; N = 499.

La Tabla 2 presenta los centros de los clústeres obtenidos a partir de las puntuaciones factoriales. El análisis mediante k-means permitió identificar tres grupos de estudiantes con tamaños relativamente equilibrados. El clúster 1 se caracteriza por un mayor uso y actitud más favorable hacia la IA; el clúster 2 presenta puntuaciones bajas en las tres dimensiones analizadas; y el clúster 3 muestra una

relación más positiva con las matemáticas y mayores estrategias de estudio. Estos resultados respaldan la H2 al evidenciar la existencia de perfiles diferenciados de estudiantes.

Diferencias en el rendimiento académico entre perfiles: contraste de H3

Para analizar si los perfiles identificados diferían en el rendimiento académico en matemáticas, se compararon las medias de nota media en matemáticas, nota del primer trimestre y nota del segundo trimestre mediante ANOVA.

Tabla 3

Rendimiento matemático según clúster

Clúster	NMP Media (DT)	NPT Media (DT)	NST Media (DT)
1	3,10 (1,16)	2,56 (1,27)	2,72 (1,29)
2	2,95 (1,23)	2,34 (1,27)	2,49 (1,32)
3	3,58 (1,25)	3,23 (1,34)	3,34 (1,34)

Nota. NMP = nota media en matemáticas; NPT = nota del primer trimestre; NST = nota del segundo trimestre. Resultados del ANOVA: NMP ($F = 12,89$, $p < 0,001$), NPT ($F = 22,28$, $p < 0,001$) y NST ($F = 19,61$, $p < 0,001$).

La Tabla 3 muestra diferencias significativas entre los clústeres en las tres medidas de rendimiento académico consideradas: nota media en matemáticas, nota del primer trimestre y nota del segundo trimestre. El clúster 3 obtuvo las medias más elevadas en todas las variables, mientras que el clúster 2 presentó las puntuaciones más bajas y el clúster 1 valores intermedios. Las comparaciones post hoc mediante Tukey indicaron que el clúster 3 presenta medias significativamente superiores a las de los otros dos grupos, sin diferencias significativas entre los clústeres 1 y 2. Estos resultados respaldan la H3, ya que los perfiles identificados presentan diferencias significativas en el rendimiento académico, especialmente a favor del clúster 3.

Relación entre perfiles y variables sociodemográficas: contraste de H4

Finalmente, se examinó si la pertenencia a los perfiles identificados se asociaba con el género o el nivel educativo del alumnado.

Tabla 4

Relación entre los perfiles de estudiantes y variables demográficas

Variable	χ^2	gl	*p*
Género	2,70	4	0,608
Curso	12,31	8	0,138

Nota. Prueba χ^2 de Pearson. N = 499.

La Tabla 4 muestra que no existen asociaciones estadísticamente significativas entre la pertenencia a los perfiles identificados y el género ni el curso. Estos resultados respaldan la H4 y sugieren que la distribución del alumnado en los perfiles se relaciona principalmente con las dimensiones de aprendizaje analizadas, y no con las variables sociodemográficas consideradas.

DISCUSIÓN

El presente estudio analizó la relación entre el uso de herramientas de IA en el estudio de contenidos matemáticos escolares, la relación del alumnado con las matemáticas y las estrategias de estudio, con el objetivo de identificar perfiles de estudiantes y examinar su relación con el rendimiento académico en matemáticas. La discusión se organiza de acuerdo con las cuatro hipótesis planteadas, con el fin

de mantener la conexión entre los objetivos, los análisis realizados y la interpretación de los resultados.

En relación con la hipótesis H1, los resultados del análisis factorial exploratorio confirmaron la existencia de tres dimensiones diferenciadas en el aprendizaje de las matemáticas: uso de IA, relación con la asignatura y estrategias de estudio. Este resultado respalda la hipótesis planteada y coincide con investigaciones previas que señalan que el aprendizaje matemático está condicionado por la interacción de variables motivacionales, actitudinales y comportamentales (Schukajlow et al., 2023; Widlund et al., 2024).

Asimismo, la identificación de una dimensión específica vinculada al uso de IA refleja la creciente presencia de estas herramientas en los procesos de aprendizaje. La literatura reciente ha señalado que los sistemas basados en IA están transformando los entornos educativos al facilitar el acceso a explicaciones y recursos de aprendizaje autónomo (Kasneci et al., 2023; Bond et al., 2024). No obstante, diversos estudios advierten que su impacto educativo depende en gran medida de la forma en que el alumnado integra estas herramientas en sus estrategias de estudio y en los procesos de aprendizaje autorregulado (Zawacki-Richter et al., 2019).

En relación con la hipótesis H2, el análisis de conglomerados permitió identificar tres perfiles de estudiantes. El primero se caracteriza por un mayor uso de IA en el estudio de las matemáticas; el segundo presenta puntuaciones bajas en las tres dimensiones analizadas; y el tercero se distingue por una relación más positiva con la asignatura y mayores niveles de dedicación al estudio. Estos resultados son coherentes con investigaciones que utilizan enfoques basados en perfiles motivacionales para analizar la implicación académica del alumnado en matemáticas y su relación con diferentes patrones de aprendizaje (Lazarides et al., 2021; Widlund et al., 2024).

Respecto a la hipótesis H3, los resultados del análisis de varianza mostraron diferencias significativas en el rendimiento académico entre los perfiles identificados. El clúster 3, caracterizado por una relación más positiva con las matemáticas y mayores estrategias de estudio, obtuvo las medias más altas en las tres medidas de rendimiento: nota media en matemáticas y calificaciones del primer y segundo trimestre. En cambio, el clúster 1, definido por un mayor uso y una actitud más favorable hacia la IA, presentó resultados intermedios. Este hallazgo permite matizar una interpretación tecnocéntrica del aprendizaje matemático: la frecuencia de uso de IA no parece suficiente para configurar el perfil de mayor rendimiento si no se acompaña de una relación positiva con la asignatura y de prácticas de estudio sostenidas (Kasneci et al., 2023; Bond et al., 2024).

Finalmente, en relación con la hipótesis H4, los resultados mostraron que la pertenencia a los perfiles identificados no se asocia de forma significativa con variables sociodemográficas como el género o el nivel educativo. Este resultado sugiere que los perfiles observados están más vinculados con la experiencia de aprendizaje del alumnado que con características demográficas, algo que también ha sido señalado en investigaciones recientes sobre perfiles motivacionales y participación académica en matemáticas (Lazarides et al., 2021; Widlund et al., 2024).

CONCLUSIONES

Los resultados de este estudio muestran que los perfiles de estudiantes no se diferencian únicamente por su nivel de rendimiento, sino por la forma en que se combinan tres dimensiones del aprendizaje matemático: el uso de herramientas de IA, la relación con las matemáticas y las estrategias de estudio. La principal aportación del trabajo es que el perfil con mayor uso y actitud más favorable hacia la IA no es el perfil que alcanza mejores resultados académicos. El mayor rendimiento se observa en el grupo caracterizado por una relación más positiva con las matemáticas y por estrategias de estudio más consistentes, aunque este grupo no presenta el mayor uso de IA.

Desde una perspectiva educativa, estos resultados subrayan la importancia de promover no solo el acceso a recursos tecnológicos, sino también el desarrollo de actitudes positivas hacia las matemáticas

y estrategias de estudio eficaces. La integración de herramientas de IA en el aprendizaje matemático debería orientarse a apoyar la comprensión, la práctica razonada y la autorregulación, evitando reducir la innovación educativa a la mera frecuencia de uso tecnológico. Entre las limitaciones del estudio destacan su carácter transversal, que impide establecer relaciones causales, y el uso de un muestreo no probabilístico. Futuras investigaciones podrían ampliar estos resultados mediante diseños longitudinales y enfoques cualitativos que permitan comprender con mayor profundidad el papel de la IA en el aprendizaje de las matemáticas.

Referencias

Bond, M., Khosravi, H., Laat, M. de, Bergdahl, N., Negrea, V., Oxley, E., Pham, P., Chong, S. W. y Siemens, G. (2024). A meta systematic review of artificial intelligence in higher education: A call for increased ethics, collaboration, and rigour. *International Journal of Educational Technology in Higher Education*, *21*(1). https://doi.org/10.1186/s41239-023-00436-z

Hossein-Mohand, H. y Hossein-Mohand, H. (2023). Influence of motivation on the perception of mathematics by secondary school students. *Frontiers in Psychology*, *13*. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2022.1111600

Kasneci, E., Sessler, K., Küchemann, S., Bannert, M., Dementieva, D., Fischer, F., Gasser, U., Groh, G., Günnemann, S., Hüllermeier, E., Krusche, S., Kutyniok, G., Michaeli, T., Nerdel, C., Pfeffer, J., Poquet, O., Sailer, M., Schmidt, A., Seidel, T. y Stadler, M. (2023). ChatGPT for good? On Opportunities and Challenges of Large Language Models for Education. *Learning and Individual Differences*, *103*, 102274. https://doi.org/10.1016/j.lindif.2023.102274

García-Alonso, I., Sosa-Martín, D. N. y García-Díaz, A. (2021). Actitudes hacia las Matemáticas en Secundaria: Análisis exploratorio. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 287-294). SEIEM.

Hair, J. F., Black, W. C., Babin, B. J. y Anderson, R. E. (2019). *Multivariate data analysis* (8.ª ed.). Cengage.

Kim, Y., Brady, A. C. y Wolters, C. A. (2020). College students' regulation of cognition, motivation, behavior, and context: Distinct or overlapping processes? *Learning and Individual Differences*, *80*, 101872. https://doi.org/10.1016/j.lindif.2020.101872

Lazarides, R., Fauth, B., Gaspard, H. y Göllner, R. (2021). Teacher self-efficacy and enthusiasm: Relations to changes in student-perceived teaching quality at the beginning of secondary education. *Learning and Instruction*, *73*, 101435. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2020.101435

Niss, M. y Højgaard, T. (2019). Mathematical competencies revisited. *Educational Studies in Mathematics*, *102*, 9-28. https://doi.org/10.1007/s10649-019-09903-9

Schukajlow, S., Rakoczy, K. y Pekrun, R. (2023). Emotions and motivation in mathematics education: Where we are today and where we need to go. *ZDM - Mathematics Education*, *55*, 249-267. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01463-2

Tabachnick, B. G. y Fidell, L. S. (2019). *Using multivariate statistics* (7.ª ed.). Pearson.

Van Vaerenbergh, S. y Pérez-Suay, A. (2021). Inteligencia artificial para la didáctica de las matemáticas: resumen y taxonomía. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (p. 682). SEIEM.

Widlund, A., Tuominen, H. y Korhonen, J. (2024). Motivational profiles in mathematics - stability and links with educational and emotional outcomes. *Contemporary Educational Psychology*, *76*, 102256. https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2024.102256

Zawacki-Richter, O., Marín, V. I., Bond, M. y Gouverneur, F. (2019). Systematic review of research on artificial intelligence applications in higher education - where are the educators? *International Journal of Educational Technology in Higher Education*, *16*(1). https://doi.org/10.1186/s41239-019-0171-0

USOS DE NEOTRIE VR Y SU EFECTO EN LA EXPLICITACIÓN DE SIGNIFICADOS: UNA COMPARACIÓN CON GEOGEBRA 3D

Uses of NeoTrie VR and its effect on the explicitation of meanings: a comparison with GeoGebra 3D

Molina, O. y Mendoza, A.

Universidad Pedagógica Nacional

Resumen

Es escasa la investigación sobre cómo son los esquemas de utilización asociados a un software de realidad virtual como NeoTrie VR, si estos difieren a los asociados a un software de geometría dinámica como GeoGebra y, en consecuencia, si su papel para construir o hacer ostensivos significados de objetos relativos a la geometría tridimensional cambian entre un tipo de software y otro. Presentamos resultados parciales de un experimento de enseñanza con rasgos de un estudio comparativo, mediante el cual describimos esquemas de utilización asociados a ambos softwares, desplegados por dos estudiantes de un programa de formación de profesores de matemáticas (Colombia), cuando construyen un cuadrilátero alabeado con un ángulo recto. Indicamos cómo los rasgos inmersivos de presencia y agencia de NeoTrie VR estimulan esquemas de utilización diferentes a los de GeoGebra y cómo ello influye en la explicitación de significados de objetos como espacio y alabeidad, y en la aparición de conflictos entre lo perceptivo y la necesidad teórica.

Palabras clave: *NeoTrie VR, GeoGebra 3D, formación de profesores de matemáticas, esquemas de utilización, significados.*

Abstract

There is little research on the utilization schemes associated with virtual reality software such as NeoTrie VR, whether these differ from those associated with dynamic geometry software such as GeoGebra, and, consequently, whether their role in constructing or making explicit the meanings of objects related to three-dimensional geometry varies between the two types of software. We present partial findings from a teaching experiment with elements of a comparative study, in which we describe utilization schemas associated with both software programs, as reported by two students in a preservice mathematics teacher training program (Colombia), when they solve a task involving the construction of a skewed quadrilateral with a right angle. We show how the immersive features of presence and agency in NeoTrie VR stimulate utilization schemes different from those in GeoGebra and how this influences the articulation of meanings of objects such as space and skewness, and the emergence of conflicts between perception and certain theoretical needs.

Keywords: *NeoTrie VR, GeoGebra 3d, preservice mathematics teacher program, utilization scheme, meanings.*

INTRODUCCIÓN

En la última década, la realidad virtual inmersiva (RVI) se ha convertido en un campo consolidado de investigación educativa. Su incorporación en distintos niveles formativos responde tanto al desarrollo acelerado de dispositivos accesibles como a la búsqueda de experiencias de aprendizaje que los use. Diversos estudios sugieren que la RVI puede favorecer la motivación, la autonomía y el aprendizaje cuando las tareas están cuidadosamente diseñadas; también advierten que sus beneficios no se derivan automáticamente del medio tecnológico, sino de la articulación entre el entorno inmersivo, las demandas cognitivas y el método pedagógico adoptado (Makransky y Petersen, 2021).

Molina, O. y Mendoza, A. (2026). Usos de NeoTrie VR y su efecto en la explicitación de significados: una comparación con GeoGebra 3D. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (pp. 409-416). SEIEM.

El estudio, cuyos resultados parciales que reportamos, se basa en NeoTrie VR (NT), un software de RVI diseñado para promover el estudio de asuntos de la geometría del espacio tridimensional y el desarrollo de habilidades del razonamiento visoespacial; su uso se viene popularizando desde 2017, en el contexto de la formación de profesores de matemáticas. Por ejemplo, Codina-Sánchez et al. (2022) y Rodríguez (2024) realizaron una práctica de enseñanza exploratoria realizada con futuros profesores de secundaria usando NT, en la que se abordaron diversos tipos de objetos (*e. g.*, poliedros). Ambas indagaciones apuntaron a detectar ventajas y dificultades que surgen al usar NT, además de propiciar un escenario en donde los participantes pudieran crear actividades mediadas por este recurso. García y Romero (2024) hicieron un estudio con un grupo de estudiantes para maestro relativo a la comprensión de magnitudes de superficie y volumen. Los resultados de los análisis evidenciaron una mejora más significativa para los estudiantes que usaron realidad virtual en relación con el grupo que usó materiales manipulativos.

Aunque estudios como estos hacen referencia al uso de NT en comparación con otros recursos como materiales manipulativos o GeoGebra 3D (G3D), ninguno de ellos describe los esquemas de utilización (Rabardel, 1995) asociados a NT. Tampoco, si producto de su carácter inmersivo, estos difieren a los asociados a G3D y, en consecuencia, si su papel para construir o hacer ostensivos significados de objetos relativos a la geometría tridimensional cambian entre un software y otro. El objetivo de este trabajo es describir los esquemas de utilización asociados a ambos softwares para identificar diferencias o similitudes entre estos e identificar si los rasgos de inmersión de NT tienen un efecto diferenciador en los significados que producen los estudiantes sobre algunos objetos de geometría tridimensional como espacio y alabeidad. El escenario fue un curso de geometría del espacio de un programa de formación de profesores de matemáticas en Colombia.

REFERENTES CONCEPTUALES

NT, al ser un recurso de RVI, se caracteriza por dos aspectos esenciales (Makransky y Petersen, 2021): la *presencia* considerada como la sensación psicológica de estar dentro del entorno virtual; y la *agencia* que se refiere a la capacidad del usuario de actuar e influir en ese entorno mediante sus decisiones e interacciones con él. Juntas determinan la calidad de la experiencia inmersiva y su impacto en el aprendizaje o la simulación. Concretamente, en NT la percepción *de estar dentro* provee una sensación psicológica de tridimensionalidad en la que los movimientos corporales permiten desplazamiento en el entorno para, por ejemplo, visualizar de mejor manera un objeto que se percibe tridimensional a partir de sus representaciones virtuales. Aunque el software posibilita la gravedad de objetos, no genera sensaciones hápticas de textura o fuerza. Por otro lado, NT posibilita una acción directa sobre representaciones virtuales de objetos geométricos básicos (puntos, segmentos o rectas, planos) que permite manipularlos con los mandos en el espacio virtual (rotarlos, cambiarlos de posición o de apariencia, etiquetarlos, etc.) y construir otros más complejos a partir de estos y de herramientas relativas a relaciones geométricas (perpendicularidad, paralelismo, etc.).

Las condiciones de agencia y presencia de NT determinan los usos que los sujetos hacen del software al momento de abordar tareas específicas. Como sugiere Pellas et al. (2021) es un reto comprender con mayor precisión de qué manera ello sucede, no solo para describir el papel del software en la actividad matemática de los estudiantes y en la construcción de significados, sino para generar procesos de reflexión que permitan determinar cómo los aspectos diferenciadores entre NT y otros softwares como G3D, si los hay, influyen procesos educativos. Mediante este estudio pretendimos asumir ese reto; para hacerlo, decidimos describir los usos que estudiantes dieron a NT y G3D cuando abordaron una tarea de geometría especifica; la aproximación instrumental de Rabardel (1995) es un enfoque propicio para ello, por cuanto provee herramientas analíticas con las cuales identificar esquemas de utilización desplegados por los sujetos cuando resuelve una tarea con artefactos. Enseguida describimos sucintamente tal aproximación.

Aproximación instrumental: del artefacto al instrumento

Un artefacto es cualquier objeto utilizado como herramienta para realizar una tarea (Rabardel, 1995). Cuando un sujeto establece una relación con un artefacto para realizar una tarea específica, en la que el artefacto se utiliza de una manera particular para un fin específico, este se convierte en un instrumento (el sujeto experimenta un proceso de génesis experimental). Un instrumento es una noción teórica, la combinación de un artefacto y algunos esquemas mentales desarrollados por el usuario, que despliega al utilizar ese artefacto para realizar una tarea. Estos esquemas, llamados esquema de utilización, son organizaciones invariantes de hábitos mentales relativos al abordaje de tareas específicas. La transición de un artefacto a un instrumento requiere dos procesos entrelazados que provienen de la relación del individuo con el artefacto: la instrumentalización, vista como el reconocimiento de los componentes de un artefacto, sus limitaciones y posibilidades para resolver una tarea; y la instrumentación, vista como la aparición y el desarrollo de esquemas de utilización del artefacto al resolver tareas. Los esquemas no son directamente observables, por lo cual es necesario tener una contraparte observable para referirse a ellos. Asumimos que las acciones de los estudiantes con los softwares son las partes observables de los esquemas. Para efecto de este reporte, enfatizamos en el proceso de instrumentación; así, describimos esquemas de los estudiantes mientras utilizan NT y G3D, y los significados sobre objetos del espacio tridimensional que tales esquemas desvelan.

ASPECTOS METODOLÓGICOS

Bajo un enfoque cualitativo, la estrategia investigativa empleada en el estudio es un experimento de enseñanza, con rasgos de un estudio comparativo. Es pertinente por cuanto posibilita analizar aspectos sobre la naturaleza de los significados cuando se involucran estrategias de enseñanza enriquecidas con artefactos. Tiene rasgos de un estudio comparativo porque cotejamos los usos que estudiantes hacen de dos tipos de artefactos (NT y G3D), sin acudir a un grupo control y un grupo experimental. En todo caso, sí pretendimos establecer aspectos diferenciadores en los usos de dichos artefactos y determinar el efecto de tales usos en los significados de los estudiantes. En concordancia con la estrategia escogida, en primer lugar, diseñamos una secuencia de 5 tareas de construcción que debían ser abordadas en G3D y luego en NT, que implicaban cuadriláteros alabeados y tetraedros con características especiales; a priori, las tareas involucraban procedimientos de construcción de puntos no coplanares, segmentos alabeados, recta perpendicular a un plano y plano perpendicular a una recta. En este escrito, nos concentramos en la primera tarea y con ella, en significados asociados a los objetos segmentos alabeados y espacio tridimensional. El sentido de que los estudiantes usaran ambos softwares responde a nuestra curiosidad por establecer si, mediante una comparación de usos entre estos, los esquemas asociados a NT tenían maneras específicas de manifestación, y con ello, si los significados de tales objetos diferían o no cuando se usaba G3D.

Luego, la secuencia de tareas se implementó en varias sesiones de 120 minutos. Todas las sesiones se grabaron en audio y vídeo; asimismo, las producciones escritas de los estudiantes fueron fotocopiadas. El escenario de la investigación fue un curso de geometría del espacio de un programa de formación de profesores de matemáticas. Los estudiantes tenían experiencia con GeoGebra 2D pues su uso era frecuente en los cursos previos de geometría plana; su experiencia con G3D y NT era nula al inicio del experimento. Hubo sesiones para que ellos se familiarizaran con los softwares en el marco de un proceso de instrumentalización. La tarea protagonista de este reporte, ocurre en las tres primeras sesiones; su enunciado es: *provea un procedimiento en G3D para construir un cuadrilátero alabeado con un ángulo recto. Luego, resuelva la tarea usando NT*. Terminado el proceso de resolución por parte de los estudiantes en la primera sesión, los autores del reporte estudiaron sus producciones; ello permitió planear una gestión para la segunda y la tercera sesión en las que la interacción entre los estudiantes y el profesor del curso (uno de los autores de este reporte) permitiera hacer ostensivos los esquemas y significados. Para efectos de este reporte, fueron escogidas las producciones de dos estudiantes (S y R). Esto, porque tales producciones fueron prototípicas e ilustraban muy bien esquemas de utilización y significados asociados los objetos de interés.

Finalmente, analizamos las producciones de los estudiantes S y T. Para ello, utilizamos la propuesta de Sua et al. (2023), la cual explicita indicadores que operativizan el proceso de instrumentación (ver Tabla 1). Usamos tales indicadores para cada software, con el propósito de identificar y describir esquemas asociados a cada uno; así, tuvimos insumos para determinar si difieren entre NT y G3D. Asociado a la identificación de tales indicadores en la producción de los estudiantes, tuvimos en cuenta los rasgos de agencia y presencia de NT para indicar si están presentes en los esquemas y si inducen o hacen ostensivos significados asociados a los objetos citados previamente. Vale decir, que los tipos de significados establecidos fueron emergentes de los análisis.

Tabla 1

Indicadores del proceso de instrumentación

Código	Indicador	Descripción
E1	Identificar un esquema asociado con una o más herramientas.	Se reconoce que un conjunto de pasos con una o más herramientas es eficaz para obtener un resultado concreto. El conjunto de pasos no se conocía anteriormente.
E2	Elaborar un esquema para obtener un resultado concreto.	Se elabora/define un esquema al utilizar la herramienta que conduce a obtener el mismo resultado.
E3	Adaptar un esquema al resolver un problema.	Se mejora un esquema incluyendo o eliminando algunos pasos, para ampliar su alcance o perfeccionarlo.
E4	Utilizar el mismo esquema en diferentes tareas.	El esquema que se ha elaborado/modificado se utiliza de forma rutinaria para resolver diferentes problemas.

ESQUEMAS Y SIGNIFICADOS DE LOS ESTUDIANTES

Enseguida, describimos y analizamos tanto las producciones de los estudiantes cuando abordaron el problema, como sus respuestas durante la interacción con los investigadores. Para efectos de este reporte y con el ánimo de ser sintéticos, para cada estudiante presentamos los procedimientos de construcción propuestos en cada software, acompañados de los análisis relativos a los esquemas de utilización, considerando los indicadores de la Tabla 1; tales indicadores se identifican con los códigos de la Tabla seguidos de G3D o NT dependiendo del software. Entrelazado con estos análisis, mostramos significados de los objetos involucrados, emergentes de los esquemas de los estudiantes.

La producción de la estudiante S

La estudiante S trabajó de una manera bastante autónoma; no pidió al profesor alguna orientación para abordar la tarea. Primero trabajó en G3D, luego en NT como fue la instrucción. La Tabla 2 sintetiza los procedimientos llevados a cabo por S en cada uno de los softwares.

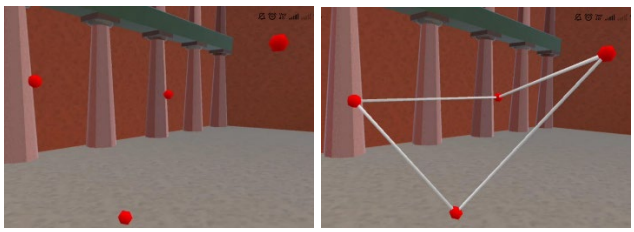
Tabla 2

Procedimientos de construcción de S

Procedimiento en G3D	Procedimiento en NT
(i) Puso cuatro puntos A, B, C y D en el plano de referencia; (ii) "sacó" del plano, mediante arrastre, dos de tales puntos (C y D); (iii) construyó los $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$; (iv) mediante arrastre de C, ajustó para que el $\angle ABC$ sea recto.	(i) Puso cuatro puntos en el entorno del software; (ii) construyó 4 segmentos cuyos extremos son dichos puntos; (iii) mediante arrastre de uno de tales puntos, ajustó para que uno de sus ángulos se viera recto (Figura 1).

Figura 1

Representación gráfica asociada al procedimiento de S en NeoTrie



Ambos procedimientos tienen similitudes; en ellos, se puede reconocer el mismo esquema para obtener un ángulo con una medida determinada: arrastrar un cierto punto hasta lograr la medida deseada [actúa según E2, pues esa acción es heredada del uso de GeoGebra 2D]. Sin embargo, se pueden identificar también esquemas sustancialmente diferentes para obtener los segmentos alabeados: en G3D, sacar del plano dos puntos mediante el arrastre [actúa según E1-G3D]. En NT, poner los cuatros puntos en el entorno sin necesidad de contar con un plano de referencia [actúa según E1-NT]. Cuando el profesor le indagó sobre por qué su diferente proceder en cada software, ella dijo:

> En G3D, "construí cuatros puntos en el plano y saqué dos [del plano] para que queden en el espacio […]. Así garantizo un cuadrilátero alabeado. Los puntos están en el espacio porque están fuera del plano […]. Aquí [en el entorno NT] todo lo que se construye ya está en el espacio. Es que los puntos están como flotando. Ya están en el espacio".

La respuesta de S ratifica que los esquemas que ella desplegó en cada software difieren producto de las características propias de estos. Dado que el entorno G3D tiene un plano de referencia por defecto, su manera para garantizar la alabeidad consiste en poner un segmento en ese plano y otro fuera de él; en tanto que, en NT, la manera para garantizarla se basa en su sensación de estar dentro del espacio tridimensional (rasgo de presencia de la RVI) y de ver los puntos "flotando" desde diversas perspectivas (rasgo de agencia de la RVI), sin necesidad de acudir a un plano de referencia. Lo anterior muestra que, para S, la noción de segmentos alabeados tiene que ver con algo del espacio tridimensional; no obstante, las características de los softwares influyen en la manera como ella concreta ese significado: en G3D, porque uno de ellos está en un plano de referencia mientras que el otro no –según ella, está en el espacio–; en NT, porque "percibe" que los puntos ya están en el espacio mismo. Dicho esto, es posible decir que el significado de espacio para S también difiere dependiendo del software que ella emplee: en G3D, el espacio se caracteriza por aquello que no está en un plano de referencia; en NT, parece ser que esa condición no es necesaria. De alguna manera, la sensación de inmersión de NT es tal real, que el espacio es lo que ella percibe que la rodea.

La producción del estudiante R

Tal como fue indicado en las instrucciones de la tarea, R primero trabajó en G3D y logró un procedimiento sin mayor dificultad. Luego, quiso hacer lo propio en NT; el profesor, al ver su actuar, vio la necesidad de intervenir y de orientar sus intenciones. Dado este escenario, no consideramos pertinente exponer en una tabla, paralelamente, los procedimientos de R. Para facilitar la lectura, preferimos relatar y analizar lo ocurrido en G3D, para luego concentrarnos en lo acontecido para NT.

El procedimiento de R al trabajar en G3D fue el siguiente: (i) Puso cuatro puntos A, B, C y E en el plano de referencia; (ii) "sacó" el punto E del plano, mediante arrastre; (iii) construyó un plano con los puntos B, C y E; (iv) en este plano, construyó una recta m perpendicular a $\overline{BC}$ por C; (v) construyó D en m diferente de C; y (vi) construyó $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$.

Con el paso (ii) del procedimiento, hay evidencia para indicar que R efectuó una acción en G3D análoga a la de S, hecho que indica un esquema con rasgos sociales al ser común entre varios (Rabardel, 1995). Si bien el esquema es el mismo para S y R en el sentido de "sacar" puntos del plano

para aludir al espacio, la acción de R tiene un matiz pues solo saca un punto (no dos como lo hace S); de alguna manera, R despliega un nuevo esquema para obtener alabeidad (actúa según E1-G3D).

Con el propósito de recabar más información sobre el efecto de esta acción en términos de la tarea solicitada, el profesor le preguntó sobre cómo garantizaría él que el cuadrilátero construido, en efecto, era alabeado; R respondió:

> Porque puse a [al punto] E en el espacio con el arrastre hacia arriba [arrastre vertical] […] los otros [tres puntos] están en el plano. Es que así garantizo que los puntos no son coplanares.

Esta respuesta evidencia que su esquema en G3D está en consonancia con su significado de segmentos alabeados, el cual está próximo a la definición institucional deseable para la clase: dos segmentos son alabeados si sus extremos son no coplanares; para ello, según él, basta que uno de los puntos esté en el espacio, es decir, no pertenezca al plano determinado por los otros tres puntos.

Dado que similar a lo que sucede con S, R alude a un punto en el espacio cuando indica que este no está en el plano, fue natural preguntarle si sólo ese punto E estaría en el espacio; así se podría recabar su significado sobre esta noción. Su respuesta fue:

> [5 segundo de silencio, mientras observa la pantalla] No… mmm… Todo está en el espacio… E está fuera del plano en donde esta los otros [puntos], pero todo está en el espacio.

Con la respuesta, el significado de espacio para R se condice con caracterizaciones teóricas esperadas: se caracteriza por la existencia de cuatro puntos no coplanares y porque contiene planos y puntos; sus acciones en G3D se corresponden suficientemente con ese significado.

Ahora, presentamos el proceder de R en NT. En un primer momento, intentó replicar el procedimiento desplegado en G3D [actuó según E4-NT]. Realizó acciones corporales como agacharse, pararse, caminar dando vueltas alrededor de algo, etc. El profesor (Prof.), al ver esto, le indagó sobre su actuar:

R: Ah, es que estaba mirando si hay un plano que me sirva […] Para poner tres puntos ahí y luego un punto afuera [fuera de ese plano].

Prof.: Mirando en dónde…

R: Acá [en el entorno del software] […]. Yo veo una mesa [aquella en donde están las herramientas de NT], me acerco [a ella], pero no pude ponerlos ahí bien… se ven chuecos [no puestos perfectamente sobre la superficie de la mesa] […] veo un piso, pero yo [su avatar] siempre estoy como volando por todos lados [risas] […] pensaba que mi piso podría ser… pero no.

Prof.: ¿A qué piso te refieres?

R: Al que estoy pisando [risas] acá en el salón [de clases]. Pero ese no está acá [en el entorno NT] […] Entonces, puse los cuatros puntos a diferentes alturas y lejos o cerca...

Prof.: Cómo así…

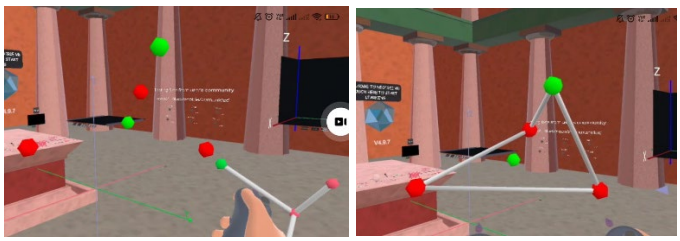
R: Con respecto a mis ojos… a mi piso… no sé [risas]… que se vean no coplanarios, como en distinta posición… unos más arriba, otros más cercanos a mí… que no se vean coplanares. [Luego de aproximadamente 30 segundos] Profe, ¿cómo construyo acá un plano y perpendiculares?

Ante la pregunta de la última intervención de R, se le indicaron las herramientas. Intentó replicar el procedimiento asociado a G3D con esas herramientas [de nuevo, actuó según E4-NT], pero no tuvo éxito por cuanto se le dificultó construir un plano primero; usó, entonces, la herramienta de perpendicularidad para la cual, si no se tiene un plano construido en el entorno de NT, funciona de manera diferente a la usada por R en G3D (Figura 2): se deben seleccionar 3 puntos no colineales (rojos) y, dependiendo del orden en el que se seleccionen los puntos, aparece un cuarto punto verde

en alguno de los semiespacios determinados por el plano (no observable) que contiene a esos puntos rojos; el punto verde y el segundo punto seleccionado determinan una recta perpendicular a ese plano, específicamente, a las dos rectas determinadas por dicho segundo punto y los dos puntos rojos restantes (rectas no observables). R se dio cuenta de ello y actuó así para construir los vértices del cuadrilátero deseado. Con esto, genera una suerte de ajuste al esquema de G3D [actuó según E3-NT].

Figura 2

Representación gráfica asociada al procedimiento de R en NeoTrie



Con el proceder de R, podemos que, aunque él intentó rutinizar un esquema asociado a G3D [actuó según E4-NT], el entorno NT no se lo permitió. Esto, por cuanto no hubo un plano base de referencia para desplegarlo. Ahora bien, pese a que NT fue un obstáculo para que R rutinizara un esquema, el software le permitió vivir una experiencia de inmersión muy rica evidenciada al inicio del diálogo entre él y el profesor. No cabe duda de que el entorno le generó una percepción de tridimensionalidad indicada por su sensación de estar "volando por todos lados" (rasgo de presencia de la RVI). Así mismo, le posibilitó experimentar un contraste de realidades, entre la física material y la virtual del NT, indicado por esa sensación de estar volando (virtualmente) versus la real física de estar pisando el suelo del salón. Ese contraste (que yace por el uso de NT) influye en sus acciones y decisiones; por ejemplo, buscó un plano en el entorno virtual, asociado al piso que siente de manera material; al no encontrarlo, decidió hacer los puntos (indicador de agencia de la RVI) atendiendo a elementos perceptivos (similar al actuar de S) que son inducidos por la tridimensionalidad del entorno (dice él: puntos en distinta posición… unos más arriba) o por el lugar del cuerpo en dicho entorno (dice él: puntos más lejanos o cercanos a mí). Ese contraste, le hizo poner sobre la balanza dos tipos de significados relativos a alabeidad y espacio: uno de tipo teórico esperado, basado en el esquema asociado a G3D que intentó replicar, y otro mucho más perceptivo, sugerido por los rasgos de agencia y presencia de NT. La balanza se terminó inclinado hacia el teórico, pues R finalmente pidió orientación sobre el uso de las herramientas plano y perpendicularidad; usó esta última, la cual, implícitamente, alude a un plano y a un punto fuera de él con las características dichas previamente.

BREVE DISCUSIÓN

Estudios sobre NT han mostrado que su uso favorece el desarrollo de habilidades visoespaciales o argumentativas, produce una mayor motivación para abordar tareas matemáticas (e. g., Cangas-Moldes et al., 2019; Codina-Sánchez et al., 2022; Rodríguez, 2024) y promueve una mejor comprensión de objetos de la geometría tridimensional, en comparación con recursos manipulativos (García y Romero, 2024). Sin embargo, no explicitan diferencias de usos entre NT con otros softwares de geometría dinámica como G3D. Nuestro reporte quiso abordar este asunto, no con el sentido de exaltar uno en detrimento del otro; sí con el propósito de determinar cómo difieren los esquemas de utilización desplegados en cada software para resolver una tarea de construcción y cómo los rasgos de inmersión de NT (agencia y presencia) tienen un efecto en la explicitación o construcción de significados. Concebimos que estudios como estos ponen sobre la mesa información valiosa que un futuro profesor o profesor en ejercicio puede utilizar al momento de tomar la decisión de implementar tales recursos en el aula. Como dice Artigue (2011), hacer estudios con este énfasis pone un acento en los efectos epistémicos de un recurso (construir conocimiento, inducir o hacer ostensivos significados, plantear necesidades teóricas) que va más allá de su importante valor técnico (sus posibilidades y potencialidades para hacer las cosas muy bien). Siguiendo esta idea, a partir de la

descripción de esquemas de utilización, en este estudio ilustramos cómo el uso de NT implicó acciones y efectos epistémicos diferentes en S y R. Por ejemplo, S no intentó desplegar en NT un esquema que le permitirá garantizar alabeidad teóricamente, como sí lo hizo en G3D al intentar sacar puntos de un plano de referencia; sus acciones en NT estuvieron fuertemente influenciadas por las condiciones de agencia y presencia del software (sentirse en un entorno en el que todo lo percibe en un espacio tridimensional), hecho que no le permitió ganar conciencia de la necesidad teórica que implicaba considerar un plano para garantizar la construcción de los objetos deseados. En consecuencia, sus significados de alabeidad y espacio se manifestaron de manera distinta en cada software; por ejemplo, al usar NT, el espacio fue para ella lo que la rodeaba, lo que percibía; pero al usar GeoGebra, el espacio fueron los puntos que no estaban en un plano. Por su parte, las acciones de R procuraron ser más consistentes en ambos softwares, al punto de querer replicar esquemas. Aunque los rasgos de inmersión de NT hicieron que, por un momento, él fuera persuadido por el entorno perceptivo del software, una necesidad teórica emergió para hacer que una herramienta de NT se adaptara a sus necesidades, lo que le llevó a ajustar el esquema empleado en G3D. Sus significados de espacio y alabeidad no se modificaron de un software a otro, pero NT sí puso a prueba su necesidad teórica versus lo perceptible.

COMENTARIO FINAL

El estudio muestra evidencia de que los rasgos de inmersión de agencia y presencia de NT pueden influir en los significados de ciertos objetos, al compararlos con aquellos que emergen si se emplea un recurso como G3D (caso de S). Asimismo, resalta cómo estos rasgos de inmersión pueden generar conflictos entre lo preceptivo y lo teórico institucional (caso de R).

Referencias

Artigue, M. (2011). Tecnología y enseñanza de las matemáticas: desarrollo y aportes de la aproximación instrumental. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*. *6*(8) 13–33.

Cangas-Moldes, D., Morga, G. y Rodríguez, J.L., (2019). Geometry teaching experience in virtual reality with NeoTrie VR. *Psychology, Society y Education*, *11*(3), 355–366. https://ojs.ual.es/ojs/index.php/psye/article/view/2270

Codina-Sánchez, A., del Mar García López, M., Albaladejo, I. M. R. y Gómez, J. L. L. (2022). Poliedros con el software de realidad virtual inmersiva NeoTrie VR, una experiencia con maestros en formación. *Revista Electrónica Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, *25*, 1–14. https://doi.org/10.6018/reifop.531841

García, M. M. y Romero, I. M. (2024). Relación entre superficie y volumen mediante manipulativos y realidad virtual. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 257-264). SEIEM. https://www.seiem.es/wp-content/uploads/2025/04/Comunicacion_21.pdf

Makransky, G. y Petersen, G.B. (2021). The Cognitive Affective Model of Immersive Learning (CAMIL): a Theoretical Research-Based Model of Learning in Immersive Virtual Reality. *Educational Psychology Review*, *33*, 937–958. https://doi.org/10.1007/s10648-020-09586-2

Pellas, N., Mystakidis, S. y Kazanidis, I. (2021). Immersive Virtual Reality in K-12 and Higher Education: A systematic review of the last decade scientific literature. *Virtual Reality*, *25,* 835–861. https://doi.org/10.1007/s10055-020-00489-9

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies. Une approche cognitive des instruments contemporains*. Armand Colin.

Rodríguez, J. L. (2024). Virtual reality in the classroom: a difficult but exciting adventure for teachers and students. *Frontiers in Education*, *9*, 1294715. https://doi.org/10.3389/feduc.2024.1294715

Sua, C., Gutiérrez, A. y Jaime, A. (2023). From 2D to 3D: support of a 3-dimensional dynamic geometry environment in learning proof. En M. Ayalon, B. Koichu, R. Leikin, L. Rubel y M. Tabach (Eds.). *Proceedings of the 46th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 243-250). PME 46.

DISEÑO, CONSTRUCCIÓN Y USO DE LA "NEUROAULA": HACIA UNA CARACTERIZACIÓN DEL ESPACIO EDUCATIVO MATEMÁTICO EN SECUNDARIA

Design, construction and use of the "neuroaula": towards a characterisation of the mathematical educational space in secondary school

Molina-Doblas, B., Sánchez-Cruzado, C. y Sánchez-Compaña, M. T.

Universidad de Málaga

Resumen

Esta comunicación aborda el diseño del espacio educativo como variable de intervención escasamente explorada en la investigación sobre educación matemática en secundaria. A partir del estudio de caso instrumental de la Neuroaula, un aula específica creada en un instituto público, se busca responder qué dimensiones permiten caracterizar un espacio educativo diseñado para favorecer el aprendizaje de las matemáticas en esta etapa. El trabajo relaciona los criterios de diseño y construcción con el análisis cualitativo del uso del espacio para formular una caracterización preliminar. Como resultado, se proponen seis dimensiones interrelacionadas (ambiental, epistémica, cognitiva, emocional, autorreguladora y social) que permiten analizar tanto los elementos físicos del aula como las prácticas, interacciones y significados que configuran su uso didáctico. Esta propuesta constituye un primer marco para el diseño y análisis de espacios educativos matemáticos.

Palabras clave: *caracterización dimensional, cultura de aula, educación secundaria, enfoque ontosemiótico, espacios educativos.*

Abstract

This paper addresses the design of educational space as an intervention variable that remains under-explored in mathematics education research at the secondary level. Drawing on the instrumental case study of the Neuroaula, a classroom specifically created in a public secondary school, the study seeks to identify which dimensions characterise an educational space designed to foster the learning of mathematics at this stage. The paper articulates the design and construction criteria with the qualitative analysis of the use of the space to formulate a preliminary characterisation. As a result, six interrelated dimensions are proposed (environmental, epistemic, cognitive, emotional, self-regulatory and social) that allow the analysis of both the physical elements of the classroom and the practices, interactions and meanings that shape its didactic use. This proposal constitutes an initial framework for the design and analysis of mathematical educational spaces.

Keywords: *classroom culture, dimensional characterisation, educational spaces, onto-semiotic approach, secondary education.*

INTRODUCCIÓN

La competencia matemática constituye un eje vertebrador de la ciudadanía crítica y del desempeño profesional (Ministerio de Educación y Formación Profesional [MEFP], 2020). Sin embargo, los resultados internacionales (PISA 2022) evidencian dificultades significativas en el rendimiento matemático del alumnado español y sitúan el dominio socioafectivo, la ansiedad matemática y la mentalidad de crecimiento como factores determinantes en dicho rendimiento (MEFP, 2023).

Molina-Doblas, B., Sánchez-Cruzado, C. y Sánchez-Compaña, M. T. (2026). Diseño, construcción y uso de la "Neuroaula": hacia una caracterización del espacio educativo matemático en Secundaria. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (pp. 417-424). SEIEM.

La LOMLOE promueve la necesidad de un cambio metodológico que se refleja en las competencias específicas del Real Decreto 217/2022 (MEFP, 2022), reconociendo que hacer matemáticas implica movilizar procesos de interpretación, argumentación, modelización y conexión, con gran protagonismo de la dimensión socioafectiva (MEFP, 2022). Sin embargo, la literatura señala la persistencia de enfoques de aprendizaje instrumentales (González-Marí, 2020) y la investigación reciente evidencia que sigue habiendo un desfase entre el currículo pretendido y el implementado (Beltrán-Pellicer et al., 2023). La gestión de los procesos de enseñanza-aprendizaje se ha articulado tradicionalmente en torno a tres cuestiones: qué, cómo y cuándo enseñar, mientras que el dónde se desarrollan esos procesos ha recibido menor atención. De hecho, muchas aulas actuales mantienen una distribución y un mobiliario similares a los de hace un siglo (Barrett et al., 2015).

Frente a este escenario, la experiencia docente del centro de intervención, el IES Cartima (Málaga), ha puesto de manifiesto que, aun aplicando metodologías activas, los espacios educativos habituales no son suficientes para sostener este tipo de prácticas.

Aunque la literatura ha documentado, principalmente en etapas educativas inferiores, el impacto de la distribución y el mobiliario en el aprendizaje (Imms y Byers, 2017; Trueba, 2015), la investigación sobre espacios específicamente diseñados para el aprendizaje matemático en secundaria es escasa, lo que abre una línea de investigación sobre el papel del espacio educativo en dicho aprendizaje. En este contexto se sitúa la Neuroaula, un espacio diseñado para el aprendizaje de las matemáticas en secundaria a partir de los principios de la neuroeducación, la metodología *Building Thinking Classrooms* y el enfoque *Mathematical Mindset*.

Partiendo de este planteamiento, la presente comunicación pretende responder a la siguiente pregunta de investigación: ¿qué dimensiones permiten caracterizar un espacio educativo diseñado para favorecer el aprendizaje de las matemáticas en Educación Secundaria? El objetivo general del trabajo es proponer, a partir del estudio de caso de la Neuroaula, una caracterización dimensional del espacio educativo matemático. De manera más específica, se plantean los siguientes objetivos: (1) describir el proceso de diseño y construcción de la Neuroaula e identificar los criterios que orientaron su diseño; (2) analizar el uso del espacio a partir de los datos cualitativos recopilados; (3) proponer, a partir del análisis cruzado de los criterios de diseño, de los datos de uso y de la literatura previa, una caracterización dimensional preliminar del espacio educativo matemático.

MARCO TEÓRICO

El espacio educativo se concibe como un sistema integrado de elementos físicos y no físicos (sociales, cognitivos y culturales) que media en los procesos de aprendizaje (Godino et al., 2003). La literatura sobre diseño de espacios educativos ha documentado que factores físico-sensoriales como la iluminación, la temperatura, la acústica y la paleta cromática inciden en la concentración, la motivación y el rendimiento del alumnado (Barrett et al., 2015), y que el alumnado en aulas con disposición flexible obtiene mejores resultados en matemáticas que el que trabaja en aulas con disposición tradicional (Imms y Byers, 2017). Trueba (2015) y Guillén (2017), desde perspectivas vinculadas al entorno educativo y a la neuroeducación, sostienen que el entorno físico influye en la forma en que el alumnado piensa, interactúa y participa en el aula.

En el ámbito de la didáctica de la matemática, los Criterios de Idoneidad Didáctica del Enfoque Ontosemiótico (EOS) (Godino et al., 2006) constituyen un referente consolidado para valorar procesos de instrucción matemática, que articulan seis idoneidades parciales (epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, emocional y ecológica). Este modelo se ha tomado como punto de partida para el diseño y la caracterización del objeto de estudio. Dado que la presente propuesta caracteriza espacios y no procesos, las dimensiones aquí propuestas no replican las idoneidades del EOS y se construyen en diálogo crítico con él.

Más allá de sus condiciones físicas, el espacio educativo forma parte de la cultura de aula. Esta cultura incluye metodologías de enseñanza, prácticas discursivas, tipos de tareas, interacciones, organización y uso del espacio, selección de materiales y formas de evaluación que estructuran la experiencia matemática del alumnado (Barrett et al., 2015; Boaler, 2016). Esto lleva a analizar la literatura existente en torno a dichos elementos con especial atención al dominio socioafectivo.

Di Martino y Zan (2010) caracterizan este dominio mediante un modelo tridimensional (disposición emocional, visión de las matemáticas y competencia percibida), coherente con la observación de Watson y Mason (1998) de que las experiencias en el aula matemática definen las creencias del alumnado. La evidencia reciente documenta que el paso de un enfoque instrumental a uno relacional incrementa la competencia percibida y genera emociones positivas (Martínez-Juste et al., 2025; Boaler, 2016). Algunas propuestas materializan estos principios en el aula matemática mediante entornos que favorecen la interacción, el pensamiento visible y el trabajo cooperativo (Liljedahl, 2020; Johnson y Johnson, 1999). Dichas propuestas se relacionan con procesos relevantes para el aprendizaje matemático, como la metacognición y la retroalimentación basada en el error, pilares del aprendizaje identificados por la neuroeducación (Dehaene, 2020; Schoenfeld, 1992). La investigación reciente sobre el dominio socioafectivo en didáctica de las matemáticas ha señalado la necesidad de profundizar, mediante aproximaciones cualitativas, en los mecanismos emocionales que operan en el discurso del aula (Rodríguez-Barreto y García-Alonso, 2025). A pesar de estas aportaciones, siguen existiendo pocas investigaciones centradas en la caracterización de espacios educativos específicamente diseñados para favorecer el aprendizaje matemático en Educación Secundaria.

MARCO METODOLÓGICO

El presente trabajo es un estudio de caso cualitativo, descriptivo y exploratorio, sobre el diseño, construcción y uso de la Neuroaula. Se enmarca como un caso instrumental: el interés no reside en la Neuroaula en sí, sino en su capacidad para responder a una cuestión teórica más amplia, la caracterización dimensional de los espacios educativos matemáticos. El sujeto del estudio es el espacio Neuroaula y el objeto lo constituyen las dimensiones que lo caracterizan (Cohen et al., 2018).

El estudio se desarrolla en tres fases: un proyecto previo de innovación que motivó la idea de la Neuroaula (curso 2022/23), el diseño y construcción del espacio con un primer pilotaje en 1.º de ESO (curso 2023/24), y la ampliación de su uso a un grupo de 1.º de ESO, de la que se reportan los datos de esta comunicación (curso 2024/25). El triple rol simultáneo de la docente-investigadora (diseñadora del espacio, docente e investigadora principal) constituye la reflexividad como criterio metodológico explícito (Cohen et al., 2018).

Participantes y contexto

El estudio se desarrolla en el IES Cartima (Málaga), centro público de Educación Secundaria referente en innovación educativa en su comunidad autónoma. Participa un grupo de estudiantes de 1.º de ESO (n = 29). Como parte del proyecto de Comunidad de Aprendizaje al que está adscrito el centro, se constituyó una comisión mixta formada por la docente-investigadora, la jefa del Departamento de Matemáticas, representantes de las familias y del alumnado, y el Área de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Málaga, para el diseño y la implementación de la Neuroaula. Participaron, además, una docente en codocencia, cuatro estudiantes en prácticas como observadores externos y las familias del alumnado participante en el grupo focal.

Instrumentos de recogida de datos

En este trabajo se utilizaron diferentes instrumentos cualitativos que permiten la triangulación de la información: (1) registros de observación externa realizados por estudiantes en prácticas en distintos momentos del curso; (2) diario de investigación; (3) dos grupos focales, uno con 10 estudiantes seleccionados por criterios de heterogeneidad, y un grupo focal con las familias del alumnado participante; (4) producciones escritas del alumnado en respuesta a dos preguntas semiestructuradas:

"¿qué se te viene a la cabeza cuando piensas en matemáticas?" y "¿qué emociones sientes cuando realizas una tarea de matemáticas?", recogidas a principio y final del curso y analizadas mediante nubes de palabras y análisis temático.

RESULTADOS

Para dar respuesta a los objetivos específicos del estudio, los resultados se organizan en tres apartados: (a) análisis del proceso de diseño y criterios identificados, (b) evidencias preliminares del uso del espacio y (c) propuesta de caracterización dimensional del espacio educativo matemático.

Análisis del proceso de diseño y construcción: criterios identificados

En relación con el primer objetivo, se describen los criterios del proceso de diseño y construcción desarrollado entre 2022 y 2023, en el marco del proyecto EduCaixa. El aula se ubica en un módulo auxiliar del centro, de 49 m² con aire acondicionado, proyector y barra de sonido. El mobiliario base incluye 16 mesas blancas rectangulares con ruedas y 32 sillas de colores vivos.

El primer criterio busca generar las condiciones físico-sensoriales que favorecen la atención sostenida y el bienestar del alumnado (Barrett et al., 2015; Guillén, 2017; Trueba, 2015): iluminación natural, regulación térmica, paleta cromática que combina blanco con colores vivos, decoración de inspiración natural y accesibilidad de los materiales.

El segundo persigue una visión procesual de las matemáticas que normalice el error (Boaler, 2016; Watson y Mason, 1998): cartelería con autoinstrucciones y mensajes de mentalidad de crecimiento, prácticas basadas en preguntas abiertas y orientadas al proceso, y aprendizaje basado en proyectos.

El tercero se orienta a visibilizar el pensamiento matemático mediante superficies verticales para el razonamiento colectivo (Liljedahl, 2020): pizarras verticales borrables en todas las paredes del aula, mesas con vinilo transparente como superficies de escritura, una pizarra magnética principal de gran tamaño (302 × 122 cm) y trípodes para la grabación de razonamientos, junto con tareas de suelo bajo y techo alto, conversaciones numéricas, repasos activos y aprendizaje por descubrimiento.

El cuarto criterio atiende al dominio afectivo y a la identidad matemática (Di Martino y Zan, 2010; Martínez-Juste et al., 2025): cartelería para la superación de bloqueos y espacios de exposición de los trabajos, junto con prácticas de retroalimentación formativa orientadas al crecimiento, a la celebración del error y del proceso, y un lenguaje docente intencionado.

El quinto busca visibilizar los procesos metacognitivos y orientar la autorregulación, conforme a los pilares neuroeducativos del aprendizaje profundo (Dehaene, 2020): semáforos metacognitivos, paneles de autoinstrucciones, zona de recursos de acceso autónomo, rúbricas y mapas de aprendizaje, temporizadores Pomodoro y protocolos de metacognición.

Por último, se pretende sostener estructuras cooperativas que favorezcan la interdependencia positiva (Johnson y Johnson, 1999): mobiliario flexible, zona de recursos compartidos por equipo, documentación colectiva, tutoría entre iguales y normas de aula compartidas.

Figura 1

Fases del diseño y la construcción de la Neuroaula: estado inicial, propuesta de diseño y resultado final



Nota. Elaboración propia.

Evidencias preliminares del uso del espacio

Respondiendo al segundo objetivo, el análisis cualitativo de los datos obtenidos, mediante los instrumentos citados previamente, sobre el uso del espacio en el curso 2024/25 aporta evidencias preliminares de la transformación de la cultura de aula matemática. Estas evidencias se organizan en torno a las idoneidades del EOS (Godino et al., 2006), herramienta consolidada para valorar procesos de instrucción matemática. El análisis muestra, además, que algunas de las transformaciones observadas en la Neuroaula no coinciden plenamente con las idoneidades existentes, lo que motiva la propuesta que se desarrolla en el apartado siguiente.

Respecto a la idoneidad epistémica, las evidencias documentan una transformación en la visión que el alumnado tiene de las matemáticas. En el grupo focal aparecen expresiones como "las matemáticas no son solo hacer cuentas", "ahora hay muchas formas de resolver un problema" o "si entiendes el porqué, no se te olvida", propias de una concepción menos procedimental y más relacional de la disciplina. En las producciones escritas, se observa el paso de un vocabulario asociado a lo procedimental al inicio del curso ("números", "cálculos", "operaciones") a uno asociado a lo relacional en las producciones finales ("pensar", "estimar", "comprender"). Las familias señalan, igualmente, cambios en la manera en que el alumnado habla de las matemáticas en los hogares, destacando la búsqueda de comprensión y de sentido frente a la repetición mecánica.

En el plano cognitivo, el alumnado del grupo focal menciona reiteradamente el uso de pizarras verticales, mesas con superficies de escritura y materiales manipulativos como elementos que facilitan la explicación de razonamientos y la representación gráfica de ideas matemáticas, en expresiones como "poder escribir en las mesas o en las paredes" o "con el material manipulativo lo entiendo mejor". El diario documenta, además, un uso cada vez más autónomo y espontáneo de estos recursos a lo largo del curso.

La idoneidad interaccional se evidencia mediante los registros de observación externa y el diario, que documentan una mayor disposición del alumnado a exponer razonamientos públicamente, a preguntar y a participar en tareas cooperativas, con menos distracciones, incluso entre el alumnado que inicialmente se mostraba más pasivo. En el grupo focal, el trabajo cooperativo aparece con un peso significativo como práctica valorada por el alumnado.

En el plano emocional, las evidencias apuntan a una transformación del clima afectivo del aula: en el grupo focal se observa una reducción del miedo al error ("si te equivocas, te crece el cerebro") y una percepción más positiva de la propia competencia matemática, cambios que las familias confirman tanto en la actitud como en la disposición del alumnado hacia la materia.

Por último, el diseño del espacio se enmarca en el proyecto educativo del centro y se ajusta a las directrices curriculares, lo que permite justificar la idoneidad ecológica, pero no constituye una propiedad interna del mismo sino un requisito de validez.

Más allá de estas idoneidades, el análisis recoge dos conjuntos de transformaciones que el EOS no aborda de manera específica. Por un lado, las referencias del alumnado al clima físico-sensorial del aula: reacciones espontáneas como "no parece una clase" o "así sí da gusto estudiar", la solicitud reiterada del uso del espacio en horas no lectivas y la emergencia de "tranquilidad" como término dominante en las producciones escritas finales, que apuntan a una transformación del entorno que, si bien conecta parcialmente con la idoneidad mediacional, opera con independencia de la actividad matemática concreta. Por otro lado, el alumnado verbaliza procesos metacognitivos y de gestión autónoma del aprendizaje, en expresiones como "si no lo sabes, piensas qué significa, lo dibujas, miras las chuletas (esquemas recordatorios) y, si tampoco, preguntas a un compañero", que, aunque conectan con la idoneidad emocional, trascienden ese plano al implicar una gestión cognitiva del aprendizaje.

Propuesta de caracterización dimensional del espacio educativo matemático

El tercer objetivo se responde mediante el análisis cruzado de los resultados anteriores, que permite distinguir seis dimensiones que caracterizan, de forma preliminar, el espacio educativo matemático (ver Tabla 1). En cada una se distinguen elementos físicos y no físicos (Godino et al., 2003).

La dimensión ambiental concierne a la disposición atencional, el confort y el bienestar del alumnado, con independencia de la actividad matemática concreta, y considera factores físico-sensoriales como la iluminación, la temperatura, la acústica y la paleta cromática (Barrett et al., 2015; Trueba, 2015; Guillén, 2017).

La dimensión epistémica agrupa los elementos del espacio que comunican qué es saber matemáticas y qué significa hacer matemáticas, condicionando las creencias del alumnado sobre la disciplina (Watson y Mason, 1998), línea desarrollada por la mentalidad matemática y la normalización del error (Boaler, 2016).

La dimensión cognitiva se ocupa de los procesos de pensamiento y razonamiento que el espacio activa y sostiene, en línea con las propuestas que sitúan la visibilización del pensamiento como condición central del aprendizaje (Liljedahl, 2020) y con los pilares neuroeducativos del aprendizaje profundo (Dehaene, 2020).

Las tres dimensiones siguientes (emocional, autorreguladora y social) se inscriben en el dominio socioafectivo ya señalado, pero requieren diferenciación por la forma específica en que el espacio las materializa. La dimensión emocional se ocupa de los elementos que promueven la regulación afectiva, la disposición ante la ansiedad matemática, la identidad matemática y la motivación hacia la disciplina (Di Martino y Zan, 2010; Boaler, 2016; Martínez-Juste et al., 2025). La autorreguladora favorece la gestión autónoma del aprendizaje, alineada con los principios de la neuroeducación (Dehaene, 2020) y con la metacognición, componente central de la actividad matemática (Schoenfeld, 1992). La dimensión social integra los elementos que estructuran los pilares del aprendizaje cooperativo (Johnson y Johnson, 1999) y de la metodología *Thinking Classroom* que organiza la actividad matemática en grupos reducidos sobre superficies verticales (Liljedahl, 2020).

La relación de esta propuesta con los seis criterios de idoneidad del EOS no es directa, ya que ambas aproximaciones parten de unidades de análisis distintas: el EOS valora procesos de instrucción matemática, mientras que esta propuesta caracteriza el espacio.

Desde esta diferencia, algunas dimensiones mantienen puntos de contacto claros con el EOS, pero se reformulan para adaptarse al uso didáctico del aula. Tres de las dimensiones coinciden nominalmente (epistémica, cognitiva, emocional), pero operan en planos distintos, al caracterizar elementos del espacio en lugar de procesos de instrucción. La dimensión social amplía la idoneidad interaccional al incorporar las estructuras y dinámicas cooperativas que el espacio facilita. La dimensión ambiental reformula parcialmente la idoneidad mediacional al incorporar condiciones físico-sensoriales que el EOS no contempla explícitamente. Se incorpora la dimensión autorreguladora que constituye una aportación específica vinculada a la metacognición y a la gestión autónoma del aprendizaje.

Finalmente, no se incorpora la dimensión ecológica, que el EOS sitúa en el ajuste con el proyecto educativo y el marco curricular: opera como criterio de validez del diseño, no como una dimensión interna del espacio resultante. En la Tabla 1 se resume la caracterización dimensional preliminar del espacio educativo matemático que mejora la cultura de aula.

Tabla 1

Caracterización de los espacios educativos matemáticos que mejoran la cultura de aula

Dimensión	Elementos físicos	Elementos no físicos
Ambiental	Iluminación natural, temperatura regulada, paleta cromática natural con colores vivos,	-

	disposición armónica, accesibilidad de materiales, temporizador de aula	
Epistémica	Cartelería con mensajes de mentalidad matemática y de crecimiento	Preguntas abiertas, normalización del error, proyectos, evaluación formativa
Cognitiva	Pizarras verticales borrables, mesas con vinilo transparente, materiales manipulativos, trípodes para grabación	Tareas de suelo bajo y techo alto, conversaciones numéricas, repasos activos, Thinking Classroom
Emocional	Cartelería orientada a la superación de bloqueos en matemáticas, espacios de exposición de trabajos	Celebración del error y del proceso, retroalimentación formativa orientada al crecimiento, lenguaje docente
Autorreguladora	Semáforos metacognitivos, paneles de autoinstrucciones en mesas, zona de recursos autónomos, rúbricas y mapas de aprendizaje, registro de errores, relojes pomodoro	Protocolos de metacognición, registro sistemático de errores como práctica habitual, trabajo multinivel
Social	Mobiliario flexible, zona de recursos de equipo, documentación colectiva	Aprendizaje cooperativo, tutoría entre iguales, normas de aula compartidas

Nota. Elaboración propia.

CONCLUSIONES

En respuesta a la pregunta de investigación, este trabajo ha permitido formular una propuesta preliminar de seis dimensiones interrelacionadas (ambiental, epistémica, cognitiva, emocional, autorreguladora y social) para configurar la cultura de aula matemática y ofrecer un primer marco conceptual para analizar y diseñar espacios educativos matemáticos en secundaria. La propuesta dialoga con los Criterios de Idoneidad Didáctica del EOS (Godino et al., 2006), de los que se diferencia en la unidad de análisis: procesos de instrucción frente a espacios educativos.

Los resultados sugieren que determinados elementos del entorno, como la flexibilidad espacial, las superficies de pensamiento visible, la normalización del error o los recursos de autorregulación, pueden contribuir a transformar las prácticas matemáticas y la participación del alumnado.

El estudio presenta limitaciones derivadas de su carácter exploratorio, del análisis de un único contexto educativo y del triple rol de la docente-investigadora (diseñadora, docente e investigadora), lo que requerirá profundizar en mecanismos de validación externa. Los hallazgos no pretenden ser generalizables, sino ofrecer una propuesta preliminar útil para analizar otros espacios educativos matemáticos (Cohen et al., 2018) y orientar su diseño o su mejora. Futuras investigaciones podrán concretar indicadores para cada dimensión, analizar su adaptación a otros contextos educativos y profundizar en el diálogo con el EOS, explorando cómo el ámbito de la idoneidad ecológica condiciona el diseño y la materialización de dichas dimensiones.

Como conclusión, para responder a la pregunta sobre dónde desarrollar los procesos de enseñanza-aprendizaje, en este trabajo el espacio cobra protagonismo como un elemento que condiciona las formas de interacción, razonamiento y construcción de significado en el aula.

Agradecimientos

Investigación ha sido realizada con fondos de la Fundación "La Caixa" en el marco del programa EduCaixa.

Referencias

Barrett, P., Davies, F., Zhang, Y. y Barrett, L. (2015). The impact of classroom design on pupils' learning: Final results of a holistic, multi-level analysis. *Building and Environment, 89*, 118-133. https://doi.org/10.1016/j.buildenv.2015.02.013

Beltrán-Pellicer, P., Martínez-Juste, S. y Muñoz-Escolano, J. M. (2023). Explorando el hueco entre el currículo pretendido y el implementado: percepciones de docentes en formación y en activo. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 97–112). SEIEM.

Boaler, J. (2016). Designing mathematics classes to promote equity and engagement. *The Journal of Mathematical Behavior, 41*, 172-178. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.01.002

Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2018). *Research methods in education* (8.ª ed.). Routledge.

Dehaene, S. (2020). *How we learn: Why brains learn better than any machine… for now*. Viking.

Di Martino, P. y Zan, R. (2010). "Me and maths": Towards a definition of attitude grounded on students' narratives. *Journal of Mathematics Teacher Education, 13*(1), 27-48. https://doi.org/10.1007/s10857-009-9134-z

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros*. Universidad de Granada.

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma, 27*(2), 221-252.

González-Marí, J. L. (2020). Claves para una educación matemática humanista. *Uno, 88*, 49-59.

Guillén, J. C. (2017). *Neuroeducación en el aula: De la teoría a la práctica*. CreateSpace.

Imms, W. y Byers, T. (2017). Impact of classroom design on teacher pedagogy and student engagement and performance in mathematics. *Learning Environments Research, 20*(1), 139-152. https://doi.org/10.1007/s10984-016-9210-0

Johnson, D. W. y Johnson, R. T. (1999). *El aprendizaje cooperativo en el aula*. Paidós.

Liljedahl, P. (2020). *Building thinking classrooms in mathematics, grades K-12: 14 teaching practices for enhancing learning*. Corwin Press.

Martínez-Juste, S., Beltrán-Pellicer, P., Siaba-Lestón, M. J. y Morales-Ordóñez, G. (2025). Evolución de la actitud hacia las matemáticas de alumnado de primaria tras cambios en la cultura de aula. *RIFOP, 39*(2), 21-34. https://doi.org/10.47553/rifop.v39i2.114622

Ministerio de Educación y Formación Profesional. (2020). Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. *Boletín Oficial del Estado*, 340, de 30 de diciembre de 2020. https://www.boe.es/eli/es/lo/2020/12/29/3

Ministerio de Educación y Formación Profesional. (2022). Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria. *Boletín Oficial del Estado*, 76, de 30 de marzo de 2022. https://www.boe.es/eli/es/rd/2022/03/29/217

Ministerio de Educación y Formación Profesional. (2023). *PISA 2022. Programa para la Evaluación Internacional de los Estudiantes. Informe español*. Instituto Nacional de Evaluación Educativa.

Rodríguez-Barreto, C. y García-Alonso, I. (2025). Análisis del dominio afectivo en la SEIEM: tendencias y retos. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. 381-388). SEIEM.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. En D. Grouws (Ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334–370). MacMillan.

Trueba, B. (2015). *Espacios en armonía: Propuestas de actuación en ambientes para la infancia*. Octaedro.

Watson, A. y Mason, J. (1998). *Questions and prompts for mathematical thinking.* Association of Teachers of Mathematics.

JUSTIFICACIONES DE ALUMNOS DE PRIMERO DE PRIMARIA AL RESOLVER TAREAS DE DESIGUALDADES

First-grade students' justifications when solving inequality tasks

Narváez, R.[a], Anglada, L.[b], Fuentes, S.[c] y Cañadas, M. C.[d]

[a]Universidad Autónoma de Chile, [b]Centro de Magisterio María Inmaculada de Antequera, [c]Escuela Alemana de Paillaco, [d]Universidad de Granada

Resumen

En este trabajo caracterizamos las justificaciones realizadas por seis alumnos de primero de educación primaria al resolver tareas de desigualdades. Realizamos entrevistas semiestructuradas individuales, las transcribimos y las analizamos, considerando las categorías "no justifica"; "utiliza argumentos no matemáticos"; "utiliza argumentos matemáticos para validar sus respuestas" y "utiliza argumentos matemáticos para explicar la elaboración de sus respuestas". Destacamos la capacidad de los alumnos en edades tempranas para realizar diversos tipos de justificación. De estas, predominaron las relacionadas con argumentos matemáticos para validar sus respuestas. Como conclusión, destacamos la importancia de promover en la sala de clases la justificación en los primeros cursos de educación primaria.

Palabras clave: *desigualdades, educación primaria, justificación, pensamiento algebraico*.

Abstract

In this study, we characterize the justifications made by six first-grade elementary school students when solving inequality tasks. We conducted individual semi-structured interviews, transcribed them, and analysed them, considering the categories "does not justify", "uses non-mathematical arguments,"; "uses mathematical arguments to validate responses"; and "uses mathematical arguments to explain the development of responses.". We highlight the ability of young students to provide various types of justification. Among these, justifications related to mathematical arguments used to validate their responses predominate. In conclusion, we emphasise the importance of promoting justification in the classroom during the early years of primary education.

Keywords: *algebraic thinking, elementary school, inequalities, justification*.

INTRODUCCIÓN

Las actividades algebraicas en educación primaria favorecen un razonamiento analítico en el que se articulan cantidades conocidas con incógnitas o variables, de un modo accesible y con sentido para su edad (Ventura et al., 2021). En esa línea, se destacan la generalización, la representación, la justificación y el razonamiento como prácticas algebraicas que permiten construir y validar relaciones matemáticas desde edades tempranas (Blanton et al., 2011; Kaput, 2008). En este trabajo nos enfocamos en la justificación. Para Chua (2017) la justificación se utiliza para explicar o validar una afirmación. Diversos estudios muestran que introducir la justificación desde edades tempranas no solo es posible, sino beneficioso (Acosta et al., 2023; Anglada et al., 2024)). La justificación ayuda a los estudiantes a clarificar y refinar sus ideas matemáticas (Stephens et al., 2017). Además, el currículum de matemáticas de educación primaria reconoce la importancia de la argumentación como herramienta para validar o cuestionar las conjeturas planteadas durante la resolución de problemas (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2022). A pesar de esto, la justificación en los primeros cursos todavía es una temática a la que se le ha dedicado poca atención (Narváez et al., 2005).

Narváez, R., Anglada, L., Fuentes, S. y Cañadas, M. C. (2026). Justificaciones de alumnos de primaria al resolver tareas de desigualdades. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (pp. 425-432). SEIEM.

Uno de los contenidos para abordar el pensamiento algebraico en el aula se refiere a la equivalencia, expresiones, ecuaciones e inecuaciones (Blanton et al., 2011). En el trabajo con desigualdades e inecuaciones se promueve la comprensión de manera relacional, así como el razonamiento con expresiones y a la formulación y resolución de inecuaciones (Blanton et al., 2018). Dentro de este enfoque nos centramos en comprender el trabajo con desigualdades como contenido previo al trabajo con las inecuaciones y las justificaciones que los alumnos realizan al resolverlas. Pacheco et al. (2023) destacaron la escasez de investigación en este ámbito en educación primaria, siendo un tema más abordado en niveles educativos superiores. Pincheira y Sentill (2025) trabajaron las igualdades y desigualdades en educación primaria, destacando que la justificación favorece la comunicación de ideas y la comprensión de relaciones. Otros trabajos, en la misma línea, muestran cómo los estudiantes de primaria interactúan con cantidades indeterminadas mediante tareas con carácter algebraico, apoyándose en la discusión en pequeños grupos en la que se promueve la justificación (Anglada et al., 2024; Ayala-Altamirano y Molina, 2021). El objetivo de nuestra investigación es caracterizar las justificaciones de estudiantes de primero de primaria al resolver tareas con desigualdades.

MARCO CONCEPTUAL Y ANTECEDENTES

En este trabajo entendemos una desigualdad como una relación entre cantidades, indicando si una es mayor, menor, mayor o igual o menor o igual que la otra. Las desigualdades sirven como precursor de las inecuaciones, permitiendo que los estudiantes sean capaces de determinar todos los valores posibles que puede tener una inecuación (Martínez y Varas, 2013). En consecuencia, entendemos una inecuación como una desigualdad en la que interviene al menos una cantidad indeterminada (por ejemplo, $x > 3$) permitiendo describir un conjunto de soluciones. En nuestro estudio asumimos que el carácter algebraico de la actividad se relaciona cuando en las tareas que presentamos se introduce una cantidad indeterminada, cuando la respuesta no depende solamente del cálculo, sino de establecer y expresar la relación entre los números o expresiones que aparecen a ambos lados del signo de desigualdad (Ayala-Altamirano y Molina, 2021).

La justificación es el proceso de respaldar afirmaciones y elecciones matemáticas al resolver problemas o explicar por qué su afirmación o respuesta tiene sentido (Bieda y Staples, 2020). En los primeros años de escolarización, las formas de argumentación de los alumnos suelen ser justificaciones empíricas ingenuas (Blanton et al., 2018). Para Balacheff (2000) las justificaciones constituyen intentos de los estudiantes por explicar o comprobar una afirmación matemática con el propósito de convencerse a sí mismos, a sus compañeros o al profesorado de su veracidad. Justificar permite que los niños desarrollen conjeturas y puedan obtener reglas generales (Pérez-Martos et al., 2025). La justificación ayuda a determinar y explicar la verdad de una conjetura o afirmación (Blanton et al., 2011). Crear oportunidades para justificar seleccionando tareas que inciten a hacerlo y proponiendo conjeturas es valioso para la educación matemática (Thanheiser y Sugimoto, 2022).

Respecto a las tareas que fomentan la justificación, Chua (2017) las clasificó por su naturaleza y finalidad. En este trabajo nos centramos en tareas correspondientes a elaboración y validación. En las tareas de elaboración, el objetivo es explicar "cómo" se ha hecho algo. En este caso, la justificación debe proporcionar una descripción clara del método o estrategia utilizada para obtener el resultado matemático. En las tareas de validación el objetivo es explicar "por qué". En ellas se pretende obtener una razón o evidencia para apoyar o refutar una afirmación matemática. Ramírez et al. (2025) utilizaron la justificación de las propiedades conmutativa y distributiva en tareas de generalización con alumnos de 3° y 4° de primaria. Por último, autores como Acosta et al. (2023), Pinto (2021) y Pinto et al. (2023) mostraron que, desde edades tempranas, los estudiantes son capaces de formular justificaciones al trabajar con ideas algebraicas.

METODOLOGÍA

Nuestra investigación es cualitativa de carácter descriptivo y exploratorio (Hernández et al., 2010). Forma parte de una investigación más amplia sobre pensamiento algebraico en educación infantil y primaria (www.pensamientoalgebraico.es).

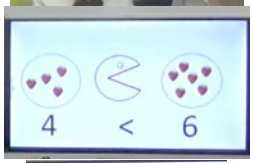
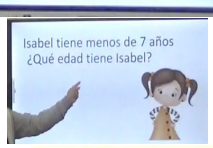
Nos centramos en el trabajo realizado con estudiantes de 1° de primaria (6-7 años), pertenecientes a una clase de 24 alumnos de un centro educativo público del sur de España. Los participantes fueron seleccionados intencionalmente, según la disposición del centro y de los docentes. La participación fue voluntaria y las familias fueron informadas, contando con su autorización por escrito. Además, se tenía el permiso por parte del Comité de Ética (ref. 3468/CEIH/2023).

En el aula implementamos cuatro sesiones de trabajo con el grupo clase completo, seguidas de una entrevista individual semiestructurada realizada a seis niños, con la finalidad de profundizar en sus ideas. En este trabajo, nos centramos en el análisis de las entrevistas de los seis niños, a los que nos referimos como Ai, con i = 1...6). Al tratarse de un estudio exploratorio era importante que los alumnos seleccionados tuvieran interés en participar y que, dentro de las limitaciones propias de la edad, fueran capaces de expresarse. Seleccionamos a los alumnos según lo que observamos en su participación en las sesiones. Sus conocimientos previos eran los números hasta el 100; composición y descomposición de números; sumas y restas. El equipo de investigación conformado por las autoras de este trabajo había realizado previamente cuatro sesiones y entrevistas con esta clase sobre aritmética generalizada. En estas sesiones se familiarizaron con el uso de los signos igual y distinto.

Las autoras de este trabajo estuvimos a cargo de recopilar la información. Entramos al aula cumpliendo diferentes roles: docente-investigadora, apoyo al desarrollo de la sesión y técnica de grabación. La tutora del grupo ayudó en la gestión del aula, sin implicarse en el desarrollo nuestra implementación. Grabamos las sesiones y las entrevistas en vídeo y registramos nuestras observaciones por escrito. Utilizamos una cámara fija, ubicada al fondo del aula; y una cámara móvil, para situaciones particulares relevantes para la investigación. En estas sesiones trabajamos con todo el grupo-clase y las justificaciones se realizaban mediante un diálogo en el que el profesor investigador realizaba preguntas a todo el grupo y respondían levantando previamente la mano para pedir turno de palabra. En la Tabla 1 recogemos las tareas realizadas en las sesiones.

Tabla 1

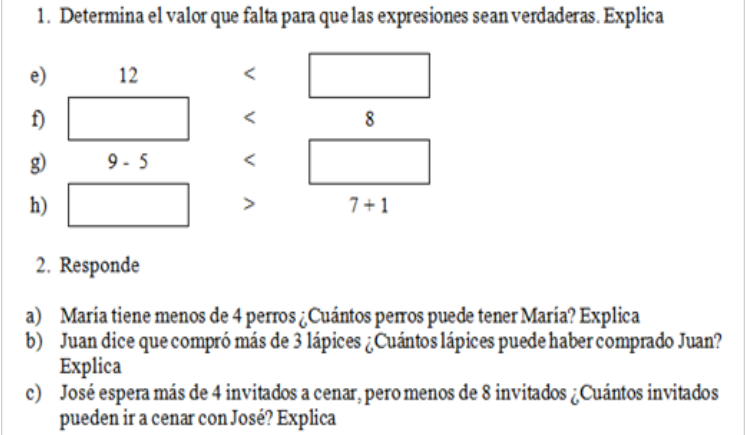
Sesiones Implementadas en Primero de Primaria

Sesión	Descripción	Ejemplo de actividad
1	*Propiedades de las igualdades* Indagación sobre propiedades de las igualdades. Añadir a los dos miembros la misma cantidad con la intención de llegar a generalizar expresiones como: a= b ⇒ a+c = b+c a= b ⇒ a-c = b-c	
2	*Introducción a las desigualdades* Introducción de los signos > y < usando una narración: “La señora comilona”. Se indaga en situaciones donde se entregan los dos conjuntos o se desconoce uno de ellos y se debe respetar el signo dado, x= a; x<a; x>a	
3	*Aplicación de las desigualdades* Los alumnos escriben expresiones numéricas usando signos <, > e =	
4	*Resolución de problemas con desigualdades* Expresiones de desigualdad donde hay que encontrar uno de los elementos, por ejemplo: a = _ + b ; a > _ + b ; a <_+ b	

Cada entrevista duró 20 minutos aproximadamente. Diseñamos un protocolo de entrevista con el propósito de indagar sobre el trabajo de las sesiones. Propusimos tareas relacionadas con las desigualdades, con énfasis en la necesidad de justificación de sus respuestas. Estas tareas eran parte de un cuestionario (ver Figura 1) y distinguimos dos tipos de tareas. En las primeras, les pedíamos buscar valores que cumplieran una desigualdad. Las segundas eran problemas con desigualdades. Las preguntas de la entrevistadora estaban orientadas a la comprensión de las tareas para que fueran un ente facilitador del diálogo y de la justificación por parte de los alumnos. Algunas de las preguntas realizadas fueron: "¿Cómo pensaste ese siete?", "¿Cómo lo has hecho?", "¿Por qué?", "¿Por qué no?", "¿Por qué [un número cualquiera]?", "¿Por qué se te ocurrió poner el [número] ahí?", "¿Y por qué dices que el catorce funciona?".

Figura 1

Cuestionario Aplicado durante la Entrevista Individual



1. Determina el valor que falta para que las expresiones sean verdaderas. Explica

e) 12 < ☐

f) ☐ < 8

g) 9 - 5 < ☐

h) ☐ > 7 + 1

2. Responde

a) María tiene menos de 4 perros ¿Cuántos perros puede tener María? Explica
b) Juan dice que compró más de 3 lápices ¿Cuántos lápices puede haber comprado Juan? Explica
c) José espera más de 4 invitados a cenar, pero menos de 8 invitados ¿Cuántos invitados pueden ir a cenar con José? Explica

Categorías de análisis

Establecimos las categorías de análisis mediante un proceso deductivo-inductivo. En un primer momento utilizamos las categorías del estudio de Anglada et al. (2024) y Thanheiser y Sugimoto (2022). Posteriormente, tras un análisis preliminar de las transcripciones, ajustamos y refinamos dichas categorías, realizando una triangulación entre expertos, para establecer la versión final de dichas categorías (ver Tabla 2). La unidad de análisis fueron las respuestas realizadas por cada participante. En cada una, distinguimos cuando justificaron. Consideramos que una justificación es una explicación mediante la cual los estudiantes sostienen, aclaran o validan sus respuestas al resolver tareas con desigualdades, ya sea en respuesta a preguntas explícitas de la entrevistadora (por ejemplo, "¿por qué?" o "¿cómo?") o de manera espontánea durante la interacción (Anglada et al., 2024).

Tabla 2

Categorías de Análisis

Categorías	Indicador
No justifica	a) Dice que no sabe o no se acuerda. b) Repite la respuesta, sin dar ninguna justificación.
Justifica usando argumentos no matemáticos	a) Apela a la evidencia. b) Cuenta una historia de su invención. c) Recurre a aspectos sociales.
Justifica usando argumentos matemáticos • Para validar su respuesta • Para explicar la elaboración de sus respuestas	a) Hace referencia a acuerdos previos. b) Realiza conteo u operaciones. c) Recurre a relaciones, transformaciones y propiedades, sin operaciones.

RESULTADOS

Los resultados evidencian que los estudiantes dieron diferentes tipos de justificaciones para validar sus respuestas. Como las entrevistas fueron semiestructuradas, las solicitudes de justificación se fueron ajustando a lo que cada estudiante iba respondiendo. Es decir, no se hicieron exactamente las mismas preguntas a todos, sino que se preguntó con "¿por qué?" y "¿cómo?" cuando era necesario profundizar o aclarar una respuesta. Por eso, la cantidad de veces que se pidió justificar no fue la misma en todos los casos. En la Tabla 3 detallamos la distribución de respuesta por categoría de análisis por cada alumno.

Tabla 3

Respuestas de los Alumnos por Categoría de Análisis

Categoría	Alumnos	Número de estudiantes	Número de instancias
No justifica	A1 (1), A2 (6)	2	7
Argumentos no matemáticos	A1 (5), A4 (8), A5 (1), A6 (5)	4	19
Argumentos matemáticos de validación	A1 (11), A2 (12), A3 (8), A4 (2), A5 (9), A6 (14)	6	56
Argumentos matemáticos de elaboración	A1(2), A2(2), A3(1), A5 (5), A6 (5)	5	15

Nota. El número entre paréntesis corresponde al número de justificaciones de ese tipo realizadas por cada alumno.

Durante las entrevistas, identificamos 97 instancias de solicitud de justificación. En 7 de ellas no justificaron, en 90 de ellas los alumnos justificaron en las categorías establecidas: "argumentos no matemáticos" (19 de 90) y "argumentos matemáticos" (71 de 90). Los argumentos matemáticos de validación son los más frecuentes.

En relación con los argumentos no matemáticos, los estudiantes A4 (8), A1 (5), A6 (5) y A5 (1) lo realizaron en diferentes momentos. En estos casos, la justificación se relacionaba con la experiencia cotidiana o con historias inventadas para darle sentido a la tarea que estaban resolviendo. Las justificaciones más frecuentes se relacionaron con argumentos no matemáticos relacionados con aspectos sociales, en los que los estudiantes se basaron en contextos cotidianos. Un ejemplo de esto es cuando se le presentó el problema "Juan dice que compró más de tres lápices. ¿Cuántos lápices podría haber comprado Juan?". A1 justificó que podían ser cuatro y nueve expresando que "porque puede venir en una cajita de cuatro", es decir, relacionándolo con la cantidad de lápices del paquete. De forma similar, A4 expresó que Juan compró 10 lápices "porque mi madre cuando compra lápices o rotuladores, son 10 porque solo caben en un paquete". Finalmente, A6 realizó una justificación utilizando un aspecto social, expresando que "un niño no va a comprar ocho lápices". Después, el mismo estudiante cambió su respuesta cuando la investigadora docente le dio una nueva condición (si son de colores), lo que lo llevó a proponer una cantidad mayor, expresando "pues entonces también voy a poner un ocho, a ver si me acuerdo cuántos lápices tengo, me parece que veinte".

Otro tipo de justificación relacionada con argumentos no matemáticos es contar historias de su invención. Por ejemplo, A1 respondió a la tarea de "José espera más de 4 invitados a cenar, pero menos de 8 invitados ¿Cuántos invitados pueden ir a cenar con José?", expresando:

I (investigadora): Mira, José espera más de cuatro invitados a cenar, pero menos de ocho.

A1: Cinco.

I: ¿Cinco invitados? Ya, perfecto. ¿Y por qué cinco?

A1: Porque puede ser que haya invitado a cinco.

I: ¿Pero por qué?

A1: Porque creo que él ha invitado a su hijita.

Por último, los argumentos matemáticos fueron los más frecuentes. Los niños utilizaron estos argumentos para validar sus respuestas en la mayoría de las instancias. Algunos niños, aunque muchos menos, utilizaron argumentos matemáticos para mostrar cómo llegaron al resultado (elaboración). Un ejemplo es A6 quien, al justificar, contó con los dedos como soporte para construir y verificar respuestas.

Otra forma de realizar argumentos matemáticos tuvo que ver con justificaciones basadas en relaciones de orden. Un ejemplo de esto lo mostramos en el siguiente fragmento de la entrevista con A2.

I: ¿Y cuántas fresas pondrías en el otro plato?

A2: Uno. [y lo escribe]

I: ¿Y por qué pondrías uno?

A2: Porque es menor que ocho.

Otro ejemplo es lo expresado por A3 quien justificó que 13 no corresponde porque "13 es mayor que 12". En estos casos, su respuesta se centraba en la comparación (menor que/mayor que), sin necesidad de cálculo.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En este trabajo logramos nuestro objetivo de investigación, caracterizando las justificaciones realizadas por estudiantes de primer curso de educación primaria al resolver tareas de desigualdades. Aunque hubo explicaciones que no fueron justificaciones, estas representan una minoría. En la gran mayoría de las instancias en las que se les incitó a la justificación durante las entrevistas realizadas, observamos que una parte relevante de las justificaciones se apoyó en conocimientos previos, ya sea recuperando acuerdos trabajados previamente o utilizando procedimientos conocidos para explicar una respuesta. Además, en algunos casos, y de manera comprensible para su edad, los estudiantes recurrieron a elementos de su contexto social para justificar, conectando la tarea con experiencias cercanas y con referencias de su vida cotidiana. En este estudio observamos que las justificaciones de los estudiantes al responder las tareas de relaciones de comparación (mayor/menor) muestran una comprensión racional del signo desigual, relacionado al enfoque de ecuaciones e inecuaciones (Blanton et al., 2018), ya que porque justifican que un número es mayor que otro con el uso de materiales tangibles, como los dedos.

Nuestro interés investigador no está en los errores, se identifican respuestas incorrectas en algunas de las justificaciones no matemáticas. En algunos casos, se observan errores matemáticos básicos o de comprensión de la tarea propuesta.

Aun cuando no es parte de nuestro objetivo, destacamos que en este nivel educativo la justificación rara vez se sostiene únicamente en lo verbal. En diferentes respuestas, los estudiantes completaron o reforzaron sus explicaciones mediante señalamientos, gestos y apoyos pictóricos, lo que resulta coherente con los modos de comunicación matemática disponibles en edades tempranas. Esta idea la relacionamos con la perspectiva multimodal, según la cual la justificación "no se reduce a lo verbal, sino que se construye y comunica mediante la articulación de inscripciones, habla y gestos como recursos semióticos complementarios" (Arzarello et al., 2009). Por lo acotado de nuestra muestra, no podemos generalizar, pero los hallazgos nos muestran líneas abiertas de interés para abordar la justificación en sesiones con grupos completos. Como propuesta docente, sugerimos promover la

justificación desde los primeros años, siendo un desafío relevante para la enseñanza de la matemática. Además, destacamos la necesidad de valorar explicaciones que combinan lenguaje, acciones y representaciones propias de la infancia.

Agradecimientos

Este estudio se ha desarrollado con el apoyo de los proyectos PID2020-113601GB-I00 y PID2024-157106NB-I00, financiados por MICIU/AEI/10.13039/501100011033 y fondos FEDER. También al proyecto Fondecyt Postdoctorado 3260826.

Referencias

Acosta, Y., Alsina, Á. y Pincheira, N. (2023). Computational thinking and repetition patterns in early childhood education: Longitudinal analysis of representation and justification. *Education and Information Technologies*, 1-26. https://doi.org/10.1007/s10639-023-12051-6

Anglada, M. L., Fuentes, S., Narváez, R. y Cañadas, M.C. (2024). Justificaciones realizadas por un estudiante de primero básico en una tarea de ecuaciones e inecuaciones. *Actas de las XXVII Jornadas Nacionales de Educación Matemática*. UdeC-SOCHIEM.

Arzarello, F., Paola, D., Robutti, O. y Sabena, C. (2009). *Gestures as semiotic resources in the mathematics classroom*. *Educational Studies in Mathematics, 70*(2), 97-109. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9163-z

Ayala-Altamirano, C. y Molina, M. (2021). Fourth-graders' justifications in early algebra tasks involving a functional relationship. *Educational Studies in Mathematics, 107*, 359-382. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10036-1

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en alumnos de matemáticas* (P. Gómez, Trad.). Una empresa docente.

Bieda, K. N. y Staples, M. (2020). Justification as an equity practice. Mathematics Teacher: *Learning and Teaching PK-12, 113*(2), 102-108. https://doi.org/10.5951/MTLT.2019.0148

Blanton, M., Brizuela, B., Stephens, A., Knuth, E., Isler, I., Gardiner, A., Stroud, R., Fonger, N. y Stylianou, D. (2018). Implementing a framework for early algebra. En C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5-to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice* (pp. 27-49). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_2

Blanton, M., Levi, L., Crites, T., Dougherty, B. y Zbiek, R. M. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in grades 3-5*. NCTM.

Chua, B. L. (2017). A framework for classifying mathematical justification tasks. En T. Dooley y G. Gueudet (Eds.), *Proceedings of the tenth congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 115-122).

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, M. (2010). *Metodología de la investigación*. McGraw Hill.

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? En J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). Lawrence Erlbaum Associates. https://doi.org/10.4324/9781315097435-2

Martínez, S. y Varas, L. (2013). *Álgebra para futuros profesores de educación básica*. Ediciones-SM.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2022). Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la educación primaria. BOE, 52, 24386-24504.

Narváez, R., Adamuz-Povedano, N. y Cañadas, M. C. (2025). Análisis bibliométrico sobre pensamiento algebraico en educación infantil y educación primaria en Scopus. *AIEM-Avances de Investigación en Educación Matemática*, *(27)*, 43-65. https://doi.org/10.35763/aiem27.5825

Pacheco, E., Ayala-Altamirano, C. y Molina, M. (2023). Caracterización de tareas de inecuaciones propuestas en textos escolares de Educación Primaria. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), Investigación en Educación Matemática XXVI (pp. 427-434). SEIEM.

Pérez-Martos, M. C., Moreno, A., Torres, M. D. y Cañadas, M. C. (2025). Justificaciones a través de la representación gráfica en segundo y tercer ciclo de educación primaria. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. 357-364). SEIEM.

Pincheira, N. y López-Serentill, P. (2025). Integrando el álgebra temprana en Educación Infantil y Primaria: propuestas didácticas a partir de álbumes ilustrados. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 14*(2), 132-162. https://doi.org/10.24197/01ynph15

Pinto, E. (2021). La construcción y justificación de ideas matemáticas generales por un niño de 5 años: El rol de las representaciones manipulativas. *Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática, 6*(2), 144-164. https://doi.org/10.34179/revisem.v6i2.16011

Pinto, E., Ayala-Altamirano, C., Molina, M. y Cañadas, M. C. (2023). Desarrollo del pensamiento algebraico a través de la justificación en educación primaria. *Enseñanza de las Ciencias, 41*(1), 149-173. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.5835

Stephens, A., Strachota, S., Knuth, E., Blanton, M., Isler, I. y Gardiner, A. (2017). The interplay between students' understandings of proportional and functional relationships. En E. Galindo y J. Newton (Eds.), *Proceedings of the 39th annual meeting of the North American chapter of the international group for the psychology of mathematics education* (pp. 251-258). Hoosier Association of Mathematics Teacher Educators.

Thanheiser, E. y Sugimoto, A. (2022). Justification in the context of elementary grades: Justification to develop and provide access to mathematical reasoning. En K. N. Bieda, A. M. Conner, K. W. Kosko y M. Staples (Eds.), *Conceptions and consequences of mathematical argumentation, justification, and proof* (pp. 35-48). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-80008-6_4

Ventura, A. C., Brizuela, B. M., Blanton, M. L., Sawrey, K., Gardiner, A. M. y Newman-Owens, A. (2021). A learning trajectory in kindergarten and first grade students' thinking of variable and use of variable notation to represent indeterminate quantities. *The Journal of Mathematical Behavior, 62*, 100866. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2021.100866

ESTRUCTURAS ORGANIZATIVAS Y DESDOBLES EN LA DOCENCIA DE DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS EN LA FORMACIÓN INICIAL DEL PROFESORADO EN ESPAÑA

Organisational structures and group splitting in the teaching of mathematics education in preservice teacher education in Spain

Navarro-Clemente, I., O'Connor-Jiménez, P., del Olmo-Muñoz, J., González-Calero, J. A. y Sotos, M. A.

Universidad de Castilla-La Mancha

Resumen

La organización docente de las asignaturas de didáctica de las matemáticas en la formación inicial del profesorado presenta diferencias significativas entre universidades, especialmente en lo relativo a la configuración de grupos y desdobles para el desarrollo de actividades prácticas. Este estudio tiene como objetivo describir cómo se estructuran estos desdobles en las universidades públicas españolas en los Grados de Maestra/o de Educación Infantil y Educación Primaria, así como identificar los criterios organizativos, condicionantes institucionales y prácticas docentes asociadas. Los resultados permitirán identificar tendencias organizativas comunes y diferencias relevantes entre contextos universitarios, aportando información útil para la reflexión sobre la mejora de la docencia en didáctica de las matemáticas en la formación inicial del profesorado.

Palabras clave: didáctica de las matemáticas, organización, universidad, desdobles

Abstract

The teaching organisation of mathematics education courses in initial teacher education shows significant differences across universities, particularly regarding the configuration of class groups and the use of group splitting to conduct practical activities. This study aims to describe how these group splits are structured in Spanish public universities within the degrees in Early Childhood Education and Primary Education teacher training, as well as to identify the Organisational criteria, institutional constraints, and teaching practices associated with them. The results will make it possible to identify common Organisational trends and relevant differences across university contexts, providing useful insights for reflecting on the improvement of Mathematics Education teaching in initial teacher education.

Keywords: mathematics education, organization, university, split groups

INTRODUCCIÓN

La formación inicial del profesorado constituye un elemento clave para garantizar la calidad de la enseñanza de las Matemáticas. Sin embargo, informes recientes han alertado sobre un descenso en los resultados de competencia matemática del alumnado en España, lo que ha reavivado el debate sobre los factores que influyen en la calidad de la enseñanza en esta área (Barquero et al., 2024). En este contexto, el área de didáctica de las matemáticas adquiere un papel fundamental, ya que no solo aborda el conocimiento matemático en sí mismo, sino también las formas de enseñarlo, comprenderlo y hacerlo accesible al alumnado.

A pesar de esta relevancia, la presencia de contenidos matemáticos y de didáctica de las matemáticas en los planes de estudio de los Grados de Educación Infantil y Educación Primaria

Navarro-Clemente, I., O'Connor-Jiménez, P., del Olmo-Muñoz, J., González-Calero, J. A. y Sotos, M. A. (2026). Estructuras organizativas y desdobles en la docencia de Didáctica de las Matemáticas en la formación inicial del profesorado en España. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (pp. 433-440). SEIEM.

en las universidades españolas presenta una notable heterogeneidad. Actualmente no existe consenso respecto el número de créditos dedicados a estas materias y, en muchos casos, la carga formativa resulta limitada tanto en profundidad como en extensión (Nolla et al., 2021). Esta situación pone de manifiesto la necesidad de revisar los planes de estudio y fortalecer la investigación en educación matemática como vía para mejorar la preparación del futuro profesorado. En el ámbito universitario, uno de los retos más señalados en la formación docente es la persistente brecha entre la teoría y la práctica. Con frecuencia, la enseñanza en grandes grupos se centra en la transmisión de contenidos teóricos mediante clases magistrales, mientras que el aprendizaje de la didáctica de las matemáticas requiere procesos más experienciales, basados en la experimentación, la manipulación de materiales y la reflexión sobre la práctica (Garrido-Martos et al., 2019; Loureiro-Ga y Gutiérrez-Rodríguez, 2025). Aunque existen investigaciones sobre metodologías activas, tamaño de grupo y formación inicial docente en educación superior, se dispone de escasa información acerca de cómo se organizan específicamente los grupos y desdobles en las asignaturas de didáctica de las matemáticas en las universidades españolas. En particular, apenas se encuentran estudios que describan las diferencias organizativas entre instituciones o las percepciones del profesorado sobre estas estructuras docentes.

En el contexto del Espacio Europeo de Educación Superior (EEES), estas cuestiones adquieren una relevancia adicional. El modelo educativo promovido por el Proceso de Bolonia apuesta por un enfoque centrado en el estudiante, basado en metodologías activas, aprendizaje colaborativo y evaluación continua. En este marco, la presencialidad en grupos reducidos se concibe como un elemento clave para facilitar la interacción, el debate y el aprendizaje activo, especialmente en disciplinas que requieren discusión, experimentación y reflexión didáctica (Kelo y Iucu, 2024; Muñoz-Cantero y Mato-Vázquez, 2018). En consecuencia, adquiere especial relevancia el uso de desdobles o trabajo en grupos reducidos, entendido como una estrategia organizativa que consiste en dividir al alumnado en subgrupos de tamaño limitado con el fin de facilitar la consecución de objetivos formativos compartidos (Pai et al., 2015). Esta organización resulta especialmente pertinente en el ámbito de la educación matemática, donde se ha defendido la conveniencia de generar entornos de aprendizaje próximos a la idea del *laboratorio de matemáticas*, concebido como espacio de experimentación, manipulación y discusión colectiva en torno a tareas matemáticas que favorece un aprendizaje activo mediante la exploración y el uso de materiales (Oliveira, 2018).

A pesar de las ventajas pedagógicas ampliamente reconocidas de los grupos pequeños, la educación superior se enfrenta con frecuencia a restricciones estructurales y económicas que conducen a la organización de clases numerosas. Desde esta perspectiva, el tamaño del grupo emerge como un factor relevante en la organización de la enseñanza. Si bien algunas investigaciones indican que el tamaño del grupo no influye directamente en el rendimiento académico, sí puede ejercer un efecto indirecto al condicionar las decisiones pedagógicas que el profesorado adopta para gestionar el aula y estructurar las actividades de aprendizaje (Blatchford y Russell, 2019). En particular, el trabajo en grupos reducidos favorece una mayor participación activa del alumnado, incrementa su nivel de satisfacción y contribuye a una mejor adquisición de los conocimientos (Kooloos et al., 2011). Asimismo, diversos estudios sobre formación inicial docente subrayan la importancia de generar contextos y prácticas instruccionales inclusivas y socialmente justas. En este sentido, la organización de la enseñanza en grupos manejables puede favorecer una atención más adecuada a la diversidad del alumnado y contribuir al desarrollo de una enseñanza más equitativa (Kleyn, 2016).

Atendiendo a lo anterior expuesto, consideramos pertinente ofrecer un panorama actualizado del esquema organizativo en el área de didáctica de las matemáticas de las universidades

públicas en términos de tamaño de grupos y desdobles. En este contexto, el presente estudio tiene como objetivo describir la estructura organizativa de la docencia en las asignaturas de educación matemáticas en los Grados de Maestro de Educación Infantil y Educación Primaria, prestando especial atención en el tamaño del grupo y a las percepciones docentes asociadas a su gestión.

MÉTODO

Diseño y participantes

El presente estudio se inscribe en un paradigma mixto de corte exploratorio-descriptivo. Dado que la organización del tamaño de los grupos y el número de desdobles impacta se relaciona con las decisiones del docente se ha optado por un diseño que permita profundizar en los criterios y visiones de los responsables docentes. La selección de los participantes —profesorado universitario del área de didáctica de las matemáticas— se realizó mediante un muestreo no probabilístico por conveniencia y criterios de representatividad, buscando cubrir diversas universidades públicas en el territorio español. A fecha de envío de esta comunicación, han participado 32 de las 37 universidades públicas españolas que cuentan con los Grados de Maestro en educación Infantil y Primaria.

Instrumentos

Para la fase de recogida de datos se diseñó un instrumento distribuido mediante la plataforma *Microsoft Forms* y se combinó con una aplicación guiada a través de una videollamada breve a través de *Microsoft Teams*. Esta técnica permitió mantener un eje temático común entre todos los casos, pero ofreciendo la flexibilidad necesaria para que el entrevistado aporte detalles específicos sobre la idiosincrasia de su universidad que quedaron anotados en un registro paralelo, así como solventar todas las dudas necesarias.

El instrumento empleado se vertebra en tres ejes estratégicos: el Eje I, centrado en el tamaño y organización de los desdobles; el Eje II, orientado a estrategias y recursos para la docencia en grupos grandes; y el Eje III, enfocado en la calidad docente y el impacto del tamaño del grupo. Asimismo, se integraron en el cuerpo de análisis las anotaciones tomadas por la investigadora sobre las demandas, comentarios o sugerencias expresadas de viva voz por las personas entrevistadas, aportando una dimensión narrativa que enriquece la interpretación de los datos estadísticos.

Procedimiento

La investigación se inició con la selección y contacto institucional de universidades públicas españolas que imparten grados universitarios habilitantes para Maestra/o de Educación Infantil y Educación Primaria. Para asegurar la participación, se estableció comunicación directa vía correo electrónico con coordinadores y docentes, detallando los objetivos del estudio. Paralelamente, se realizó una fase de preparación técnica que incluyó la programación de un cuestionario digital y un pilotaje previo para validar la lógica y el funcionamiento del instrumento. El núcleo del estudio consistió en una recogida de datos guiada y sincrónica, privilegiando la interacción directa frente a envíos de cuestionarios masivos. Este método permitió al equipo investigador resolver dudas terminológicas en tiempo real y registrar, mediante notas de campo, reflexiones críticas y demandas estructurales de los docentes que un cuestionario en línea podría no captar plenamente.

Finalmente, el proceso concluyó con la triangulación y el tratamiento de la información. Los datos cuantitativos obtenidos se organizaron y analizaron con el apoyo de hojas de cálculo y software estadístico como *R*, mientras que las notas cualitativas se registraron mediante un proceso de codificación inductiva. En este, las ideas generales fueron sistematizadas y

agrupadas en categorías analíticas basadas en su recurrencia temática y frecuencia, lo que permitió identificar patrones emergentes en el discurso. La integración de ambas fuentes de información, mediante la triangulación, permitió contrastar los resultados. De este modo, los datos cualitativos sirvieron para contextualizar, matizar e incluso rectificar los datos cuantitativos reforzando así la solidez, fiabilidad y validez.

RESULTADOS

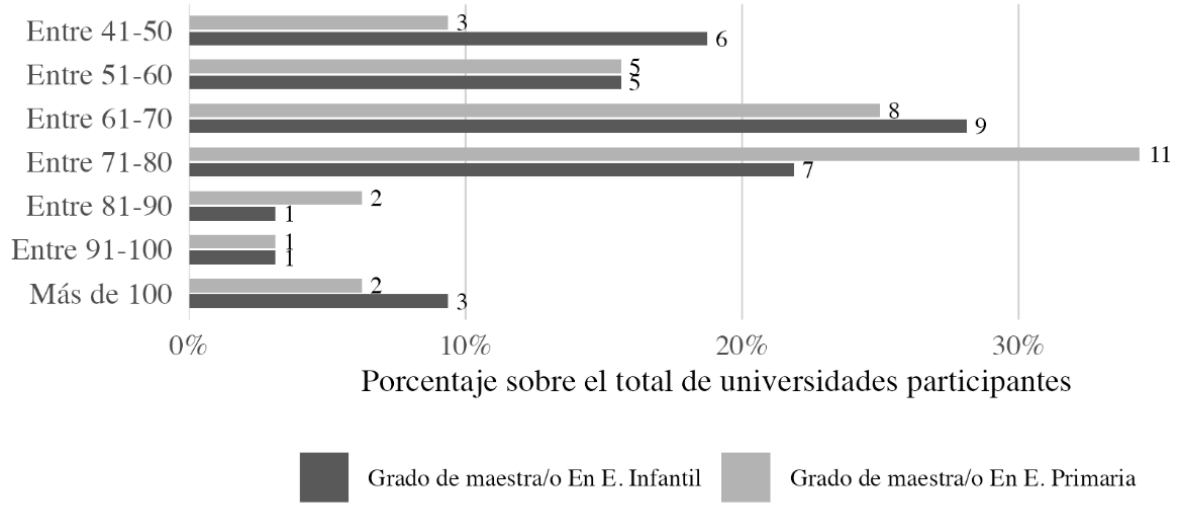
El tamaño de los grupos clase y cantidad de desdobles

La Figura 1 muestra información relativa al tamaño promedio de los grupos de clase en las asignaturas de didáctica de las matemáticas. A este respecto, ha de subrayarse que la información recogida en el gráfico no alude al tamaño máximo de los grupos, sino al promedio. Es destacable el hecho de que sólo seis universidades disfrutan de un tamaño de los grupos clase inferior a 50 personas en el Grado de Educación Infantil (Universidad de Barcelona, Universidad de las Islas Baleares, Universidad de Navarra, Universidad de Lleida, Universidad de Valencia y Universidad de Salamanca) y tres el de Educación Primaria (Universidad de Barcelona, Universidad de Navarra y Universidad de Valencia). En el otro extremo, encontramos seis universidades con tamaños superiores a las 80 personas: Universidad de Sevilla, en el Grado de Infantil; Universidad de Oviedo, en el grado de primaria; y, en ambos grados, Universidad de Jaen, Universidad de La Laguna, Universidad de Vigo y Universidad de Murcia.

La mayoría de las universidades cuentan con estructuras organizativas que permiten la división de los grupos de clase tanto en el Grado de Maestro de Educación Infantil como en el de Educación Primaria (78, 2%). Esta medida se articula como solución general ante el elevado tamaño de los grupos. Por el contrario, un 21,8% de la muestra indica que no realiza estos desdobles, manteniendo estructuras de grupo completo para la impartición de la asignatura.

Figura 1

Distribución de universidades según el número medio de estudiantes por grupo

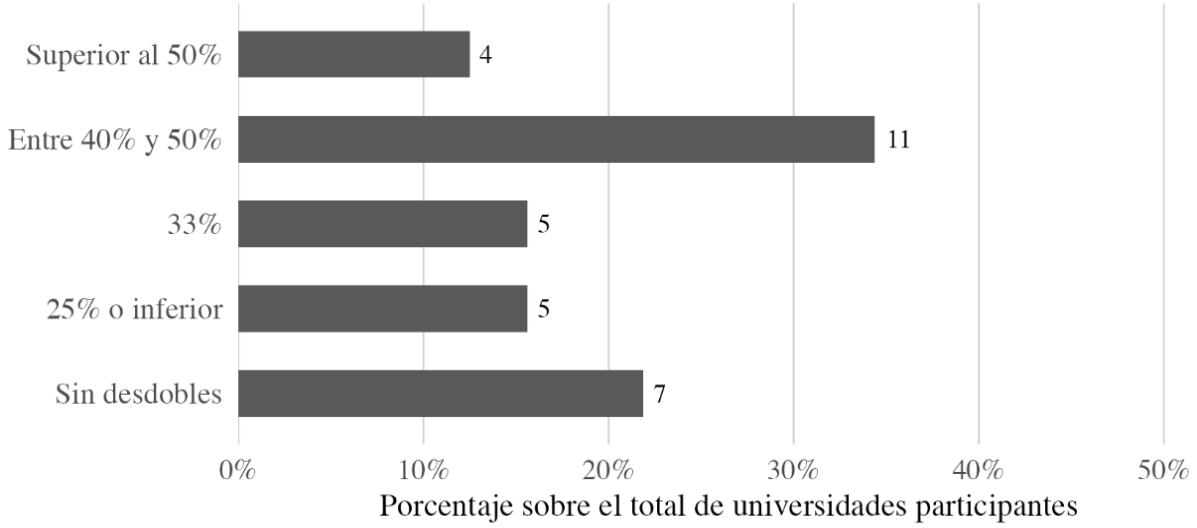


Las universidades que no ofrecen la opción de desdoblar en grupos más reducidos son, generalmente, aquellas cuya configuración de grupo base es menor en tamaño (cuatro universidades con ratios entre 41 y 50 estudiantes y dos entre 51-60). Los datos muestran una gran diversidad en la organización de los desdobles y del trabajo en grupos reducidos entre

universidades españolas (Figura 2). En la figura se representan distintos intervalos que indican la proporción de la docencia de la asignatura que se desarrolla mediante desdobles; así, la categoría "Superior al 50%" señala los casos en los que más de la mitad de las horas se imparten en grupos reducidos. En muchos casos, las asignaturas combinan trabajo en gran y pequeño grupo con proporciones cercanas a la mitad de la docencia, como ocurre en la Universidad de Zaragoza, la Universidad de Cádiz, la Universidad de A Coruña o la Universidad de Salamanca.

Figura 2

Distribución de universidades según nivel de desdoble



Habitualmente, los desdobles se realizan dividiendo el grupo en dos, aunque algunas universidades contemplan tres subgrupos cuando la matrícula es elevada, como sucede en la Universidad de Granada, la Universidad de Huelva o la Universidad de Oviedo. También existen modelos organizativos más complejos que combinan distintos tamaños de grupo, como en la Universidad de Vigo, donde se alternan sesiones en gran grupo, grupo mediano y grupo pequeño. En conjunto, los datos reflejan una notable heterogeneidad en los modelos de organización docente entre las universidades públicas españolas.

Organización de los desdobles y estrategias docentes asociadas

El análisis de las respuestas abiertas permite identificar que los desdobles se utilizan principalmente para mejorar la atención individualizada del alumnado, facilitar el trabajo práctico y favorecer la resolución de dudas. Asimismo, varios docentes destacan que este recurso permite aumentar la participación y mejorar el seguimiento del aprendizaje. En cuanto a la organización, las respuestas señalan que los desdobles suelen estructurarse mediante la división del grupo en subgrupos que trabajan en sesiones prácticas o seminarios. Sin embargo, también aparecen diversas dificultades, entre las que destacan: la falta de profesorado disponible, las limitaciones horarias, la disponibilidad de espacios adecuados y, en algunos casos, ratios que continúan siendo elevadas incluso tras el desdoble. Estas cuestiones ponen de manifiesto la necesidad de revisar la planificación organizativa para optimizar el uso de este recurso.

Entre las estrategias docentes señaladas por el profesorado destacan el aprendizaje cooperativo, la aplicación de metodologías activas —como la clase invertida o el modelo *Thinking classroom* —, la organización del aula en grupos de trabajo y el uso de recursos digitales, junto

con la incorporación de materiales manipulativos y dinámicas participativas que favorecen la gestión de grupos numerosos. Sin embargo, los resultados ponen de manifiesto diversas limitaciones estructurales que condicionan la eficacia de estas prácticas. Así, el profesorado identifica una brecha significativa en la competencia matemática del alumnado de nuevo ingreso, circunstancia que, según los participantes, obliga a ajustar el ritmo de enseñanza para evitar que una parte del grupo quede rezagada y que se agrava por la notable heterogeneidad presente en los grados de magisterio. Además, en algunos casos, se destaca que las limitaciones de las infraestructuras (espacios insuficientes y mobiliario inadecuado) supone un obstáculo logístico adicional.

De manera consistente con estos desafíos, los docentes coinciden en que la gestión de grupos grandes requiere la combinación de metodologías activas, la organización del aula en subgrupos, actividades que vinculen la teoría con la práctica y el apoyo de recursos tecnológicos o formatos mixtos, en la línea de lo señalado por Persky y Pollack (2010) y Furman Shaharabani y Yarden (2019). No obstante, el profesorado advierte que tales estrategias resultan insuficientes sin la adopción de medidas organizativas más amplias, como la reducción de ratios, la implementación de desdobles suficientes, aulas y mobiliario adecuado o el incremento de profesorado de apoyo, señaladas como condiciones necesarias para garantizar la calidad del proceso formativo. Una idea recurrente en el discurso del profesorado es la insostenibilidad de la carga laboral derivada de los modelos de evaluación continua en grupos con ratios elevadas. Los docentes manifiestan que la implementación de sistemas de evaluación diversificados, orientados a evitar que la calificación final dependa exclusivamente de un examen único, requiere una inversión de tiempo que excede su jornada laboral ordinaria. Esto se traduce en un escenario en el que realizar el seguimiento de las actividades prácticas y proporcionar una retroalimentación al alumnado que cumpla los estándares de calidad implica en muchos casos un sacrificio de la conciliación personal. Muchos participantes señalan que, ante la masificación de los grupos, estas prácticas se sostienen más sobre el voluntarismo y el esfuerzo individual del profesorado que sobre una estructura organizativa que respalde la implementación de metodologías activas.

CONCLUSIONES

Los resultados de este estudio muestran que la organización del tamaño de los grupos de clase y de los desdobles en las asignaturas de didáctica de las matemáticas presenta una notable diversidad entre universidades públicas españolas. Aunque muchas instituciones incorporan el desdoble en grupos reducidos para favorecer el trabajo práctico y la participación del alumnado, su presencia y proporción dentro de las asignaturas varía considerablemente. Asimismo, el profesorado destaca que la gestión de grupos numerosos y heterogéneos dificultan la implementación de sistemas de evaluación continua y la efectividad de metodologías activas, debido a la elevada carga de trabajo que implican. En este contexto, estrategias como la organización en subgrupos o el uso de recursos tecnológicos son consideradas útiles para mejorar la dinámica de aula, pero se señalan como insuficientes sin medidas organizativas más amplias. Estos resultados coinciden con la idea de que la formación en didáctica de las matemáticas requiere contextos de aprendizaje más experienciales y participativos —basados en la experimentación, la manipulación de materiales y la discusión colectiva de tareas— (Garrido-Martos et al., 2019; Loureiro-Ga y Gutiérrez-Rodríguez, 2025; Oliveira, 2018), y que el profesorado participante describe como difíciles de sostener en situaciones de docencia masificada.

En conjunto, los resultados ponen de manifiesto la relevancia de considerar factores estructurales, como las ratios, los desdobles o los recursos docentes, en relación con la calidad de la formación inicial del profesorado en el ámbito de la didáctica de las matemáticas.

Asimismo, se reconoce como limitación que el análisis se centró en la variable del tamaño del grupo, sin considerar otras variables como la carga de créditos obligatorios del área de didáctica de las matemáticas en la titulación.

Agradecimientos

Investigación al amparo de la ayuda 2025-GRIN-38341 de la Universidad de Castilla-La Mancha, cofinanciada con fondos FEDER y de la ayuda FPU2024/00187 del Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades.

Referencias

Barquero, B., Carriazo, A., de León, M., Moreno Verdejo, A. J., Muñoz Muñoz, J. J., Planas Raig, N. y Rodríguez Muñiz, L. J. (2024). *Estudio diagnóstico sobre la situación en competencia matemática*. CEMat-Ministerio de Educación, Deportes y Formación Profesional. https://hdl.handle.net/10481/101995

Blatchford, P. y Russell, A. (2019). Class size, grouping practices and classroom management. *International Journal of Educational Research, 96*, 154–163. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2018.09.004

Furman Shaharabani, Y. y Yarden, A. (2019). Toward narrowing the theory–practice gap: Characterizing evidence from in-service biology teachers' questions asked during an academic course. *International Journal of STEM Education, 6*(1), 21. https://doi.org/10.1186/s40594-019-0174-3

Garrido-Martos, R., Franco-Guijar, M., González-Calvín, C., Morand, Z. C. y Ruiz-Rodríguez, L. (2019). Plan de acción para la reducción de la ansiedad matemática de los futuros docentes de Primaria para la mejora de su formación. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 343-352). SEIEM.

Kelo, M. y Iucu, R. (2024). *Learning and Teaching and the Student-Centred Approach. New Perspectives on the Oldest Bologna Process Priority* (pp. 671–684). Springer Nature Switzerland. https://doi.org/10.1007/978-3-031-75140-0_33

Kleyn, T. (2016). Setting the Path: Implications for Teachers and Teacher Educators (pp. 216–234). https://doi.org/10.4324/9781315695242-20

Kooloos, J. G., Klaassen, T., Vereijken, M., Van Kuppeveld, S., Bolhuis, S. y Vorstenbosch, M. (2011). Collaborative group work: Effects of group size and assignment structure on learning gain, student satisfaction and perceived participation. *Medical Teacher, 33*(12), 983–988. https://doi.org/10.3109/0142159X.2011.588733

Loureiro-Ga, M. y Gutiérrez-Rodríguez, I. (2025). Metodología docente: mejorando la actitud hacia las matemáticas en futuros docentes de infantil. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán y I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. 284-292). SEIEM.

Muñoz-Cantero, J. y Mato-Vásquez, M. D. (2018). The education project in the Spanish university according to the European Higher Education Area. *Calidad en la Educación, 40*, 320–334. https://doi.org/10.31619/caledu.n40.74

Nolla, Á., Muñoz, R., Cerisola, A. y Fernández, B. (2021). La formación inicial de los maestros en matemáticas y su didáctica. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado, 35*(1). https://doi.org/10.47553/rifop.v96i35.1.85882

Oliveira, Z. V. y Kikuchi, L. M. (2018). O laboratório de matemática como espaço de formação de professores. *Cadernos de Pesquisa*, *48*(169), 802–829. https://doi.org/10.1590/198053145239

Pai, H. H., Sears, D. A. y Maeda, Y. (2015). Effects of small-group learning on transfer: A meta-analysis. *Educational Psychology Review, 27*(1), 79–102. https://doi.org/10.1007/s10648-014-9260-8

Persky, A. M. y Pollack, G. M. (2010). Transforming a large-class lecture course to a smaller-group interactive course. *American Journal of Pharmaceutical Education, 74*(9), 170. https://doi.org/10.5688/aj7409170

CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DE UN PROFESOR QUE INTEGRA TECNOLOGÍAS DIGITALES EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS: EL CASO DE LUIS

Specialised knowledge of a teacher who integrate digital technologies in mathematics teaching: the case of Luis

Padilla-Escorcia, I. A.[a], Aguilar-González, Á.[b] y García-Rodríguez, M. L.[c]

[a]Universidad del Atlántico, [b]Universidad de Oviedo, [c]Instituto Politécnico Nacional

Resumen

Hoy en día existe un creciente interés por comprender cómo los profesores integran las tecnologías digitales en la enseñanza de las matemáticas. Sin embargo, en la literatura se reconoce que hacen falta investigaciones que profundicen en la forma en que los profesores relacionan distintos saberes en su práctica cotidiana. En este trabajo se presenta un estudio de caso en el que se analiza el conocimiento de un profesor de matemáticas a partir de sus saberes disciplinares, pedagógicos y tecnológicos, aplicados en contextos de aula mediados por tecnologías digitales. Se utilizó el instrumento TPCSK (Technological Pedagogical Content Specialised Knowledge), y cuatro unidades de observación no participante para triangular la información. Los resultados muestran una articulación situada entre los saberes matemático, pedagógico y tecnológico en la práctica del profesor.

Palabras clave: *conocimiento especializado, profesor de matemáticas, TPCSK, tecnologías digitales, observación no participante*

Abstract

Currently, there is growing interest in understanding how teachers integrate digital technologies into the teaching of mathematics. However, the literature recognises the need for studies that examine in greater depth how teachers connect different types of knowledge in their everyday practice. This paper presents a case study that analyses the knowledge of a mathematics teacher from the perspective of disciplinary, pedagogical, and technological knowledge applied in classroom contexts mediated by digital technologies. The TPCSK (Technological Pedagogical Content Specialised Knowledge) instrument was used, together with four non-participant observation units, to triangulate the information. The results show a situated articulation between mathematical, pedagogical, and technological knowledge in the teacher's practice.

Keywords: *Specialised knowledge, mathematics teacher, TPCSK, digital technologies, non-participant observation.*

INTRODUCCIÓN

La integración de las tecnologías digitales (TDs) en las aulas ha transformado las dinámicas escolares, los roles docentes y los recursos didácticos (Conde-Carmona y Padilla-Escorcia, 2025). Esto se refleja en el creciente volumen de investigaciones sobre el conocimiento profesional del profesorado que incorpora dichas herramientas en la enseñanza de las matemáticas (Schettini y Cunha, 2022). Sumado a este interés, la pandemia de COVID-19 expuso desafíos críticos en su implementación con fines pedagógicos. Diversos estudios documentan las dificultades docentes para enseñar matemáticas en entornos virtuales debido a una formación pedagógica insuficiente; esto, en algunos casos, derivó en

Padilla-Escorcia, I. A., Aguilar-González, Á. y García-Rodríguez, M. L. (2026). Conocimiento especializado de un profesor que integra tecnologías digitales en la enseñanza de las matemáticas: el caso de Luis. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (pp. 441-448). SEIEM.

prácticas superficiales alejadas del rigor característico de esta disciplina (Guggemos y Seufert, 2021; Ozdamli y Karagozlu, 2022; Dilling y Vogler, 2023).

En este contexto, cobra relevancia la línea de investigación en educación matemática orientada a comprender cómo el profesorado integra las TDs en la enseñanza de la disciplina (Badillo et al., 2022). Hanifah et al. (2025) señalan que el estudio de este conocimiento debe considerar la interacción entre los saberes disciplinar, pedagógico y tecnológico; de este modo, se busca evitar que alguno se anteponga a los otros y se favorece su articulación coherente en la práctica docente. Dentro de esta línea de investigación destacan dos modelos ampliamente utilizados para analizar el conocimiento del profesor al integrar las TDs: el Technological Pedagogical Content Knowledge (TPACK) (Mishra y Koehler, 2006) y el Mathematics Teachers' Specialised Knowledge (MTSK) (Carrillo et al., 2018), ambos derivados de los planteamientos de Shulman (1986).

El modelo TPACK permite comprender la interacción entre los conocimientos tecnológico, pedagógico y disciplinar necesarios para integrar las TDs en los procesos de enseñanza. Sin embargo, diversos estudios señalan que su carácter amplio y transversal dificulta la profundización en las particularidades del conocimiento especializado requerido para enseñar matemáticas con dichas herramientas (Sancho-Blanco et al, 2025). Por su parte, el modelo MTSK ofrece una caracterización detallada del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, especialmente respecto a conceptos, representaciones y procesos propios de la materia. No obstante, este modelo no aborda de manera explícita el papel estratégico de las TDs en la enseñanza de la disciplina. A partir de estas limitaciones, surge el constructo TPCSK (Technological Pedagogical Content Specialised Knowledge), el cual integra elementos del TPACK y del MTSK con el propósito de analizar cómo el profesor articula los saberes matemáticos, pedagógicos y tecnológicos en contextos de enseñanza mediados por tecnología.

En la literatura se identifican diversos estudios sobre la integración de las TD en la enseñanza de las matemáticas, particularmente a través de software de geometría dinámica, herramientas de representación gráfica y recursos digitales para el diseño de tareas. Investigaciones como las de Açıkgül y Aslaner (2020) muestran que el uso de GeoGebra favorece el desarrollo del conocimiento tecnológico-pedagógico docente, mientras que McLaughlin-Galanti et al. (2021) destacan el potencial de los recursos digitales para promover procesos de exploración y representación en ambientes tecnológicos. No obstante, gran parte de la evidencia se ha centrado en procesos de formación, diseño de tareas o elaboración de recursos, siendo menos frecuentes los estudios que analizan cómo un profesor en ejercicio articula los saberes del TPCSK al enseñar contenidos específicos en escenarios de práctica real (Padilla-Escorcia et al., 2025).

Esta propuesta atiende dicha necesidad mediante un estudio de caso orientado a analizar cómo un profesor de educación secundaria articula las dimensiones matemática, pedagógica y tecnológica al integrar herramientas digitales en la enseñanza de funciones y razones trigonométricas. Para ello, se emplean las categorías del modelo TPCSK como marco analítico, lo que permite interpretar la relación entre las decisiones disciplinares, las estrategias didácticas y el uso de las TDs en el aula.

METODOLOGÍA

La investigación se desarrolló desde un enfoque cualitativo, orientado a la comprensión de fenómenos educativos en su contexto natural y a la interpretación de los significados construidos por los actores involucrados (Denzin y Lincoln, 2011). Este enfoque resulta idóneo para analizar el conocimiento que moviliza un profesor de matemáticas al integrar las TDs en su práctica de aula, dada la complejidad de las decisiones disciplinares, pedagógicas y tecnológicas implicadas. El diseño corresponde a un estudio de caso instrumental, donde el caso se examina como un medio para comprender un fenómeno más amplio: la articulación de los saberes que integran el TPCSK en escenarios educativos mediados por tecnología en el nivel de secundaria.

El caso de estudio

El caso corresponde a un docente de matemáticas de educación secundaria que labora en una institución privada. El profesor cuenta con once años de trayectoria profesional, de los cuales nueve han estado vinculados al uso sistemático de las TDs en la enseñanza de la disciplina. El participante, denominado Luis, fue seleccionado mediante un muestreo intencional, considerando su amplio recorrido docente, su formación de posgrado y su disposición para reflexionar sobre su práctica y el uso de herramientas digitales en la enseñanza de contenidos matemáticos.

Instrumentos de recolección de información

Para la recolección de la información se emplearon dos técnicas:

1. Cuestionario TPCSK (Technological Pedagogical Content Specialised Knowledge) de Padilla-Escorcia et al. (2025b). Este instrumento integra elementos de los modelos TPACK (Mishra y Koehler, 2006) y MTSK (Carrillo et al., 2018), y fue utilizado para identificar evidencias del conocimiento del profesor al integrar las TDs en la enseñanza de las matemáticas.

El instrumento consta de dos dimensiones complementarias. La primera es de naturaleza cualitativa y está conformada por preguntas abiertas orientadas a explorar las experiencias, decisiones pedagógicas, reflexiones y formas de integrar tecnologías digitales en contenidos matemáticos específicos. La segunda consiste en una escala de autopercepción tipo Likert, la cual permitió identificar el nivel de habilidad que el profesor atribuye a su propio desempeño respecto al uso pedagógico de las herramientas digitales. La utilización conjunta de ambas secciones permitió obtener información tanto declarativa como perceptiva sobre el conocimiento profesional del docente, favoreciendo la posterior triangulación con las observaciones de aula.

2. Observaciones no participantes. Se realizaron cuatro observaciones de clases de matemáticas mediadas por las TDs, con registro en diarios de campo y grabaciones audiovisuales. Esto permitió documentar la práctica docente in situ, al integrar tecnologías digitales en escenarios reales de enseñanza.

Dichas sesiones se centraron particularmente en la enseñanza de funciones y razones trigonométricas, contenidos seleccionados debido a la utilización recurrente de software especializado, especialmente GeoGebra, para la representación dinámica, exploración gráfica y análisis de relaciones matemáticas. Esta delimitación permitió analizar cómo el profesor articulaba decisiones disciplinares, pedagógicas y tecnológicas en situaciones concretas de enseñanza.

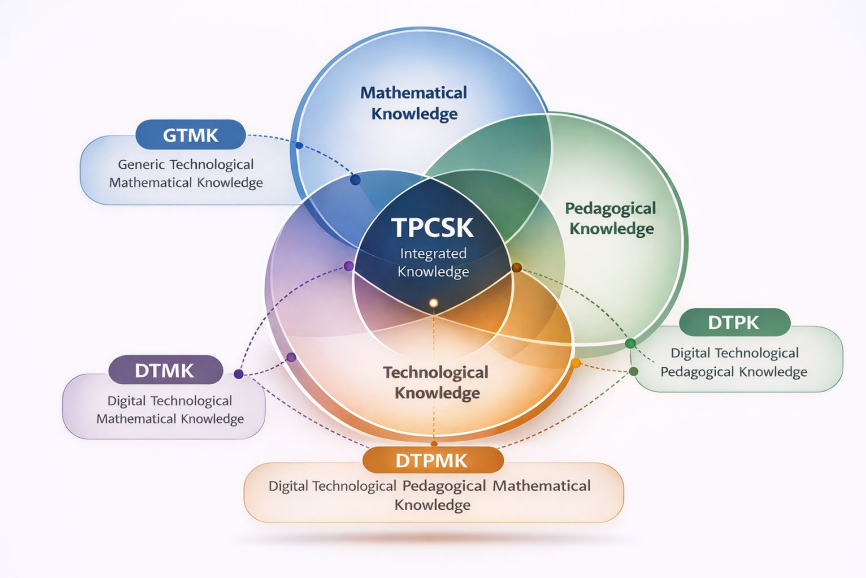
Categorías de análisis

El análisis de los datos se estructuró a partir de las categorías del instrumento TPCSK:

22. **GTMK (Conocimiento de tecnologías genéricas aplicadas para enseñar matemáticas):** es el conocimiento sobre el uso de tecnologías no especializadas en la enseñanza de contenidos matemáticos con características de hardware y software.
23. **DTMK (Conocimiento de tecnologías digitales específicas para matemáticas):** es el conocimiento sobre el potencial de tecnologías digitales especializadas en matemáticas para representar y explorar contenidos matemáticos. Además, como estas tecnologías permiten la simplificación o complejización de la enseñanza de estos contenidos.
24. **DTPK (Conocimiento pedagógico para utilizar tecnologías digitales):** es el conocimiento para integrar tecnologías digitales en estrategias de aula relacionadas con la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.
25. **DTPMK (Conocimiento matemático pedagógico para utilizar tecnologías digitales):** es el conocimiento para integrar de forma simultánea los saberes matemáticos, pedagógicos y tecnológicos en el diseño e implementación de estrategias didácticas mediadas por TDs (Figura 1).

Figura 1

Conceptualización del instrumento TPCSK



Estas categorías se utilizaron en el análisis para la codificación de los datos provenientes del cuestionario y de las observaciones de aula. En el centro de la Figura 1 se ubica el constructo TPCSK, que simboliza el conocimiento profesional del profesor cuando integra simultáneamente saberes matemáticos, pedagógicos y tecnológicos en escenarios mediados por las TDs (sean estas herramientas especializadas o no especializadas para la matemática).

En torno al TPCSK aparecen tres dominios principales de conocimiento representados mediante un diagrama de intersección: Conocimiento Matemático, Conocimiento Pedagógico y Conocimiento Tecnológico. La confluencia de estos dominios refleja que el saber docente no se manifiesta de manera aislada, sino que se construye a partir de la integración dinámica de dichas dimensiones en la práctica educativa. A partir de esta estructura central se derivan las cuatro categorías analíticas del modelo TPCSK, representadas en los nodos externos del diagrama.

ANÁLISIS Y RESULTADOS

El análisis de la información se realizó a partir de las categorías del modelo TPCSK, las cuales permitieron interpretar la articulación entre los saberes matemáticos, pedagógicos y tecnológicos en escenarios de enseñanza mediados por las TD. Para ello, se integraron los datos provenientes de: (a) las respuestas abiertas del profesor Luis en la sección cualitativa del cuestionario, orientadas a identificar evidencias de su conocimiento profesional; (b) la sección de autopercepción estructurada mediante una escala tipo Likert; y (c) las evidencias derivadas de las observaciones de aula. La triangulación de estas fuentes permitió contrastar las declaraciones del profesor con las prácticas desarrolladas durante la enseñanza de funciones y razones trigonométricas, proporcionando una visión integral del fenómeno estudiado.

Conocimiento de tecnologías genéricas aplicadas a la enseñanza de las matemáticas (GTMK)

Las evidencias obtenidas muestran que Luis posee conocimiento sobre el uso de tecnologías digitales de carácter general para apoyar la enseñanza de contenidos matemáticos. Particularmente, se identificó el empleo del ordenador, el proyector y dispositivos móviles como recursos para presentar situaciones contextualizadas, representar información y favorecer procesos de visualización.

Asimismo, el profesor utiliza herramientas digitales no especializadas, como *Inspiration* y *CmapTools*, para organizar contenidos y representar relaciones entre conceptos. Estas tecnologías

son empleadas principalmente para estructurar explicaciones, elaborar esquemas conceptuales y facilitar la comprensión de propiedades matemáticas mediante apoyos visuales.

Desde la categoría GTMK del modelo TPCSK, estas acciones evidencian conocimiento sobre el potencial de las tecnologías genéricas para apoyar la representación y comunicación de contenidos en escenarios de enseñanza. En este sentido, las herramientas utilizadas por Luis no cumplen únicamente una función expositiva, sino que favorecen procesos de organización visual y la identificación de relaciones matemáticas por parte de los estudiantes.

Los resultados de la sección de autopercepción muestran coherencia con estos hallazgos. Luis reportó niveles altos respecto a su habilidad para utilizar recursos tecnológicos generales como estrategia de presentación de contenidos y para incorporar recursos multimedia en sus clases. No obstante, su autopercepción disminuyó ligeramente en relación con el uso de software general para la construcción de representaciones gráficas y el análisis de información; esto sugiere que el uso de tecnologías genéricas se orienta predominantemente hacia la visualización y la estructuración de contenidos.

Conocimiento de tecnologías digitales específicas para matemáticas (DTMK)

En relación con las tecnologías digitales especializadas, los resultados evidencian que GeoGebra constituye la herramienta de mayor relevancia en la práctica docente de Luis. El profesor integra este software para representar funciones, construir figuras geométricas y explorar relaciones mediante representaciones dinámicas.

Las evidencias muestran que el uso de GeoGebra trasciende la función instrumental de visualización, ya que se integra para promover procesos de exploración, análisis e interpretación. En particular, el docente emplea el dinamismo de las funciones para que los estudiantes analicen cómo la modificación de parámetros afecta elementos como la concavidad, los puntos de corte y el comportamiento gráfico.

Desde la categoría DTMK del modelo TPCSK, estas acciones evidencian conocimiento sobre el potencial de las TDs especializadas para articular simultáneamente distintos registros de representación y favorecer procesos de interpretación mediados por tecnología. En este sentido, GeoGebra no aparece únicamente como un recurso visual, sino como una herramienta que posibilita la formulación de conjeturas y el análisis de propiedades disciplinares.

De manera complementaria, Luis mencionó el uso de otras herramientas como Statgraphics y Derive para apoyar procesos específicos de análisis estadístico y tratamiento algebraico. Sin embargo, estas tecnologías tienen una presencia menor en su práctica, lo que sugiere que el conocimiento tecnológico especializado del profesor está más consolidado en el ámbito de la representación dinámica.

Los resultados de la sección de autopercepción confirman esta tendencia. Luis reportó niveles destacados respecto a su habilidad para utilizar software de geometría dinámica, mientras que su autopercepción disminuyó en relación con herramientas de álgebra computacional y estadística. Esto refuerza la idea de que su conocimiento tecnológico especializado se orienta primordialmente hacia la representación gráfica y la exploración visual de los objetos matemáticos.

Conocimiento pedagógico para utilizar tecnologías digitales (DTPK)

En esta categoría se identificó que Luis articula el uso de las TD con estrategias pedagógicas orientadas a promover la participación activa del estudiantado y el análisis de situaciones contextualizadas. Particularmente, se hallaron evidencias vinculadas al aprendizaje basado en problemas (ABP) y al trabajo colaborativo.

El profesor plantea situaciones que requieren el análisis de información matemática mediante herramientas digitales. Por ejemplo, en el abordaje de funciones y análisis de datos, se propusieron actividades relacionadas con problemáticas cercanas al entorno de los alumnos, como el estudio de edades promedio asociadas a enfermedades o el comportamiento de utilidades empresariales. Estas

situaciones exigieron la construcción y el análisis de representaciones gráficas en GeoGebra, lo que permitió a los estudiantes interpretar las relaciones matemáticas subyacentes.

Desde la categoría DTPK del modelo TPCSK, estas acciones evidencian conocimiento sobre la integración de tecnologías digitales en estrategias pedagógicas que favorecen procesos de exploración, interpretación y discusión. En este caso, la tecnología no figura como un recurso aislado, sino como un mediador que estructura las dinámicas de participación y análisis en el aula.

Asimismo, se identificó el uso de plataformas para diagnosticar conocimientos previos y monitorear el progreso del grupo, lo que facilitó el ajuste del nivel de complejidad en las actividades. Esto demuestra que las decisiones tecnológicas del profesor están estrechamente vinculadas a una intención pedagógica de seguimiento y acompañamiento.

Los resultados de la sección de autopercepción guardan coherencia con estos hallazgos. Luis reportó niveles altos de habilidad para integrar las TD con metodologías como la indagación y el aprendizaje colaborativo. Esto sugiere que el docente reconoce el potencial de las herramientas digitales para fortalecer enfoques de enseñanza centrados en el estudiante.

Conocimiento matemático pedagógico para utilizar tecnologías digitales (DTPMK)

El análisis de esta categoría permitió identificar la integración simultánea de conocimientos matemáticos, pedagógicos y tecnológicos en la práctica de Luis. Las TD son utilizadas para diseñar situaciones de aprendizaje orientadas al desarrollo de procesos cognitivos complejos, como el razonamiento, la argumentación y la modelación.

Particularmente, mediante GeoGebra, el profesor propone actividades donde los estudiantes manipulan parámetros de funciones y analizan cómo estas modificaciones afectan sus representaciones gráficas. Este tipo de tareas favorece el establecimiento de relaciones entre distintos registros de representación y la construcción de explicaciones disciplinares sobre los cambios observados. Desde la categoría DTPMK del modelo TPCSK, estas acciones evidencian una articulación situada entre decisiones matemáticas, estrategias pedagógicas y el uso de herramientas digitales. La tecnología no se limita a facilitar procedimientos, sino que participa activamente en la construcción de significados dentro de la dinámica del aula.

Los resultados de autopercepción muestran que Luis se ubica en niveles altos respecto a su habilidad para utilizar las TD en la resolución de problemas y la modelación de situaciones contextualizadas. Las observaciones de aula permitieron profundizar en estas evidencias; específicamente, durante una sesión sobre ángulos de elevación y depresión asociados a razones trigonométricas, se identificaron manifestaciones de las categorías GTMK, DTMK y DTPK.

En relación con GTMK, se observó el uso del celular para capturar imágenes del lanzamiento de un balón por parte de un estudiante. Posteriormente, estas capturas se emplearon como recurso didáctico para analizar relaciones entre altura, distancia horizontal y ángulos. Este episodio evidencia cómo dispositivos de uso cotidiano pueden favorecer la representación concreta de situaciones matemáticas. Asimismo, mediante una presentación digital, Luis planteó una situación contextualizada sobre la observación de un ave desde la playa. A partir de esta escena, el estudiantado identificó líneas de referencia y analizó los ángulos involucrados, lo que facilitó la comprensión de los conceptos de elevación y depresión desde una visualización situada.

Desde la categoría DTPK, se identificó la implementación del ABP como estrategia mediada por tecnología. El profesor organizó actividades grupales donde los estudiantes debían representar gráficamente las situaciones y aplicar razones trigonométricas para estimar medidas. Estas dinámicas favorecieron procesos de discusión y comparación de resultados. En este sentido, las TD funcionaron como mediadores pedagógicos que facilitaron la exploración y la construcción colectiva de explicaciones.

Finalmente, las evidencias derivadas de las observaciones muestran coherencia con las declaraciones de Luis y su autopercepción. La convergencia entre estas fuentes ratifica la consistencia entre el conocimiento que el profesor manifiesta y las prácticas que desarrolla en escenarios reales de enseñanza.

CONCLUSIONES

Los resultados del estudio muestran que el conocimiento profesional del profesor Luis se manifiesta mediante una articulación situada entre saberes matemáticos, pedagógicos y tecnológicos. A partir del análisis de las categorías del modelo TPCSK, se evidenció que el docente emplea tanto tecnologías generales como herramientas especializadas, particularmente GeoGebra, para representar, explorar y analizar conceptos en el aula.

Asimismo, se identificó que el uso de estas herramientas se integra con estrategias pedagógicas como el ABP y el trabajo colaborativo, lo que favorece la participación activa del estudiantado y la exploración de relaciones matemáticas en situaciones contextualizadas. La triangulación de fuentes evidenció una sólida coherencia entre las declaraciones del profesor, su autopercepción y su práctica docente efectiva.

En conjunto, los resultados sugieren que el constructo TPCSK permite identificar evidencias precisas del conocimiento del profesor al integrar las TD en la enseñanza de la disciplina, aportando un marco analítico robusto para estudiar la confluencia entre los saberes matemático, pedagógico y tecnológico en escenarios reales de aula.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado por los proyectos PID2024-155358NB-100 (DALICS) de la Agencia Estatal de Investigación de España y el proyecto GRUPIN-IDE/2024/000713 de la Agencia Asturiana de Ciencia, Competitividad Empresarial e Innovación (SEKUENS). Iván Andrés Padilla-Escorcia y Alvaro Aguilar-González pertenecen a la Red MTSK (https://redmtsk.net/).

Referencias

Açıkgül, K. y Aslaner, R. (2019). Effects of Geogebra supported micro teaching applications and technological pedagogical content knowledge (TPACK) game practices on the TPACK levels of prospective teachers. *Education And Information Technologies*, *25*(3), 2023-2047. https://doi.org/10.1007/s10639-019-10044-y

Badillo, E., González, M. y Moreno, M. (2022). Una mirada crítica el MTSK. En Investigación sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK) 10 años de camino. (2022). En J. Carrillo, N. Climent, y M.Á. Montes (Eds.), *Dykinson eBooks* (pp. 317-336). https://doi.org/10.2307/j.ctv2zp4vp1

Carrillo-Yáñez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, Á., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model*. *Research In Mathematics Education*, *20*(3), 236-253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Conde-Carmona, R. J. y Padilla-Escorcia, I. A. (2025). La inteligencia artificial en educación matemática: percepciones de futuros docentes sobre expectativas, prácticas y desafíos. *Voces Y Silencios. Revista Latinoamericana De Educación*, *16*(2), 1-26. https://doi.org/10.18175/VyS16.2.2025.1

Denzin, N. y Lincoln, Y. (2011). Introduction. The discipline and practice of qualitative research. En N. K. Denzin y Y. S. Lincoln (Eds.), *The Sage Handbook of Qualitative Research* (pp. 1-20). Sage.

Dilling, F. y Vogler, A. (2022). Pre-service Teachers' Reflections on Attitudes Towards Teaching and Learning Mathematics with Online Platforms at School: A Case Study in the Context of a University Online Training. *Technology Knowledge and Learning*, *28*(3), 1401-1424. https://doi.org/10.1007/s10758-022-09602-0

Galanti, T. M., Baker, C. K., Morrow-Leong, K. y Kraft, T. (2020). Enriching TPACK in mathematics education: using digital interactive notebooks in synchronous online learning environments. *Interactive Technology and Smart Education*, *18*(3), 345-361. https://doi.org/10.1108/itse-08-2020-0175

Guggemos, J. y Seufert, S. (2020). Teaching with and teaching about technology – Evidence for professional development of in-service teachers. *Computers In Human Behavior*, *115*, 106613. https://doi.org/10.1016/j.chb.2020.106613

Hanifah, U., Budayasa, I. K. y Sulaiman, R. (2024). Technology, pedagogy, and content knowledge in mathematics education: a systematic literature review. *Journal Of Education And Learning (EduLearn)*, *19*(1), 579-586. https://doi.org/10.11591/edulearn.v19i1.21816

Mishra, P. y Koehler, M. J. (2006). Technological Pedagogical Content Knowledge: A Framework for Teacher Knowledge. *Teachers College Record The Voice Of Scholarship In Education*, *108*(6), 1017-1054. https://doi.org/10.1111/j.1467-9620.2006.00684.x

Ozdamli, F. y Karagozlu, D. (2022). Online Education During the Pandemic: A Systematic Literature Review. *International Journal Of Emerging Technologies In Learning (iJET)*, *17*(16), 167-193. https://doi.org/10.3991/ijet.v17i16.32287

Padilla-Escorcia, I. A., García-Rodríguez, M. L. y Aguilar-González, Á. (2025). Mathematics Teachers' Knowledge for Teaching with Digital Technologies: A Systematic Review of Studies from 2010 to 2025. *Education Sciences*, *15*(12), 1598. https://doi.org/10.3390/educsci15121598

Padilla-Escorcia, I. A., García-Rodríguez, M. L. y Aguilar-González, Á. (2025a). Mathematics teachers' knowledge in the use of digital technologies for teaching: Insights from the TPCSK instrument. *International Electronic Journal Of Mathematics Education*, *20*(4), em0851. https://doi.org/10.29333/iejme/16836

Sancho-Blanco, V., Arnal-Bailera, A. y Manero, V. (2025). Cuestionario para evaluar el desarrollo del TPACK en docentes de Matemáticas. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), Investigación en Educación Matemática XXVIII (pp. 397-404). SEIEM.

Schettini, C. y Cunha, A. (2023). Characteristics of Education 4.0 and its Application in Industry 4.0. *Journal of Engineering Education Transformations, 37*(1), 51-61. https://doi.org/10.16920/jeet/2023/v37i1/23131

Shulman, L. S. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14. https://doi.org/10.3102/0013189x015002004

APRENDER FUNCIONES MEDIANTE LA SONIFICACIÓN: COLABORACIÓN ENTRE UN ESTUDIANTE CIEGO Y UN ESTUDIANTE CON DIFICULTADES DE APRENDIZAJE

Perceiving functions through sonification: peer collaboration between a totally blind student and a student with learning difficulties

Palaj, L.[a], Manolino, C.[b,c] y Piñeiro, J. L.[d]

[a]Università di Bologna, [b]Università di Torino, [c]Université Paris Cité, [d]Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación

Resumen

Los estudiantes con necesidades educativas especiales suelen acceder a las representaciones matemáticas mediante adaptaciones individuales, lo que puede limitar las oportunidades de colaboración. Este estudio tiene por objetivo indagar en cómo surge la actividad matemática colaborativa cuando dos estudiantes con perfiles de aprendizaje distintos—un estudiante con ceguera total y otro con dificultades de aprendizaje—exploran gráficos de funciones mediante la sonificación con la herramienta Audiofunctions. El análisis adopta el marco del Sistema Dinámico Funcional Intercorpóreo (IFDS). Se utiliza un diseño de estudio de caso cualitativo para analizar microepisodios de interacción entre los alumnos. Los resultados indican que la sonificación crea un espacio perceptivo compartido que puede favorecer formas inclusivas de exploración matemática colaborativa y ampliar el marco del IFDS a la interacción entre compañeros en contextos inclusivos.

Palabras clave: *educación matemática inclusiva, sonificación, cognición corporizada, colaboración entre pares, ciclos de percepción–acción, Audiofunctions.*

Abstract

Students with special educational needs often access mathematical representations through individual adaptations, which may limit opportunities for peer collaboration. This study investigates how collaborative mathematical activity emerges when two students with diverse learning profiles, a totally blind student and a student with learning difficulties, explore function graphs through sonification by using Audiofunctions. The analysis adopts the Intercorporeal Functional Dynamic System (IFDS) framework. A qualitative case study design is used to analyse micro-episodes of student interaction. The results indicate that sonification creates a shared perceptual space that may support inclusive forms of collaborative mathematical exploration and extend the IFDS framework to peer interaction in inclusive contexts.

Keywords: *inclusive mathematics education, sonification, embodied cognition, peer collaboration, perception–action loops, Audiofunctions.*

FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

A pesar del creciente interés por las herramientas STEM accesibles, la investigación sobre cómo las representaciones multimodales favorecen la construcción colaborativa de significado matemático entre estudiantes diversos sigue siendo limitada. Los trabajos previos sobre la sonificación en educación han demostrado su potencial para transmitir estructuras de datos a los estudiantes, incluidos aquellos con discapacidad visual, pero a menudo se centran en la interacción individual o en tareas sencillas de reconocimiento, en lugar de la interpretación conjunta de relaciones matemáticas (Kamath et al., 2025). Los estudios sobre tecnologías de apoyo en matemáticas hacen hincapié en los

Palaj, L., Manolino, C. y Piñeiro, J. L. (2026). Aprender funciones mediante la sonificación: colaboración entre un estudiante ciego y un estudiante con dificultades de aprendizaje. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (pp. 449-456). SEIEM.

retos a los que se enfrentan los estudiantes con discapacidad visual y en la necesidad de adaptaciones táctiles y auditivas, pero pocos abordan la exploración compartida de conceptos abstractos como las funciones en entornos diádicos (Shoaib et al., 2023). Aunque se han propuesto métodos de sonificación y audiotáctiles para presentar información gráfica a estudiantes ciegos o con baja visión, la investigación rara vez ha examinado cómo estas representaciones facilitan la acción coordinada y la percepción entre compañeros durante la resolución de problemas (Maćkowski et al., 2023). Además, los trabajos sobre sistemas dinámicos funcionales intercorpóreos proporcionan una base teórica para la participación conjunta y la coordinación sensoriomotora, pero su aplicación a la colaboración entre compañeros de diferentes niveles en matemáticas con canales sensoriales mediados está poco desarrollada (Shvarts y Abrahamson, 2024). Por lo tanto, este estudio aborda esta brecha al investigar cómo las representaciones multimodales y el andamiaje permiten bucles compartidos de percepción-acción y el aprendizaje colaborativo inclusivo de funciones sonificadas. Este aspecto es relevante pues las representaciones y el tránsito entre estas son escenciales para el aprendizaje matemático (Romero, 2001).

La literatura sobre cognición corporizada y el enfoque ecológico (de Freitas y Sinclair, 2013; Lakoff y Núñez, 2000) de la enseñanza de las matemáticas hacen hincapié en la naturaleza fundamentalmente interactiva del aprendizaje, destacando cómo la comprensión matemática y las estrategias de resolución de problemas surgen a través de los movimientos corporales, la retroalimentación sensorial y la interacción con artefactos mediadores. Desde estas perspectivas, el aprendizaje no se concibe como un proceso cognitivo puramente interno, sino más bien como una actividad que se desarrolla a través de ciclos continuos de percepción y acción entre los estudiantes y las herramientas dentro de entornos estructurados. En particular, el IFDS, introducido por Shvarts y Abrahamson (2024), investiga cómo surge el aprendizaje matemático a través de la interacción encarnada entre dos sujetos, en concreto entre un estudiante y un tutor, con el objetivo de modelar el proceso de enseñanza/aprendizaje combinando perspectivas teóricas de la cognición corporizada radical y el enfoque histórico-cultural (Vygotsky, 1978). Su trabajo analiza principalmente la interacción entre parejas de estudiantes y tutores, en la que la comprensión matemática se desarrolla a través de la coordinación progresiva de sus acciones y percepciones, mientras crean un acoplamiento sensoriomotor intercorpóreo, dentro de un espacio de acción conjunta (Radford y Roth, 2011).

Partiendo de este marco, el presente estudio amplía el IFDS de tres maneras. En primer lugar, examina la colaboración entre pares en lugar de la interacción estudiante-tutor, tratando a ambos participantes de forma simétrica como coconstructores de la comprensión matemática de las funciones. En segundo lugar, investiga las interacciones mediadas por representaciones sonificadas de funciones, ampliando el marco más allá de las modalidades predominantemente visuales. En tercer lugar, explora la actividad colaborativa entre estudiantes con diversas capacidades perceptivas y de aprendizaje, contribuyendo al desarrollo de perspectivas más inclusivas sobre el aprendizaje matemático corporizado. Basándose en estas consideraciones, el presente estudio tiene por objetivo analizar en cómo surge la actividad matemática colaborativa cuando dos estudiantes con perfiles de aprendizaje distintos (un estudiante con ceguera total y otro con dificultades de aprendizaje) exploran gráficos de funciones mediante la sonificación con la herramienta *Audiofunctions*[5].

PERSPECTIVA TEÓRICA

Este estudio adopta el marco del IFDS, desarrollado por Shvarts y Abrahamson (2024). Dicho marco se basa en la combinación de las perspectivas teóricas de la cognición radical corporizada y el enfoque histórico-cultural (Vygotsky, 1978), con el objetivo de modelar los procesos de enseñanza y aprendizaje como sistemas dinámicos de interacción encarnada. Desde esta perspectiva, se entiende

[5] *Audiofunctions* es un software gratuito en línea que permite la sonificación de gráficos de funciones representados en el plano cartesiano.

que la cognición surge a través de la actividad mediada socialmente, en la que el conocimiento se construye mediante la interacción con los demás y con herramientas desarrolladas culturalmente.

Esta visión concuerda con el enfoque ecológico de la percepción propuesto por Gibson (1986), quien define el entorno como el conjunto de condiciones que rodean a un organismo capaz de percibir y actuar dentro de él. La interacción continua entre estos dos elementos crea ciclos dinámicos que más tarde se describen como bucles percepción-acción (Turvey, 1977). Según Gibson, los organismos interactúan con su entorno percibiendo las *affordances*, entendidas como oportunidades de acción ofrecidas tanto por objetos inanimados, como las herramientas, como por sujetos animados, como otros organismos. Si bien los individuos pueden controlar el movimiento de las herramientas de acuerdo con sus intenciones de manipulación, no pueden controlar las acciones de otros organismos. Por lo tanto, la coordinación entre dos individuos surge a través de la percepción recíproca de las *affordances* del otro y mediante el ajuste de las acciones en respuesta a ellas.

Desde este punto de vista, el aprendizaje matemático no se considera un proceso cognitivo aislado, sino una actividad que se desarrolla dentro de espacios de acción compartidos. Tal y como sostienen Radford y Roth (2011), la cognición matemática se constituye dentro del espacio de acción conjunta. Partiendo de esta perspectiva, Shvarts y Abrahamson (2024) han documentado y modelado cómo tales interacciones se transforman dinámicamente en sistemas funcionales, caracterizados por la autoorganización, el acoplamiento y la anticipación, conceptos que tienen su origen en la ciencia cognitiva corporizada. En su trabajo, analizan cómo se desarrollan los bucles coordinados de percepción-acción en las interacciones entre estudiantes y tutores durante tareas matemáticas corporizadas, estabilizándose gradualmente en un sistema dinámico funcional intercorporal que sustenta la aparición de nuevas capacidades matemáticas.

El marco IFDS se ha aplicado, hasta ahora, principalmente a las interacciones entre estudiantes y tutores. En este contexto, la interacción tiende a ser asimétrica, ya que el tutor guía la atención y las acciones del estudiante mediante andamiaje para que este pueda realizar la tarea. El marco identifica varias etapas a medida que se desarrolla la dinámica de un sistema funcional intercorpóreo, incluyendo el acoplamiento de las estrategias de percepción naturales tanto del estudiante como del tutor con las acciones motoras del estudiante; el desacoplamiento de las estrategias perceptivas naturales y culturales y, sin embargo, el acoplamiento de ambas estrategias con las acciones motoras del estudiante; y el acoplamiento de las estrategias culturales de ambos participantes con las acciones motoras del estudiante (Shvarts y Abrahamson, 2024). Por lo tanto, desde una perspectiva educativa, sigue sin explorarse cómo surgen y se estabilizan los bucles percepción-acción en la colaboración entre pares, especialmente cuando los participantes comparten roles epistémicos similares pero pueden poseer recursos perceptivos o cognitivos diferentes (aún cuando sean mediados). Además, desde una perspectiva inclusiva, resulta importante desarrollar un marco capaz de orientar el diseño de entornos de aprendizaje que fomenten la colaboración, la accesibilidad y la actividad matemática compartida para todos los estudiantes.

En el presente estudio abordamos esta laguna ampliando el marco IFDS al análisis de la colaboración entre compañeros con capacidades diversas. En concreto, el estudio se guía por la siguiente pregunta de investigación: ¿Cómo surgen y se estabilizan los bucles percepción-acción en la colaboración entre un estudiante totalmente ciego y un estudiante con dificultades de aprendizaje al explorar gráficos de funciones a través de representaciones sonificadas?

MÉTODO

Este estudio adopta un diseño de estudio de caso cualitativo centrado en la colaboración entre una pareja de estudiantes con capacidades de aprendizaje diversas mientras realizan tareas matemáticas relacionadas con gráficos de funciones, con la ayuda de *Audiofunctions*. La pareja está formada por un estudiante que es totalmente ciego de nacimiento (Estudiante 1) y otro con dificultades de aprendizaje, más concretamente con un deterioro cognitivo de leve a moderado y epilepsia,

manifestándose en problemas de atención, memoria verbal, funciones ejecutivas (planificación/organización) y velocidad de procesamiento mental (Estudiante 2). Ambos cursan el tercer año de secundaria y no tenían experiencia previa con el concepto de funciones ni con la sonificación como modalidad representativa. El caso analizado en este artículo se extrae de un estudio más amplio realizado en el aula en dos institutos de la provincia de Turín, Italia, donde los estudiantes trabajaron en parejas utilizando *Audiofunctions* para explorar gráficos de funciones.

Recolección de los datos

Los datos consisten en grabaciones de vídeo y audio, y capturas de pantalla que documentan las interacciones de los estudiantes durante las actividades de la tarea matemática medidada por un investigador. Cada pareja trabajó en un ordenador en el que se grababa su actividad mediante un software de captura de pantalla (OBS) o a través de una sesión de grabación en Google Meet. Los estudiantes trabajaron con retroalimentación auditiva compartida conectando dos pares de auriculares al ordenador mediante un divisor de auriculares, lo que permitía a ambos participantes escuchar simultáneamente los gráficos de funciones sonificados generados por el software. Ambos estudiantes contaban con el apoyo del investigador. Además, el estudiante ciego disponía de numerosas herramientas, entre ellas una línea braille, un plano táctil de goma, un geoplano y una impresora braille.

La tarea se estructuró en tres partes principales, diseñadas para facilitar progresivamente a los estudiantes la exploración de las gráficas de funciones matemáticas mediante la sonificación con *Audiofunctions*. Cuando se activa la retroalimentación de audio, la navegación por el gráfico se controla mediante las teclas de dirección, o bien se puede sonificar todo el gráfico de izquierda a derecha pulsando la tecla B. Los usuarios pueden cambiar de función o acceder directamente a una función específica mediante comandos numéricos. La tecla N se utiliza para pasar a la siguiente función, mientras que para mostrar una función específica de forma inmediata se utilizan las teclas 1, 2, …, según el número de la función. Hay dos modos de sonificación disponibles: el clarinete es una sonificación continua, mientras que la guitarra es, por naturaleza, una sonificación discreta.

La primera parte de la tarea sirve como fase introductoria destinada a familiarizarse con el software. En esta fase, los participantes exploran seis funciones (http://tinyurl.com/sonifypart1). Trabajando en parejas, los estudiantes escuchan las representaciones sonificadas de cada gráfico de función y toman notas sobre las observaciones que hacen acerca de los elementos sonoros que reconocen y las características gráficas a las que creen que estos elementos corresponden. En sus respuestas, se pide que indiquen la función que están explorando y describan las estrategias utilizadas para interactuar con el software. A continuación, se les pide que cambien la modalidad de sonificación de *clarinete* (continua) a *guitarra* (discreta) y reflexionen sobre cómo este cambio influye en su percepción de las características gráficas, completando una tabla en la que comparen las características que pudieron identificar utilizando una u otra, así como aquellas percibidas utilizando ambas.

La segunda parte se centra en la comparación de funciones y se divide en tres subpartes: Parte 2a (http://tinyurl.com/sonifypart2a); Parte 2b (http://tinyurl.com/sonifypart2b); Parte 2c (http://tinyurl.com/sonifypart2c). Cada subparte contiene pares de funciones. Se pide a los estudiantes que identifiquen similitudes y diferencias entre ellas, explicando las estrategias utilizadas para fundamentar la comparación.

La tercera parte tiene como objetivo facilitar la transición de la exploración perceptiva a la articulación matemática. Se pide a los estudiantes que identifiquen y nombren las propiedades matemáticas que distinguen a cada función, basándose en los elementos sonoros identificados previamente durante las fases de exploración.

Tres personas participaron en la aplicación de la tarea: el estudiante ciego, el estudiante con discapacidad cognitiva y el investigador, que facilitó la actividad. En lugar de enseñar directamente

la tarea, el papel del investigador consistió principalmente en mantener la participación, fomentar la colaboración entre ellos y proporcionar andamiaje al proceso exploratorio con el fin de apoyar la construcción progresiva del significado y la comprensión matemáticos.

Análisis de los datos

El análisis se basa en el marco teórico del IFDS (Shvarts y Abrahamson, 2024) para examinar cómo los estudiantes con perfiles de aprendizaje diversos coordinan de forma colaborativa su exploración perceptiva del sonido con sus acciones motoras y participan en intercambios verbales mientras interactúan con representaciones matemáticas sonificadas de gráficas de funciones, dentro de un entorno de aprendizaje mediado por el profesor. Aunque el instrumento analítico (ver Tabla 1) se basa en el desarrollo teórico del marco IFDS, la organización específica del análisis en las tres dimensiones se diseñó intencionadamente para captar los patrones generales que surgen de la actividad matemática colaborativa de los estudiantes, en lugar de describir específicamente cada microproceso observable en la interacción. Esta elección metodológica refleja el objetivo tanto de ampliar el marco IFDS más allá de la interacción estudiante-tutor hacia la actividad matemática colaborativa entre pares con diferentes perfiles perceptivos y cognitivos, como de hacer que el marco sea más operativo mediante el análisis de formas de exploración matemática mediadas por el sonido en entornos inclusivos.

Tabla 1

Instrumento analítico

Dimensión	Descripción	Marcadores análiticos
Participación perceptiva	La forma en que los estudiantes interpretan la información auditiva generada por el artefacto.	Referencias a las características del sonido (tono, duración, ritmo), intentos de relacionar las características del sonido con las propiedades gráficas, momentos de descubrimiento o reinterpretación
Estrategias de acción	La forma en que los estudiantes y el investigador manipulan el entorno digital para explorar las funciones	Movimientos del ratón, reproducción de sonidos, cambio entre modos de sonificación, ajuste de estrategias de exploración
Coordinación interpersonal	La forma en que los estudiantes y el investigador coordinan entre sí su percepción y sus acciones durante la tarea	Negociación verbal, turnos de intervención, sugerencias, interpretaciones compartidas, toma de decisiones colaborativa, patrones de mirada, coordinación de la atención

ANÁLISIS Y RESULTADOS

Debido a limitaciones de espacio, nos centramos en un fragmento extenso extraído de la ejecución de la tarea completa y del que solo mostramos dos episodios. Esta continuidad permite examinar el desarrollo progresivo de la coordinación perceptiva, motora e interpersonal a lo largo de la exploración colaborativa.

Episodio 1

Investigador: (Comienza la sonificación de la cuarta gráfica de función de la Parte 1. Mientras tanto, ambos estudiantes tienen sus auriculares puestos y escuchan la gráfica sonificada).

Estudiante 1: Esto hace lo contrario de lo anterior.

Estudiante 1: ¡Oh, ahí está el río! (Dicho en respuesta al sonido que se escucha cuando la función entra en el cuarto cuadrante) ...

Estudiante 2: La escuché aquí. (Señala la pantalla). Ese “tu dum”.

En este episodio, emerge un espacio perceptivo compartido entre los dos estudiantes y el artefacto. El estudiante 1 se concentra principalmente en las variaciones auditivas de la sonificación, mientras que el estudiante 2 coordina su atención visual hacia el movimiento del punto rojo en el gráfico junto con los sonidos asociados. De este modo, aunque los estudiantes interactúan con el mismo objeto matemático a través de diferentes modalidades perceptivas, su actividad exploratoria se coordina progresivamente dentro de un espacio común de acción y percepción. En esta línea, es posible observar varios cambios importantes en la dinámica dentro del marco IFDS. Durante la sonificación de la gráfica de la función, el estudiante 1 se muestra más seguro al verbalizar sus interpretaciones de la experiencia auditiva. No solo identifica variaciones de sonido, sino que también compara la gráfica actual con la anterior, describiéndola como "lo opuesto a la anterior". Además, asocia una variación auditiva específica que ocurre cuando el gráfico entra en el cuarto cuadrante con la imagen metafórica de un "río", utilizando una expresión onomatopéyica para estabilizar y comunicar su interpretación perceptiva del sonido. En contraste, el estudiante 2 inicialmente permanece en silencio mientras sigue visualmente el movimiento del punto rojo en el gráfico durante la sonificación.

Episodio 2

Investigador: Te lo reproduciré. Intenta ponerte los auriculares de nuevo. Lo reproduciré en la posición… En realidad, hazlo tú (dirigiéndose al estudiante 1). Intenta mover las flechas. (El investigador coloca las manos del estudiante 1 sobre las flechas y este se mueve en el gráfico).

Estudiante 1: Ok.

Investigador: Y diríjase al punto donde empiece a oír...

Estudiante 1: Oigo la cascada.

Investigador: Exacto, porque la cascada debería estar aquí. Intenta moverte. De acuerdo. ¿Oyes la cascada ahora?

Estudiante 2: No.

Estudiante 1: Espera. Ah, desde aquí. Se oye un "shhhh".

Estudiante 2: No. Oigo ese silbido...

Estudiante 1: Escucha aquí. Aquí no hay ningún "shhhh". Pero aquí sí.

Estudiante 2: Honestamente, no veo ninguna diferencia.

Estudiante 1: ¿Eh?

Estudiante 2: No oigo ninguna diferencia, quiero decir, de verdad.

Estudiante 1: Escucha. (Se mueve de un lado a otro entre un punto donde se oye "la cascada" y otro donde no).

Este microepisodio muestra la reiterada desconexión de la estudiante 2 con el estímulo auditivo. El investigador interviene intentando reproducir la sonificación en un punto específico (donde comienza la cascada), pero rápidamente cambia de estrategia y le cede el control del estímulo a la estudiante 1. Al invitarla a manipular el gráfico con las teclas de flecha, el investigador introduce una forma de acoplamiento táctil-auditivo que transforma el rol de la estudiante 1, pasando de oyente pasiva a exploradora activa del espacio sonificado. Mediante esta manipulación guiada, el estudiante 1 comienza a coordinar su movimiento a lo largo del gráfico con variaciones en la salida auditiva, identificando progresivamente la ubicación donde emerge el sonido de la "cascada". Su actividad se caracteriza por estrategias de acción iterativas, que incluyen movimientos repetidos entre posiciones adyacentes y la comparación entre contrastes auditivos.

Al mismo tiempo, el investigador reintroduce al estudiante 2 en la actividad invitándole a usar nuevamente los auriculares, intentando así reintegrarlo al espacio perceptivo compartido. Si bien el estudiante 2 inicialmente reporta dificultad para percibir la misma distinción auditiva, ambos

estudiantes permanecen involucrados dentro de un entorno multimodal parcialmente compartido: el estudiante 1 a través de la exploración auditivo-táctil, y el estudiante 2 principalmente a través del seguimiento visual de la exploración de la gráfica de la estudiante 1 mediante las teclas de flecha. Estas estrategias indican el surgimiento del control exploratorio sobre el artefacto dentro del bucle percepción-acción compartido entre los estudiantes y el artefacto al interpretar la variación de la gráfica de la función, vinculando la posición espacial, la sonificación y la interpretación auditiva. En esta etapa, en lugar de un sistema de atención conjunta totalmente unificado, la interacción se describe mejor como una configuración perceptiva distribuida, en la que la coordinación se mantiene a través de modalidades perceptivas complementarias, pero aún no totalmente alineadas.

CONCLUSIONES Y DISCUSIÓN

Aunque la actividad se diseñó para la colaboración entre pares, la interacción entre los dos estudiantes fue inicialmente desequilibrada: el estudiante ciego asumió naturalmente un papel protagónico en la exploración de las funciones sonorizadas, mientras que su compañero mostró momentos de vacilación y menor participación. En estos momentos, el investigador intervino (episodio 2) introduciendo retroalimentación táctil como un nuevo canal sensorial para fomentar la interacción entre pares. Esto concuerda con el trabajo original de Shvarts y Abrahamson (2024), quienes reconocen que los sistemas de interacción de funciones auditivas suelen comenzar de forma inestable para luego coordinarse gradualmente entre los participantes. Estas intervenciones no constituyen fallas metodológicas, sino estrategias pedagógicas que sirven para redistribuir los roles de interacción, mediante la introducción de un nuevo canal sensorial (táctil), con el fin de estabilizar y fomentar la comprensión compartida entre los participantes. Desde esta perspectiva, la estrategia de andamiaje del investigador desempeña un papel crucial en la redistribución de los roles perceptivos e interaccionales dentro del sistema, permitiendo la aparición de nuevos canales sensoriales (por ejemplo, acoplamiento táctil-auditivo) que apoyan la reorganización de la actividad colaborativa. El análisis muestra cómo estos cambios favorecen gradualmente una transición desde la coordinación mediada por el investigador hacia una interacción más autónoma entre estudiantes, donde la interpretación perceptiva y la acción exploratoria se negocian conjuntamente.

Desde la perspectiva de la educación inclusiva, estos hallazgos resaltan la importancia de diseñar entornos de aprendizaje que permitan a estudiantes con perfiles perceptivos y cognitivos diversos interactuar con las mismas estructuras matemáticas a través de múltiples modalidades sensoriales. Herramientas digitales como *Audiofunctions*, que ofrecen representaciones multimodales de funciones matemáticas, no solo facilitan la accesibilidad, sino que amplían activamente las formas de participación disponibles en el entorno de aprendizaje, al mismo tiempo que facilitan el tránsito entre representaciones, vutales para la comprensión matemática (Romero, 2001). En este sentido, la inclusión no se limita a adaptar el contenido a las necesidades individuales, sino que implica la construcción de espacios compartidos de interacción donde diferentes formas de participación puedan coexistir e interactuar.

En el contexto educativo italiano, donde las aulas inclusivas en la educación ordinaria representan una característica estructural distintiva en comparación con los sistemas que dependen en mayor medida de la educación especial, estos enfoques ofrecen importantes oportunidades, pero también presentan desafíos. Si bien la presencia conjunta fomenta la interacción entre estudiantes con perfiles diversos, también requiere entornos pedagógicos y tecnológicos cuidadosamente diseñados, capaces de sustentar una participación equitativa y evitar la asimetría en la implicación. De este modo, la inclusión se convierte no solo en una condición institucional, sino también en un proceso dinámico de diseño interaccional.

Desde esta perspectiva, el enfoque del estudio va más allá de las interpretaciones tradicionales de los resultados del aprendizaje. Si bien muchos estudios en investigación en educación matemática (incluidos aquellos en contextos SEIEM) enfatizan principalmente el logro cognitivo y la comprensión conceptual, este trabajo destaca el papel de la participación perceptiva y la mediación

multisensorial como dimensiones fundamentales de la actividad matemática. Sin embargo, en las aulas inclusivas, el aprendizaje no puede separarse de la participación: antes de centrarse en los resultados cognitivos, es esencial garantizar que todos los estudiantes tengan oportunidades equitativas para participar, percibir e interactuar dentro del entorno matemático.

Finalmente, el estudio demuestra el potencial operativo del marco IFDS para analizar y apoyar la actividad matemática inclusiva. En particular, muestra cómo los sistemas de percepción-acción transitan dinámicamente desde la interacción investigador-estudiante hacia la coordinación entre estudiantes, y cómo estas transiciones pueden interpretarse sistemáticamente como parte de una organización funcional intercorporal más amplia. En este sentido, IFDS proporciona una poderosa herramienta analítica para comprender cómo emerge el significado matemático a través de procesos distribuidos, multimodales y socialmente contextualizados de percepción, acción e interacción en entornos educativos inclusivos.

Agradecimientos

Esta investigación se enmarca en el Programa "SONAIRGRAPH" Erasmus+ (Grant Agreement No. 2024-1-IT02-KA220-HED-000244481) y el "National Group for Algebraic and Geometric Structures, and their Applications" (GNSAGA—INdAM). El tercer autor es financiado por ANID Chile mediante el Fondecyt Regular 1261710.

Referencias

de Freitas, E. y Sinclair, N. (2013). New materialist ontologies in mathematics education: The body in/of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 83*(3), 453-470. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9465-z

Gibson, J. J. (1986). *The ecological approach to visual perception.* Routledge.

Kamath, S. S., Khan, O., Zeidieh, A. y Seo, J. (2025). *Sensing the shape of data: Non-visual exploration of statistical concepts in histograms with blind and low-vision learners*. ArXiv. https://doi.org/10.48550/arXiv.2509.14452

Lakoff, G. y Núñez, R. E. (2000). *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being*. Basic Books.

Maćkowski, M., Brzoza, P. y Spinczyk, D. (2023). An alternative method of audio-tactile presentation of graphical information in mathematics adapted to the needs of blind. *International Journal of Human-Computer Studies, 179*, 103122. https://doi.org/10.1016/j.ijhcs.2023.103122

Radford, L. y Roth, W.-M. (2011). Intercorporeality and ethical commitment: An activity perspective on classroom interaction. *Educational Studies in Mathematics, 77*(2-3), 227-245. https://doi.org/10.1007/s10649-010-9282-1

Romero, I. (2001). Representación y comprensión en pensamiento numérico. En L. C. Contreras, J. Carrillo, N. Climent y M. Sierra (Eds.), *Cuarto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 35-46). SEIEM.

Shoaib, M., Fitzpatrick, D. y Pitt, I. (2023). Assistive technology-based solutions in learning mathematics for visually impaired people: Exploring issues, challenges and opportunities. *Multimedia Tools and Applications, 82*, 46153-46184. https://doi.org/10.1007/s11042-023-17409-z

Shvarts, A. y Abrahamson, D. (2024). Intercorporeal functional dynamic system: A dual eye-tracking study of student-tutor collaboration. En L. D. Edwards y C. M. Krause (Eds.), *The body in mathematics: Theoretical and methodological lenses* (pp. 126-173). Brill. https://doi.org/10.1163/9789004717701_006

Turvey, M. T. (1977). Preliminaries to a theory of action with reference to vision. En R. Shaw y J. Bransford (Eds.), *Perceiving, acting, and knowing: Toward an ecological psychology* (Vol. 211-265). Erlbaum.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society*. Harvard University Press.

CONFLICTOS SEMIÓTICOS EN LA CONSTRUCCIÓN DE TABLAS DE FRECUENCIAS CON INTERVALOS DE CLASE

Semiotic conflicts in the building of frequency tables with class intervals

Pallauta, J. D., Estrada, A., Barbero, I. y Ricart, M.

Universidad de Lleida

Resumen

La capacidad de construir diferentes tipos de representaciones estadísticas constituye un aspecto relevante en la formación escolar. El objetivo de este trabajo es explorar la capacidad para construir una tabla de distribución de una variable cuantitativa con datos agrupados por estudiantes chilenos. Para ello, se propone a una muestra de 144 estudiantes chilenos de 7º curso de Educación Básica y 1º curso de Educación Media (12 a 16 años) una tarea adaptada de un libro de texto, valorada previamente por juicio de expertos. Por medio de un análisis de contenido se evalúan las respuestas y basados en la idea de conflicto semiótico cognitivo del Enfoque Ontosemiótico, se identificaron conflictos semióticos de tipo conceptual, procedimental y notacional, siendo los más recurrentes los ligados a la determinación de los intervalos de clase y el cálculo de frecuencias.

Palabras clave: *tablas estadísticas, educación secundaria, conflictos semióticos.*

Abstract

The ability to construct different types of statistical representations is an important aspect of school education. The objective of this study is to explore the ability of Chilean secondary school students to construct a distribution table for quantitative variable with grouped data. The study involved a sample of 144 Chilean students in the 7th grade of elementary school and the 1st grade of secondary school (aged 12 to 16) who were given a task adapted from a textbook, which had been previously evaluated by experts. The responses were evaluated through content analysis and, based on the idea of cognitive semiotic conflict in the Ontosemiotic Approach, conceptual, procedural, and notational semiotic conflicts were identified, with the most recurrent ones being those related to determining class intervals and calculating frequencies.

Keywords: statistical tables, secondary education, semiotic *conflicts.*

INTRODUCCIÓN

Las tablas estadísticas son utilizadas para la resolución de problemas y para la organización, comunicación y análisis de datos en contextos profesionales y científicos (Bartram et al., 2022). Aunque las tablas estadísticas pueden parecer una forma sencilla de organizar la información, su construcción es una tarea cognitiva compleja (Martí, 2009), porque requiere de procesos de ordenación, clasificación agrupación y del cálculo de frecuencias (Chick, 2004). Asimismo, demanda decisiones sobre la selección de la variable a representar y las frecuencias adecuadas según su escala, integrando de manera coherente estos elementos a la estructura de la tabla (Marti et al., 2011).

Existen diferentes tipos de tablas estadísticas, cuya estructura considera diversos objetos matemáticos, tanto de la estadística (p. ej. diferentes tipos de frecuencias) como del álgebra (p. ej. variables, sus valores, función), así como procesos de generalización, representación, interpretación y simbolización. La articulación de estos elementos demanda de distintos niveles de razonamiento algebraico según el tipo de tabla (Pallauta et al., 2023). Por ello, es importante proponer a los

Pallauta, J. D., Estrada, A., Barbero, I. y Ricart, M. (2026). Conflictos semióticos en la construcción de tablas de frecuencias con intervalos de clase. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (pp. 457-464). SEIEM.

estudiantes tareas que promuevan su construcción e interpretación, enfatizando en su diversidad y potencial para organizar los datos y la resolución de problemas (Martí, 2009).

Las directrices curriculares chilenas (MINEDUC, 2015), proponen el estudio de las tablas estadísticas en 7º y 8º curso de Educación Básica (12 a 13 años), mediante la construcción y análisis de las tablas de distribución de una variable cualitativa o cuantitativa (discreta y continua) con frecuencias absolutas y relativas, junto con el cálculo del valor mínimo, máximo y recorrido para describir distribuciones de datos cuantitativos. En 1º curso de Educación Media (13 a 14 años) se incorpora la tabla de doble entrada para el estudio de distribuciones bidimensionales. En 2º curso de Educación Media (14 a 15 años), la tabla estadística se utiliza para representar la distribución de una variable aleatoria discreta y apoyar la toma de decisiones a partir del análisis de frecuencias relativas.

Las tablas de distribución de una variable con datos agrupados en intervalos aparecen con frecuencia en los libros de texto chilenos (Pallauta et al., 2021b). Sin embargo, no se cuenta con antecedentes sobre los conflictos semióticos asociados a su construcción en el contexto chileno. En general, las investigaciones con estudiantes de secundaria se han centrado en la construcción de tablas de distribución de una variable con diferentes tipos de frecuencia o en tablas de doble entrada (p. ej. Castellaro et al., 2025; Pallauta et al., 2021a). Para contribuir en este ámbito, el objetivo de este trabajo es explorar la capacidad para construir una tabla de distribución de una variable con datos agrupados por estudiantes chilenos de 7° curso de Educación Básica (12 a 13 años) y 1° curso de Educación Media (14 a 15 años).

FUNDAMENTOS

Conflictos semióticos

En el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento e instrucción matemáticos (EOS), el significado de los objetos matemáticos surge a partir de las prácticas matemáticas realizadas en la resolución de situaciones problemas vinculadas con dichos objetos (Godino, 2024). En el EOS, la idea de función semiótica permite explicar cómo se establece una relación entre una expresión (objeto inicial o signo) y su contenido (objeto final o referente), mediante una regla de correspondencia que los vincula. Así, cualquier objeto matemático (concepto, propiedad, argumento, procedimiento, etc.) puede desempeñar el papel de expresión o de contenido dentro de una función semiótica, dependiendo del contexto de uso.

Los conflictos semióticos se producen cuando las interpretaciones que los estudiantes hacen de las expresiones matemáticas no concuerdan con lo que el profesor o la institución consideran correcto. Dichos conflictos se manifiestan en errores por parte de los estudiantes que no necesariamente responden a una falta de conocimiento, sino al hecho de establecer una correspondencia inadecuada entre los términos implicados en una función semiótica. Desde la perspectiva institucional, el estudiante establece, una relación incorrecta entre la expresión y su contenido.

Los conflictos semióticos pueden clasificarse como conceptuales, cuando la interpretación errónea afecta a un concepto matemático; procedimentales, cuando el malentendido se vincula con la aplicación de un procedimiento; y notacionales, cuando la confusión se relacionada con el lenguaje matemático, ya sea simbólico, de términos matemáticos, gráficos u otro lenguaje matemático (Godino, 2024). Diversos trabajos han identificado variados conflictos semióticos en estudiantes en la construcción e interpretación de tablas (p. ej. Pallauta et al., 2021a), así como conflictos potenciales presentes en libros de texto en tareas que involucran este tipo de representación (p. ej. Gea et al., 2015).

Antecedentes sobre la construcción de tablas estadísticas

En las investigaciones sobre la construcción de tablas estadísticas con estudiantes de secundaria, se han evidenciado diferentes tipos de errores y dificultades. Álvarez et al. (2020) analizan la

construcción e interpretación de tablas de distribución de una variable de 100 estudiantes colombianos de 10° y 11° grado (15 a 18 años). Los resultados evidenciaron que los principales errores en la construcción de tablas fueron establecer inadecuadamente los intervalos de clase para variables cuantitativas continuas, confundir de los diferentes tipos de frecuencias, así como cometer errores aritméticos en el cálculo de las frecuencias.

En Pallauta et al. (2021a) se analiza la capacidad de construcción de tablas estadísticas a partir de información proporcionada a través de gráficos (pictograma y barras dobles) de 277 estudiantes españoles de 1° y 3° curso de Educación Secundaria (14 a 16 años). La mayoría de los estudiantes construyeron correctamente la tabla de frecuencias a partir del pictograma, pero solo la mitad lo hizo a partir del gráfico de barras dobles. Los principales conflictos semióticos fueron la inadecuada interpretación del icono del pictograma y el cálculo incorrecto de frecuencias marginales y totales en las tablas de doble entrada.

Entre los estudios sobre tablas con datos agrupados en intervalos, en el contexto español, Martí et al. (2011) analizan la construcción de una tabla de doble entrada por 153 estudiantes de Educación Primaria y Secundaria (11 a 15 años). La tarea consistía en organizar datos de personas (nombre, apellido, edad y estatura) cruzando una variable cualitativa (sexo) y una cuantitativa continua (estatura). Los resultados evidenciaron una mejora a medida que avanzaba el curso, mostrando mejores resultados los estudiantes de secundaria (58%) que los de primaria (26%), aunque esta diferencia no fue estadísticamente significativa. Las principales dificultades fueron: definir y diferenciar las variables, calcular frecuencias, junto con la adecuada organización y presentación de los intervalos de clase. Este estudio fue replicado por Castellaro et al. (2025) con 102 estudiantes argentinos de 6° y 7° grado (11 a 13 años). Se comparó el desempeño del trabajo individual y en parejas. Los resultados no mostraron una mejora significativa, evidenciando la dificultad de construir este tipo de representaciones.

Los antecedentes plantean que los estudiantes presentan dificultades y variados tipos de conflictos en la construcción de tablas estadísticas de una variable o de doble entrada con datos agrupados en intervalos, particularmente cuando no se dispone de una estructura que facilite su elaboración.

METODOLOGÍA

Participantes, contexto y tarea

La muestra fue intencional y se compuso de 144 estudiantes chilenos procedentes de cuatro centros educativos ubicados en distintas provincias del país: uno público, dos concertados y uno privado. Del total, 83 cursaban 7º curso de Educación Básica (EB) (12 a 13 años) y 61 lo hacían en 1º curso de Educación Media (EM) (14 a 15 años). Los participantes habían trabajado diferentes tipos de tareas en torno a tablas estadísticas en los cursos anteriores de acuerdo a MINEDUC (2015).

Los participantes resolvieron individualmente una tarea (Figura 1) adaptada de un libro de texto chileno de 8º EB (Catalán et al., 2016), y validada por expertos. La tarea consiste en completar una tabla de distribución de una variable cuantitativa con datos agrupados en cuatro intervalos. A los estudiantes de 7° curso se les solicitó determinar las frecuencias absolutas, y a los de 1º EM se les pidió, además, calcular las frecuencias relativas, dado que, conforme a las directrices curriculares chilenas (MINEDUC, 2015), estos contenidos habían sido abordados en el curso anterior.

Análisis de datos

Se realizó un estudio de metodología mixta. Por una parte se realiza un estudio cualitativo a partir de un análisis de contenido (Neuendorf, 2016) para evaluar las respuestas, clasificándolas en tabla correcta, parcialmente correcta o incorrecta. Asimismo, se identifican los conflictos semióticos cognitivos manifestados por los participantes en la construcción de la tabla, identificados previamente en los antecedentes y categorizados, siguiendo a Godino (2024), como procedimentales, conceptuales

y notacionales. Para asegurar la fiabilidad de la codificación, el 20% de las respuestas fueron analizadas, de manera independiente, por otro investigador. Las discrepancias detectadas se sometieron a discusión entre los autores hasta alcanzar un acuerdo. Por otra parte, se realiza un análisis cuantitativo, a través del cálculo del índice de dificultad y la desviación típica de la tarea. El índice de dificultad se calculó asignando una puntuación de 1 a las respuestas correctas o parcialmente correctas y de 0 en los demás casos.

Figura 1

Tarea propuesta a los estudiantes

Se presenta el registro de precipitaciones de un pluviómetro durante 20 días. Elabora una tabla de frecuencias para la información dada, considerando 4 intervalos.

Precipitaciones (mm)				
9	10	11	10	12
15	16	16	16	16
14	13	13	14	13
12	13	12	12	14

Precipitaciones (mm)	Frecuencia absoluta	Frecuencia Relativa*
Total		

RESULTADOS

Los resultados que se presentan a continuación incluyen ejemplos de respuestas de los estudiantes, codificados como EX donde X corresponde al número de participante. En primer lugar, se presenta la evaluación de las tablas, el índice de dificultad de la tarea y su desviación estándar, seguido por la identificación los diferentes conflictos semióticos cognitivos manifestados por los estudiantes.

Figura 2

Ejemplos de tablas parcialmente correctas e incorrectas

Precipitaciones (mm)	Frecuencia absoluta	Frecuencia Relativa
9-10	2	2/19
11-12	5	5/19
13-14	7	7/19
15-16	5	5/19
Total	19	1

Tabla parcialmente correcta E77

Precipitaciones (mm)	Frecuencia absoluta
9	1
12	4
13	4
16	
Total	20

Tabla incorrecta E25

Evaluación de la construcción de tablas

Tablas correctas: Se completa correctamente las celdas correspondientes a los datos agrupados, de la variable, considerando una amplitud 2, junto con los valores de las frecuencias absolutas y relativas.

Tablas parcialmente correctas: En esta categoría los alumnos completaron la mayoría de las celdas con valores correctos, pero se presentaron algunos errores de cálculo o dejaron celdas en blanco. Por ejemplo, el estudiante E77 (Figura 2, izquierda), calculó incorrectamente uno de los valores de las frecuencias absolutas, lo que repercutió en todos los valores de las frecuencias relativas. No obstante, su respuesta evidencia conocimiento sobre estos tipos de frecuencias.

Tabla incorrecta: Se incluyen en esta categoría las respuestas cuyos valores no se ajustan a los intervalos ni a las frecuencias solicitadas. Este tipo de tablas evidencian conflictos en la determinación de los intervalos de clase y en el cálculo de sus respectivas frecuencias (Figura 2, derecha).

En la Tabla 1 se presentan los porcentajes de la evaluación de la construcción de tablas, considerando que los alumnos de 7º EB no debían completar la columna con los valores de las frecuencias relativas. Se observa que un porcentaje similar de estudiantes de ambos cursos dejó la tarea sin contestar. No obstante, el mayor porcentaje de respuestas correctas y parcialmente correctas se concentra en 1º EM. En contraste, más de la mitad de los estudiantes de 7° EB construyó la tabla de manera incorrecta.

Tabla 1

Porcentaje de tablas según categoría y curso

Respuesta	*7º EB* *N = 83*	*1º EM* *N = 61*
Correcta	8,4	24,6
Parcialmente correcta	15,7	37,7
Incorrecta	51,8	11,5
No responde	24,1	26,2

Por otra parte, los valores del índice de dificultad de la tarea y su desviación típica indicaron que la tarea resultó muy difícil para los estudiantes de 7° EB (Media = 0,25; DT = 0,43), a pesar de que únicamente debían establecer los intervalos de clase junto con completar sus correspondientes frecuencias absolutas, mientras que fue menos difícil para los estudiantes de 1° EM (Media = 0,62; DT = 0,49). El análisis de comparación de las medias de aciertos por curso, evidenció una diferencia estadísticamente significativa (t=-4,76; p=0,002).

Conflictos semióticos en la construcción de tablas

En las tablas parcialmente correctas e incorrectas se identificaron diferentes tipos de conflictos.

Conflictos procedimentales

P1. Determinar intervalos de clase. Corresponde a las tablas en que los intervalos son identificados incorrectamente, como E25 (Figura 2, derecha), o en las que esta columna se deja en blanco, como ocurre en la respuesta del estudiante E55 (Figura 3, derecha). Este tipo de conflicto fue identificado previamente en diferentes estudios (Álvarez et al., 2020; Castellaro et al., 2025; Martí et al., 2011).

P2. Cálculo de frecuencias. Este conflicto fue identificado en trabajos previos (Álvarez et al., 2020; Pallauta et al., 2021a) y consiste en el cálculo incorrecto de las frecuencias absolutas (Figura 2, izquierda) o de las frecuencias relativas, como se observa en la respuesta de E55 (Figura 3, derecha) quien en lugar de dividir por el total lo hace por 10.

P3. Invertir numerador y denominador. También identificado previamente por Pallauta et al. (2021a), corresponde a las respuestas que evidencian una confusión con la definición de la frecuencia relativa, específicamente al intercambiar el numerador y el denominador en su cálculo, como se aprecia en la respuesta de E86 (Figura 3, izquierda).

Conflictos conceptuales

C1. Confundir frecuencias absolutas y relativas. Consiste en registrar frecuencias relativas en lugar de absolutas o viceversa. Este conflicto ha sido identificado previamente por Pallauta et al. (2021a).

Figura 3

Ejemplos de conflictos semióticos cognitivos

Precipitaciones (mm)	Frecuencia absoluta	Frecuencia Relativa
Entre 9 y 10	3	20/3
Entre 11 y 12	5	20/5
Entre 13 y 14	7	20/7
Entre 15 y 16	5	20/5
Total	20	

Tabla parcialmente correcta E86

Precipitaciones (mm)	Frecuencia absoluta	Frecuencia Relativa
	4	0,4
	4	0,4
	7	0,7
	5	0,5
Total	20	

Tabla incorrecta E55

Conflictos notacionales

N1. Presentación de los intervalos. Este conflicto no ha sido reportado previamente, y corresponden a las tablas en las que los intervalos de clase se registran de manera inapropiada. Por ejemplo, el estudiante E86 (Figura 3, izquierda) la forma en que presenta los intervalos sugiere que no se considerarían los extremos en el cálculo de las frecuencias absolutas. No obstante, se evidencia una comprensión del tratamiento de datos agrupados en intervalos.

Tabla 2

Porcentaje de conflictos semióticos identificados en la construcción de la tabla según curso

	7º EB *N = 83*	*1º EM* *N = 61*
Procedimentales		
P1. Determinar intervalos de clase	54,4	9,1
P2. Cálculo de frecuencias	41,7	3,3
P3. Invertir numerador y denominador		11,5
Conceptuales		
C1. Confundir frecuencias absolutas y relativas		19,3
Notacionales		
N1. Presentación de los intervalos	1,0	18,2

En la Tabla 2 se presentan los porcentajes de los conflictos semióticos identificados, calculados en función del total de participantes por curso. Cabe destacar que, en una misma tabla se podría presentar más de un tipo de conflicto semiótico. El conflicto más frecuente, tanto a nivel general como en los estudiantes de 7°EB, corresponde a la determinación de los intervalos de clase (P1). Le sigue el conflicto relacionado al cálculo de las frecuencias (P2), también con una mayor incidencia en este curso. Asimismo, en 1°EM se observa una proporción importante de estudiantes que presenta el conflicto conceptual asociado a la confusión entre frecuencias absolutas y relativas (C1), así como el conflicto notacional vinculado a la presentación de los intervalos de clase (N1). El conflicto de invertir numerador y denominador en el cálculo de las frecuencias relativas (P3) se presenta en una proporción destacada de estudiantes de 1°EM.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Este trabajo tuvo como objetivo explorar la capacidad para construir una tabla de distribución de una variable con datos agrupados por estudiantes chilenos de 7° EB y 1° EM. Dada la carencia de investigaciones centradas en este contexto, este trabajo aporta nuevos antecedentes sobre la complejidad en la construcción de este tipo de representación y permite caracterizar los conflictos semióticos cognitivos que pueden surgir en este proceso con estudiantes de edades similares.

A pesar de que las tareas que involucran tablas con datos agrupados en intervalos son frecuentes en los libros de texto (Pallauta et al., 2021b), los resultados del índice de dificultad evidenciaron que, en general, la construcción de este tipo de representación fue difícil, incluso cuando se proporciona la estructura de la tabla para facilitar la resolución. No obstante, en 1° EM se obtuvieron mejores resultados, coincidiendo con Martí et al. (2011) quienes reportaron una mejora progresiva conforme se avanza de curso. Esta dificultad podría explicarse por la mayor complejidad de este tipo de tablas (Pallauta et al., 2021b), que demanda la comprensión de diversos objetos matemáticos (estadísticos y algebraicos) y el desarrollo de un mayor nivel de razonamiento algebraico (Pallauta et al., 2023).

En relación con los conflictos semióticos cognitivos identificados en la construcción de tablas, gran parte de los estudiantes no logró identificar correctamente los intervalos de clase de la variable, conflicto identificado en trabajos anteriores (Álvarez et al., 2020; Castellaro et al., 2025; Martí et al., 2011). Otro conflicto, también identificado previamente (Álvarez et al., 2020; Pallauta et al., 2021a), con una alta presencia fue el cálculo de frecuencias relativas. Los conflictos como invertir numerador y denominador o la confusión entre las frecuencias absolutas y relativas, identificados por Pallauta et al. (2021a), se presentaron en un porcentaje más reducido. Asimismo, se identifica un nuevo conflicto notacional referido a la presentación de los intervalos, el cual aparece especialmente en 1° EM.

En conjunto, estos resultados evidencian un conocimiento limitado, especialmente entre los estudiantes de 7°EB, sobre la estructura y el uso de este tipo de tablas estadísticas, a pesar de que constituyen un recurso ampliamente utilizado para organizar y comunicar información en diversos contextos de la vida cotidiana (Martí, 2009). Esta situación es relevante, dado que el trabajo con tablas de distribución con datos agrupados en intervalos adquiere especial importancia como una etapa inicial en el estudio de variables aleatorias continuas, ya que la interpretación de intervalos favorece la comprensión progresiva de este tipo de variables.

Por todo ello, una implicación de este trabajo deriva en la necesidad de proponer a los estudiantes tareas con una mayor demanda cognitiva que promuevan la construcción de representaciones estadísticas a partir de listados de datos. Este tipo de tareas contribuye al desarrollo de la capacidad de identificar las variables a representar y de seleccionar la forma más adecuada para organizar y comunicar información. Dichas tareas, podrían incluir la recolección y organización de diferentes tipos de datos y variables por parte de los propios estudiantes (Bargagliotti et al., 2020).

Finalmente, se reconocen algunas limitaciones del estudio, particularmente, el uso de una tarea centrada en completar para explorar la construcción de tablas de distribución de una variable con datos agrupados en intervalos. En este sentido, se abre una línea de investigación orientada al análisis de las dificultades que presentan los estudiantes ante otras tareas de construcción de tablas. En consecuencia, se pone de manifiesto la necesidad de fortalecer la formación de los profesores, de modo que dispongan de los conocimientos necesarios para diseñar y orientar actividades basadas en información proveniente del contexto cotidiano de los estudiantes (Álvarez-Arroyo et al., 2025).

Agradecimientos

Proyecto PID2022-139748NB-100 financiado por MICIU/AEI/10.13039/501100011033/ y por FEDER, UE.

Referencias

Álvarez-Arroyo, R., Batanero, C. y Gea, M. M. (2025). Conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores al crear problemas de probabilidad basados en noticias. *Avances de investigación en educación matemática, 28*, 191-209. https://doi.org/10.35763/aiem28.7429

Álvarez, I., Guerrero, Y. y Torres, Y. D. T. (2020). Taxonomía de errores y dificultades en la construcción e interpretación de tablas de frecuencia. *Zetetike, 28*, e020012-e020012. https://doi.org/10.20396/zet.v28i0.8656553

Bargagliotti, A., Franklin, C., Arnold, P., Gould, R., Johnson, S., Perez, L. y Spangler, D. (2020). *Pre-K-12 guidelines for assessment and instruction in statistics education II (GAISE II) A Framework for statistics and data science education*. American Statistical Association and National Council of Teachers of Mathematics.

Bartram, L., Correll, M. y Tory, M. (2022). Untidy data: The unreasonable effectiveness of tables. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, 28*(1), 686-696. https://doi.org/10.1109/TVCG.2021.3114830

Castellaro, M., Peralta, N., Curcio, J. y Tuzinkievicz, M. (2025). Representación individual y diádica de datos cuantitativos: estudiantes de sexto y séptimo grado construyendo una tabla de contingencia. *Educación Matemática, 37*(2), 43-78. https://doi.org/10.24844/em3702.02

Catalán, D., Pérez, B., Prieto, C. y Rupin, P. (2016). *Texto del estudiante Matemática 8º básico*. Ediciones SM.

Chick, H. (2004). Tools for transnumeration: Early stages in the art of data representation. En I. Putt, R. Faragher y M. McLean (Eds.), Mathematics Education for the Third Millennium: Towards 2010, *Proceedings of the Twenty-Seventh Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 167-174). Merga.

Gea, M. M., López-Martín, M. M. y Roa, R. (2015). Conflictos semióticos sobre la correlación y regresión en los libros de texto de Bachillerato. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 8*, 29–49. https://doi.org/10.35763/aiem.v1i8.113

Godino, J. (2024). *Enfoque ontosemiótico en educación matemática. Fundamentos, herramientas y aplicaciones*. McGraw Hill-Aula Magna.

Martí, E. (2009). Tables as cognitive tools in primary education. En C. Andersen, N. Scheuer, M. P. Pérez Echeverría y E. Teubal (Eds.), *Representational systems and practices as learning tools* (pp. 133-148). Sense. https://doi.org/10.1163/9789087905286

Martí, E., Garcia-Mila, M., Gabucio, F. y Konstantinidou, K. (2011). The construction of a double entry table: a study of primary and secondary school students' difficulties. *European Journal of Psychology of Education, 26*(2), 215-234. https://doi.org/10.1007/s10212-010-0046-1

MINEDUC. (2015). *Bases curriculares 7º básico a 2° medio*. Unidad de Currículum y Evaluación.

Neuendorf, K. (2016). *The content analysis guidebook*. Sage.

Pallauta, J. D., Arteaga, P. y Garzón-Guerrero, J. A. (2021a). Secondary school students' construction and interpretation of statistical tables. *Mathematics, 9*(24), 3197-3213. https://doi.org/10.3390/math9243197

Pallauta, J. D, Gea, MM, Batanero, C. y Arteaga, P. (2021b). Complejidad semiótica de tablas estadísticas y su distribución en textos chilenos de educación básica. En Diago, P. D., Yáñez, D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 481 – 488). SEIEM

Pallauta, J., Gea, M., Batanero, C. y Arteaga, P. (2023). Algebraization levels of activities linked to statistical tables in Spanish secondary textbooks. En G. Kaiser y B. Sriraman (Eds.), *Data and statistical thinking: An international perspective* (pp. 317-333). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-29459-4_23

ECONOMÍA Y FINANZAS CON JUSTICIA SOCIAL DESDE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA: CREENCIAS DOCENTES

Economics and finance for social justice in mathematics education: teachers' beliefs

Parada-Rico, S. E.[a], Conde, L. A.[b], Suavita-Ramírez, M. A.[b] y Figueroa-Suárez, L.[c]

[a]Universidad Industrial de Santander, [b]Universidad Complutense de Madrid, [c]Universidad de Malmö

Resumen

El estudio examina las creencias de profesores de Matemáticas sobre la Educación Económica y Financiera (EdEF) y su relación con la justicia social. Con un enfoque cualitativo interpretativo, se hace un análisis secundario de datos recogidos mediante una encuesta abierta que fue realizada a docentes de instituciones públicas en Colombia. Primero, un análisis temático caracterizó creencias sobre el valor formativo de la EdEF, su aporte al aprendizaje matemático y su conexión con situaciones cotidianas. Luego, estas creencias se interpretaron desde las dimensiones de redistribución, reconocimiento y representación. Los resultados muestran una valoración positiva centrada en la toma de decisiones individuales y la contextualización del aprendizaje matemático, mientras que la dimensión de representación aparece menos desarrollada en relación con la deliberación y la comprensión de las condiciones económicas que enmarcan dichas decisiones.

Palabras clave: *creencias docentes, educación económica y financiera, educación matemática, educación pública, justicia social.*

Abstract

The study examines mathematics teachers' beliefs about Economic and Financial Education (EdEF) and its relationship with social justice. Using an interpretive qualitative approach, it conducts a secondary analysis of data collected through an open-ended survey administered to teachers from public institutions in Colombia. First, a thematic analysis characterised beliefs about the formative value of EdEF, its contribution to mathematics learning, and its connection with everyday situations. Then, these beliefs were interpreted through the dimensions of redistribution, recognition, and representation. The results show a positive appraisal centred on individual decision-making and the contextualization of mathematics learning, while the dimension of representation appears less developed in relation to deliberation and the understanding of the economic conditions framing such decisions.

Keywords: economic and financial education, mathematics education, public education, social justice, teachers' beliefs.

INTRODUCCIÓN

En la escuela pública, hablar de Educación Económica y Financiera (EdEF) no es añadir un tema coyuntural al currículo: es tomar posición sobre qué saberes se consideran necesarios para vivir en sociedades atravesadas por las desigualdades. En contextos como el colombiano, donde amplios sectores de la población enfrentan precariedad laboral, endeudamiento y exclusión financiera, la EdEF puede entenderse como una cuestión de justicia social: no solo por su promesa de contribuir a la formación de ciudadanos críticos y hábiles en la toma de decisiones, sino por su potencial para ampliar la comprensión de las condiciones económicas que estructuran la vida cotidiana. En

Parada-Rico, S. E., Conde, L. A., Suavita-Ramírez, M. A. y Figueroa-Suárez, L. (2026). Economía y finanzas con justicia social desde la educación matemática: creencias docentes. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (pp. 465-472). SEIEM.

Educación Matemática, su incorporación suele darse a través de contenidos como porcentajes, funciones o ecuaciones; esta entrada tiene un valor didáctico, pero también delimita su sentido formativo, pues puede orientarse a la aplicación técnica en contextos "reales" o abrir espacio a una lectura más crítica sobre las prácticas económicas y sus efectos.

La relación entre Educación Matemática y la Educación Económica y financiera constituye un campo relevante para la investigación interdisciplinar, pues permite analizar cómo los conocimientos matemáticos participan en la comprensión de fenómenos sociales como el endeudamiento, el consumo, el ahorro, el crédito o la desigualdad económica. Diversos trabajos han mostrado que los contextos económicos y financieros pueden favorecer la construcción de significados matemáticos, especialmente en torno a porcentajes, proporcionalidad, interés simple y compuesto, funciones y análisis de datos. Sin embargo, su potencial no se reduce a la contextualización de contenidos, sino que también puede abrir espacios para problematizar las condiciones sociales que enmarcan las decisiones económicas de las personas. Desde esta perspectiva, estudiar las creencias docentes sobre la EdEF resulta relevante porque permite comprender si su incorporación al aula se concibe principalmente como aplicación instrumental de las Matemáticas o como oportunidad para una formación ciudadana más amplia.

En este escenario, las creencias del profesorado adquieren un papel central. No se trata de opiniones aisladas, sino de marcos de interpretación que orientan decisiones sobre qué situaciones se incorporan al aula, cómo se abordan y con qué finalidad. En el marco de la comunicación que quiere presentarse en las XXIX SEIEM se retoman resultados de una investigación base y se reinterpretan desde una perspectiva de justicia social para responder a la pregunta: ¿qué implicaciones para la justicia social emergen de las creencias que asumen profesores de Matemáticas sobre la Educación Económica y Financiera?

ASPECTOS TEÓRICOS Y CONCEPTUALES

Este estudio articula tres núcleos conceptuales: i) las creencias docentes en Educación Matemática, ii) la EdEF en el contexto escolar y, iii) la justicia social como horizonte interpretativo.

Creencias docentes: orientación de la acción y sentido formativo

En la investigación en Educación Matemática, las creencias del profesorado se han consolidado como categoría relevante para comprender decisiones curriculares y didácticas. En el marco de la SEIEM, distintos trabajos han mostrado su influencia en la manera en que los profesores interpretan contenidos, seleccionan tareas y orientan la actividad de aula (Diego-Mantecón et al., 2016); asimismo, estudios recientes confirman su centralidad para analizar el desarrollo profesional frente a problemáticas específicas (Espina et al., 2024).

Desde una perspectiva filosófica, Villoro (1996) entiende la creencia como un estado disposicional vinculado con la acción: creer implica atribuir valor de verdad a una proposición y actuar en coherencia con ella. Esta definición permite reconocer que las creencias no se limitan a lo explícitamente declarado, sino que también pueden inferirse de posicionamientos recurrentes y de elecciones consideradas "razonables" en la práctica. En el ámbito educativo, esta perspectiva evita confundir creencias con conocimientos formales y permite analizarlas como estructuras que orientan decisiones (Martínez, 2013). En coherencia con esta noción, y dado el instrumento del estudio base (cuestionario abierto), en este trabajo se consideran tanto creencias profesadas (explícitas) como creencias implícitas/inferidas (derivadas de valoraciones y regularidades discursivas), tal como proponen Hernández et al. (2020).

Esta distinción es especialmente relevante cuando se estudian temas que suelen estar rodeados de consensos superficiales (formar para la vida, tomar mejores decisiones) que pueden ocultar supuestos no examinados sobre responsabilidad individual, neutralidad del sistema financiero o desigualdad estructural.

Educación Económica y Financiera en Educación Matemática

La EdEF ha sido promovida internacionalmente como estrategia para fortalecer la toma de decisiones informadas y la comprensión de productos y servicios financieros (OCDE, 2005, 2014). En el ámbito escolar, su incorporación suele articularse con contenidos matemáticos como porcentajes, interés simple y compuesto, funciones o análisis de datos, bajo el supuesto de que estos contextos favorecen aprendizajes significativos y conectan la matemática con la vida cotidiana (Liern, 2013; Savard y Cavalcante, 2021).

Sin embargo, esta formación requiere una concepción de ciudadanía económica que puede orientarse hacia la formación de sujetos que administren mejor sus recursos individuales o hacia la formación de ciudadanos capaces de analizar críticamente las dinámicas económicas que producen desigualdad (Méndez-Núñez y Murillo, 2017; Echeita, 2019). La diferencia no está en el contenido matemático trabajado, sino en el enfoque de la actividad matemática que posibilite una comprensión más amplia de la economía como fenómeno social y político.

Justicia social como lente interpretativa

Para reinterpretar las creencias docentes sobre EdEF, se adopta una perspectiva de justicia social que articula tres dimensiones expuestas por Fraser (2008), ampliadas por Murillo y Hernández-Castilla (2011), que asumimos para este estudio como sigue:

a) La redistribución se refiere al acceso equitativo a recursos y saberes socialmente valiosos. En el ámbito educativo, implica preguntarse qué conocimientos se garantizan efectivamente a todo el estudiantado y con qué profundidad se trabajan. En el caso de la EdEF, la cuestión no es solo su presencia en el currículo, sino el tipo de herramientas que se ofrecen para comprender y decidir en escenarios económicos reales.

b) El reconocimiento alude a la legitimación de experiencias y realidades diversas. La Educación Matemática supone interrogar si las experiencias económicas del estudiantado (incluidas situaciones de precariedad, endeudamiento o exclusión financiera) son tratadas como contenido legítimo de análisis o si permanecen en el plano anecdótico (Murillo y Hernández-Castilla, 2011).

c) La representación remite a quién define prioridades y enfoques curriculares. En el caso de la EdEF, esta dimensión es especialmente relevante cuando su institucionalización se acompaña de discursos técnicos que pueden presentarse como neutrales, desplazando el debate pedagógico sobre fines formativos y ciudadanía económica (Fraser, 2008).

En consecuencia, la incorporación de la EdEF en Educación Matemática puede preguntarse: ¿qué saberes económicos se redistribuyen y con qué alcance? ¿qué experiencias económicas del estudiantado se reconocen como legítimas?, y ¿quién define esta formación?

ASPECTOS METODOLÓGICOS

La investigación se desarrolla como un análisis secundario cualitativo e interpretativo, que entiende las creencias como construcciones de sentido que orientan la acción docente. Retoma los resultados de León y Suaterna (2025) sobre creencias de profesores de Matemáticas frente a la incorporación del contexto financiero en el aula. El análisis secundario se asume como una relectura sistemática de datos ya producidos para generar nuevas interpretaciones (Heaton, 2004); en este caso, las categorías del estudio base se reinterpretan desde la justicia social.

Para responder a la pregunta de investigación, se planteó como objetivo general analizar las implicaciones para la justicia social que emergen de las creencias de profesores de Matemáticas sobre la Educación Económica y Financiera en el contexto escolar. De manera específica, se busca: (1) caracterizar las creencias docentes sobre el sentido formativo de la EdEF en la clase de Matemáticas;

(2) interpretar dichas creencias desde las dimensiones de redistribución y reconocimiento, identificando qué competencias económicas y financieras se consideran relevantes y qué experiencias del estudiantado se legitiman en el aula; y (3) analizar sus implicaciones en términos de representación, atendiendo a las posibilidades de participación crítica, deliberación y problematización de las condiciones económicas que afectan la vida cotidiana.

Estudio base

El estudio base adoptó un enfoque cualitativo en el que participaron siete profesores de Matemáticas en ejercicio, vinculados a instituciones educativas públicas del departamento de Santander (Colombia). La selección de los profesores fue intencional, su participación fue voluntaria y se les garantizó anonimato y confidencialidad en el tratamiento de la información.

La recolección se realizó mediante un cuestionario aplicado por WhatsApp, combinando respuestas escritas y mensajes de audio enviados individualmente; los audios fueron transcritos de forma literal e integrados en un corpus textual único. Cada intervención fue codificada por participante y por pregunta, favoreciendo la trazabilidad del análisis.

El instrumento fue diseñado para identificar creencias profesadas y elementos que permitieran inferir creencias implícitas. A continuación, se muestra ejemplos de preguntas para cada tipo de creencia.

- Preguntas creencias profesadas: ¿Qué importancia considera que tiene la Educación Financiera en la formación de sus estudiantes? ¿Qué aporta el uso de situaciones financieras al aprendizaje de las matemáticas?
- Preguntas creencias inferidas: Describa una situación de aula en la que haya utilizado un contexto financiero. ¿Cómo decidiría abordar un problema relacionado con crédito o interés compuesto en clase?

El análisis del estudio base produjo tres categorías: (i) importancia formativa de la EdEF; (ii) contribución al aprendizaje matemático; y (iii) relación entre Matemáticas y contexto económico/financiero. Estas categorías constituyen el punto de partida del presente trabajo.

Fases del proceso analítico en esta comunicación

Fase 1. Recuperación del material categorizado: Se identificaron y seleccionaron los fragmentos del estudio base directamente vinculados con las tres categorías de análisis temático reportadas. En esta fase se cuidó que cada categoría contara con al menos una evidencia textual claramente atribuible a creencias docentes (citas o formulaciones reportadas en tablas/resultados del estudio base).

Fase 2. Caracterización de creencias del estudio base: A partir del material seleccionado, se distinguieron algunas creencias profesadas y creencias inferidas, construidas analíticamente a partir de las decisiones didácticas y justificaciones descritas.

Fase 3. Relectura desde la justicia social: Las categorías del estudio base fueron reinterpretadas a partir de las dimensiones de redistribución, reconocimiento y representación. Esta relectura permitió reorganizar el material en tres configuraciones analíticas: 1) EdEF como herramienta para decidir mejor (redistribución); 2) EdEF que legitima el contexto sin problematizarlo (reconocimiento); y 3) EdEF como posibilidad de participación y comprensión de lo económico desde la dimensión de representación.

Fase 4. Análisis de implicaciones formativas: Finalmente, se analizaron las implicaciones de dichas configuraciones en términos de representación, entendida como posibilidad de participación del estudiantado en la comprensión, discusión y toma de decisiones frente a situaciones económicas cotidianas.

Al tratarse de un análisis secundario, los resultados dependen del corpus reportado por León y Suaterna (2025). La contribución principal radica en la reinterpretación desde justicia social y en la explicitación de sus implicaciones para la formación del profesorado en Educación Matemática.

LA EdEF QUE SE CONFIGURA EN LAS CREENCIAS DOCENTES

En este apartado se reportan los resultados del estudio siguiendo la secuencia analítica descrita en el apartado anterior.

Creencias docentes sobre el sentido formativo de la EdEF

Esta sección corresponde al primer nivel interpretativo y se fundamenta en el análisis temático desarrollado por León y Suaterna (2025).

En el estudio base, los docentes expresan que la EdEF "ayuda a los estudiantes a tomar buenas decisiones económicas". Esta creencia profesada posiciona estos saberes como formación para la vida. Desde la interpretación analítica, se infiere que la finalidad atribuida a la EdEF se centra en el desarrollo de capacidades individuales para gestionar situaciones económicas cotidianas (ahorro, consumo, crédito). En términos de teoría de creencias docentes, esta formulación evidencia una concepción normativa del aprendizaje vinculada con la preparación para la vida práctica. Como señalan Pajares (1992) y Thompson (1992), las creencias influyen en la definición de qué se considera valioso enseñar y con qué propósito. Aquí, la formación económica y financiera adquiere sentido como herramienta para la toma de decisiones responsables.

Los docentes también sostienen que introducir EdEF "contribuye significativamente al desarrollo del pensamiento matemático". Esta creencia profesada legitima el contexto financiero como recurso didáctico. La interpretación inferida muestra que estos saberes se conciben como medio para fortalecer procesos matemáticos, particularmente aquellos relacionados con proporcionalidad, porcentajes e interés compuesto. En Educación Matemática, el uso de contextos significativos ha sido defendido como estrategia para dotar de sentido a los conceptos (Boaler, 1993). Sin embargo, el hallazgo muestra que la EdEF es valorada por su capacidad de mejorar el rendimiento matemático, más que por su potencial crítico.

Los docentes afirman que introducir conceptos financieros desde matemáticas "ayuda a los estudiantes a ver la utilidad de las matemáticas para resolver problemas financieros". Esta creencia revela una relación instrumental: las matemáticas funcionan como herramienta para operar eficazmente en situaciones económicas. Desde la interpretación analítica, se observa que la utilidad constituye el eje articulador entre ambas áreas.

Redistribución y reconocimiento en las creencias sobre la EdEF

En esta sección se desarrolla el segundo nivel interpretativo, en el que las categorías anteriores se reorganizan a partir de las dimensiones propuestas por Fraser (2008).

Las creencias sobre la importancia formativa de la EdEF la sitúan como acceso a saber financiero para decidir mejor. En clave de redistribución, esto puede ampliar recursos simbólicos desigualmente distribuidos, reducir brechas de información y fortalecer la capacidad del estudiantado para tomar decisiones fundamentadas. Sin embargo, se limita a distribuir conocimientos más que a transformar condiciones estructurales; por ello, la justicia social exige también reconocimiento y representación (Fraser, 2008).

Las categorías relacionadas con el aprendizaje matemático y la utilidad muestran que el contexto financiero es reconocido como significativo dentro del aula. Desde la dimensión de reconocimiento, este hallazgo implica valorar experiencias económicas cercanas a los estudiantes. El contexto deja de ser abstracto y se incorpora como referente legítimo. Sin embargo, el reconocimiento opera en clave pedagógica y no crítica. El contexto financiero se legitima porque favorece el aprendizaje, no

necesariamente porque permita discutir desigualdades económicas, acceso diferencial al crédito o prácticas de exclusión financiera.

Representación: participación y comprensión de lo económico desde la EdEF

El análisis anterior permite reconocer que la dimensión de representación no está ausente en las creencias docentes, aunque aparece configurada de manera incipiente. Cuando los profesores atribuyen valor a la EdEF porque ayuda a tomar decisiones económicas, resolver problemas financieros y reconocer la utilidad de las Matemáticas en situaciones cotidianas, están posicionando al estudiantado como sujeto capaz de actuar frente a situaciones económicas que forman parte de su vida social. En este sentido, la EdEF no solo redistribuye saberes financieros ni reconoce contextos cercanos, sino que también puede favorecer formas iniciales de participación, entendidas como la posibilidad de comprender información, valorar alternativas y tomar decisiones fundamentadas.

No obstante, esta representación se expresa principalmente en un plano individual y práctico. Las creencias analizadas privilegian la formación de estudiantes capaces de gestionar mejor sus recursos, comprender situaciones de ahorro, consumo o crédito, y aplicar herramientas matemáticas para resolver problemas económicos. Estos elementos son formativamente relevantes, pero sitúan la participación del estudiantado sobre todo en el ámbito de la decisión personal. En menor medida, las creencias hacen visible una EdEF orientada a discutir cómo se producen las condiciones económicas en las que dichas decisiones tienen lugar, quién define los problemas financieros que se llevan al aula o qué voces y experiencias participan en la construcción de estos saberes.

Desde la dimensión de representación, este hallazgo permite matizar el alcance de la EdEF configurada en las creencias docentes. No se trata de una formación carente de sentido social, pues reconoce la importancia de formar estudiantes capaces de desenvolverse en contextos económicos cotidianos. Sin embargo, su potencial para promover una participación más amplia depende de que las situaciones financieras no sean tratadas únicamente como contextos de aplicación matemática, sino también como escenarios para interpretar relaciones económicas, contrastar experiencias, formular preguntas y deliberar sobre decisiones que afectan la vida individual y colectiva. Así, la representación permite ampliar el análisis de la formación económica y financiera desde la pregunta por lo que los estudiantes aprenden a calcular hacia la pregunta por cómo participan en la comprensión de lo económico.

CONCLUSIONES

La pregunta que orientó este estudio buscó identificar qué implicaciones para la justicia social emergen de las creencias que asumen profesores de Matemáticas sobre la EdEF. Los resultados permiten afirmar que dichas implicaciones se concentran principalmente en las dimensiones de redistribución y reconocimiento, mientras que la representación aparece débilmente desarrollada.

La caracterización de las creencias muestra que la EdEF es comprendida como herramienta para la toma de decisiones económicas responsables y como recurso didáctico que fortalece el aprendizaje matemático. Predomina una visión formativa centrada en la utilidad y la aplicabilidad.

Respecto a la reinterpretación desde la justicia social se evidencia que estas creencias amplían el acceso a saberes financieros (redistribución) y legitiman el contexto económico como escenario pedagógico relevante (reconocimiento). Sin embargo, ambos movimientos se desarrollan principalmente en clave individual y didáctica, sin problematizar las condiciones estructurales que atraviesan las prácticas económicas.

En cuanto al análisis en términos de representación, los resultados muestran que las creencias docentes configuran una EdEF orientada principalmente a fortalecer la capacidad del estudiantado para actuar frente a situaciones económicas cotidianas. Esta orientación resulta formativamente valiosa, pues reconoce a los estudiantes como sujetos capaces de comprender información financiera,

aplicar conocimientos matemáticos y tomar decisiones fundamentadas. Sin embargo, la dimensión de representación aparece menos desarrollada cuando se trata de promover espacios de deliberación sobre las condiciones económicas que enmarcan dichas decisiones, las experiencias diversas del estudiantado y las formas en que los problemas económicos son seleccionados y discutidos en el aula.

A modo de cierre, las creencias docentes identificadas habilitan una EdEF con potencial formativo en términos técnicos, cognitivos y prácticos, especialmente por su contribución a la toma de decisiones y a la contextualización del aprendizaje matemático. No obstante, el análisis desde la justicia social sugiere la necesidad de ampliar esta perspectiva hacia propuestas de formación docente que permitan articular el cálculo financiero con la comprensión crítica de los contextos económicos, la deliberación en el aula y la participación del estudiantado en la interpretación de problemas socialmente relevantes.

Referencias

Boaler, J. (1993). The role of contexts in the mathematics classroom: Do they make mathematics more "real"? *For the Learning of Mathematics*, 13(2), 12–17.

Diego-Mantecón, J. M., Graña, C., Blanco, T. F., Vallines, R. y Diego, M. A. (2016). Las creencias del profesor de matemáticas y su influencia en la práctica docente. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández, y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 387–396). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM).

Echeita, G. (2019). A la espera de un fructífero cruce de caminos entre quienes hoy circulan en paralelo por los caminos educativos de la equidad, la justicia social, la inclusión, la convivencia, la cultura de paz o la ciudadanía global. R*evista Internacional de Educación para la Justicia Social*, 8(2), 7–13.

Espina, E., Marbán, J. M. y Maroto, A. I. (2024). Creencias del profesorado sobre la discalculia. En N. Climent Rodríguez y C. Jiménez Gestal (Coords.), N. Adamuz Povedano y E. Fernández de Ahumada (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 579). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM).

Fraser, N. (2008). *Scales of justice: Reimagining political space in a globalizing world.* Columbia University Press.

Heaton, J. (2004). *Reworking qualitative data.* Sage.

Hernández, A., Arellano, Y. y Martínez, G. (2020). Creencias matemáticas profesadas e implícitas de profesores universitarios de matemáticas. *Educación Matemática,* 32(2), 99-121. https://doi.org/10.24844/EM3202.04

León, D. y Suaterna, A. (2025). *Creencias de profesores de Santander sobre el uso de situaciones del contexto financiero en clase de Matemáticas* [Tesis de licenciatura en Matemáticas, Universidad Industrial de Santander].

Liern, V. (2013). ¿Qué desarrollar en el área de matemáticas en la economía? U*NO: Revista de Didáctica de las Matemáticas,* (62), 11–20.

Martínez Padrón, O. J. (2013). Las creencias en la educación matemática. *Educere,* 17(57), 235–243.

Méndez-Núñez, Á. y Murillo, F. J. (2017). Revisión de la investigación sobre justicia social en educación matemática. *Revista de Educación, 377*, 189–214. https://doi.org/10.4438/1988-592X-RE-2017-377-357

Murillo, F. J. y Hernández-Castilla, R. (2011). Hacia un concepto de justicia social. REICE. *Revista Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación*, 9(4), 7–23.

Organisation for Economic Co-operation and Development. (2005). *Recommendation of the Council on Principles and Good Practices for Financial Education and Awareness* (OECD/LEGAL/0338). OECD Legal Instruments.

Organisation for Economic Co-operation and Development. (2014). *PISA 2012 results: Students and money* (Volume VI): Financial literacy skills for the 21st century. OECD Publishing. https://doi.org/10.1787/9789264208094-en

Pajares, M. F. (1992). Teachers' beliefs and educational research: Cleaning up a messy construct. *Review of Educational Research,* 62(3), 307–332. https://doi.org/10.3102/00346543062003307

Savard, A. y Cavalcante, A. (Eds.). (2021*). Financial numeracy in mathematics education: Research and practice.* Springer.

Thompson, A. G. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of the research. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 127–146). Macmillan.

Villoro, L. (1996). *Creer, saber, conocer.* Siglo XXI.

DISPOSITIVO FORMATIVO Y CONSTRUCCIÓN DE LA AUTOEFICACIA DOCENTE: UN ESTUDIO DE CASO EN LA FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

Teacher self-efficacy as an effect of educational devices in initial mathematics teacher education

Peña-Acuña, F.

Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Resumen

Este trabajo analiza cómo un estudiante de tercer semestre de un programa de formación de profesores de matemáticas construye interpretaciones sobre la enseñanza de las matemáticas y sobre su futura práctica. Se realizó un análisis cualitativo articulando dos marcos analíticos: las fuentes de la autoeficacia propuestas por Albert Bandura y categorías acerca de condiciones de posibilidad desde una postura foucaultiana. Los resultados muestran que las expectativas profesionales del estudiante, su lectura crítica de la enseñanza escolar de las matemáticas y las experiencias formativas tempranas del programa configuran un proceso emergente de autoeficacia orientado a la transformación de prácticas educativas que percibe como problemáticas. Estos hallazgos sugieren que ciertos espacios formativos iniciales favorecen la articulación entre reflexión sobre la práctica, identidad docente y motivación profesional en etapas tempranas de la formación.

Palabras clave: *Autoeficacia docente, Formación de profesores de matemáticas, Dispositivos formativos, Práctica pedagógica.*

Abstract

This paper analyses how a third-semester student in a mathematics teacher education program constructs interpretations about the teaching of mathematics and about their future professional practice. A qualitative analysis was conducted by articulating two analytical frameworks: the sources of self-efficacy proposed by Albert Bandura and categories related to conditions of possibility from a Foucauldian perspective. The results show that the student's professional expectations, their critical reading of school mathematics teaching, and the early formative experiences of the program configure an emerging process of self-efficacy oriented towards transforming educational practices that the student perceives as problematic. These findings suggest that certain early formative spaces favour the articulation between reflection on practice, teacher identity, and professional motivation in the early stages of teacher education.

Keywords: *Teacher self-efficacy, Mathematics teacher education, Foucauldian perspective, Early teacher training, Teacher practice.*

INTRODUCCIÓN

La formación inicial de docentes de matemáticas ha sido un campo de estudio relevante en la investigación en educación matemática, estudios como el de Chávez y Llinares (2012) han descrito los procesos de construcción de la identidad profesional y el conocimiento necesario para la enseñanza. Mientras que estudios como el de Contreras et al. (2011) han mostrado que dicha identidad se construye a partir de la interpretación de las experiencias formativas y de práctica que los futuros docentes acumulan a lo largo de su trayectoria.

Peña-Acuña, F. (2026). Dispositivo formativo y construcción de la autoeficacia docente: Un estudio de caso en la formación inicial de profesores de matemáticas. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (pp. 473-480). SEIEM.

La investigación sobre la autoeficacia docente en educación matemática ha mostrado que las creencias de los profesores en formación se configuran a partir de la interacción de diversas fuentes, principalmente la experiencia directa en la enseñanza, la observación de otros docentes, la retroalimentación recibida y los estados emocionales asociados a la práctica. En particular, estudios recientes de revisión, como el de Soler-Álvarez y Valencia-Vallejo (2025), evidencian que, en el caso de profesores de matemáticas en formación, la experiencia directa y la persuasión verbal de asesores y tutores constituyen factores centrales para el fortalecimiento de la autoeficacia, mientras que la experiencia vicaria permite la identificación de modelos pedagógicos y estrategias de enseñanza valoradas como efectivas. Asimismo, estos estudios destacan que la autoeficacia se desarrolla de manera situada en relación con las prácticas formativas, especialmente en escenarios de práctica pedagógica o en espacios que permiten el análisis de dicha práctica.

No obstante, la mayoría de estas investigaciones se ha centrado en analizar la autoeficacia a partir de experiencias de práctica directa en aula o en medir sus niveles al finalizar procesos formativos, predominando enfoques de carácter cuantitativo o descriptivo. En este sentido, se identifica un vacío en la comprensión de cómo se configura la autoeficacia en etapas tempranas de la formación inicial, cuando aún no existen experiencias prolongadas de enseñanza directa. Asimismo, la literatura revisada aborda de manera limitada el papel de las condiciones institucionales y de los dispositivos formativos en la construcción de estas creencias, privilegiando explicaciones centradas en el individuo.

Resulta pertinente entonces analizar cómo los espacios de formación inicial de un programa de Licenciatura en Matemáticas como el de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas (LEMA) contribuyen a la construcción de motivación en futuros profesores de matemáticas. A partir del estudio de caso de un estudiante que cursa el espacio de Investigación en aula 2 (asignatura de tercer semestre del programa LEMA), se examina cómo diferentes experiencias, interacciones y recursos movilizados en dicho espacio se relacionan con las fuentes de autoeficacia identificadas en la literatura. En particular, el estudio busca contribuir a responder la siguiente pregunta de investigación: ¿qué condiciones de posibilidad inciden en la motivación de estudiantes para ejercer como profesores de matemáticas desde su formación inicial en la práctica docente?

Este estudio contribuye al campo de la educación matemática al mostrar que la autoeficacia docente en etapas tempranas puede configurarse no solo a partir de experiencias directas de enseñanza, sino mediante dispositivos que median la construcción de interpretaciones sobre la práctica docente.

MARCO TEÓRICO

Para este estudio se tomaron como fuentes teóricas las ideas sobre autoeficacia y motivación de Albert Bandura, así como la perspectiva de Foucault sobre condiciones de posibilidad y el concepto de dispositivo. Aterrizamos estos conceptos al contexto de la formación para presentar un marco que nos permita identificar construcción de autoeficacia en estudiantes para profesor y las condiciones de posibilidad que el programa de licenciatura posee para apoyar esta construcción.

Autoeficacia en la formación del profesorado

Bandura (1977) manifiesta que la *autoeficacia percibida* se refiere a las creencias de las personas sobre sus capacidades para organizar y ejecutar las acciones necesarias para lograr determinados resultados. Bandura presenta también una diferenciación entre el concepto de autoeficacia y las expectativas de resultados indicando que estas últimas se refieren a las creencias sobre las consecuencias de las acciones. Así, la autoeficacia y las expectativas de resultados pueden ser usadas como fuentes de información para determinar la autopercepción de los docentes en formación sobre sus capacidades de enfrentarse a la labor educativa, así como el impacto que ellos creen pueden lograr sobre el aprendizaje de sus futuros estudiantes.

Para Bandura (1997) la autoeficacia influye de manera directa en cómo los sujetos piensan, se sienten, se motivan y se comportan. Por ende, la elección de actividades, el esfuerzo que las personas invierten, la persistencia frente a las dificultades y la resiliencia ante el fracaso se ven influenciadas de manera directa por la percepción individual de autoeficacia. A mayores niveles de autoeficacia, los sujetos tienden a proponerse metas más desafiantes, invertir más esfuerzo y tiempo y a relacionarse de manera positiva con el fracaso al interpretarlo como oportunidades de mejora. Todas estas acciones dan cuenta de altos niveles de motivación en el sujeto sobre alguna labor en concreto. Este marco resulta entonces pertinente como referente para estudiar los niveles de motivación en estudiantes que se están preparando para ser profesores de matemáticas.

Hacemos uso de cuatro categorías analíticas que Bandura (1997) reconoce como fuentes de autoeficacia. En primer lugar, la *experiencia directa*, entendida como aquellas experiencias personales de éxito o fracaso al realizar una tarea. En segundo lugar, la *experiencia vicaria* que da cuenta de la observación a otra persona realizando con éxito una tarea. La *persuasión verbal* que se refiere a los mensajes, comentarios o retroalimentaciones que otras personas dan sobre la capacidad del sujeto para realizar una tarea y, finalmente, los *estados afectivos y fisiológicos* que se refieren a las reacciones emocionales o corporales que los sujetos experimentan frente a una tarea.

Estas cuatro fuentes de autoeficacia pueden rastrearse directamente sobre las acciones propias de la práctica docente, por lo que el marco de autoeficacia de Bandura resulta pertinente para los propósitos de este estudio.

En este estudio, la noción de autoeficacia no se asume únicamente como una creencia individual, sino como una construcción situada. En ese sentido, proponemos que este marco de autoeficacia entre en diálogo con ideas de Foucault para analizar cómo las fuentes de autoeficacia son mediadas por dispositivos formativos que configuran modos de interpretar la enseñanza de las matemáticas.

Dispositivos y condiciones de posibilidad en la formación docente

En este estudio se adopta una perspectiva foucaultiana para analizar cómo ciertos elementos del proceso formativo orientan las interpretaciones de los estudiantes sobre la enseñanza de las matemáticas. Foucault define dispositivo como un conjunto heterogéneo que incluye “discursos, instituciones, disposiciones arquitectónicas, reglamentos, leyes, medidas administrativas, enunciados científicos, proposiciones filosóficas, morales y filantrópicas”, así como las relaciones que se establecen entre estos elementos (Foucault, 1980). En este sentido, los dispositivos no se reducen a herramientas o recursos específicos, sino que configuran condiciones de posibilidad que hacen viable la emergencia de ciertos modos de pensar, actuar y comprender la práctica educativa. Reconocemos además que el conjunto de diferentes dispositivos movilizados con propósitos comunes se constituye en sí mismo en un nuevo dispositivo de mayor escala.

En el marco de este estudio, dichas condiciones de posibilidad se analizaron a partir de un conjunto de categorías que permiten describir distintas dimensiones de los dispositivos formativos presentes en el programa. En particular, se consideraron las *acciones del espacio*, entendidas como las dinámicas propias del escenario formativo que favorecen ciertos tipos de reflexión sobre la enseñanza; las *acciones del profesor*, que remiten a las mediaciones pedagógicas y decisiones didácticas que orientan la experiencia formativa; y los *recursos tangibles*, que incluyen materiales, documentos y lecturas que estructuran el trabajo académico.

A estas categorías se suman *saber*, *poder* y *sujeto*, que permiten analizar cómo determinados discursos sobre la enseñanza de las matemáticas (saber), ciertas relaciones de legitimidad del conocimiento (poder) y formas en que los estudiantes se posicionan frente a su profesión (sujeto) contribuyen a configurar modos particulares de comprender la práctica docente (Foucault, 1982).

Desde esta perspectiva, el análisis no sólo pretende describir experiencias individuales del estudiante, sino identificar cómo los dispositivos formativos de LEMA generan condiciones de posibilidad que favorecen determinadas interpretaciones sobre la enseñanza de las matemáticas y el rol del profesor.

METODOLOGÍA

La investigación en la que se enmarca este estudio tiene un enfoque mixto, sin embargo, para esta comunicación se recupera parte del análisis cualitativo de unas entrevistas aplicadas a estudiantes que, al responder un instrumento previo de medición de autoeficacia, se identificaron como casos atípicos por mostrar niveles de autoeficacia muy altos o bajos respecto de la media. El caso particular que se presenta en este estudio corresponde a un estudiante de tercer semestre del programa LEMA que mostró niveles de autoeficacia considerablemente altos respecto de la media de los estudiantes del mismo semestre.

Contexto

El programa LEMA responde a una filosofía de construcción permanente, orientada por la pregunta:

> ¿Qué tipo de experiencias de formación debe tener un profesor de jóvenes y niños, que pretende ayudarles a ingresar (ó profundizar) en el ámbito del trabajo académico y particularmente en el de la matematización constructora de mundo, y lo pretende hacer sin ejercer segregación ni otras formas de violencia? (Universidad Distrital Francisco José de Caldas, 2023, p. 19)

LEMA organiza su propuesta curricular en torno a cuatro núcleos de formación: *pensamiento matemático avanzado*, *matemáticas escolares*, *contextos educativos* y *práctica*. Este último núcleo es el responsable de los espacios académicos orientados al desarrollo progresivo de la práctica docente. Aunque las experiencias de práctica en aula con estudiantes se desarrollan a partir de cuarto semestre y se extienden hasta noveno semestre, el núcleo de práctica incluye también los espacios denominados Investigación en Aula I y II, cursados en segundo y tercer semestre respectivamente. Estos espacios no constituyen escenarios de práctica docentes en aula, sino de aproximación temprana a la reflexión sobre la práctica educativa, en los que los estudiantes comienzan a problematizar experiencias escolares, analizar el contexto educativo y reconocer la investigación como una herramienta para comprender los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

En este marco se sitúa el presente estudio, que analiza cómo un estudiante que cursa Investigación en Aula II construye interpretaciones sobre la enseñanza de las matemáticas y sobre su futura práctica docente en relación con los dispositivos formativos que configuran su proceso de formación inicial.

Producción y análisis de la información

Con el propósito de identificar los niveles de autoeficacia en los estudiantes del programa LEMA, se aplicó un cuestionario tipo Likert (escala de 1 a 5), basado en el instrumento propuesto por Avilés-Canché y Marbán (2024) para la medición de la autoeficacia docente. El instrumento original, compuesto por 72 ítems, fue adaptado a una versión de 53 ítems, seleccionados en función de su correspondencia explícita con criterios centrales de la filosofía del programa de Licenciatura en Matemáticas. Dichos criterios incluyeron: el desarrollo de un ethos no segregador, la promoción de la actividad matemática, la problematización y la investigación, la actitud propositiva, la actitud crítica y el trabajo colaborativo.

Los resultados de la aplicación de este instrumento (N=85) fueron sistematizados, filtrados y analizados cuantitativamente para identificar casos atípicos específicamente en los estudiantes que se encontraban cursando el seminario Investigación en aula II (n=20). La selección de estudiantes de Investigación en aula II obedece al carácter longitudinal de la investigación macro en la que se enmarca esta propuesta.

Una vez identificados los estudiantes que se encontraban más distantes de la media de los datos ($\bar{x} = 3.46;\ \sigma = 0.24$), se procedió a diseñar entrevistas semiestructuradas para cada caso, procurando abordar

los aspectos generales del estudio como percepción de autoeficacia y reconocimiento de dispositivos formativos en el seminario de Investigación en aula II, así como preguntas específicas para cada caso en relación con el tipo de respuestas que dieron en el cuestionario. El caso reportado en este documento se trata de un estudiante con una media en sus respuestas de 3.85 (el segundo valor más alto).

La entrevista realizada a los estudiantes fue grabada en audio y posteriormente transcrita a un documento digital que fue analizado codificando fragmentos que perteneciesen a una o más de las categorías de autoeficacia o de condiciones de posibilidad. Esta codificación se realizó por tres investigadores de manera individual, luego se identificaron las coincidencias y discrepancias en la codificación y se discutieron las discrepancias con todo el equipo de investigación (3 investigadores y 5 estudiantes de LEMA en calidad de auxiliares de investigación). Esa discusión resultó en un conjunto de consensos interpretativos que producen los resultados que se presentan a continuación.

RESULTADOS

El análisis de la entrevista permitió identificar un conjunto de relaciones entre las creencias de autoeficacia del estudiante y los dispositivos formativos que configuran su experiencia en el programa de Licenciatura en Matemáticas. A partir del proceso de codificación y discusión entre investigadores, los fragmentos analizados fueron organizados en dos grandes grupos de categorías: por una parte, aquellas asociadas a las fuentes de la autoeficacia (experiencia directa, experiencia vicaria, persuasión verbal, estados afectivos y fisiológicos) y, por otra, aquellas relacionadas con las condiciones de posibilidad (acciones del espacio, acciones del profesor, recursos tangibles, saber, poder y sujeto) y los dispositivos que estructuran la formación.

El proceso de codificación permitió identificar relaciones entre las categorías analíticas y los fragmentos del discurso del estudiante. En particular, se observó cómo la experiencia directa se articula con posturas críticas sobre la enseñanza de las matemáticas; la experiencia vicaria con la construcción de modelos profesionales; la persuasión verbal con la validación de sus capacidades docentes; y los dispositivos formativos con la generación de condiciones para la autorreflexión sobre la práctica. A partir de esta organización, se definieron tres ejes de análisis que se desarrollan a continuación. Para resaltar las ideas que se presentan a continuación se extraen fragmentos textuales de la entrevista realizada al estudiante; para preservar el anonimato, los nombres a los que hace mención se reemplazan por el rol que ejercen (profesor o estudiante).

Coherencia temporal en la construcción de autoeficacia

En primer lugar, se resalta la coherencia temporal en la construcción de autoeficacia docente. Esto dado que durante la entrevista se pueden inferir experiencias de la historia académica escolar del estudiante que le permiten posicionarse en una postura crítica a algunas prácticas de la enseñanza de las matemáticas, por ejemplo, la enseñanza de matemáticas sin un propósito claro.

> pues siento que también esa es una de las críticas que se hace porque pues muchos profesores enseñan matemáticas, incluso, bueno, siento yo, incluso en muchos casos, incluso los profesores ni siquiera saben por qué están enseñando esos contenidos.

> Bueno, cuando yo entré a la licenciatura, pues, sentía mucho que lo que se enseñaba era muy teórico. Sí. Digamos que también en la práctica todo lo que nos enseñaban era muy teórico. Y, pues, que en relación a la experiencia escolar que tuve, pues, no vi, de hecho, digamos, esa… ¿cómo decirlo? Esa diferencia.

> Ese pasado académico que el estudiante considera nocivo le hace valorar experiencias actuales en la licenciatura que reconoce que van en una línea diferente a la del colegio y en las que, aparentemente, encuentra alternativas de actuar positivas.

> cuando entré al segundo semestre e inicié clases con Profesor 1, uno de los aspectos que me llamó mucho la atención de lo que él hacía era dar significado a todos los procesos matemáticos que hacíamos.

> una de las cosas interesantes que me pareció que utilizó el Profesor 1 dentro de su práctica fue darle significado a esos algoritmos, a esos procesos matemáticos, qué es realmente lo que involucra cada una de las partes que estoy haciendo y dentro de un contexto de manera concreta, ¿qué significa? Darle sentido a las matemáticas

Este posicionamiento construido desde su experiencia como estudiante, sumado a la experiencia vicaria de su presente, permite que el estudiante genere ideas con las que espera aportar a la transformación de esas prácticas que considera problemáticas. Un ejemplo particular tiene que ver con pedir de manera explícita más experiencias prácticas aun cuando el programa LEMA se caracteriza por propiciar más espacios de práctica que el común de otros programas de licenciatura.

> consideraría más importante que dentro de los diferentes espacios se hicieran más, bueno, se integraran más momentos en que los estudiantes [refiriéndose a los estudiantes para profesor] tuvieran más acercamiento con los estudiantes [refiriéndose a los estudiantes de colegio]

Esta parte del análisis nos permite inferir que existe coherencia entre el pasado del estudiante con las experiencias negativas que, en parte, le motivaron a formarse como profesor de matemáticas; con lo que en su presente se le está presentando como alternativas para una enseñanza de las matemáticas acorde a lo que él considera correcto y las expectativas que espera que la carrera le satisfaga.

La autorreflexión docente como condición de posibilidad

El espacio de Investigación en aula II se reconoce como un gran dispositivo que produce condiciones de posibilidad para la autorreflexión docente, esto dado que el estudiante resalta cómo el espacio académico promueve la reflexión sobre las experiencias académicas individuales, así como prácticas de terceros que hayan sido documentadas.

> Como una de las partes de la investigación es una problemática que surge de alguna experiencia propia o algún interés, pues ese interés fue del sector donde, bueno, del sector educativo en donde yo estudié, exacto. O sea, siento que ahí, pues como está esta vinculación

> Una vez que la Profesora 2 nos puso a leer un documento en donde se hizo uso de la matemática crítica, haciendo uso del contexto de los estudiantes para que aprendieran matemáticas.

El espacio de Investigación en el aula II aunque pertenece al núcleo de práctica del programa LEMA, no supone un ejercicio de práctica pedagógica en aula, por el contrario invita a los estudiantes a reflexionar sobre las implicaciones del rol docente en el aula desde una mirada investigativa, esto hace que las experiencias que los estudiantes visibilizan desde momentos tempranos de su formación, se lean con una postura crítica que genera una mayor autopercepción respecto de sus posibilidades al desempeñar tareas de enseñanza. En este marco, el estudiante manifiesta concepciones sobre la enseñanza que son fruto de reconocer prácticas de terceros, particularmente las de sus compañeros de semestres superiores en el marco de una actividad denominada *coloquio de prácticas*.

> De ese modo, pues uno debería proponer una reflexión crítica sobre sus acciones. Por ejemplo, ahí, uno de los aspectos que se mencionaban en el coloquio que me pareció importante fue el uso de la palabra, del lenguaje, cómo me estoy dirigiendo a mis estudiantes, qué tipo de lenguaje estoy utilizando con ellos.

Así pues, la suma de dispositivos de los diferentes espacios del núcleo de práctica en el programa LEMA son en sí mismo un gran dispositivo que constantemente propende por el cuestionamiento permanente de lo que es y significa ser profesor de matemáticas.

La experiencia vicaria como fuente de autoeficacia

En el análisis de los datos es clara la influencia que un profesor del programa LEMA tiene en el estudiante como modelo profesional a seguir. Esas clases respaldan creencias del estudiante respecto de cómo deberían ser enseñadas las matemáticas y se convierten en fuentes de autoeficacia claras cuando el estudiante manifiesta que ese profesor es su modelo para seguir.

> Siendo que un ejemplo claro del profesor que quiero llegar a ser sería… ¿tengo que mencionarlo? […] Es Profesor 1.

Este reconocimiento explícito de un docente del programa como referente profesional es una experiencia vicaria, en la medida en que el estudiante construye creencias sobre su propia capacidad futura para enseñar matemáticas a partir de la observación de la práctica de otros. En este caso, el profesor aparece como una figura que encarna una forma particular de comprender la enseñanza de las matemáticas: contextualizada, reflexiva y orientada a la construcción de significado. El hecho de que el estudiante se identifique con este modelo profesional sugiere que la observación de prácticas pedagógicas que resultan coherentes con sus propias expectativas sobre la enseñanza contribuye a fortalecer su autoeficacia docente.

DISCUSIÓN

Los resultados de este estudio sugieren que la construcción de autoeficacia docente en etapas tempranas de formación inicial no depende exclusivamente de las experiencias directas de enseñanza, sino que puede configurarse también a partir de experiencias formativas mediadas por dispositivos institucionales. En el caso analizado, las creencias del estudiante sobre su futura capacidad para enseñar matemáticas parecen fortalecerse a partir de la observación de modelos docentes dentro del programa y de los espacios de reflexión por el espacio académico de Investigación en aula II. Desde la perspectiva de Albert Bandura, estos elementos pueden interpretarse como fuentes de autoeficacia que contribuyen a que el estudiante construya una imagen posible de sí mismo como futuro profesor.

Al mismo tiempo, el análisis permite reconocer que estas experiencias no emergen de manera aislada, sino que están inmersas en una red de dispositivos formativos que orientan las formas en que los estudiantes interpretan la enseñanza de las matemáticas. Desde una perspectiva foucaultiana, los espacios académicos, las lecturas propuestas, los discursos sobre la enseñanza y las prácticas de los profesores pueden comprenderse como parte de dispositivos formativos que producen determinadas formas de comprender la práctica docente. En este sentido, las creencias de autoeficacia del estudiante no se construyen únicamente a partir de su experiencia individual, sino también en relación con los discursos y prácticas que estructuran su proceso de formación. A diferencia de estudios previos que vinculan la autoeficacia principalmente con la experiencia directa de enseñanza, este estudio muestra que, en formación inicial temprana, los dispositivos formativos pueden cumplir un papel central en su configuración.

En conjunto, estos resultados sugieren que la construcción de la autoeficacia docente en la formación inicial puede comprenderse como un proceso situado que emerge en la interacción entre experiencias personales de aprendizaje y los dispositivos formativos que organizan el programa de formación. Esta lectura permite ampliar la comprensión de las fuentes de autoeficacia en contextos de formación docente, al reconocer que dichas fuentes se encuentran mediadas por configuraciones institucionales que orientan las formas en que los futuros profesores interpretan la enseñanza de las matemáticas y proyectan su práctica profesional.

CONCLUSIONES

Los resultados que se presentan en este estudio sugieren que la formación inicial puede fortalecer la autoeficacia docente incluso en etapas tempranas. Recordemos que el estudiante analizado estaba cursando tercer semestre al momento de la entrevista y, aún en esta etapa relativamente temprana,

presentó altos índices de autoeficacia (reportados por el cuestionario) que ratificó con las respuestas dadas en la entrevista.

Estos resultados también dan cuenta de que la reflexión sobre la práctica y la observación de modelos profesionales son elementos clave para el desarrollo de autoeficacia en etapas tempranas de formación. En este marco, el espacio académico de Investigación en aula II se manifiesta como el dispositivo que genera condiciones de posibilidad relacionadas con la reflexión crítica de la labor docente.

Sin embargo, no solo el espacio de Investigación en aula II genera condiciones de posibilidad que favorecen la autoeficacia de los estudiantes, otros espacios académicos funcionan como dispositivos que configuran modos de comprender la enseñanza de las matemáticas, bien sea desde la experiencia vicaria observada en los docentes titulares o por permitir a los estudiantes el vivir experiencias directas de docencia.

A manera de cierre, consideramos que la autoeficacia docente no solo emerge de las experiencias formativas ofrecidas por los dispositivos de formación, sino que también reconfigura la relación del estudiante con tales dispositivos, generando procesos de retroalimentación en la formación. En particular, para un programa como LEMA, este tipo de retroalimentación dada por nuestros estudiantes resulta siempre pertinente como fuente de inspiración para crecer como programa.

Agradecimientos

Este documento se presenta como parte de la investigación «La Práctica Docente y la Motivación de Profesores de Matemáticas en Formación» desarrollada por los investigadores Dra. Brigitte Johana Sánchez Robayo, Dr. José Torres Duarte y Dr. Fredy Peña Acuña y los estudiantes Paula Ramírez, Laura Mendez, Wilfer Díaz y Jeily Galindo, todos pertenecientes al grupo de investigación CRISALIDA, con fondos de la convocatoria Pr1 2025 Primer Corte/Instituto de Estudios e Investigaciones Educativas-Oficina de Investigaciones. Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Referencias

Avilés-Canché, K. y Marbán, J. M. (2024). Validación de escalas de autoeficacia docente desde la perspectiva del conocimiento especializado para la enseñanza de las matemáticas. *Aula Abierta*, *53*(3), 247–256. https://doi.org/10.17811/rifie.20508

Bandura, A. (1977). Self-efficacy: Toward a unifying theory of behavioral change. *Psychological Review*, *84*(2), 191–215. https://doi.org/10.1037/0033-295X.84.2.191

Bandura, A. (1997). *Self-efficacy: The exercise of control.* W. H. Freeman.

Chávez, Y. y Llinares, S. (2012). La identidad como producto del aprendizaje en la práctica de enseñar matemáticas en profesores de primaria. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 187–196). SEIEM.

Contreras, P., Penalva-Martínez, M. C. y Torregrosa, G. (2011). Identidad profesional y conocimiento matemático para la enseñanza de maestros en formación. En M. Marín, G. Fernández, L. J. Blanco, y M. M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 329–338). SEIEM.

Foucault, M. (1980). *Power/knowledge: Selected interviews and other writings, 1972–1977* (C. Gordon, Ed.). Pantheon Books.

Foucault, M. (1982). The subject and power. *Critical Inquiry*, *8*(4), 777–795. https://doi.org/10.1086/448181

Soler-Álvarez, M. N. y Valencia-Vallejo, N. G. (2025). Autoeficacia de profesores de matemáticas en formación: Revisión de la literatura en Latinoamérica. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED*, *58*, 222–239. https://doi.org/10.17227/ted.num58-22975

Universidad Distrital Francisco José de Caldas. (2023). *Proyecto educativo del programa curricular: Licenciatura en Matemáticas.* Facultad de Ciencias y Educación.

FORMADORES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS EN LA UNIVERSIDAD: PERFILES PROFESIONALES Y VISIÓN DE LA FORMACIÓN

Mathematics teacher educators at the university: professional profiles and vision of training

Pérez-Martín, P. y Contreras, L. C.

Universidad de Huelva

Resumen

Este estudio cualitativo de carácter exploratorio analiza las autopercepciones de tres formadores de una universidad española, y su relación con sus perfiles formativos, con el fin de comprender cómo estos perfiles pueden influir en su enfoque sobre la formación inicial de futuros maestros. Tras el análisis de contenido de un cuestionario y respectivas entrevistas, efectuado sobre la base de sus propias visiones como formadores y sobre el contenido de la formación, los resultados revelan diferencias claras en la forma en que cada tipo de informante concibe la relación entre el contenido matemático y didáctico, así como en los aspectos que consideran prioritarios para la formación. No obstante, se observan semejanzas, principalmente en un perfil con características intermedias, compartiendo puntos de vista con los otros dos, evidenciando ciertas convergencias sobre qué es fundamental para la preparación de los futuros docentes.

Palabras clave: *formador de profesorado de matemáticas, perfiles de formadores, formación inicial, educación primaria, visión de la formación*

Abstract

This exploratory qualitative study analyses the self-perceptions of three teacher educators from a Spanish university, and their relationship with their formative profiles, with the aim of understanding how these profiles may influence their approach to preservice teachers education. Following a content analysis of a questionnaire and subsequent interviews, based on their own perspectives as educators and on the content of the training itself, the results reveal clear differences in how each type of participant conceives the relationship between mathematical and pedagogical content, as well as in the aspects they consider priorities in teacher education. However, similarities are observed, mainly in a profile with intermediate characteristics, which shares viewpoints with the other two, highlighting certain convergences regarding what is fundamental for preparing future teachers.

Keywords: *mathematics teacher educator, teacher educator profiles, preservice teacher education, primary education, vision of training*

INTRODUCCIÓN

Para que los futuros maestros de educación primaria (en adelante PPT) reciban una formación integral que les permita desempeñar eficazmente su labor en el aula, resulta imprescindible la figura del formador en el ámbito de la educación matemática (en adelante MTE). Para esta figura existe una amplia gama de definiciones y caracterizaciones, a la vez que se asume que no existe una estructura homogénea y reglada que otorgue una "preparación específica para el trabajo de formar a otros docentes" (Castro-Superfine y Pitvorec, 2021, p. 60), lo que, a priori, puede plantear visiones diferentes tanto del contenido de la formación como del propio papel del formador.

Pérez-Martín, P. y Contreras, L. C. (2026). Formadores de profesores de matemáticas en la universidad: perfiles profesionales y visión de la formación. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (pp. 481-488). SEIEM.

A pesar del creciente interés en los últimos años por la figura del MTE y su rol fundamental en la formación docente, los estudios centrados en conocer las características diferenciales de sus perfiles todavía son muy escasos (Hoover et al., 2025), lo que justifica la preocupación de la investigación en este ámbito. En ese sentido, nos preguntamos si es posible encontrar relaciones entre diferentes perfiles profesionales de los formadores y su visión del contenido de la formación, así como de ellos mismos como formadores.

MARCO TEÓRICO

Partiremos de qué significa ser un formador de docentes de matemáticas, prestando atención a elementos de su identidad profesional y a su posible influencia tanto en el conocimiento matemático como en el didáctico que pretende desarrollar en sus PPT. Esta comprensión permite, a su vez, un primer acercamiento a los diferentes perfiles de formadores, lo que orienta la selección de los participantes incluidos en este estudio.

La definición del formador de docentes se presenta como un concepto amplio y, en ocasiones, ambiguo, englobando a profesionales con formación inicial, trayectorias formativas y desarrollos profesionales diversos. En el ámbito de la educación matemática, Hoover et al. (2025) reconocen que, dentro del grupo de MTE, se incluyen "matemáticos, educadores de maestros, desarrolladores profesionales, maestros principales y otros" (p. 602). Se pone de manifiesto así la dificultad de reconocerlos como un grupo profesional claramente definido que comparta la misma actividad (Contreras, 2021), lo que refleja a su vez la riqueza y el reto que supone dicha diversidad para comprender su conocimiento profesional (Pérez-Montilla et al., 2023). En este trabajo se adopta la postura de Jaworski (2008), quien los define como profesionales que trabajan con docentes, tanto en contextos de formación inicial como continua, con el objetivo de ayudarlos a "desarrollar y mejorar la enseñanza de las matemáticas" (p. 1).

La investigación sobre el MTE puede abordarse a partir de diversas variables, como su formación inicial, sus conocimientos específicos o el contexto universitario en el que desarrolla su labor docente, entre otras. En el contexto español, Giadas, Pascual et al. (2024), inspirados en Cox et al. (2021), de donde emanan gran parte de las categorías de nuestro análisis, se identifican cinco perfiles formativos de MTE según su trayectoria académica. En este trabajo nos centraremos en tres de ellos: (1) formación en Matemáticas en grado, máster y doctorado; (2) formación en Matemáticas en grado y en Educación Matemática en máster y doctorado; y (4) formación en Educación en grado y en Educación Matemática en máster y doctorado. Como se desprende de esta clasificación, los MTE presentan diversas trayectorias formativas que incluyen tanto perfiles de matemáticos como de educadores matemáticos. Aunque todos ellos enriquecen la formación de los PPT, también pueden generar visiones diferenciadas e incluso contradictorias sobre las matemáticas y su enseñanza (Giadas, Muñiz-Rodríguez et al., 2024).

La identidad profesional del formador constituye un elemento clave para comprender su práctica. Esta identidad incluye la percepción que el formador tiene de sí mismo, el reconocimiento de sus fortalezas, el valor que otorga a su formación y trayectoria, así como los conocimientos y experiencias que aporta al proceso de aprendizaje de los docentes en formación. Al abordar las fortalezas del formador como un indicador de su autoeficacia, nos basamos en Bandura (1997), quien define la percepción de autoeficacia como "las creencias en las propias capacidades para organizar y ejecutar los cursos de acción requeridos para producir determinados logros" (p. 3). Por ello, en línea con Escudero-Ávila et al. (2021), parece necesario explorar aspectos vinculados a su percepción sobre su práctica profesional.

En este sentido, la formación de futuros docentes debe contemplar la comprensión profunda de los contenidos que estos necesitarán para su práctica docente, conectando la visión profesional, la experiencia y la identidad como formador con las decisiones pedagógicas que orientan la educación matemática de los futuros docentes. En particular, las concepciones que los MTE sostienen sobre la

enseñanza adquieren un papel fundamental en este proceso, ya que probablemente pueden diferir en aspectos que, aunque en ocasiones no sean explícitos, resultan potencialmente significativos para la manera en que se concibe y desarrolla la formación de los PPT (Hoover et al., 2025).

METODOLOGÍA

Con el objetivo de encontrar relaciones entre diferentes perfiles profesionales de los formadores y su visión del contenido de la formación y de sí mismos como formadores, este estudio se inspira en el de Hoover et al. (2025) y adopta un enfoque cualitativo enmarcado en un paradigma interpretativo, que asume la existencia de múltiples realidades construidas como consecuencia de la interpretación del investigador y en la que este reconstruye los significados expuestos en la interacción con el fenómeno de estudio (Muñoz-Catalán, 2009).

Se quiere conocer cómo los participantes perciben su trabajo como MTE profundizando en cada caso y tratando de comprender a qué se debe su posicionamiento profesional. Para ello, el investigador adopta un papel activo en la recogida y análisis de la información, favoreciendo que el diálogo proporcione datos ricos y con más matices.

La investigación se plantea como un estudio exploratorio, entendido como una primera fase de un estudio de caso que nos permite profundizar en la situación y comprender mejor la complejidad del fenómeno estudiado. La muestra es intencionada y situada, compuesta por tres MTE, Jorge, Laura y Pablo, de una universidad española, correspondientes a los perfiles 1, 2 y 4 de Giadas, Pascual et al. (2024). Todos participaron en un proyecto del área de Didáctica de las Matemáticas de la citada universidad (cuyos miembros responden a uno de estos tres perfiles), enfocado en el diseño e implementación de tareas formativas de diferentes contenidos matemáticos en el aula de futuros maestros. Cabe señalar que, para la selección de estos tres formadores, además de los perfiles, se tuvo en cuenta que hubiesen puesto en práctica una misma tarea orientada al desarrollo del conocimiento sobre un tópico matemático de Educación Primaria.

Tras la implementación de la tarea, cada MTE respondió a un cuestionario inicial. Para complementar esa información previa al comienzo de este trabajo, posteriormente se realizaron entrevistas individuales semiestructuradas, sobre la base del sistema de categorías de la Tabla 1, por videoconferencia (Zoom) y, con el consentimiento de los participantes, se grabaron para su posterior análisis, realizando así una transcripción literal con el fin de identificar aspectos diferenciadores en el discurso de cada participante. Para el análisis de los datos, se utilizó el citado sistema de categorías, inspirado en Cox et al. (2021) y Hoover et al. (2025), basado principalmente en dos dimensiones: su visión como formadores y su visión sobre el contenido de la formación.

Tabla 1

Sistema de categorías utilizado para el análisis del perfil del formador de profesores de matemáticas

Categoría principal	Subcategorías	Descripción
Identidad y visión como formador (VF)	Autoimagen como MTE	Cómo se percibe a sí mismo como formador de docentes de matemáticas.
	Aportación de su perfil a la formación	Qué aporta su propia formación y trayectoria a la formación de futuros maestros.
	Aspectos importantes para la formación	Elementos que considera esenciales en la formación de maestros de primaria.
Visión del contenido de la formación inicial (CFI)	Conocimiento matemático	Nivel de profundidad del conocimiento matemático que considera necesario en la formación.
	Conocimiento didáctico	Nivel de profundidad del conocimiento sobre cómo enseñar matemáticas.
	Experiencia en el aula	Importancia de la experiencia práctica en contextos escolares.

RESULTADOS

A continuación, se presentan las narrativas de la autopercepción de cada uno de los informantes, construidas a partir de sus discursos y aportando algunas evidencias representativas. Estas descripciones se realizaron tomando como referencia el sistema de categorías definido anteriormente, lo que permite identificar algunas de las características de cada perfil.

MTE Jorge

Como se indicó anteriormente, se ajusta al perfil 1. Además de combinar la formación de futuros maestros con su labor docente en la enseñanza secundaria, participa en un Proyecto de Investigación Colaborativa junto a formadores, maestros en activo y otros agentes educativos.

Sostiene que lo esencial es "abordar la didáctica de los contenidos que ellos realmente van a impartir". Sin embargo, considera necesario que tengan una base más profunda, "un poco por encima" de lo que enseñarán en primaria, para que el conocimiento esté "más fresco".

Define su propia imagen como formador como práctica y realista, afirmando que le ha aportado más "la experiencia docente que los contenidos", ya que le permite comprender situaciones y dificultades al observarlas "todos los días en las clases". Reconoce esta visión más pragmática como un punto fuerte con respecto a otros formadores. Por tanto, como formador aporta tanto su conocimiento del contenido como su experiencia directa de forma integrada, utilizando "algunos ejemplos que […] para ellos son nuevos, pero tú sí que los manejas". Además, su trayectoria le permite anticiparse a situaciones que "alguien novel probablemente pues no tiene", ya que "tengo mucho de donde tirar, de buscar ejemplos en cosas que ya han ocurrido". Aun así, reconoce haber tenido dificultades de adaptarse a los contenidos para futuros maestros porque "ese cambio a ver matemáticas en un nivel tan bajo… Te cuesta mucho más". Su formación inicial, que reconoce como excesivamente fundamentada, hace que se sienta más cómodo en etapas superiores, ya que el contenido trabajado en esa formación no es suficiente para abordar conceptos más elementales.

Respecto a la formación, tiende a separar el conocimiento matemático del didáctico, defendiendo que "esa pequeña puesta a punto es importante", refiriéndose al repaso de contenidos matemáticos antes de abordar la parte didáctica. Aunque reconoce la importancia de la didáctica, da un gran valor a que los futuros maestros tengan una base matemática sólida, algo que considera que sus compañeros valoran menos, al decirle "no, no tienes que entrar tanto en los contenidos como en la didáctica", mientras que él piensa que "hay que entrar más en los contenidos". Señala, además, que "se nota esa falta […] de más formación matemática" en el alumnado.

Considera clave la experiencia en el aula para formar a futuros docentes, puesto que al inicio "tendía a llevar las clases muy encorsetadas", pero con el tiempo "te da soltura y es un punto muy importante".

MTE Laura

Laura se corresponde con el perfil 2 y manifiesta que su vocación era la enseñanza más que las matemáticas. Cuenta con una breve experiencia en secundaria y más de 25 años en la formación inicial de primaria.

Respecto a la visión del contenido de la formación, advierte del "peligro" de entenderla como una continuación de la secundaria centrada en contenidos matemáticos: "[...] cuando, por ejemplo, ponemos exámenes, los problemas que ponen (otros formadores) son de secundaria, [...] habrá que reflexionar sobre otras cosas". Defiende el equilibrio entre conocimiento matemático y didáctico, estrechamente relacionados, considerando este último esencial para dar sentido al primero. Aunque reconoce esta necesidad, su trayectoria y sus declaraciones muestran una ligera inclinación hacia el contenido matemático: su formación matemática le proporcionó una "estructura de las matemáticas, [...] el conocimiento de la práctica, que yo creo que es más sólido, a priori". No obstante, subraya que

ningún perfil es suficiente por sí solo, y que quienes tienen una base matemática fuerte deben complementar con formación didáctica, y viceversa.

En esa línea, indica que una formación matemática fuerte puede alejar al formador de la realidad del aula, por lo que considera que "el perfil ideal es el que, además de tener una buena formación matemática, por ejemplo, da clases en una escuela".

Da importancia a que la experiencia en el aula no sea solo "observando", sino que implique que el formador "se pone en el papel", y cree que esto debe ser en primaria: "yo creo que en un instituto no". Considera que las etapas educativas son distintas y, en consecuencia, también lo es la manera de formar a los docentes de cada una de ellas: "[...] para ser formador de maestros de primaria lo suyo es haber tenido prácticas en primaria". De ese modo, se puede desarrollar una visión más realista de la enseñanza, algo imposible únicamente desde la teoría. No obstante, aclara que "no hace falta ser graduado en matemáticas para tener reflexiones sobre el contenido", ya que estas dependen en gran medida de la "profundidad de la persona" y de si ha complementado su formación inicial.

MTE Pablo

Pablo se ajusta al perfil 4. Carece de experiencia docente más allá de las prácticas del grado. Como formador en la universidad, lleva casi 10 años en Didáctica de la Matemática, impartiendo asignaturas en el grado y en el máster que cursó. Su visión como formador está influenciada por su experiencia como estudiante y sus propios docentes, destacando que "haberla cursado como alumno ayuda mucho". Su interés por las asignaturas durante su formación le ha beneficiado a la hora de impartirlas. Por ejemplo, cuando se enfrenta a un problema, reconoce que "como profesor, me doy cuenta de que [...] se puede exprimir un poquito más para ver otra cosa distinta".

Su objetivo es facilitar que sus estudiantes adquieran el aprendizaje de manera integral, asegurándose de que comprendan los contenidos. Incide especialmente en quienes puedan quedarse atrás: "Vamos a pararnos en este punto [...], ver lo que tenemos, [...] y ver qué posibles caminos podemos tener para solucionarlo", evitando dar respuestas directas y permitiendo que lleguen a conclusiones por sí mismos. Esta estrategia la considera más propia de un maestro que de un profesor de secundaria, pues "[en Secundaria] siempre se dedican a rellenar pizarras y, si lo entiendes, pues vale; y los maestros pues tienen truquitos para enseñarte diferentes cosas".

En relación con la visión del contenido de la formación, señala que "no es tanto aprender conocimiento [...] sino observar los contenidos de primaria y desmenuzarlos de manera que se hagan … comprensibles para los estudiantes". En este sentido, ve su formación inicial como un punto fuerte, destacando de su perfil como formador que "cuando tú te detienes a ver un contenido matemático [...] y lo desmenuzas [...] te das cuenta de que hay muchas pequeñas cositas que quizás, si eres matemático, ves muy lejos, pero si eres maestro, ves como si fuera un microscopio". Concibe el conocimiento matemático y el didáctico como aspectos independientes que, en la formación de maestros, deben estar interconectados o en "equilibrio". Esto se aprecia cuando reflexiona sobre su preparación necesaria antes de formar a maestros, afirmando que: "si necesitara formación para atender algún contenido matemático que se escapara a mi conocimiento [...], necesitaría algo complementario, diferenciando claramente entre dominar el contenido matemático previo y enseñarlo.

Sobre la importancia de la experiencia en el aula, la considera fundamental tanto para los formadores de maestros como para los propios docentes, ya que proporciona "mucha sensibilidad" hacia el aprendizaje, especialmente en primaria. Se justifica diciendo que el maestro adapta estrategias, se detiene y busca diversas formas de enseñar, en contraste con su percepción de los profesores de secundaria que "no trataban de que los comprendieras [...], simplemente era un reproducir el contenido".

A su vez, cree más probable encontrarse con perfiles que defienden que "lo matemático es lo importante y yo solamente me centro ahí" que con perfiles que centren sólo en la parte más

pedagógica. Por eso insiste en distinguir entre afirmar que "tiene que quedar clara la parte matemática" cuando, para él, es igualmente importante tener en cuenta aspectos como que "esta herramienta es muy útil para enseñar esta parte matemática", poniendo "la balanza en equilibrio" entre ambas partes del contenido de la formación.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Partiendo de estos tres perfiles formativos y de su análisis, los resultados nos permiten responder a nuestra pregunta de investigación al reconocer diferencias y semejanzas en sus percepciones respecto a las categorías planteadas.

En primer lugar, hemos observado que los tres MTE reconocen que, en relación con el contenido de la formación inicial, tanto los contenidos matemáticos como los contenidos didácticos deben estar integrados en la formación de futuros maestros, aunque muestran matices diferenciadores en cuanto al énfasis que otorgan a cada componente. En general, coinciden en que la formación matemática requerida no tiene por qué ser excesivamente compleja, sino adaptada a las necesidades específicas de la etapa educativa que sus estudiantes van a impartir y, además, consideran imprescindible comprender cómo enseñar dichos contenidos para que el aprendizaje sea significativo.

No obstante, las diferencias en cuanto al contenido de la formación inicial están estrechamente vinculadas a sus perfiles formativos. En el caso de Jorge (perfil 1 de Giadas, Pascual et al., 2024), destaca la importancia que otorga a una base matemática sólida previa que facilite el posterior trabajo de los contenidos didácticos, lo cual es coherente con su perfil formativo, centrado en el conocimiento matemático puro. Esta postura contrasta con la de Pablo (perfil 4 de Giadas, Pascual et al., 2024), quien, aunque reconoce la importancia del conocimiento matemático, considera que una reconstrucción de este conocimiento, en su caso, es posible abordando la formación desde una perspectiva didáctica y práctica, priorizando los aspectos didácticos y descomponiendo y profundizando en los contenidos, en aras a su comprensión y poder hacerlos accesibles para sus estudiantes, algo característico de su perfil orientado a la enseñanza. Por su parte, Laura (perfil 2 de Giadas, Pascual et al., 2024) se encuentra en un punto intermedio entre ambos, considerando clave contar con esa base matemática que la propia formación debe permitir integrar con los contenidos didácticos. Como consecuencia de lo anterior, se evidencian diferencias entre el perfil de Jorge y los de Laura y Pablo en la forma de percibir ambos tipos de conocimiento. Mientras que el primero los separa, dando más relevancia al componente matemático, en concordancia con Hoover et al. (2025), los otros dos coinciden en considerar fundamental que se conciban de manera interconectada o en equilibrio. Esta diferencia refleja con claridad cómo la formación en educación matemática característica de sus respectivos perfiles ha influido en sus concepciones (Escudero-Ávila et al., 2021).

Esta cuestión también se proyecta en su propia percepción como formadores, donde cobra especial relevancia el componente didáctico. En concordancia con Hoover et al. (2025), Pablo considera que su perfil formativo es una fortaleza, ya que recibió la misma formación inicial que ahora imparte, y esto le da una doble perspectiva de su papel como formador y de las características de sus estudiantes, tomadas sobre la base de su reciente experiencia como maestro en formación. No parece considerar que tenga carencias significativas que le impidan formar a maestros, al contrario, llega incluso a señalar que dispone de más estrategias didácticas que las que podría tener otro formador con experiencia únicamente en secundaria.

Por su parte, podría decirse que la visión de Laura y Jorge se aproxima más entre sí. Ambos reconocen que, a diferencia de Pablo, su formación inicial, siendo altamente fundamentada, no les proporcionó, sin embargo, suficientes herramientas didácticas. Esto llevó a Laura a profundizar en este ámbito para sentirse preparada para formar a futuros maestros, mientras que Jorge cree firmemente en que esas herramientas se las ha proporcionado su experiencia docente en el aula de secundaria. Por tanto, ambos evidencian un proceso más progresivo en el que, de una forma u otra, han tenido que compensar las posibles carencias didácticas de su formación inicial para poder ejercer como MTE.

En cualquier caso, hay unanimidad en torno a la importancia de la experiencia en el aula, coincidiendo con los resultados del estudio de Cox et al. (2021). Sin tener en cuenta su experiencia como MTE, los tres han tenido la oportunidad de estar en aulas y reconocen que esa vivencia aporta soltura y sensibilidad al formar a futuros docentes. Sin embargo, algo característico de Laura es que recalca que dicha experiencia, para ser realmente útil al formar a maestros, debe haberse desarrollado en primaria y no en otras etapas educativas. Esta posición, al igual que en el caso de Pablo, puede estar relacionada con la formación continua en educación matemática que caracteriza a sus perfiles.

En esa línea, independientemente de su experiencia docente en otras etapas, se ha observado que ninguno de los tres MTE cuenta con una experiencia real y prolongada como docente en el aula de primaria, siendo la vivencia de Pablo durante su formación inicial lo más cercano a dicha experiencia. Por ello, su participación activa en contextos formativos de reflexión sobre la práctica adquiere especial relevancia, ya que les puede enriquecer al tener contacto directo con maestros en ejercicio y mantener un vínculo relativamente cercano con las aulas (Castro-Superfine y Pitvorec, 2021), configurando, como señalan Pérez-Montilla et al. (2023), su identidad profesional.

Cuando se les plantea la posibilidad de incluir elementos del aula real en las tareas llevadas a cabo en la formación inicial, Jorge y Laura vuelven a poner el foco en el contenido matemático y la interpretan como una forma de trabajarlo con los futuros maestros. En el caso de Jorge, matiza que lo abordado no se centra exclusivamente en el contenido matemático, como suele ser propio de la educación secundaria. Por su parte, Pablo cree que dicha incorporación es clave porque la formación de futuros maestros debe ajustarse lo máximo posible a la realidad profesional y lo que pueden llegar a necesitar.

Los tres MTE están de acuerdo en que es probable que existan diferencias asociadas a sus perfiles. Para Jorge, si su perfil fuera como el de Pablo, su visión sería completamente distinta y estaría más centrada en lo didáctico. Sin embargo, reconoce que su perspectiva se ha ido alejando progresivamente de lo puramente matemático y que la experiencia en la formación de maestros le ha permitido reconocer el potencial de la didáctica en este ámbito. Por ello, aunque sigue considerando un obstáculo la carencia de contenidos matemáticos de los estudiantes para maestro, ya no tiene el mismo peso que al inicio de su trayectoria como MTE. Como puede observarse, este posicionamiento está vinculado a su tendencia a separar el contenido matemático del didáctico.

Por su parte, Laura y Pablo consideran que, en general, un perfil enfocado en el conocimiento matemático puede favorecer una mayor atención a los contenidos matemáticos de la formación. No obstante, no creen que esta correspondencia entre perfil formativo y enfoque adoptado sea necesariamente determinante. Desde un punto de vista más didáctico y coherente con su visión interconectada del conocimiento matemático y didáctico, ambos sostienen que las diferencias en la manera de abordar el contenido de la formación dependen más de la perspectiva del formador que de su formación inicial.

En consecuencia con todo lo expuesto con anterioridad, este estudio refleja que existe influencia de los perfiles formativos en las percepciones de los MTE sobre aspectos relacionados con la formación de futuros maestros, coincidiendo con lo planteado por Giadas, Muñiz-Rodríguez et al. (2024), y muestra cómo estos perfiles sostienen formas diferenciadas de concebir la relación entre conocimiento matemático y didáctico en la formación inicial, existiendo aspectos compartidos en torno a lo que se considera fundamental en la misma y llama la atención sobre la necesidad de configurar un perfil profesional más "homogéneo" para los MTE.

Una de las limitaciones de este estudio se da al centrarse exclusivamente en la autopercepción de los formadores, ya que a través de sus prácticas formativas podrían revelarse perspectivas distintas que se recogen en este análisis. Por ello, y teniendo en cuenta de que se trata de una primera fase de un estudio de caso, se pretende continuar profundizando en el análisis de cada uno de los informantes. Otra limitación que cabe señalar es que, aunque la muestra es intencionada, se basa en las autopercepciones de solo tres formadores dentro de un mismo contexto. Asumimos que, incluso

dentro del mismo perfil, puede haber bastante diversidad relacionada con factores como el contexto, la institución o la experiencia docente. Por consiguiente, resulta necesario continuar investigando considerando dicha diversidad para, de manera progresiva, aportar resultados significativos que contribuyan a mejorar su práctica docente y, en consecuencia, la formación de futuros maestros.

Agradecimientos

Este trabajo se ha desarrollado en el marco del proyecto PID2021-122180OB-I00 del Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades del Gobierno de España, del centro de investigación COIDESO, del grupo de Investigación DESYM (HUM168), y de la Red MTSK, auspiciada por la AUIP.

Referencias

Bandura, A. (1997). *Self-eficacia: The exercise of control.* W. H. Freeman and Company.

Castro-Superfine, A. y Pitvorec, K. (2021). Using community artifacts to support novice math teacher educators in teaching prospective teachers. *International Journal of Science and Mathematics Education, 19*(Suppl 1), 59-75. https://doi.org/10.1007/s10763-021-10152-7

Contreras, L. C. (2021). Una aproximación a un modelo de conocimiento del formador de profesores de matemáticas. *Revista Venezolana de Investigación en Educación Matemática, 1*(1), 1-26. https://doi.org/10.54541/reviem.v1i1.12

Cox, C., Beca, C. E., Cerri, M., Meckes, L. y Ramírez, M. J. (2021). *Formadores de docentes en seis países de América Latina: instituciones, prácticas y visiones*. UNESCO. https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000380227

Escudero-Ávila, D., Montes, M. y Contreras, L. C. (2021). What Do Mathematics Teacher Educators Need to Know? Reflections Emerging from the Content of Mathematics Teacher Education. En M. Goos y K. Beswick (Eds), *The Learning and Development of Mathematics Teacher Educators. Research in Mathematics Education*. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-62408-8_2

Giadas, P., Muñiz-Rodríguez, L., Pascual, M. I., Contreras, L. C. y Rodríguez-Muñiz, L. J. (2024). ¿Cómo enfocan el aprendizaje de las matemáticas los formadores de profesores? El papel del perfil y de la formación continua. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 289-296). SEIEM.

Giadas, P., Pascual, M. I., Muñiz-Rodríguez, L., Rodríguez-Muñiz, L. J. y Contreras, L. C. (2024). Perfiles de formadores de profesorado de matemáticas en el contexto universitario español. *PNA, 18*(5), 439-466. https://doi.org/10.30827/pna.v18i5.29287

Hoover, M., Dahlgren, M., Mosvold, R. y Goffney, I. (2025). Conceptions of teaching and justice as pivotal to mathematics teacher educators' thinking about mathematical knowledge for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education, 28*(3), 601-627. https://doi.org/10.1007/s10857-023-09609-z

Jaworski, B. (2008). Mathematics teacher educator learning and development. *International handbook of mathematics teacher education*, 4, 1-13.

Muñoz-Catalán, M. C. (2009). *El desarrollo profesional en un entorno colaborativo centrado en la enseñanza de las matemáticas: el caso de una maestra novel* [Tesis de doctorado, Universidad de Huelva]. Repositorio Arias Montano: https://rabida.uhu.es/dspace/handle/10272/2949

Pérez-Montilla, A., Cardeñoso, J. M. y Montes, M. A. (2023). Una aproximación al conocimiento del formador de docentes de matemáticas en la formación inicial. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 275-282). SEIEM.

SITUACIONES MATEMÁTICAS EN PREGUNTAS DEL PROFESORADO EN FORMACIÓN DE EDUCACIÓN INFANTIL

Mathematical situations in questions posed by pre-service early childhood teachers

Plazas, R., Chico, A. y Codes, M.

Universidad de Huelva

Resumen

Identificar las situaciones en las que aplicar un contenido matemático constituye una competencia clave en la formación del profesorado. Analizamos las respuestas del profesorado en formación de Educación Infantil a una tarea formativa basada en un mural que representa una escena de la vida cotidiana, atendiendo a los contenidos matemáticos que identifican, las preguntas que formulan y las situaciones a las que estas hacen referencia. Se realizó un análisis de contenido cuantitativo y cualitativo, categorizando los contenidos, las preguntas y las situaciones. Los resultados muestran una diversidad de contenidos que pueden abordarse a partir del mural, con un predominio del área Geometría. Asimismo, las situaciones presentes en las preguntas permiten establecer una categorización relevante para abordar distintos contenidos a partir del mural como contexto.

Palabras clave: *educación infantil, tarea formativa, formulación de preguntas, fenomenología*

Abstract

Identifying the situations in which mathematical content can be applied constitutes a key competence in teacher education. This study analyses the responses of pre-service early childhood teachers to a training task based on a mural depicting an everyday-life scene, focusing on the mathematical contents they identify, the questions they formulate and the situations to which these questions refer. A quantitative and qualitative content analysis was conducted, categorising contents, questions and situations. The results reveal a diversity of contents addressed through the mural, with a predominance of the Geometry domain. Furthermore, the situations present in the questions allow the establishment of a categorisation for addressing different contents using the mural as context.

Keywords: *childhood education, training task, question posing, phenomenology*

INTRODUCCIÓN

La relevancia de la figura del profesorado de la etapa de Educación Infantil es incuestionable, a la par que la complejidad del conocimiento matemático que debe gestionar, lejos de la idea de simplicidad asociada a esta etapa (Muñoz-Catalán et al., 2025), y cómo su formación influye en su labor de enseñanza (Burns et al., 2017). Por ello, nos enfocamos en la formación de esta etapa como un elemento clave para el futuro desempeño del profesorado de Educación Infantil.

En este estudio nos centramos en una tarea diseñada para introducir la formulación de problemas por parte del profesorado en formación, a partir de una situación real. En concreto, abordamos el análisis de las respuestas del alumnado a la primera parte de la tarea en la que se pretende promover que el futuro profesorado desarrolle una mirada matemática con la que observar el entorno, en línea con el modelo de Gasteiger y Benz (2018). En este sentido, consideramos relevante que en la formación del futuro profesorado de Educación Infantil se trabaje el desarrollo de esa destreza que facilita vislumbrar situaciones para el aprendizaje de la matemática en escenarios de la vida cotidiana que no se han planificado con un objetivo didáctico-matemático, contribuyendo así a la construcción tanto

Plazas, R., Chico, A. y Codes, M. (2026). Situaciones matemáticas en preguntas del profesorado en formación de educación infantil. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (pp. 489-496). SEIEM.

de conocimiento matemático como didáctico matemático (Carrillo et al., 2018). En definitiva, se pretende que el futuro profesorado desarrolle conocimiento sobre situaciones que dan sentido a contenidos matemáticos y sobre cómo una situación puede matematizarse involucrando distintos contenidos. El contexto del que parte el futuro profesorado de Educación Infantil para formular las preguntas es un mural que representa una escena de la vida cotidiana. Nos preguntamos ¿qué contenidos matemáticos identifica el futuro profesorado de Educación Infantil susceptibles de ser abordados a partir del mural? y ¿a qué situaciones vincula el futuro profesorado de Educación Infantil un mismo contenido en las preguntas que formula a partir del mural? En línea con la propuesta de Gómez y Cañadas (2011) sobre el papel de la fenomenología como herramienta docente, la respuesta a estas preguntas nos aportará información para refinar el diseño de tareas formativas. Por tanto, el objetivo de este estudio es conocer qué contenidos identifica el futuro profesorado para ser abordados a partir del mural y a qué situaciones vincula dichos contenidos mediante la formulación de preguntas.

MARCO TEÓRICO

Para respaldar el conocimiento que se pretende que construya el profesorado en formación, nos apoyamos en el modelo de conocimiento especializado del profesorado que enseña matemáticas (MTSK) (Carrillo et al., 2018). Entendiendo que los dominios y subdominios de este modelo son una herramienta para su uso que no pretende parcelar el conocimiento, en este trabajo nos centramos en algunos subdominios de los dominios de conocimiento matemático y conocimiento didáctico del contenido. Por un lado, dentro del conocimiento de los temas, nos enfocamos en la categoría fenomenología, que refiere al "conocimiento del docente sobre modelos que pueden atribuirse a un tema, entendidos como fenómenos que pueden generar conocimiento matemático, entre ellos, aquellos que aparecen en la creación del concepto mismo" (Carrillo et al., 2018, p. 7).

Consideramos la fenomenología como una categoría de conocimiento relevante cuando el profesorado en formación formula problemas matemáticos. Formular preguntas en un contexto dado es fundamental para desarrollar la destreza de formulación, dado que establecen puentes entre el contenido matemático y la situación. Ölmez et al. (2025) refieren a Cai, Rott, Zhang o Baumanns, entre otros, para describir modelos que sitúan el análisis de la situación, la fase de orientación o la fase de comprensión como el primer paso para formular problemas. Las tres perspectivas refuerzan la idea de que la destreza de formulación comienza con la inmersión en el contexto.

Formular preguntas se configura así como una práctica que favorece una comprensión más profunda de las matemáticas (Leavy y Hourigan, 2020). Por ejemplo, se potencia el conocimiento de la estructura de los problemas generados, que, según Crespo y Sinclair (2008), pueden ser *factuales, de razonamiento o abiertos.* Los problemas factuales son los que se pueden resolver con respuestas simples, mientras que los problemas de razonamiento no son tan obvios y requieren analizar la información. Finalmente, se consideran problemas abiertos, aquellos que combinan características de estos dos últimos y tienen más de una respuesta.

La participación en actividades de formulación de problemas en la formación inicial, según Leavy y Hourigan (2020), también puede favorecer el desarrollo de una comprensión más profunda de lo que constituye un buen problema matemático. Desde esta perspectiva, las actividades de formulación de problemas contribuyen al desarrollo del subdominio del conocimiento de la enseñanza de la matemática, en la categoría de tareas. Desde una visión en la que la formulación de problemas constituye una actividad clave en la formación de maestros (Leavy y Hourigan, 2020), trabajarla contribuye a la construcción de conocimiento de la práctica matemática.

Como puede apreciarse, el modelo MTSK ha sido el paraguas bajo el que se ha diseñado la tarea de formulación de problemas con la que fomentar el desarrollo de estos y otros conocimientos en el profesorado en formación de Educación Infantil (Climent et al., 2024).

METODOLOGÍA

Este estudio se enmarca metodológicamente en un experimento de enseñanza (Molina et al., 2011), dado que se analiza el conocimiento que el futuro profesorado de Educación Infantil construye a partir de una situación didáctica diseñada intencionalmente mediante el uso de un mural, desarrollada durante el curso 2023-2024. La experimentación se llevó a cabo en tres grupos de estudiantes del Grado de Educación Infantil de la Universidad de Huelva, con un total de 93 participantes. La implementación de la tarea se llevó a cabo en la asignatura Didáctica de la Matemática en Educación Infantil que se cursa en el cuarto cuatrimestre del grado. En el transcurso de la asignatura, se abordan contenidos específicos de Educación Infantil que giran en torno a los ámbitos de número, geometría y medida desde un enfoque didáctico-matemático. La tarea se implementó en la segunda mitad del cuatrimestre, por lo que los participantes ya habían recibido formación sobre la mayoría de los contenidos de la misma así como sobre problemas aritméticos verbales de estructura aditiva.

La tarea formativa, formada por cinco actividades, pretendía construir conocimiento sobre la planificación y gestión, por parte de una maestra, de una clase de formulación de problemas y sobre la idea de problema de alumnado de 5 años. En este caso, analizamos las respuestas del alumnado a la primera pregunta formada por dos apartados. En el primer apartado, se le pide al futuro profesorado que enumere palabras clave de contenidos matemáticos que se pueden abordar a partir de un mural que fue el empleado por la maestra en su clase (Figura 1). En el segundo apartado, el futuro profesorado formula una pregunta que se responda con alguno de los contenidos matemáticos que ha enumerado, y que esté contextualizada en el mural.

Figura 1

Mural utilizado en la tarea formativa (procedencia original no identificada)



Durante la implementación recogimos datos mediante grabadoras de audio y vídeo, así como las respuestas del estudiantado a la tarea. Las tres fuentes de información han contribuido a la triangulación de los resultados, aunque para esta comunicación presentamos los resultados únicamente de las producciones. Hemos realizado un análisis de contenido cuantitativo y cualitativo, deductivo e inductivo (Mayring, 2000) en tres fases. En la primera, definimos unas categorías para las áreas de contenido de forma deductiva a partir de estándares curriculares específicos para la etapa de Educación Infantil (NCTM, 2000; https://www.thecorestandards.org/Math/). Las áreas de contenido definidas fueron *Conteo y cardinalidad, Operaciones y pensamiento algebraico, Medida y datos, Geometría* y *Análisis de datos y probabilidad.* Una vez organizadas las categorías, se realizó un análisis de contenido de las respuestas y un recuento de frecuencias de los contenidos matemáticos

enumerados por los participantes en el primer apartado de la actividad. Codificamos las respuestas agrupando términos similares en categorías comunes; e. g. los términos *formas*, *figuras* o *figuras tridimensionales* se agruparon en la categoría *Formas y cuerpos*, incluida en el área de Geometría.

En una segunda fase, analizamos las relaciones entre los contenidos enumerados por el estudiantado susceptibles de ser abordados a partir del mural y las preguntas que enunciaron. Seleccionamos únicamente las preguntas o acciones que el futuro profesorado relaciona explícitamente con contenidos específicos, y las clasificamos en categorías según las áreas de contenido que especificaron en sus respuestas. Finalmente, establecimos subcategorías de contenidos específicos en cada área teniendo en cuenta las preguntas formuladas y los estándares curriculares específicos para la etapa de Educación Infantil (NCTM, 2000; https://www.thecorestandards.org/Math/). Estas quedaron organizadas de la siguiente forma: el área Conteo y cardinalidad se dividió en los contenidos específicos *Conteo para decir el número de objetos, Agrupamiento de elementos, Comparar cantidades* y *Ordinal; e*l área de contenido Operaciones y pensamiento algebraico se dividió en *Identificación de situaciones para la suma y la resta y problemas de distinta naturaleza* y *Patrones*; el área Medida y datos se dividió en *Descripción y comparación de atributos medibles* y *Clasificación de objetos y contar objetos de cada categoría*; el área Geometría se dividió en *Identificación y descripción de formas* y *Organización espacial: relaciones proyectivas y relaciones topológicas.*

En la tercera fase, analizamos las preguntas que quedaron agrupadas en un mismo contenido específico con el objetivo de identificar las situaciones que el profesorado en formación vinculaba a dicho contenido. Analizamos las preguntas de forma inductiva para identificar situaciones comunes. Como resultado, se obtuvo una categorización tripartita *contenido específico-pregunta-situación* (Gómez y Cañadas, 2011), que permitió analizar las situaciones que el profesorado en formación vincula contenidos matemáticos específicos con determinadas situaciones a través de las preguntas que formula. Para garantizar la fiabilidad, las categorías fueron revisadas de manera iterativa durante el análisis, discutiendo los casos ambiguos hasta alcanzar consenso entre las investigadoras. Asimismo, la validez del análisis se apoyó en la combinación de procedimientos deductivos e inductivos y en el uso de referentes curriculares para la definición y refinamiento de las categorías.

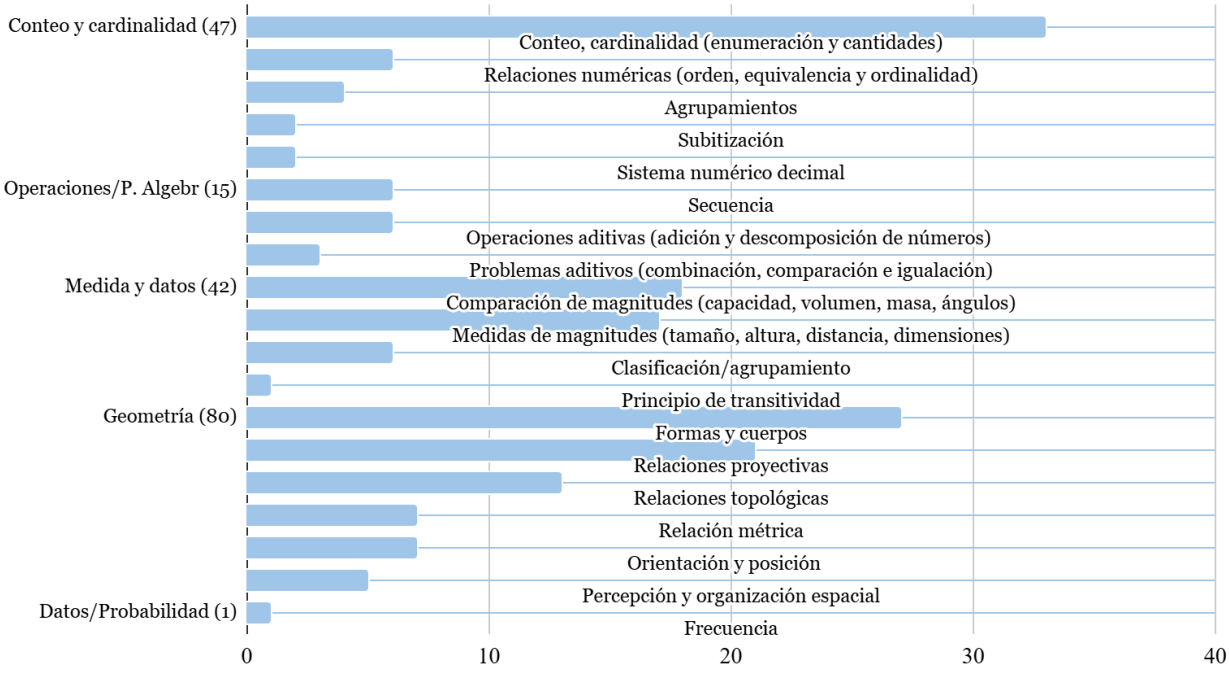
RESULTADOS

Organizamos los resultados atendiendo a los contenidos matemáticos que identifica el futuro profesorado de Educación Infantil susceptibles de ser abordados a partir del mural y a las preguntas asociadas a las diferentes situaciones que vinculan a los diferentes contenidos. En la Figura 2 se muestra la frecuencia absoluta con la que aparecieron los contenidos enumerados por el profesorado en formación. El área de contenido que más se repite es Geometría (80 veces), seguido del área Conteo y cardinalidad (47 veces) y Medida y datos (42 veces). Para la mayor parte del profesorado en formación, a través del mural se puede abordar el conteo. También destacan contenidos como formas y cuerpos, relaciones proyectivas y medida de diferentes magnitudes.

Atendiendo a, las preguntas enunciadas en el apartado 2 de la tarea, no hemos considerado aquellas respuestas en las que no se explicita el contenido matemático vinculado con la pregunta. Se han clasificado según los contenidos específicos que conforman las diferentes áreas de contenido. Presentamos la categorización de preguntas formuladas que se responderían con un mismo contenido matemático, junto con las situaciones comunes identificadas. En la respuesta al segundo apartado aparecen menos contenidos que en el primero, porque solo se les pedía una pregunta que se pudiera responder con alguno de los contenidos que habían enunciado en el primer apartado de la actividad.

Figura 2

Contenidos abordables a partir del mural según el futuro profesorado (elaboración propia)



Con relación al área Conteo y cardinalidad, las preguntas se vinculan a situaciones que implican que el alumnado de Educación Infantil cuente diferentes objetos que aparecen en la imagen (e. g. ruedas, vehículos, farolas, bomberos o animales). Estas preguntas han resultado ser las más numerosas y todas siguen la estructura ¿Cuántos… hay? En cuanto al contenido de comparación de cantidades, se distinguen tres situaciones diferentes: (1) comparar dos colecciones para decidir cuál es mayor: "¿Qué hay más coches o más personas?"; (2) identificar dos colecciones con el mismo número de objetos: "Elige 2 objetos diferentes que tengan la misma cantidad"; (3) inferir una cantidad de objetos según la cantidad de otros: "Si hay 2 farolas y hay la misma cantidad de vallas, ¿cuántas vallas hay?" Por último, el contenido Ordinal, se ha asociado a una situación de identificar qué objeto ocupa la primera posición de una secuencia: "¿Quién va primero el coche o la moto?".

Las preguntas que el futuro profesorado vincula al área Operaciones y pensamiento algebraico giran en torno a diferentes situaciones según el contenido específico. Para el contenido Identificación de situaciones para la suma y la resta y problemas de distinta naturaleza, encontramos una situación que evoca un acertijo en la que hay que resolver una suma para obtener un dato: "Para resolver el accidente debes llamar a los bomberos, y para averiguar el número debes resolver la suma que hay en la cabina. ¿Cuál es el número de los bomberos?"; otra situación es una tradicional de cambio decreciente empleando elementos del mural: "Si en la imagen hay 3 conos y el agente decide darle dos al bombero, ¿cuántos conos quedan?"; y una tercera situación también tradicional, pero en este caso de combinación en el que se conocen los cardinales de las partes y se pregunta por el total: "En la imagen hay 2 coches, 1 moto y 1 camión, ¿cuántos vehículos hay en total?". Se incluyen en esta categoría las preguntas formuladas vinculadas al contenido Patrones que son escasas: "Primero le doy al niño un patrón de lo que está haciendo el policía y después le pregunto, ¿y ahora qué toca? Otra opción es que un niño proponga un patrón y otro niño lo reproduzca."

Para el área de Medida y datos, en relación con el contenido Descripción y comparación de atributos medibles, encontramos cuatro situaciones. La primera, y más presente, es la de comparar dos objetos o personas en relación con una cantidad de magnitud, como se puede observar en las preguntas: "¿Qué

es más alto el árbol o el buzón?" y "¿Quién es más alto, la madre o el hijo?" Las dos situaciones siguientes requieren razonar sobre una relación de medida cuantificando la cantidad de magnitud. En el primer caso: "Si la mitad del camión mide 3,5 m de largo, ¿cuánto mide su total del largo?" La situación se centra en relacionar la mitad de una longitud con su longitud total. En el segundo caso: "La escalera del camión de bomberos debe alcanzar al trabajador que está en el árbol ya que ha sufrido un accidente. Si el árbol mide 20 metros, ¿cuántas escaleras necesitas si esta mide 5?" Aquí la situación se trata de determinar cuántas veces se repite la longitud de la escalera en la altura del árbol. En relación con el contenido Clasificación de objetos y contar objetos de cada categoría, encontramos sólo la pregunta: "Clasifica los círculos y los triángulos". La situación se centra en identificar los objetos con forma de círculo y triángulo en la imagen para, posteriormente, clasificarlos.

El área de Geometría es la más numerosa en cuanto a las preguntas vinculadas con contenidos específicos. En el contenido Identificación y descripción de formas, las dos primeras situaciones son similares: las preguntas permiten identificar formas geométricas que aparecen integradas en objetos del entorno cotidiano, como señal de tráfico, rotonda, tejado, farola o conos. Hemos seleccionado algunas preguntas en la Tabla 1 a modo de ejemplo. Observamos una situación en la que, además de reconocer una forma concreta, posteriormente hay que contarla. En la situación sobre relacionar una circunferencia de la imagen con otra de la vida cotidiana, no solo se está observando el mural, si no que se está invitando al alumnado a reconocer una circunferencia que aparezca en su día a día y no se encuentre en el mural. En cuanto al contenido sobre relaciones proyectivas, las preguntas muestran situaciones para identificar y describir relaciones espaciales basadas en posiciones relativas, dirección y proximidad entre los objetos y personajes de la imagen. Por último, las situaciones vinculadas a las relaciones topológicas pretenden que el alumnado observe los elementos de la imagen (por ejemplo, el camión de bomberos y líneas de la carretera) para identificar relaciones topológicas del espacio.

Respecto al área Análisis de datos y probabilidad, pese a que se enumeró un contenido, no se encontró ninguna pregunta formulada vinculada a este contenido.

Según la estructura de las preguntas, encontramos seis preguntas formuladas por los estudiantes para maestro que categorizamos como de estructura abierta, caracterizadas por tener elementos de sorpresa o novedad en su enunciado o bien que posibilitan diversidad de respuesta. Por ejemplo: "¿Cuántos bomberos van dentro del camión?" involucra, de acuerdo con la categorización de los estudiantes para maestro, contenidos de conteo y de organización espacial (relaciones topológicas). Esta pregunta, sin embargo, se basa en la figura de un camión de bomberos en el mural, en el que no se aprecia su interior. Esto posibilita en el aula una discusión sobre la capacidad de los diferentes vehículos, implicando habilidades de estimación y razonamiento que den respuesta a la pregunta, atendiendo a conocimientos interdisciplinares relacionados con situaciones de emergencia y cotidianas contempladas en el currículo.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En la descripción de las preguntas, contenidos y situaciones del mural vemos cómo un mismo contenido específico puede ser abordado a través de diferentes situaciones. Si observamos la diversidad de las preguntas formuladas por los estudiantes para maestro, los resultados no coinciden con los de Leavy y Hourigan (2020) donde los estudiantes para maestro formularon problemas con contextos diferentes de este estudio, y la mayoría de los cuales resultaron ser sobre el área de Número. En nuestro caso, la mayoría de las preguntas están vinculadas a diferentes contenidos específicos del área Geometría. Estos resultados sugieren que el contexto proporcionado para promover la formulación de preguntas puede influir en los contenidos matemáticos que emergen en el futuro profesorado, debido a sus características. La diversidad en la formulación puede ser entendida considerando la estructura de las preguntas. Siguiendo la clasificación de Crespo y Sinclair (2008), la mayoría de los problemas planteados persiguen trabajar contenidos factuales. Por otro lado, las preguntas de estructura abierta dan cuenta de una formulación que requiere mayor demanda cognitiva

(Stein y Smith, 1998), alejada de acciones más sencillas como identificar, agrupar o comparar que se consideran de orden inferior según la taxonomía de Bloom (Anderson y Kathwohl, 2001).

Tabla 1

Preguntas vinculadas por el futuro profesorado de EI con contenidos específicos del área Geometría

Contenido Específico	Preguntas	Situaciones
Identificación y descripción de formas	Observando la imagen, ¿qué formas geométricas puedes encontrar?"	Identificar, reconocer y nombrar formas geométricas presentes en los objetos de la imagen (señal de tráfico, rotonda o sin especificar)
	"¿Qué figura geométrica tiene la señal de tráfico?"	
	"¿Qué forma tiene la rotonda?"	
	"Rodea con lápiz rojo los círculos que veas"	Localizar formas en la imagen.
	"¿Cuántos círculos encontramos en la imagen?"	Identificar círculos en objetos de la imagen para contarlos.
	"Encuentra una circunferencia en el dibujo y di otra que veas en tu día a día."	Identificar una circunferencia de la imagen con otra de la vida cotidiana.
Organización espacial: relaciones proyectivas	"¿Dónde se encuentra el policía con respecto al coche?"	Identificar la posición relativa de los objetos (policía, posición de los conos, encima de la grúa).
	"¿En qué posición están los conos?"	
	"¿Qué hay encima de la grúa?"	
	"¿Quién está más cerca de la rotonda, el policía o el hombre sentado en el banco?"	Comparar la cercanía con la rotonda.
	"¿Por qué salida deberá ir?"	Orientarse y desplazarse en el espacio.
	"¿Cómo dirigirías los coches para que no choquen?"	
Organización espacial: relaciones topológicas	"¿Cómo son las líneas que forman la carretera?"	Identificar la continuidad o discontinuidad de las líneas.
	"¿Cuántos bomberos van dentro del camión?"	Reconocer que el camión es un objeto con interior en el cual caben bomberos.

La imagen del mural representa una situación de la vida cotidiana que el alumnado de Educación Infantil puede identificar como un contexto familiar. Este enfoque coincide con quienes defienden que las matemáticas en Educación Infantil deben desarrollarse a partir de situaciones significativas que permitan al alumnado identificar relaciones matemáticas, resolver problemas y comunicar sus ideas (Lee, 2017). En este sentido, el mural actúa como un contexto catalizador de una diversidad de contenidos que pueden abordarse a través de las preguntas formuladas por el futuro profesorado de Educación Infantil. Cuando el futuro profesorado formula preguntas contextualizadas en el mural vinculadas a contenidos específicos, está atribuyendo significado matemático a determinados fenómenos y contextos, a los que se espera que el alumnado responda (Gómez y Cañadas, 2011).

Los estudios sobre enseñanza de resolución y formulación de problemas citados en Leavy y Hourigan (2020) señalan que los problemas formulados por estudiantes para maestro tras una formación específica demuestran mayores niveles de complejidad, demanda cognitiva y diversidad en las temáticas y estructuras. Considerando los resultados de nuestro estudio, la continuación del mismo girará en torno al rediseño de la tarea formativa para implicar a los futuros docentes en el reconocimiento, análisis y formulación de problemas en las aulas de Educación Infantil.

Agradecimientos

Contrato predoctoral PRE2022-105267 financiado por AEI/ 10.13039/501100011033, "FSE Invierte en tu futuro", "Unión Europea Next Generation EU/PRTR. Proyecto PID2024-158877NB-I00 financiado por MCIN/AEI/ 10.13039/501100011033/FEDER, UE. Centro COIDESO de la Universidad de Huelva y RED MTSK (AUIP).

Referencias

Anderson, L. W. y Krathwohl, D. R. (2001). *A Taxonomy for Learning, Teaching, and Assessing: A Revision of Bloom's Taxonomy of Educational Objectives*. Longman.

Burns, J., Eichen, L, y Gasteiger, H. (2017). Mathematics-related Competence of Early Childhood Teachers Visiting a Continuous Professional Development Course: An Intervention Study. *Mathematics Teacher Education and Development, 19*(3), 76-93.

Carrillo-Yáñez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, Á., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236-253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Climent, N., Contreras, L. C., Montes, M. y Ribeiro, M. (2024). The MTSK model as a tool for designing tasks for teacher education. *ZDM Mathematics Education, 56*, 1123-1135. https://doi.org/10.1007/s11858-024-01605-8

Crespo, S. y Sinclair, N. (2008). What makes a problem mathematically interesting? Inviting prospective teachers to pose better problems. *Journal of Mathematics Teacher Education, 11*(5), 395-415. https://doi.org/10.1007/s10857-008-9081-0

Gasteiger, H. y Benz, C. (2018). Enhancing and analyzing kindergarten teachers' professional knowledge for early mathematics education. *The Journal of Mathematical Behavior, 51*, 109-117. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2018.01.002

Gómez, P. y Cañadas, M. C. (2011). La fenomenología en la formación de profesores de matemáticas. *Voces y silencios. Revista Latinoamericana de Educación, 2,* 78-89. https://doi.org/10.18175/vys2.especial.2011.05

Leavy, A. y Hourigan, M. (2020). Posing mathematically worthwhile problems: developing the problem-posing skills of prospective teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education, 23*, 341-361. https://doi.org/10.1007/s10857-018-09425-w

Lee, J. E. (2017). Preschool Teachers' Pedagogical Content Knowledge in Mathematics. *International Journal of Early Childhood, 49*(4), 229-243. https://doi.org/10.1007/s13158-017-0189-1

Mayring, P. (2000) Qualitative content analysis. *Forum qualitative social research, 1*(2) https://doi.org/10.17169/fqs-1.2.1089

Molina, M., Castro, E., Molina, J. L. y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias, 29*(1), 75-88. https://doi.org/10.5565/rev/ec/v29n1.435

Muñoz-Catalán, M. C., Liñán-García, M. M, y Joglar-Prieto, N. (2025). La naturaleza de las matemáticas escolares en Educación Infantil. *Edma 0-6: educación matemática en la infancia*, *14*(1), 85-104. https://doi.org/10.24197/edmain.1.2025.85-104

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics.

Ölmez, İ. B., Han, J., Hwang, S. y Cai, J. (2025). Mathematical Problem-Posing Research: Revisiting Some Answered and Unanswered Questions. *AIEM-Avances de investigación en educación matemática, 28*, 11-30. https://doi.org/10.35763/aiem28.

Stein, M. K. y Smith, M. S. (1998). Mathematical Tasks as a Framework for Reflection: From Research to Practice. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*, 268-275.

DIFICULTADES EN EL APRENDIZAJE DE PATRONES IDENTIFICADAS POR PROFESORES DE PRIMARIA

Difficulties in learning patterns identified by primary school teachers

Reyes-Escobar, M. E.[a] y Moreno, A.[b]

[a] Universidad de Almería, [b] Universidad de Granada

Resumen

El objetivo de este estudio es analizar cómo el profesorado de educación primaria percibe las dificultades que presentan los estudiantes en el aprendizaje de patrones tras la implementación de una unidad didáctica. Se realiza un análisis cualitativo de contenido de 36 portafolios docentes pertenecientes al sistema de evaluación del desempeño profesional docente en Chile. A partir del análisis emergen categorías de dificultades percibidas por el profesorado sobre las capacidades asociadas al aprendizaje de patrones. Los resultados muestran un claro predominio de dificultades asociadas a las capacidades de: identificar la regularidad, ampliar un tramo y generalizar una regla mientras que las capacidades de: reproducir, interpolar, trasladar y crear un patrón aparecen con menor frecuencia. Estos resultados permiten aportar evidencias sobre cómo el profesorado interpreta las dificultades del alumnado en el aprendizaje temprano del álgebra.

Palabras clave: *planificaciones, primaria, pensamiento algebraico*

Abstract

The aim of this study is to analyse how primary school teachers perceive the difficulties students encounter in learning patterns after the implementation of a teaching unit. A qualitative content analysis was conducted on 36 teacher portfolios belonging to the professional teacher performance evaluation system in Chile. The analysis revealed categories of difficulties perceived by teachers regarding the skills associated with learning patterns. The results show a clear predominance of difficulties associated with the skills of identifying regularity, extending a range, and generalizing a rule, while the skills of reproducing, interpolating, transferring, and creating a pattern appeared less frequently. These results provide evidence on how teachers interpret students' difficulties in the early learning of algebra.

Keywords: *planning, primary, algebraic thinking*

INTRODUCCIÓN

El álgebra en educación primaria constituye un pilar fundamental para desarrollar el pensamiento algebraico desde edades tempranas, mediante el trabajo con patrones y la generalización de sus regularidades. Autores como Zapatera (2018) propone que la exploración de patrones en primaria sienta las bases para transitar de estrategias aritméticas a expresiones generales, fomentando procesos como la generalización.

La presencia de patrones está presente en distintos currículos internacionales. El currículo australiano introduce variable y función a través de patrones y su generalización, el de Costa Rica se centra en las funciones matemáticas mediante la generalización aritmética y de patrones, mientras que Corea y Singapur destacan los patrones y funciones con resolución de problemas (Zapatera, 2018). El currículo español incluye patrones en los tres ciclos de primaria. Y el currículo chileno menciona que el estudiantado pueda explicar y describir relaciones, y observar patrones en secuencias de diferentes elementos tales como: objetos, imágenes o números que representan regularidades.

Reyes-Escobar, M. E. y Moreno, A. (2026). Dificultades en el aprendizaje de patrones identificadas por profesores de primaria. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (pp. 497-504). SEIEM.

Dentro de los antecedentes desde el *Early Álgebra* se han venido estudiando las dificultades de los estudiantes de primaria con patrones. Morales et al. (2017) se centra en la resolución de tareas de patrones cualitativos, cuantitativos y su generalización. Torres et al. (2025) aborda la creación de patrones por estudiantes de tres niveles de primaria mediante una tarea de invención abierta donde estos identifican el patrón creado analizando las representaciones que ellos utilizaron y la estructura y secuencias empleadas, encontrando que los estudiantes prefieren crear patrones crecientes utilizando representaciones numéricas y visuales.

Sin embargo, la investigación de patrones se ha centrado en educación infantil y los estudios en educación primaria son escasos (Morales et al, 2017; Reyes-Escobar y Moreno, 2023). En esta línea, Callejo y Zapatera (2014) señalan que los estudios existentes no profundizan suficientemente en la naturaleza de estas dificultades, aunque sí permiten visibilizar el proceso de generalización. Asimismo, aunque la literatura documenta ampliamente estos obstáculos desde la perspectiva estudiantil, existe una brecha notable en estudios que analicen las percepciones del profesorado de educación primaria sobre dichas dificultades.

En los antecedentes sobre la percepción del profesorado encontramos investigaciones tanto en formación inicial como en formación continua. Moss y London (2011) reportan un estudio con profesorado de primaria, en el que se implementan secuencias de trabajo con patrones. Concluyen que los docentes que participaron tendieron a focalizar la atención de los estudiantes en tres aspectos: las configuraciones de un patrón, las relaciones entre reglas y patrones, y la covariación entre la posición y el número de elementos. Asimismo, en el ámbito de la formación inicial y continua, Vale y Pimentel (2013) desarrollan un programa de formación cuya idea central consiste en algebrizar la experiencia matemática del profesorado. Por su parte, Solar y Rojas (2015) enfatizan que el aprendizaje efectivo del álgebra temprana depende de una gestión didáctica específica, lo que hace imperativo explorar cómo los docentes identifican y categorizan estas dificultades en su práctica. La presente investigación se sitúa en línea con estos trabajos, en tanto comparte el interés por el aprendizaje de patrones y por el papel del profesorado en el desarrollo del pensamiento algebraico temprano. Sin embargo, se diferencia de ellos al centrarse en las dificultades que el profesorado en servicio declara haber identificado en sus estudiantes tras implementar unidades didácticas sobre patrones. De este modo, el estudio no analiza directamente las producciones del alumnado ni una propuesta de formación docente, sino las interpretaciones que el profesorado construye sobre las dificultades observadas en un contexto real de aula.

A pesar de estos antecedentes, la investigación sobre dificultades en el aprendizaje de patrones se ha centrado principalmente en las producciones del estudiantado o en propuestas de intervención y formación docente. En menor medida se ha estudiado cómo el profesorado en servicio interpreta, describe y organiza las dificultades que observa en sus estudiantes después de implementar propuestas de enseñanza sobre patrones. Esta perspectiva resulta relevante porque las dificultades que el profesorado reconoce no sólo informan sobre los obstáculos del alumnado, sino también sobre qué aspectos del pensamiento algebraico temprano adquieren mayor o menor visibilidad en la práctica docente.

En este sentido, la presente comunicación aporta una mirada específica al analizar reflexiones escritas por profesorado chileno de educación primaria en el marco de portafolios docentes elaborados tras la implementación de unidades didácticas sobre patrones. A diferencia de estudios centrados en el desempeño directo del alumnado, este trabajo permite indagar en las dificultades tal como son percibidas y formuladas por docentes en servicio, en un contexto real de enseñanza y evaluación profesional. Este enfoque permite identificar qué dimensiones del aprendizaje de patrones son reconocidas con mayor frecuencia por el profesorado y cuáles aparecen de manera más marginal en sus reflexiones.

Por ello, nos planteamos la siguiente pregunta de investigación: ¿cómo perciben los docentes de primero a sexto de primaria las dificultades del estudiantado en el aprendizaje de patrones? El objetivo del estudio es describir las percepciones del profesorado sobre dichas dificultades a partir del análisis de sus reflexiones docentes.

MARCO TEÓRICO

Las investigaciones sobre las dificultades de los estudiantes han sido un tema de interés permanente en educación matemática, dando lugar a diversas propuestas de clasificación de los errores. En este sentido, Radatz (1980) desde el enfoque de procesamiento de la información identifica cinco categorías: errores debidos a dificultades de lenguaje, errores debidos a dificultades para obtener información espacial, errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos, errores debidos a asociaciones incorrectas del pensamiento y errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes.

No obstante, más allá de su clasificación, resulta fundamental considerar el papel del error desde la perspectiva del estudiante. En este sentido, su valor radica en la toma de conciencia y en la generación de condiciones didácticas que permitan reconocerlo y superarlo. Así, el error adquiere una potencialidad no solo cognitiva, sino también afectiva, al contribuir a mejorar la actitud del alumnado hacia las matemáticas (Rico, 1995).

Estas dificultades se relacionan también con la comprensión del lenguaje algebraico. Nataraj y Thomas (2017) indican que las letras en álgebra pueden asumir distintos significados: como incógnitas, números generales, variables o parámetros. Sin embargo, los estudiantes tienden a interpretarlas únicamente como valores desconocidos, lo que limita una comprensión más profunda. En esta misma línea, Booth et al. (2017) señalan que errores conceptuales, como la interpretación del signo igual, el uso de variables o los números negativos, reflejan una comprensión insuficiente y dificultan el aprendizaje algebraico avanzado. Para abordarlos, propone el uso de explicaciones a ellos mismos y el análisis de ejemplos resueltos, tanto correctos como incorrectos, desde etapas tempranas.

Respecto a las dificultades que presentan los estudiantes en matemáticas no distan tanto de los errores que presentan en la enseñanza de patrones. Diversas investigaciones han documentado las dificultades que enfrentan los estudiantes al trabajar con patrones en las primeras edades de escolarización. Ya lo plantea Zapatera (2018) que para desarrollar el pensamiento algebraico se propone el trabajo con patrones y el estudio de sus regularidades y propiedades mediante tareas de generalización. Mulligan et al. (2020) señalan que el estudiantado presenta problemas para identificar el núcleo y la estructura del patrón; Lüken y Sauzet (2020) destacan la confusión respecto al conjunto de elementos que se repiten; y Sarama y Clements (2009) observan errores cuando ciertos elementos de la secuencia se repiten con mayor frecuencia que otro.

METODOLOGÍA

En la metodología se emplea una metodología cualitativa porque se utiliza un análisis de contenido de una fuente documental, lo que implica recopilar, revisar, cuestionar y analizar diferentes textos escritos en este caso en formato digital. El alcance de la investigación es de tipo descriptivo, porque se realiza una recolección de información desde las reflexiones docentes escritas por profesores después que implementan una unidad didáctica del contenido de patrones en primaria. También se utiliza el análisis didáctico utilizando el análisis cognitivo con las limitaciones de aprendizaje. Este organizador se enfoca en las dificultades de aprendizaje, dentro del cual se consideran los errores y dificultades de los estudiantes (Rico et al., 2013).

Participantes

Nuestro contexto es la evaluación docente y los participantes son profesores que escriben los portafolios en este proceso. Esta investigación utiliza como instrumento de recogida de datos los portafolios de treinta y seis profesores en servicio que imparten matemáticas desde primero a sexto. Estos portafolios cuentan con planificaciones y reflexiones sobre la enseñanza de patrones, cuando el contenido de patrones llevaba tres años incorporado al currículo y analizamos aquí el apartado sobre las dificultades de aprendizaje que presenta el estudiantado de primaria para este contenido. Los portafolios son documentos oficiales y reservados que fueron solicitados al sistema de evaluación del desempeño profesional docente, sistema que organiza el proceso de Evaluación Docente aplicada en Chile y para el fin de esta investigación se garantiza la confidencialidad de la información, y el resguardo de la identidad de cada docente.

Clasificación y selección de la muestra

La selección de los documentos se hizo de forma intencionada, optando por la asignatura de matemática, eligiendo el eje temático de patrones y álgebra, seleccionando el nivel de enseñanza abarcando desde primero a sexto, y escogiendo los objetivos curriculares de patrones. Por lo tanto, esta es parte de una muestra de treinta y seis portafolios del contenido de patrones, cuando el profesorado llevaba tres años con los cambios curriculares que incorporan los patrones en primaria (Reyes- Escobar y Moreno, 2023) y analizamos aquí el apartado sobre las dificultades de aprendizaje que presenta el estudiantado de primaria.

Codificación

La codificación se realiza en unidades de significación y categorías, definición de unidades de análisis y registro, y para el abordaje del profesorado frente a esas dificultades se tomaron en consideración 32 extractos para el análisis de datos mediante tablas y frecuencias. A partir del análisis de los portafolios docentes, las dificultades reportadas por el profesorado se organizaron en dimensiones analíticas de las capacidades asociadas al aprendizaje de patrones. Los documentos se codifican mediante palabras o frases breves que sintetizan los datos. Luego, la información se divide en unidades de significado, se clasifica en categorías y sus descriptores se agrupan según criterios definidos. Procedemos a codificar las treinta y seis reflexiones de los profesores de primaria especificando a cada uno por letra, utilizando el curso y el orden de portafolio. Nuestras unidades de información son extractos que describen las dificultades de los estudiantes que percibieron los profesores de primaria después de implementada sus clases. El análisis se apoyó en una hoja de registro construida ad hoc, en la que se clasificaron categorías y descriptores (ver tabla 1).

Tabla 1

Categorías y descriptores

Capacidades de patrones	Reproducir es copiar o duplicar un patrón dado. Identificar, reconocer o descubrir la regularidad del patrón. Ampliar, continuar un tramo de acuerdo con el núcleo que la rige. Interpolar, extrapolar o completar partes vacías de un patrón. Trasladar, utilizar el mismo patrón sobre propiedades diferentes. Crear, construir o inventar una sucesión. Generalizar, abstraer o determinar una regla.

RESULTADOS

La alfabetización de patrones en las primeras edades de escolarización está relacionada con siete capacidades según diversos autores (Lüken y Sauzet, 2020; Papic et al., 2011; Bolaños y Moreno 2024). El análisis de la Tabla 2 revela que el profesorado percibe las dificultades de los estudiantes

en las capacidades de aprendizaje asociadas a la enseñanza de patrones diferenciando estás en los distintos niveles educativos de primaria desde primero a sexto.

Tabla 2

Dificultades de los estudiantes en las capacidades de aprendizaje de patrones

Niveles	1º	2º	3º	4º	5º	6º	
Reproducir		1					1 (3,5%)
Identificar	2	4	7	1	2		16 (55,1%)
Ampliar	3				1		4 (13,7%)
Interpolar	1		1				2 (7%)
Trasladar						1	1(3,5%)
Generalizar					1	3	4 (13,7%)
Crear		1					1 (3,5%)
	6	6	8	1	4	4	29 (100%)

Estas dificultades respecto a las capacidades de patrones están presentes en todos los niveles, pero con una mayor frecuencia en los tres primeros niveles educativos, lo que indica que el aprendizaje de patrones está íntimamente relacionado con ellas. Las mayores dificultades se concentran, especialmente en la identificación de regularidades en los primeros niveles de primaria, mientras que en cursos superiores aparecen dificultades vinculadas a la generalización. Y también refleja que la presencia persistente se remite a la complejidad de ir aumentando la abstracción y la variedad de ellas para el proceso de enseñanza-aprendizaje de los patrones.

La tabla muestra que la principal dificultad del alumnado se concentra en identificar la regularidad, lo que indica que más de la mitad de los errores se producen en el reconocimiento inicial del patrón. En segundo lugar, aparecen ampliar y generalizar una regla, lo que sugiere problemas para extender un tramo del patrón como para abstraer o traducir su regla y a continuación mostramos ejemplos de estas tres primeras capacidades con mayores frecuencias (ver Tabla 2).

Las capacidades de interpolar o extrapolar elementos faltantes en una secuencia tienen una baja presencia, mientras que reproducir, trasladar y crear presentan una mínima presencia. Esto evidencia que las dificultades disminuyen en las tareas menos frecuentes, aunque siguen mostrando una tendencia hacia la complejidad creciente. En conjunto, la tabla sugiere que el alumnado necesita un refuerzo específico en el paso desde la simple observación del patrón hacia su comprensión, ampliación y formulación general.

Figura 1

Ejemplo de la capacidad de identificar regularidades

A través del monitoreo constante que realicé durante la ejecución de mi plan de trabajo, pude identificar que una de las dificultades más frecuentes presentadas por mis estudiantes; consistió específicamente en identificar, comprender y aplicar una regla o patrón de formación combinada, evidenciando dificultad para determinar cada número o término de la secuencia numérica a través de dos reglas aditivas sumar 5, sumar 3, a partir de 7, lo que implica un proceso cognitivo complejo de análisis y aplicación en el que debían alternar una adición con otra, para completar dicha sucesión, es decir, al primer término de la secuencia debían sumar (+5) para obtener el segundo término (12) al cual se le sumaba otro (+3) para obtener el tercer término e ir completando una sucesión con regla de formación combinada.

El primer ejemplo, menciona la dificultad de identificar la regularidad de dos reglas aditivas. Se presenta el extracto de una profesora de Educación Especial en Dificultades Específicas de Aprendizaje de tercer año básico (3ºH), en un colegio de la región de la Araucanía. Elegimos el nivel de tercero porque el profesorado evidenció mayores dificultades en esta capacidad. En este extracto la profesora evidencia la dificultad para identificar la regularidad en secuencias que combinan una suma de 5 y de 3 (ver Figura 1).

Figura 2

Ejemplo de la capacidad de ampliar un tramo

Se presentaron diversas dificultades en relación con la habilidad para establecer el concepto de patrón en secuencias repetitivas y numéricas, se observó que en el desarrollo de las clases ordenaban las secuencias olvidando las variables cualitativas. Estas dificultades se presentaron al ordenar los bloques lógicos, si bien eran elementos antes usados por los alumnos(as), la mayor dificultad se presentó en el orden del tamaño, color y forma (variables cualitativas), a modo de ejemplo, un alumno debía crear una secuencia continua a la de su compañero (cuadrado rojo grande, circulo amarillo grande y triangulo azul grande), su compañero creo una secuencia con los colores antes mencionados pero eligió solo una forma (cuadrado) y un tamaño (mediano). La mayor dificultad era la comprensión de secuencias numéricas a nivel simbólico, en la acción de quitar y agregar elementos para continuar el patrón numérico.

El segundo ejemplo es referido a la capacidad de ampliar un tramo el siguiente extracto es de una profesora de Educación Especial en Dificultades Específicas de Aprendizaje de primer año básico (1ºE), en una escuela de la región de O'Higgins, la profesora observa la dificultad que presentan sus estudiantes en ampliar el tramo del patrón continuando el de su compañero combinando tres atributos como el tamaño, color y forma (Figura 2).

A continuación, se muestra un ejemplo de la tercera frecuencia que es generalizar una regla. Presentamos el extracto de un profesor generalista de sexto año de primaria (6ºA) de un colegio de la región de Atacama. El profesor menciona que al presentarles un problema los estudiantes no generalizan una expresión matemática (ver Figura 3).

Figura 3

Ejemplo de la capacidad de generalizar

Me di cuenta de que los estudiantes presentan esta dificultad en las diferentes actividades y tareas propuestas para ese objetivo de clase. Una vez dada la situación problemática, por ejemplo: "María está vendiendo chupetes. El 1° día vendió 9 chupetes, el 2° día 18, 3° día 27 ... Si las ventas continúan en la misma frecuencia, ¿cuántos chupetes venderá María el 4° y 5° día? " ellos organizaban los datos en una tabla e identificaban los patrones o regularidades que había en ellas determinando cuántos chupetes vendería María el 4° y 5° día: Días 1°, 2°, 3°, 4°, 5°. Venta 9, 18, 27, 36, 45.
No obstante, al momento de indicarles "Si x es el número de días" y pedirles "cuál expresión permitía encontrar los valores de la variable Venta" no podían generalizar una expresión matemática que pudiese justificar los valores encontrados como respuestas.

El aprendizaje de patrones presenta dificultades relevantes en el paso de la generalización cercana a la generalización lejana, especialmente por la falta de flexibilidad estratégica de los estudiantes, quienes tienden a mantenerse en estrategias de recuento y encuentran dificultades para transformarlas en expresiones generales (Callejo y Zapatera, 2014).

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Los resultados de este estudio muestran que las dificultades percibidas se concentran principalmente en las capacidades de patrones. Lo que muestra de alguna manera que las intenciones curriculares son muy diferentes a las oportunidades efectivas de aprendizaje que se ofrecen en las aulas (Zapatera, 2018; Morales et al., 2017). Aunque los currículos internacionales incorporan la generalización de patrones desde los primeros años, el profesorado sigue identificando dificultades en tareas que pueden considerarse básicas dentro de este campo (Zapatera, 2018).

Las dificultades relacionadas con las capacidades de: reproducir un patrón, trasladar y crear aparecen con menor frecuencia. El hecho de que estas dificultades se registren con poca frecuencia permite plantear la hipótesis de que quizá el profesorado no las planifique y que, por eso, tienen menor visibilidad, lo que incrementa la probabilidad de errores (Zapatera, 2018; Acosta et al., 2022) Sabiendo que los textos escolares son el principal recursos del profesorado y que el estudio de

Bolaños y Moreno (2024) evidenciaron la escasa presencia de estas capacidades asociadas a los patrones en los textos escolares, así como la limitada inclusión de tareas que favorezcan su aprendizaje, ya que sólo identificaron tres: duplicar un patrón, abstraer o traducir un patrón, y crear o inventar un patrón, este estudio ratificaría en parte nuestra hipótesis.

Las categorías emergentes desde la percepción docente sobre las dificultades de los estudiantes de las capacidades asociadas al aprendizaje de patrones son parte de un contexto real de aula de primaria y de profesorado en servicio, lo que constituye un aporte porque se reportan pocos estudios en este ámbito (Morales et al., 2017; Torres et al., 2025). Finalmente, los resultados sugieren implicaciones para el diseño curricular y la práctica de aula. Al mismo tiempo, se refuerza la importancia de aprovechar esto como una herramienta para transformar las dificultades del alumnado en oportunidades de ajuste y mejora de la enseñanza.

Más allá de la identificación de las dificultades del alumnado, este estudio aporta información relevante sobre cómo el profesorado interpreta y conceptualiza los obstáculos que emergen durante el aprendizaje de patrones. Las reflexiones docentes analizadas muestran que el profesorado reconoce principalmente dificultades relacionadas con las capacidades de patrones. Este resultado sugiere que la mirada docente tiende a centrarse en habilidades observables asociadas a la identificación o continuación de patrones, mientras que otras dimensiones más abstractas del razonamiento algebraico temprano pueden tener menor visibilidad en la práctica de aula. En este sentido, el estudio contribuye a comprender el conocimiento profesional del profesorado sobre las dificultades del alumnado y pone de manifiesto la importancia de abordar estas dimensiones en los procesos de formación inicial y continua del profesorado.

Las limitaciones del estudio radican en que solo se dispone de las planificaciones y reflexiones de los portafolios docentes, sin acceso a otros instrumentos, como evaluaciones o grabaciones de clases. Como línea futura de investigación, se propone replicar y ampliar el estudio a otros contenidos algebraicos, incorporando diversos instrumentos y considerando su uso en la formación inicial y continua del profesorado.

Agradecimientos

Becas Chile de doctorado en el extranjero, Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo (ANID) Folio 72220142.

Proyecto con referencia PID 2020-113601 GB-I00, financiado por la Agencia Estatal de Investigación (AEI) de España. Proyecto de referencia PID 2024-157106NB-I00; financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033, y FEDER, UE.

Referencias

Acosta, Y., Pincheira, N. y Alsina, Á. (2022). Tareas de enseñanza con patrones de repetición: Fortalezas y Debilidades en proyectos editoriales de educación infantil. *Formación del profesorado e investigación en educación matemática XIV*, 11-25.

Bolaños, H. y Moreno, A. (2024). Finalidades de las tareas de patrones presentes en los libros de texto de primaria en Costa Rica. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), Investigación en Educación Matemática XXVII (pp. 129-136). SEIEM.

Booth, J. L., McGinn, K. M., Barbieri, C. y Young, L. K. (2017). Misconceptions and learning of algebra. In A. A. Rupp y J. P. Leighton (Eds.), *The Wiley Handbook of Cognition and Assessment: Frameworks, Methodologies, and Applications* (pp. 93-113). Wiley-Blackwell.

Callejo, M. L. y Zapatera, A. (2014). Flexibilidad en la resolución de problemas de identificación de patrones lineales en estudiantes de educación secundaria. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 28*, 64-88. https://doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a04

Lüken, M. y Sauzet, O. (2020). Patterning strategies in Early Childhood: a mixed methods study examining 3- to 5-year-old children's patterning competencies. *Mathematical Thinking and Learning, 23*(1), 28-48. https://doi.org/10.1080/10986065.2020.1719452F

Morales, R., Cañadas, M. C. y Castro, E. (2017). Generación y continuación de patrones por dos alumnas de 6-7 años en tareas de seriaciones. PNA. 11(4), 233-252. https://doi.org/10.30827/pna.v11i4.6241

Moss, J. y London McNab, S. (2011). An Approach to Geometric and Numeric Patterning that Fosters Second Grade Students' Reasoning and Generalizing about Functions and Co-variation. In: Cai, J., Knuth, E. (eds). *Early Algebraization. Advances in Mathematics Education*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_16

Mulligan, J., Oslington, G. y English, L. (2020). Supporting early mathematical development through a pattern and structure intervention program. *ZDM-International Journal of Mathematics Education, 52*, 663-676.

Nataraj, M. S. y Thomas, M. (2017). Teaching and learning school algebra: Valuable lessons from the history of mathematics. In S. Stewart (Ed.), *And the Rest is Just Algebra*, 131-154. Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-45053-7_8

Papic, M. M., Mulligan, J. T. y Mitchelmore, M. C. (2011). Assessing the development of preschoolers' mathematical patterning. *Journal for Research in Mathematics Education, 42*(3), 237-268. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.42.3.0237

Radatz, H. (1980). Student's Errors in the Mathematics Learning Process: a Survey. *For the Learning of Mathematics, 1*, 16-20.

Reyes-Escobar, M. y Moreno, A. (2023). Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos de patrones utilizadas en planificaciones de primero de educación primaria. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo, E. y P. Ivars (Eds.), Investigación en Educación Matemática XXVI (pp. 467-474). SEIEM.

Rico, L. (1995). Errores en el aprendizaje de las matemáticas. En Kilpatrick, J., Gómez, P. P. y Rico L. (Eds.), *Educación matemática*. Grupo Editorial Iberoamericana.

Rico, L., Lupiáñez, J. L. y Molina., M. (2013). *El análisis didáctico en educación matemática. Metodología de investigación, innovación curricular y formación de profesores*. Universidad de Granada.

Sarama, J. y Clements, D. H. (2009). *Early Childhood mathematics education research. Learning trajectories for young children*. Routledge.

Solar, H. y Rojas, F. (2015). Elaboración de orientaciones didácticas desde la reflexión docente: el caso del enfoque funcional del álgebra escolar. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias, 10*, (1), 14-33.

Torres, M. D., Ayala-Altamirano, C. y Ramírez- Uclés, R. (2025). Growing patterns invention by primary education students. *Research in Mathematics Education, 27*(3), 566-586. https://doi.org/10.1080/14794802.2024.2344211

Vale, I. y Pimentel, T. (2013). O pensamento algébrico e a descoberta de padrões na formação de professores. *Da Investigação às Práticas, 3*(2), 98-124.

Zapatera Llinares, A. (2018). Introducción del pensamiento algebraico mediante la generalización de patrones. Una secuencia de tareas para educación infantil y primaria. *Números, 97*, 51-67.

CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL PROFESORADO DE MATEMÁTICA SOBRE EL HISTOGRAMA Y EL GRÁFICO DE CAJA

Math faculty's specialised knowledge of histogram and box-plot

Rodríguez-Alveal, F.[a], Aguayo-Arriagada, C. G.[b] y Díaz-Levicoy, D.[c]

[a]Universidad del Bío-Bío, [b]Universidad de Almería, [c]Universidad Católica del Maule

Resumen

El presente trabajo analiza el conocimiento estadístico especializado de futuros profesores de Educación Secundaria cuando leen información representada en un histograma y un gráfico de caja. Esta investigación sigue un enfoque cualitativo, donde se realiza un análisis de contenido de las respuestas entregados por 42 futuros profesores. En general, los participantes confunden los estadígrafos de tendencia central con los de cuantificación de la variabilidad de los datos representados. Asimismo, frente a histogramas bimodales, omiten refutar la aseveración de que el gráfico de caja constituye la gráfica alternativa más pertinente. En conclusión, los futuros profesores de matemática que participaron del estudio conocen estadísticos de variabilidad como el rango, rango intercuartílico y varianza, sin embargo, evidencian un escaso conocimiento especializado requerido para la lectura de representaciones gráficas de datos cuantitativos.

Palabras clave: *histograma, gráfico de caja, lectura, profesores en formación, conocimiento estadístico.*

Abstract

This study analyses the specialised statistical knowledge of future secondary school teachers when interpreting information presented in histograms and box plots. The research employs a qualitative approach, conducting a content analysis of responses from 42 prospective teachers. In general, participants confuse measures of central tendency with those that quantify the variability of the represented data. Furthermore, when presented with bimodal histograms, they fail to refute the assertion that the box plot is the most appropriate alternative. In conclusion, the prospective mathematics teachers who participated in the study are familiar with variability statistics such as range, interquartile range, and variance; however, they demonstrate limited specialised knowledge related to the process of interpreting graphical representations of quantitative data.

Keywords: *histogram, box graph, reading, teachers in training, statistical knowledge.*

INTRODUCCIÓN

La formación del profesorado constituye un campo de interés en la investigación en Educación Matemática, particularmente en el área de la estadística (Díaz-Levicoy et al., 2017; Mayorga, 2025; Morales-Garcia et al., 2022). En este sentido, la construcción e interpretación de representaciones gráficas forman parte de las habilidades promovidas por el *Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education* (Bargagliotti et al., 2020), debido a que permiten organizar, visualizar y comunicar información contenida en datos cuantitativos (Wild y Pfannkuch, 1999). En particular, el histograma y el gráfico de caja posibilitan representar características distribucionales de los datos, tales como la tendencia central, la forma y la variabilidad (Triola, 2018). Diversas investigaciones han reportado dificultades en la interpretación de estas representaciones gráficas, especialmente en relación con la comprensión de la variabilidad y de las características distribucionales de los datos (Boels et al., 2025; Cooper, 2018; Lem et al., 2015). Sin embargo, estos estudios se han centrado principalmente en estudiantes, existiendo menor evidencia respecto del conocimiento que poseen los

Rodríguez-Alveal, F., Aguayo-Arriagada, C. G. y Díaz-Levicoy, D. (2026). Conocimiento especializado del profesorado de matemática sobre el histograma y el gráfico de caja. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (pp. 505-512). SEIEM.

futuros profesores de matemática sobre este tipo de representaciones (Madrid et al., 2022). Considerando que serán los encargados de enseñar estos contenidos en el sistema escolar, resulta relevante analizar los conocimientos y argumentos estadísticos que movilizan al interpretar histogramas y gráficos de cajas. Producto de lo anterior, el propósito del presente estudio es 1) Evaluar los conocimientos y habilidades de los profesores de matemática adquiridas en las asignaturas de estadística durante su proceso formativo y 2) Caracterizar los argumentos estadísticos que utilizan los profesores de matemática en formación para cuantificar la variabilidad de los datos desde las representaciones gráficas.

ANTECEDENTES

Boels et al. (2019) mencionan que el histograma y el gráfico de caja representan tanto datos como conceptos estadísticos. Estas representaciones son el resultado del proceso de transnumeración (Wild y Pfannkuch, 1999), el cual permite cambiar un conjunto de datos cuantitativos en una representación gráfica en la que es posible visualizar características de los datos, tales como la forma, la tendencia central y la variabilidad (Triola, 2018), aspecto que no son observables en los datos brutos. En este contexto, la variabilidad es una característica de los datos cuyo control y cuantificación son habilidades vinculadas con el desarrollo del pensamiento estadístico (Wild y Pfannkuch, 1999).

No obstante, como mencionan Lem et al. (2015), el gráfico de caja es frecuentemente mal interpretado y los intentos educativos por corregir estas interpretaciones no han reportado el éxito esperado, es decir, que el estudiantado pueda extraer información del gráfico de caja de manera de explicar el comportamiento de los datos. En esta línea Pfannkuch (2007) proporciona antecedentes de que el estudiantado, en general, compara los cinco puntos que componen el gráfico, sin considerar la distribución que emerge de la representación. Por otro lado, Pastore et al. (2017) hacen notar que el gráfico de caja no siempre permite representar adecuadamente el comportamiento de un conjunto de datos en algunas situaciones. Por ejemplo, en distribuciones multimodales, la estructura del gráfico no permite visualizar claramente la forma de la distribución de los datos (Triola, 2018).

Sin embargo, el histograma, como mencionan Bruno y Espinel (2009), "es muy sensible a la amplitud de los rectángulos, cuyas dimensiones pueden alterar su apariencia" (p. 476). No obstante, el histograma además de mostrar el comportamiento distribucional de los datos permite introducir distribuciones de probabilidad continuas. Por su parte, Cooper (2018) ha presentado evidencias acerca de las dificultades que presentan los estudiantes al leer e interpretar la información contenida en un histograma, así como de los errores conceptuales que manifiestan al interpretar la variabilidad presente en dicha representación. En cambio, Boels et al. (2025) proporcionan evidencias que los estudiantes de secundaria tienen dificultades en reconocer que las alturas de las barras de un histograma están asociadas a las frecuencias observadas de una tabla de distribución, como así también asociar la altura de las barras con la variabilidad de los datos, además no identifican la naturaleza de la variable y su nivel de medición. En síntesis, los antecedentes evidencian dificultades en la interpretación de histogramas y gráficos de cajas, especialmente en la comprensión de la variabilidad y de las características distribucionales de los datos. En este contexto, resulta relevante analizar los conocimientos y argumentos estadísticos que ponen en juego los futuros profesores de matemática al interpretar estas representaciones gráficas.

MARCO TEÓRICO

En la literatura especializada se han propuesto diversos modelos para analizar el conocimiento del profesorado en relación con la enseñanza de la matemática. Entre ellos destacan el modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK), propuesto por Carrillo et al. (2018). En el cual, interactúan tres dominios: 1) Conocimiento Matemático (MK), 2) Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK) y 3) las creencias del profesorado.

Debido que la matemática y la estadística conviven en mundos diametralmente opuestos (Groth, 2007), es posible hablar puntualmente del conocimiento especializado del profesor de matemática cuando enseña estadística. En este sentido, puede hablarse del conocimiento especializado del profesor de estadística (MTSK-estadístico) (Franco y Alsina, 2023). En función de los objetivos del estudio, el análisis se focaliza exclusivamente en el dominio Conocimiento Estadístico, particularmente en los subdominios:

Conocimiento de temas estadísticos (KoT). Se relaciona con lo que debe saber el profesor sobre los contenidos estadísticos. En el contexto de este estudio, aquellas ideas, conceptos, definiciones y propiedades sobre la noción de variabilidad y de los algoritmos de cálculo de los estadígrafos de variabilidad y su relación con la información que entrega el histograma y gráfico de caja. Asimismo, el uso adecuado del lenguaje y simbología estadística para denotar los estadígrafos de variabilidad (rango intercuartílico, desviación estándar y rango).

Conocimiento de la estructura estadística (KSS). Establece el conocimiento del profesorado respecto a qué y cómo domina los temas que enseña (Sosa, 2024), así como las relaciones interconceptuales que se puedan establecer entre los contenidos estadísticos. Ejemplo, la relación con los distintos estadísticos de variabilidad y con la cuantificación de la variabilidad de un conjunto de datos. De manera similar, la relación entre el histograma y el gráfico de caja.

MARCO METODOLÓGICO

Para dar respuesta a los objetivos de la investigación, se adoptó una metodología cualitativa centrada en un análisis de contenido (Kuckartz y Rädiker, 2023), el cual permite conocer los conocimientos y habilidades estadísticas de los futuros profesores de matemática de educación secundaria.

Contexto y participantes

El estudio se llevó a cabo con futuros profesores de Matemática de Educación Secundaria de una universidad chilena, seleccionados mediante un muestreo no probabilístico del tipo intencionado (McMillan y Schumacher, 2011). Participaron 42 futuros profesores (FPM) que habían aprobado las asignaturas de estadística incluidas en su itinerario formativo, donde han trabajado contenidos de estadística descriptiva (medidas de centralización, variabilidad, posición y representaciones gráficas) y de tópicos vinculados con la probabilidad clásica y la inferencia estadística.

Instrumento de recolección de datos

Se aplicó un instrumento de respuesta abierta que constaba de dos tareas relacionadas con la lectura de un histograma y un gráfico de caja, asociados a situaciones contextualizadas extraídas de libros de texto chilenos (Osorio et al., 2020) y de artículos publicados, las que se adaptaron al contexto nacional (Figura 1). Las que fueron validadas por investigadores chilenos relacionados con la enseñanza de la estadística y/o didáctica de la estadística.

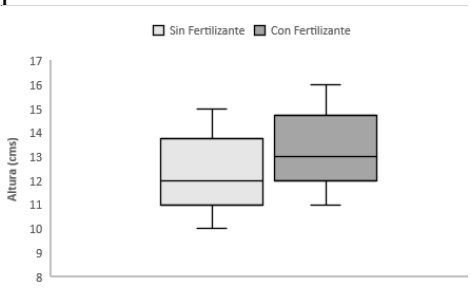
Análisis de los datos

Para el análisis de los datos se elaboró una matriz en Excel con las preguntas de las tareas propuestas en el instrumento. Los argumentos entregados fueron analizados mediante la propuesta de Mayring (2000): 1) se seleccionaron los segmentos de las respuestas entregadas por los participantes que serían analizadas; 2) se escogieron los segmentos que hacían relación al concepto variabilidad; 3) los relatos se contrastaron con los lineamientos del MINEDUC, la literatura especializada afín a temas estadísticos y los subdominios KoT y KSS del modelo MTSK-estadístico, utilizados como referentes teóricos para caracterizar los conocimientos estadísticos movilizados por los participantes.

Figura 1

Tareas aplicadas a los futuros profesores

Tarea 1. Para evaluar la efectividad de un fertilizante en plantas de tomates, una agrónoma cultivó, en dos maceteros, 20 plantas en cada uno. En los siguientes gráficos se presentan las alturas de las plantas en centímetros después de mes de crecimiento.

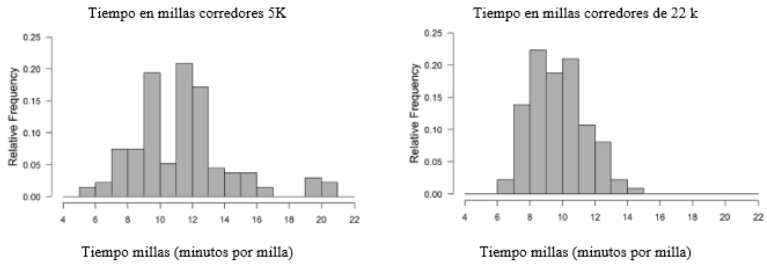


Nota: la línea representa la media aritmética

a. ¿Qué estadístico de variabilidad permitiría decidir si es efectivo el uso de fertilizante? Interprételo en el contexto de la situación problema.

b. Teniendo presente la representación gráfica ¿Cómo se compara el crecimiento de las plantas de tomates con y sin fertilizante? Justificar

Tarea 2. En el año 2023, producto del aniversario 181 de la Universidad de Chile, se realizaron dos corridas. Los participantes eligieron correr 5 km (3,1 millas) o una media maratón (13,1 millas). Ciento treinta y cuatro personas corrieron 5 kilómetros y 224 personas la media maratón. El tiempo de la milla, es el tiempo medio que tarda un corredor en correr una milla, se calculó para cada corredor dividiendo el tiempo que tardaba en terminar la carrera por la duración de la misma Los siguientes histogramas muestran las distribuciones de tiempos de milla (en minutos por milla) de los corredores en las dos carreras.



a. ¿Qué estadístico de variabilidad permitiría decidir qué grupo de corredores presenta tiempos más homogéneos? Calcular e interpretar en el contexto de la situación.

b. ¿Es el gráfico de cajas una representación alternativa para comparar la distribución de los tiempos de ambos grupos? Justificar.

c. Con base en estos datos, ¿es razonable concluir que el tiempo de una persona sería menor cuando corre una media maratón que cuando corre una de 5 km? Explicar.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Cuantificación de la variabilidad presente en el gráfico de caja y/o histograma

En la Tarea 1, inciso a) se solicitó a los participantes identificar el estadígrafo que permite cuantificar la variabilidad de las alturas de las plantas de tomate, con y sin fertilizante, haciendo uso del gráfico de caja. Al respecto, 10 de los 42 FPM mencionan el rango y/o el rango intercuartílico, como se observa en la siguiente cita:

> El rango de las alturas de plantas que se les suministra fertilizante puesto que se puede saber con qué método se mantiene mejor y más altas las plantas (FPM7).

En dicha cita no se evidencian argumentos que permitan dar cuenta del conocimiento acerca del rango y el rango intercuartílico como estadígrafos que permitan cuantificar la variabilidad cuando los datos han sido resumidos en un gráfico de caja. En esta misma línea, algunos FPM hacen referencia a la varianza y desviación estándar, sin considerar como han sido representados en un gráfico de caja (transnumeración), en el cual solamente es posible estimar el valor mínimo, máximo y los cuartiles, números asociados a su construcción. Por ejemplo:

> La varianza ya que mide que tan alejados están de la media los datos, en este caso se ve el fertilizante que tenga la mejor varianza así las plantas estarán todas iguales o muy parecidas (FPM9).

Por otra parte, algunos FPM mencionan estadísticos de centralización (media aritmética y mediana), los cuales, desde su perspectiva, permitirían cuantificar la variabilidad presente en los datos, evidenciando un escaso conocimiento estadístico (KoT-estadístico):

> Sería el promedio [,] ya que es una muestra más representativa de los datos y evidencia mejor si el uso del fertilizante es mejor o más factible (FPM2).

> El estadístico de variabilidad que permitiría decidir si es efectivo el fertilizante es la media aritmética que se marca en el gráfico, ya que permite observar el crecimiento de las plantas y saber si el uso de fertilizante produce una mayor uniformidad en el crecimiento (FPM31).

En las respuestas se observa que los participantes utilizan de manera indistinta los términos promedio y media aritmética, evidenciando una confusión conceptual acerca de las medidas de tendencia central y variabilidad, dando cuenta que los participantes del estudio no establecen conexiones conceptuales entre las nociones estadísticas (KSS). Este escenario pone de manifiesto que el grupo en estudio presenta confusión respecto a los alcances y la interpretación de los estadísticos de variabilidad y de centralización.

En relación, con las respuestas del ítem b) en el cual se solicitaba comparar la altura de las plantas con y sin fertilizantes, los participantes en general comentan que las plantas de tomates a las cuales se les aplico el fertilizante alcanzaron mayores alturas, como se muestra en la siguiente cita:

> Podemos ver que el crecimiento de los con fertilizante es mayor, ya que todo su diagrama se encuentra más arriba en comparación. (FPM1).

Además, hacen referencia a los números que conforma el gráfico de caja sin ahondar en el experimento.

Por su parte, en la Tarea 2, ítem a) los participantes hacen mayoritariamente mención de características locales acerca de la distribución de los datos (Pfannkuch, 2006), asociadas a estadísticos de variabilidad, tales como la desviación estándar (9/42) y la varianza (5/42). Un ejemplo de los argumentos entregados es:

> La varianza ya que mostraría que tan cercanos están del promedio los datos (FPM9).

Este ejemplo evidencia que los futuros profesores tienen anclado conocimientos asociados a estadísticos de variabilidad, como la varianza. Sin embargo, no consideran que los datos presentados en un histograma no permiten calcularlos, dado que en esta representación los datos se invisibilizan o quedan relegados a un segundo plano. En esta línea, 6 de los 42 participantes mencionan el rango:

> El rango nos permite ver cuál de los dos grupos tienen tiempo más homogéneo [,] ya que la dispersión de datos es bastante menor, además visualmente podemos observar pocas diferencias en los corredores de 22 Km (FPM20)

Estos resultados sugieren que los encuestados privilegian aquellos estadísticos que esencialmente son factibles de calcular o estimar al observar el histograma, sin contextualizar su interpretación a la

situación problema, lo que se relaciona con el subdominio KSS-estadístico. En este sentido, uno de los participantes menciona los estadísticos rango intercuartílico y desviación estándar:

> Basándonos en el análisis visual de los gráficos, se puede concluir que los corredores de 5km tienen tiempos más homogéneos que los de 22 km. Sin embargo, para respaldar esta conclusión sería ideal calcular el RIC (rango intercuartílico), el DE (Desviación estándar) con datos exactos (FPM15)

Esto evidencia una falta de conocimiento de acuerdo con el subdominio KoT-estadístico, considerando que el rango intercuartílico se obtiene con la diferencia entre el tercer y primer cuartil, los cuales no se pueden obtener en un histograma, debido a las características de su estructura. En contraste, este estadígrafo sí se puede identificar en un diagrama de caja, ya que los cuartiles constituyen elementos fundamentales de su construcción (Pfannkuch, 2006).

Transnumeración y visualización de la variabilidad dentro del sistema estadístico

Una de las habilidades que deberían adquirir los futuros profesores del sistema escolar es proponer representaciones gráficas alternativas acorde a la naturaleza de los datos (MINEDUC, 2015). En este contexto, en la Tarea 2, ítem c) se solicita a los participantes refutar o aceptar la aseveración entregada acerca de que el gráfico de caja es una representación alternativa al histograma. En general, los futuros profesores no refutan la interrogante planteada, argumentando que:

> Si [,] ya que nos permitiría analizar el promedio, el primer y tercer cuartil y además los tiempos máximos y mínimos (FPM1).

> Si, ya que permite ver los datos de otra manera, en la que se tienen claridad sobre el tiempo menor y mayor, Q1, Q2, promedio, lo que facilita el análisis de los datos (FPM6).

De estas respuestas se desprende que confunden la media aritmética con la mediana, además hacen referencia a los cuartiles como estadísticos que complementan el análisis de los datos. Solamente, uno de los encuestados hace mención que el tiempo que demoran los corredores de 5 Km al llegar a la meta presenta un comportamiento distribucional en el cual se evidencia la presencia del tiempo de tres grupos de corredores, mientras que la de los corredores de 22 Km es claramente unimodal. De este modo, se esperaría que concluyeran que el gráfico de caja no modela adecuadamente el comportamiento distribucional de los tiempos de los corredores de 5Km. En este contexto, solamente 2/42 participantes refutan la interrogante planteada, aunque de forma imprecisa:

> No, ya que sirven para diferentes cosas (FPM22).

> No, pues el registro de datos del gráfico izquierdo no es homogéneo y por tanto tendrá una disparidad en el gráfico y/o información no fiable (FPM39).

En estos casos, los argumentos relacionan el concepto “homogéneo” posiblemente con la variabilidad de los datos o con las alturas de las barras del histograma, es decir, con las frecuencias observadas, situación incorrecta que ha sido documentada por Cooper (2018) y Lem et al. (2013). Asimismo, asume que un conjunto de datos, con datos heterogéneos no permitiría tomar decisiones, lo cual es cuestionable atendiendo a la situación problema presentada.

CONCLUSIONES

Los resultados del presente estudio aportan información acerca del conocimiento estadístico adquirido por los futuros profesores de matemática para decidir qué estadígrafo de variabilidad utilizar cuando los datos se presentan mediante representaciones gráficas. En el caso del gráfico de caja, 10 de los 42 participantes (24%) hacen notar que el rango y/o el rango intercuartílico permite cuantificar la variabilidad presente en dicho gráfico, lo cual da cuenta del conocimiento estadístico de este estamento acorde al subdominio KoT-estadístico, lo cual coincide con la literatura especializada (Triola, 2018). No obstante, algunos participantes consideran que el promedio aritmético y/o la mediana son medidas que permiten cuantificar variabilidad, lo cual estaría

entregando evidencias que los futuros profesores en estudio presentan errores conceptuales acerca de las definiciones de los estadígrafos de tendencia central y variabilidad.

En relación con el histograma, los participantes mencionan estadísticos como la varianza y la desviación estándar. Aunque la varianza es una medida de variabilidad, no se expresa en las mismas unidades de la variable (Triola, 2018), y, además, en la construcción del histograma, los datos quedan en un segundo plano. Por esta razón, los estadígrafos de variabilidad mencionados no pueden calcularse directamente, lo que evidencia un escaso dominio de los subdimensiones KoT y KSS del modelo MTSK-estadístico. De manera similar, algunos participantes consideran al rango intercuartílico como una medida de variabilidad que es factible calcular a partir de los datos resumidos en un histograma, lo cual, estaría evidenciando una falta de conocimiento conceptual (KoT).

Al analizar la capacidad de los participantes para seleccionar representaciones gráficas adecuadas según la naturaleza de los datos, se observa que la mayoría no refutan la aseveración de que el gráfico de caja constituye una representación adecuada en presencia de datos bimodales. Esto evidencia un escaso dominio conceptual, relacionada con el subdimensión KoT-estadístico. La aceptación generalizada de esta premisa revela dificultades para reconocer las limitaciones de determinadas representaciones gráficas, hallazgo coherente con lo reportado por Rodríguez-Alveal et al. (2025). Por otra parte, los participantes que sí cuestionan la afirmación no aportan fundamentos teóricos que respalden su decisión.

Finalmente, los resultados obtenidos en el presente estudio, a partir de las respuestas proporcionadas por los profesores de matemática en formación, ponen de manifiesto la necesidad de incorporar actividades que promuevan la elección adecuada de medidas de variabilidad cuando los datos se presentan resumidos en representaciones gráficas, tales como el histograma y el gráfico de caja. Además, es necesario comparar los resultados del presente estudio con la formación recibida por este estamento en otras instituciones formadoras.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido desarrollado en el marco de: Proyecto FONDECYT REGULAR N°1261620 financiado por la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo Chile (ANID) / Proyecto PID2022-139748NB-100 financiado por MICIU/AEI/10.13039/501100011033 / Grupo de Investigación HUM-886 (Junta de Andalucía, España).

Referencias

Bargagliotti, B. (2020). *Pre-K–12 guidelines for assessment and instruction in statistics education II (GAISE II)*. American Statistical Association.

Boels, L., Bakker, A., Van Dooren, W. y Drijvers, P. (2019). Conceptual difficulties when interpreting histograms: A review. *Educational Research Review, 28*, 1-23. https://doi.org/10.1016/j.edurev.2019.100291

Boels, L., Bakker, A., Van Dooren, W. y Drijvers, P. (2025). Secondary school's students strategies when interpreting histograms and cas-values plots: an eye-tracking study. *Educational Studies in Mathematics*, *118*, 479-503. https://doi.org/10.1007/s10649-024-10351-3

Bruno, A. y Espinel, M. (2009). Construction and evaluation of histograms in teacher training. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *40*(4), 473-493. https://doi.org/10.1080/00207390902759584

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, Á., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, *20*(3), 236-253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Cooper, L. L. (2018). Assessing students' understanding of variability in graphical representations that share the common attribute of bars. *Journal of Statistics Education, 26*(2), 110-124. https://doi.org/10.1080/10691898.2018.1473060

Díaz-Levicoy, D., Arteaga, P. y Batanero, C. (2017). Lectura de pictogramas por estudiantes chilenos de Educación Primaria. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 217-226). SEIEM.

Franco S., J. y Alsina, Á. (2023). Evaluating specialized knowledge for teaching statistics and probability: construction and validation of an MTSK-Stochastic questionnaire. *Uniciencia*, *37*(1), 1-22. https://doi.org/10.15359/ru.37-1.5

Groth, R. (2007). Research commentary: toward a conceptualization of statistical knowledge for teaching. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(5), 427-437.

Kuckartz, U. y Rädiker, S. (2023). *Qualitative Content Analysis Methods, Practice and Software*. SAGE.

Lem, S., Kempen, G., Ceulemans, E., Onghena, P., Verschaffel, L. y Van Dooren, W. (2015). Combining multiple external representations and refutational text: an intervention on learning to interpret box plots. *International Journal of Science and Mathematics Education, 13*, 909-926. https://doi.org/10.1007/s10763-014-9604-3

Lem, S., Onghena, P., Verschaffel, L. y Van Dooren, W. (2013). On the misinterpretation of histograms and box plots. *Educational Psychology*, *33*(2), 155-174. https://doi.org/10.1080/01443410.2012.674006.

Madrid, A.E., Valenzuela-Ruiz, S.M., Batanero, C. y Garzón-Guerrero, J.A. (2022). Interpretación del diagrama de caja por estudiantes universitarios de ciencias de la actividad física y deporte. *Educación Matemática*, *34*(3), 275-300. https://doi.org/10.24844/em3403.10

Mayorga, M. (2025). Importancia de la estadística en los procesos de investigación universitaria. *Educational Regent Multidisciplinary Journal, 2*(4), 1-14. https://doi.org/10.63969/rgtt7645

Mayring, P. (2000). Qualitative Content Analysis. *Forum Qualitative Sozialforschung Forum: Qualitative Social Research*, *1*(2), 20. https://doi.org/10.17169/fqs-1.2.1089

McMillan, J. y Schumacher, S. (2011). *Investigación educativa*. Pearson-Adisson Wesley

MINEDUC (2015). *Bases Curriculares 7° a 2° medio*. Unidad de Currículum y Evaluación.

Morales-Garcia, L., Vidal-Henry, S., García-García, J.I. y Díaz-Levicoy, D. (2022). Análisis ontosemiótico de tareas que involucran gráficos estadísticos en libros de texto mexicanos de Educación Primaria. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 22*, 111-135. https://doi.org/10.35763/aiem22.4410

Osorio, G., Norambuena, P., Romante, M., Gaete, D., Díaz, J., Celedón, J., Morales, K., Ortiz, N., Ramírez, P., Barrera, R. y Hurtado, Y. (2020). *Matemática. Texto del estudiante 3 y 4 medio*. SM.

Pastore, M., Lionetti, F. y Altoè, G. (2017). When one shape does not fit all: A commentary essay on the use of graphs in psychological research. *Frontiers in Psychology, 8*, 1-4. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2017.01666

Pfannkuch, M. (2006). Informal inferential reasoning. En A. Rossman y B. Chance (Eds.), *Working cooperatively in statistics education: Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics* (pp. 1-6). International Statistical Institute.

Pfannkuch, M. (2007). Year 11 Students' informal inferential reasoning: A case study about the interpretation of box plots. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *2*(3), 149-167. https://doi.org/10.29333/iejme/181

Rodríguez-Alveal, F., Aguayo-Arriagada, C. G. y Díaz-Levicoy, D. (2025). Statistical knowledge of future secondary mathematics teachers in reading and arguing graphical information. Eurasia *Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 21*(12), em2751. https://doi.org/10.29333/ejmste/17503

Sosa, L. (2024). El modelo MTSK como soporte de crecimiento profesional del formador. *PNA, 18*(5), 523-549. https://doi.org/10.30827/pna.v18i5.29828

Triola, M. (2018). *Probabilidad y Estadística*. Editorial Pearson.

Wild, C. y Pfannkuch, M. (1999). Statistical Thinking in Empirical Enquiry. *International Statistical Review*, *67* (3), 223-265. https://doi.org/10.1111/j.1751-5823.1999.tb00442.x

DOMINIOS Y SUBDOMINIOS DOMINANTES, DEPENDIENTES Y ARTICULADORES EN EL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO: UNA MIRADA DESDE LAS RELACIONES DIRECCIONALES

Dominant, dependent and articulating domains and subdomains in mathematics knowledge: a view from directional relationships

Rojas-Celis, C.[a], Cáceres-García, M. J.[b] y Sánchez-Barbero, B.[b]

[a] Universidad El Bosque, [b] Universidad de Salamanca

Resumen

El modelo Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) es un marco sólido para analizar el conocimiento especializado del profesorado de matemáticas; sin embargo, persiste un vacío respecto a las definiciones operativas que caracterizan la funcionalidad de sus subdominios en la práctica docente. Para atenderlo, este trabajo analiza el discurso de un profesor universitario en dos sesiones de Cálculo Vectorial y, a partir de dicho análisis, propone y sustenta empíricamente tres nociones analítico-conceptuales: subdominio dominante, dependiente y articulador. Los resultados muestran que el Conocimiento de los Temas actúa como dominante, el Conocimiento de la Práctica Matemática como dependiente, y el Conocimiento de la Estructura Matemática como articulador. Esta conceptualización contribuye a comprender la estructura interna del conocimiento especializado y abre una línea teórica para futuras investigaciones en educación superior.

Palabras clave: *MTSK, conocimiento del profesor, enseñanza del cálculo vectorial*

Abstract

The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model is a robust framework for analysing the specialised knowledge of mathematics teachers; however, a gap persists regarding the operational definitions that characterize the functionality of its subdomains in teaching practice. To address it, this study analyses the discourse of a university professor across two Vector Calculus sessions and, from this analysis, proposes and empirically substantiates three analytical-conceptual notions: dominant, dependent, and articulatory subdomain. The results show that Knowledge of Topics operates as the dominant subdomain, Knowledge of Mathematical Practice as the dependent, and Knowledge of Mathematical Structure as the articulatory. This conceptualisation contributes to understanding the internal structure of specialised knowledge and opens a theoretical line of inquiry for future research in higher education.

Keywords: *MTSK, teacher knowledge, teaching of calculus*

INTRODUCCIÓN

El modelo *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* (MTSK) constituye un marco de referencia ampliamente utilizado para el estudio del conocimiento profesional del profesorado de matemáticas (Carrillo-Yáñez et al., 2018). Su estructura, organizada en dominios y subdominios, ha permitido identificar y describir los distintos tipos de conocimiento que se manifiestan en la práctica docente. Sin embargo, la literatura existente ha tendido a centrarse en identificar qué subdominios están presentes en la práctica docente, y pocos trabajos se ocupan del papel funcional que desempeña cada subdominio en relación con los demás.

Rojas-Celis, C., Cáceres-García, M. J. y Sánchez-Barbero, B. (2026). Dominios y subdominios dominantes, dependientes y articuladores en el conocimiento matemático: una mirada desde las relaciones direccionales. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (pp. 513-520). SEIEM.

Investigaciones recientes han avanzado en el estudio de las relaciones entre subdominios del MTSK, mostrando que ciertos tipos de conocimiento actúan como punto de partida para la activación de otros (Rojas-Celis et al., 2025; Delgado-Rebolledo y Zakaryan, 2020; Pacheco-Muñoz et al., 2023). Estos trabajos describen relaciones direccionales concretas y muestran que la activación de los subdominios no es aleatoria ni homogénea. No obstante, en dichos estudios no se evidencia una tipología de roles funcionales que permita explicar por qué ciertos subdominios actúan sistemáticamente como origen de las relaciones mientras otros lo hacen como consecuencia.

Este trabajo parte de un estudio empírico sobre el discurso de un profesor universitario de Cálculo Vectorial durante la enseñanza de derivadas en varias variables. A partir de los patrones relacionales identificados en ese análisis, se proponen tres nociones analítico-conceptuales de carácter emergente: subdominio dominante, subdominio dependiente y subdominio articulador. Estas nociones no se postulan como constructos teóricos ya establecidos, sino como categorías elaboradas inductivamente desde los datos con el propósito de dar nombre y definición operativa a regularidades funcionales observadas en el discurso docente. La propuesta se inscribe en una investigación más amplia y busca aportar herramientas conceptuales que contribuyan a comprender la estructura interna y dinámica del conocimiento especializado del profesorado en educación superior.

MARCO TEÓRICO Y ANTECEDENTES

Como se muestra en la Figura 1, el modelo MTSK organiza el conocimiento del profesorado en tres dominios: el Conocimiento Matemático (MK), —subdividido en Conocimiento de los Temas (KoT), Conocimiento de la Estructura Matemática (KSM) y el Conocimiento de la Práctica Matemática (KPM) —; el Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK), subdividido en el Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT), el Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM) y el Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (KMLS), y finalmente, las Creencias sobre las Matemáticas y sobre la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas (Carrillo-Yáñez et al., 2018). Desde su formulación, el modelo fue concebido como un sistema dinámico en el que los subdominios no operan de manera aislada, sino que interactúan y se activan de forma articulada en función de las demandas del contenido matemático y de las situaciones que emergen durante la enseñanza. El KoT comprende el conocimiento de definiciones, propiedades, procedimientos, registros de representación y aplicaciones del contenido; el KSM abarca las conexiones transversales, auxiliares, de complejización y simplificación entre conceptos matemáticos; y el KPM se vincula con las prácticas propias de la disciplina, como definir, demostrar, resolver problemas y usar el lenguaje simbólico con precisión. En el dominio del PCK, el KMT incluye estrategias, recursos y representaciones para la enseñanza; el KFLM se refiere al conocimiento sobre cómo aprenden los estudiantes, sus dificultades y formas de interacción con el contenido; y el KMLS comprende el conocimiento curricular sobre qué, cómo y cuándo enseñar (Carrillo-Yáñez et al., 2018).

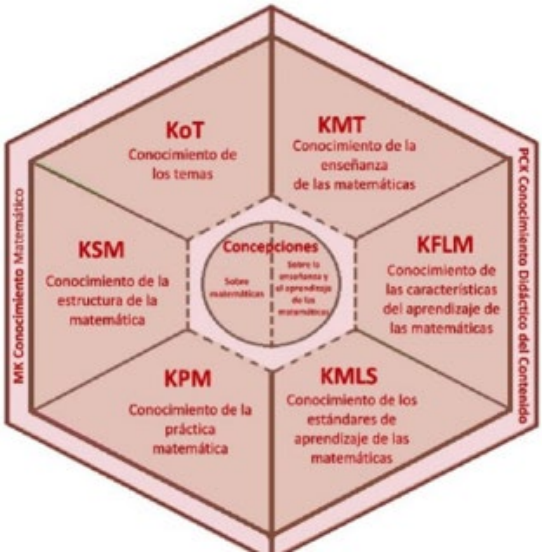
Relaciones direccionales en el MTSK

A partir de los trabajos de Zakaryan y Ribeiro (2017) y Zakaryan et al. (2018), se ha logrado evidenciar la existencia de vínculos entre el KMT y el KFLM en el análisis de prácticas de enseñanza de números racionales en un curso de octavo grado de secundaria y en la práctica de una profesora de secundaria en la enseñanza de semejanza de triángulos, respectivamente. Estos estudios mostraron que ciertos tipos de conocimiento no emergen de manera aislada, sino condicionados por otros, y que la coocurrencia de subdominios en episodios de aula no es aleatoria, sino estructurada. A partir de estas evidencias, Delgado-Rebolledo y Zakaryan (2020) propusieron una sistematización de las relaciones entre subdominios distinguiendo tres niveles: intrasubdominio, intradominio e interdominio, y señalaron que estas relaciones pueden tener carácter direccional, es decir, que un subdominio puede condicionar la emergencia de otro. Este trabajo, centrado en un profesor universitario de matemáticas, aportó también evidencia sobre la relación entre el KPM y el PCK en

contextos de enseñanza en temas de matemáticas universitarias, poniendo de manifiesto que el análisis relacional es pertinente en educación superior.

Figura 1

Subdominios del MTSK



Nota: En Contreras-González et al., (2018).

Estas ideas encontraron un desarrollo concreto en trabajos posteriores. Otero-Valega et al. (2023) identificaron relaciones entre subdominios del conocimiento de una profesora en el diseño de una planificación sobre resolución de problemas aditivos con números enteros, mostrando que el KFLM —concretamente, el conocimiento sobre dificultades de los estudiantes— condicionaba las decisiones sobre la selección y secuenciación de tareas, activando así el KMT. En esta misma línea, Almonacid y Delgado-Rebolledo (2023) analizaron las relaciones que emergen cuando una futura profesora reflexiona sobre sus prácticas de enseñanza de la función cuadrática, identificando que la reflexión docente constituye un escenario privilegiado para la activación de relaciones entre subdominios que no necesariamente se manifiestan durante la implementación de la clase. Ambos trabajos subrayan que el momento del proceso de enseñanza en el que se analiza el conocimiento —planificación, implementación o reflexión posterior— influye en qué subdominios se activan y cómo se relacionan entre sí.

El estudio de Pacheco-Muñoz et al. (2023) avanza en la caracterización de la direccionalidad al identificar y describir relaciones direccionales concretas intradominio, como KoT→KSM, KFLM→KMT y KMLS→KMT, en el contexto de la enseñanza de la localización en el plano cartesiano. Este estudio mostró que ciertas categorías de conocimiento actúan sistemáticamente como punto de partida para la activación de otras, y que esta asimetría funcional es identificable a partir del análisis del discurso del profesor y del orden argumentativo de sus explicaciones. De manera complementaria, Paternina-Borja et al. (2021) analizaron relaciones entre el KoT y el PCK en el tema de simetrías, extendiendo el análisis relacional a un nuevo contenido matemático. Por su parte, Zakaryan et al. (2018) confirman la presencia de relaciones intradominio dentro del Conocimiento Didáctico del Contenido, mostrando que el KFLM condiciona la emergencia del KMT con mayor frecuencia.

Un aspecto que la literatura ha comenzado a señalar, aunque sin conceptualizarlo, es que no todos los subdominios participan en las relaciones con el mismo rol funcional. En distintos estudios se observa que ciertos subdominios aparecen consistentemente como origen de las relaciones —es decir, son los que desencadenan la activación de otros—, mientras que otros se activan como consecuencia y no generan nuevas relaciones por sí solos. Asimismo, algunos subdominios muestran una flexibilidad

direccional particular, pudiendo actuar tanto como condicionadores como condicionados según el momento del discurso docente. Esta regularidad es reconocible en los resultados de Almonacid y Delgado-Rebolledo (2023), Pacheco-Muñoz et al. (2023) y Otero-Valega et al. (2023), aunque ninguno de estos trabajos la formula como una categoría teórica propia. En el ámbito de la educación superior, trabajos como el de Regolini y Climent-Rodríguez (2023), centrado en una profesora universitaria de álgebra lineal, y los de Delgado-Rebolledo y Zakaryan (2020) muestran patrones similares, donde el conocimiento del contenido matemático —especialmente el KoT— tiende a estructurar el discurso docente y a condicionar la emergencia de otros tipos de conocimiento.

Es precisamente esta regularidad empírica, presente en la literatura de forma implícita, la que motiva la propuesta conceptual de este trabajo.

METODOLOGÍA

La investigación adoptó un enfoque cualitativo con diseño de estudio de caso. El caso se aborda de manera instrumental, dado que el análisis del discurso del profesor constituye el medio para desarrollar las nociones teóricas propuestas y con un alcance transversal, ya que ofrece la información en un momento concreto.

El participante fue un profesor universitario con formación en matemáticas y posgrado en docencia universitaria, a cargo de un curso de Cálculo Vectorial para estudiantes de ingeniería. Su selección respondió a un criterio de disponibilidad voluntaria, entre los tres docentes que impartían esta asignatura en la universidad donde trabaja una de las investigadoras. Se analizaron dos sesiones de clase presencial sobre derivadas parciales y derivadas direccionales, seleccionadas por la complejidad conceptual de estos temas, que favorece la activación de diversos subdominios de conocimiento en el discurso docente

Tabla 1

Funciones del discurso del profesor: instrumento analítico para la segmentación de episodios

Función	Descripción
Explicativa-conceptual	El discurso otorga significado matemático al objeto de estudio: sitúa un concepto en un contexto de aplicación, fenómeno o interpretación más allá de su definición formal.
Conectiva-estructural	El discurso establece vínculos explícitos entre bloques conceptuales o entre conocimientos previos y nuevos, articulando la estructura matemática del contenido.
Interpretativa-representacional	El discurso coordina distintos registros de representación —simbólico, gráfico, geométrico— para construir o justificar el significado de un procedimiento o concepto.
Normativa-procedimental	El discurso regula la práctica matemática legítima: establece qué pasos ejecutar, en qué orden y con qué condiciones, orientando la actividad de resolución.
Formalizadora	El discurso introduce o delimita con precisión un objeto matemático: definiciones formales, enunciados de teoremas o condiciones de existencia.
Metalingüística	El discurso controla y explicita el lenguaje matemático: presenta notaciones equivalentes, corrige usos simbólicos o establece convenciones de escritura.
Organizativa	El discurso gestiona la estructura de la clase: anuncia temas, resume lo trabajado, establece la secuencia de actividades o delimita el propósito del episodio.

Nota: Elaboración propia.

Para entender los resultados que se presentan es necesario enmarcarlos en un estudio de mayor alcance. El análisis del material de investigación se desarrolló en tres fases. En la primera, se segmentaron los fragmentos del discurso de acuerdo con su función en el desarrollo de la clase. Para ello se construyó inductivamente un instrumento de segmentación con siete categorías funcionales (Tabla 1), definidas a partir del corpus y orientadas a identificar en qué momentos el discurso docente activa conocimiento matemático especializado. Este instrumento constituye una herramienta analítica propia del estudio, cuyo propósito es operacionalizar la delimitación de episodios antes de clasificar el conocimiento. En la segunda, cada fragmento fue adscrito a los subdominios del MTSK a partir de los indicadores ya establecidos como instrumento para dicha clasificación previamente (Rojas y Cáceres-García, 2024). En la tercera, se analizaron las relaciones direccionales entre subdominios, identificando cuáles actuaban como punto de partida para la activación de otros, cuáles se activaban como consecuencia, y cuáles mediaban entre ambos.

A partir de esta ruta, y específicamente desde el análisis de las funciones del discurso como categoría analítica, fue posible identificar patrones relacionales recurrentes entre subdominios y proponer la conceptualización de roles funcionales que se presenta en los resultados.

RESULTADOS

Se analizaron 36 fragmentos del discurso del profesor en dos clases. La distribución por subdominios evidenció un claro predominio del KoT, seguido del KSM. El KPM apareció de manera puntual y los subdominios del PCK —KMT y KMLS— cumplieron funciones organizativas o reguladoras. Este patrón se repite en ambas sesiones con contenidos diferentes.

En ambas sesiones, el KoT actuó sistemáticamente como punto de partida del discurso docente. Los fragmentos con función formalizadora y explicativa-conceptual fueron predominantes en cantidad y extensión, correspondieron en todos los casos a evidencias del KoT, y desencadenaron la aparición posterior de fragmentos con función conectiva-estructural e interpretativa-representacional adscritos al KSM. Este patrón configura una relación direccional KoT→KSM que se repite en ambas sesiones.

Un episodio representativo ocurre en la primera sesión, cuando el docente introduce la derivada parcial dotándola de significado matemático explícito:

> P: "Entonces resulta que hay fenómenos que dependen de estas variables en las cuales se va a mirar la velocidad o la tasa de cómo varía, porque ese es el concepto clave de las derivadas parciales: la razón de cambio de una variable con respecto a la otra. " (00:10:47–00:11:13)

Este fragmento cumple una función explicativa-conceptual y constituye evidencia del KoT. A partir de ese contenido establecido, el docente activa inmediatamente una conexión estructural con el cálculo en una variable:

> P: "En el cálculo diferencial… la derivada de una curva era la pendiente de la recta tangente… ahora de acá vamos a hacer como una transformación al cálculo en varias variables. " (00:15:21–00:17:35)

Este segundo fragmento, con función conectiva-estructural, constituye evidencia del KSM y no habría emergido sin el contenido previo del KoT. La dirección KoT→KSM es aquí identificable en la secuencia temporal del discurso.

En la segunda sesión se observa el mismo patrón antes de que emerjan relaciones de sentido inverso; el docente formaliza el teorema que permite calcular la derivada direccional (KoT) y, a partir de ese contenido establecido, introduce la representación en forma polar del vector unitario, conectando el cálculo vectorial con la trigonometría:

P: "Si el vector unitario u forma un ángulo theta con el eje x positivo, dicho vector u se puede escribir como coseno de theta en i más seno de theta en j. " (00:07:39–00:10:25)

Este fragmento, con función conectiva-estructural adscrita al KSM, emerge directamente del contenido formalizado en el KoT.

No obstante, el análisis identificó episodios de sentido inverso en la segunda sesión. Cuando el docente introduce el gradiente como objeto que sintetiza las derivadas parciales, la estructura conceptual reorganiza el contenido previamente presentado:

P: "Esto es equivalente al gradiente producto punto con u. " (00:49:02–00:49:30)

Este fragmento, con función conectiva-estructural adscrita al KSM, no emerge del KoT sino que lo resignifica; la derivada direccional, ya calculada procedimentalmente, adquiere una nueva estructura algebraica. Esto configura una relación KSM→KoT de carácter puntual y no recíproco, lo que diferencia al KSM funcionalmente del KPM y lo posiciona como subdominio articulador.

Un segundo episodio de esta relación inversa ocurre cuando el docente generaliza el gradiente a funciones de tres variables, complejizando el objeto matemático previamente definido:

P: "El gradiente está dado por la derivada parcial con respecto a x… más la derivada parcial con respecto a y… más la derivada parcial con respecto a z… Si hubiese más variables, pues continuaría. " (01:02:22–01:04:37)

Este fragmento reorganiza y amplía el significado del gradiente ya establecido, configurando nuevamente una relación KSM→KoT de carácter puntual.

El KPM emergió exclusivamente asociado a fragmentos con función metalingüística. Un primer episodio ocurre cuando el docente corrige explícitamente la variable incremental durante la definición formal:

P: "Esto sería delta de x, perdón, delta de y." (00:14:47–00:14:51)

Un segundo episodio, más representativo del KPM, ocurre cuando el docente presenta y legitima explícitamente la equivalencia entre distintas notaciones para la derivada parcial:

P: "Vamos a empezar a familiarizarnos con la notación de las primeras derivadas… cualquiera de las que voy a nombrar a continuación son equivalentes… esto significa derivada parcial con respecto a x… esta es otra anotación totalmente equivalente." (00:22:07–00:23:38)

En este fragmento, el docente no introduce nuevo contenido matemático, sino que regula el uso del lenguaje simbólico, estableciendo que distintas notaciones refieren al mismo objeto. Esto constituye una evidencia del KPM en tanto refleja conocimiento sobre el papel comunicativo y convencional del simbolismo matemático. En ninguno de estos episodios el KPM generó relaciones hacia otros subdominios; su activación configuró en ambos episodios una relación direccional KoT→KPM, lo que refuerza la centralidad del KoT como subdominio desde el que se activan tanto las conexiones estructurales del KSM como las prácticas matemáticas del KPM. Esta unidireccionalidad sin retroalimentación constituye la base empírica para caracterizarlo como subdominio dependiente.

CONCLUSIONES Y DISCUSIÓN

Los resultados obtenidos permiten analizar los roles funcionales que asumen los subdominios del MK en el discurso del profesor. A partir de los patrones identificados en el análisis, se proponen tres nociones analítico-conceptuales elaboradas inductivamente desde los patrones empíricos

identificados. Su estatuto es de categorías emergentes, ya que emergen de la reflexión sistemática sobre los patrones encontrados.

Se denomina *subdominio dominante* aquel que actúa sistemáticamente como punto de partida del discurso especializado del profesor, cuya activación no depende de la movilización previa de otro subdominio y que condiciona la emergencia de otros tipos de conocimiento. En el caso analizado, el KoT cumple este rol: las definiciones, procedimientos y reglas operativas que lo constituyen preceden y habilitan tanto las conexiones estructurales del KSM como las prácticas matemáticas del KPM.

Se denomina *subdominio dependiente* aquel cuya activación requiere que otro subdominio haya sido previamente movilizado y que no genera, a su vez, relaciones direccionales hacia otros subdominios. Su función es de soporte, validación o regulación de lo ya establecido. En el caso analizado, el KPM cumple este rol, ya que sus manifestaciones —control notacional, precisión simbólica, establecimiento de condiciones formales— emergen siempre como consecuencia del KoT y no reconfiguran ni el contenido matemático ni las conexiones estructurales.

Se denomina *subdominio articulador* aquel que puede ser activado por el subdominio dominante y que, en momentos discursivos posteriores, puede a su vez activar o resignificar al subdominio dominante. Se puede identificar por la flexibilidad direccional, ya que puede operar en ambas direcciones, aunque no siempre simultáneas ni simétricas. En el caso analizado, el KSM cumple este rol, ya que emerge a partir del contenido establecido por el KoT, pero en episodios específicos retroalimenta y reorganiza el significado del contenido previamente presentado.

Estas nociones se articulan con los hallazgos previos de la literatura, a la vez que los precisan. De manera consistente con lo reportado por Pacheco-Muñoz et al. (2023) y Zakaryan et al. (2018), el KoT se posiciona como el subdominio estructurador del discurso matemático en contextos de enseñanza universitaria, resultado que coincide también con lo documentado por Regolini y Climent-Rodríguez (2023) en el análisis de una profesora universitaria de álgebra lineal. Sin embargo, la propuesta de este trabajo va más allá de constatar esta centralidad, ya que al formular la noción de subdominio dominante, se podría explicar por qué el KoT actúa como eje organizador, y no solo describir que lo hace.

La noción de subdominio articulador permite precisar el papel específicamente del KSM, que en trabajos anteriores había sido caracterizado como subdominio vinculado al KoT. La distinción entre una dirección primaria KoT→KSM y una dirección secundaria y puntual KSM→KoT abre la posibilidad de estudiar en qué condiciones discursivas se activa cada sentido de la relación y qué tipo de episodio lo desencadena.

La presente comunicación se inscribe en una investigación en curso y presenta un primer avance hacia la comprensión de posibles roles funcionales entre subdominios del MTSK. Los resultados se derivan del análisis de un único caso en el contexto de la enseñanza universitaria del cálculo; por ello, las interpretaciones propuestas deben considerarse de carácter exploratorio. Su pertinencia deberá examinarse en estudios posteriores que aborden otros contextos, niveles educativos y contenidos matemáticos. En este sentido, los roles funcionales sugeridos pueden constituir un punto de partida para futuras investigaciones interesadas en profundizar en la dinámica relacional del conocimiento especializado del profesorado.

Agradecimientos

Este trabajo se ha realizado al amparo del Grupo de investigación GIRME de la Universidad de Salamanca.

Referencias

Almonacid, M. y Delgado-Rebolledo, R. (2023). Relaciones en el MTSK de una profesora de matemáticas al reflexionar sobre sus prácticas de enseñanza. En R. Delgado-Rebolledo y D. Zakaryan (Eds.), *Actas del VI Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp.264–271). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Carrillo-Yáñez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras-González, L. C., Flores-Medrano, E. y Escudero-Ávila, D. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236–253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Contreras-González, L. C., Montes, M. A., Climent, N. y Carrillo-Yáñez, J. (2017). Introducción al modelo MTSK: origen e investigaciones realizadas. *Revista For-Mate, 3*, 9–17.

Delgado-Rebolledo, R. y Zakaryan, D. (2020). Relationships Between the Knowledge of Practices in Mathematics and the Pedagogical Content Knowledge of a Mathematics Lecturer. *International Journal of Science and Mathematics Education, 18*(3), 567–587. https://doi.org/10.1007/s10763-019-09977-0

Otero-Valega, K., Juárez-Ruiz, E. de L. y Zakaryan, D. (2023). Relaciones entre subdominios de conocimiento de un profesor de matemáticas sobre resolución de problemas aditivos. *Revista Venezolana de Investigación en Educación Matemática, 3*, e202318. https://doi.org/10.54541/reviem.v3i1.92

Pacheco-Muñoz, E., Juárez-Ruiz, E. y Flores-Medrano, E. (2023). Relaciones direccionales intradominio del conocimiento especializado del profesor de matemáticas sobre localización en el plano. *AIEM: Avances de Investigación en Educación Matemática, 24*, 57–74. https://doi.org/10.35763/aiem24.4360

Paternina-Borja, O., Juárez-Ruiz, E. y Zakaryan, D. (2021). Conocimiento especializado de un profesor de matemáticas: caracterización de relaciones en tema de simetrías. En *Anais do V Congreso Iberoamericano sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas* (pp. 296–303).

Regolini, M. y Climent-Rodríguez, N. (2023). Conocimiento del profesor de algebra lineal sobre procedimientos matriciales en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. En R. Delgado-Rebolledo y D. Zakaryan (Eds.), Actas del VI Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (pp. 246–253). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Rojas-Celis, C., Cáceres-García, M.J. y Sánchez-Barbero, B. (2025). Conocimiento especializado de un profesor de cálculo vectorial en la enseñanza de las derivadas en varias variables. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. 389–396). SEIEM.

Rojas, C. y Cáceres-García, M. J. (2024). Diseño de herramienta de análisis del conocimiento especializado en la enseñanza de las derivadas en varias variables. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 623). SEIEM.

Zakaryan, D. y Ribeiro, M. (2017). Conocimiento de la enseñanza de números racionales: una ejemplificación de relaciones. *Zetetike, 24*(3), 301–321. https://doi.org/10.20396/zet.v24i3.8648095

Zakaryan, D., Estrella, S., Espinoza-Vásquez, G., Morales, S., Olfos, R., Flores-Medrano, E. y Carrillo, J. (2018). Relaciones entre el conocimiento de la enseñanza y el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas: caso de una profesora de secundaria. *Enseñanza de las Ciencias*, *36*(2), 105–123. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2260

POSICIONAMIENTOS INICIALES DE FUTUROS MAESTROS DE EDUCACIÓN INFANTIL SOBRE LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LA SIMETRÍA

Initial views of prospective early childhood education teachers on teaching and learning of symmetry

Rosell, C.[a], Vanegas, Y.[b] y Prat, M.[c]

[a]Universitat de Lleida, [b]Universitat de Barcelona, [c]Universitat Ramon Llul

Resumen

El desarrollo de la competencia docente mirar profesionalmente es fundamental en la formación inicial de maestros de educación infantil. Esta investigación analiza cómo 80 futuros maestros identifican, interpretan y toman decisiones sobre producciones de alumnado de educación infantil relacionadas con la simetría. Se diseñó una tarea profesional basada en respuestas reales de niñas y niños y se realizó un análisis cualitativo utilizando niveles de evidencia para las destrezas vinculadas a la competencia docente mirar profesionalmente. Los resultados muestran que la mayoría de los participantes presenta niveles bajos en las tres destrezas, con dificultades en interpretar y tomar decisiones. Lo hallazgos resaltan la necesidad de incluir en la formación inicial tareas profesionales que fomenten la observación, el análisis y la reflexión sobre el pensamiento matemático de las niñas y niños, contribuyendo al desarrollo de una mirada profesional.

Palabras clave: *mirar profesionalmente, tareas profesionales, futuros maestros, simetría, educación infantil.*

Abstract

The development of the teaching competence of professional noticing *is essential in the initial education of early childhood teachers. This study analyses how 80 prospective teachers identify, interpret, and make decisions based on early childhood students' work related to symmetry. A professional task was designed using authentic responses from young children, and a qualitative analysis was conducted using levels of evidence for the skills associated with the teaching competence of professional noticing. The results show that most participants demonstrate low levels across the three skills, with particular difficulties in interpretation and decision-making. The findings highlight the need to incorporate professional tasks into initial teacher education that promote observation, analysis, and reflection on children's mathematical thinking, thereby contributing to the development of a professional noticing perspective.*

Keywords: *noticing, professional task, future teachers, symmetry, early childhood education.*

INTRODUCCIÓN

Según Gasteiger y Benz (2018) y Gasteiger et al., (2020) es fundamental que los docentes de educación infantil desarrollen la capacidad de reconocer contextos cotidianos y convertirlos en experiencias enriquecedoras de enseñanza-aprendizaje. En este sentido, la formación inicial del profesorado debería ofrecer oportunidades para que los futuros maestros desarrollen herramientas que les permitan analizar de manera estructurada las situaciones de enseñanza y el pensamiento matemático de las niñas y niños.

Uno de los enfoques utilizados en la formación docente para promover esta capacidad de análisis es el estudio de experiencias escolares. En particular, la revisión de las producciones del alumnado al

Rosell, C., Vanegas, Y. y Prat, M. (2026). Posicionamientos iniciales de futuros maestros de educación infantil sobre la enseñanza y el aprendizaje de la simetría. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (pp. 521-528). SEIEM.

resolver actividades matemáticas permite a los futuros maestros aproximarse a contextos reales de aula y reflexionar sobre las estrategias y comprensión matemática de los estudiantes.

En el ámbito de la geometría en educación infantil, la simetría constituye una noción relevante para el desarrollo del razonamiento espacial (Moss et al., 2016). Analizar las respuestas de las niñas y niños en tareas relacionadas con la simetría puede ofrecer oportunidades para que los futuros maestros desarrollen su capacidad de reconocer e interpretar el pensamiento matemático en las primeras edades y tomar decisiones didácticas fundamentadas.

En este contexto, el objetivo de este estudio es caracterizar el posicionamiento inicial de futuros maestros de educación infantil cuando analizan las producciones de niñas y niños de 5-6 años en tareas de simetría, considerando las destrezas de la competencia docente mirar profesionalmente (identificar, interpretar y tomar decisiones).

MARCO TEÓRICO

En la formación inicial del profesorado es necesario proporcionar a los futuros docentes herramientas que les permitan desarrollar competencias fundamentales para la práctica educativa. Una de estas competencias es la denominada mirar profesionalmente. Según van Es y Sherin (2002) se entiende como la capacidad del profesorado para identificar aspectos relevantes de una situación de aula, interpretarlos a partir del conocimiento sobre el contexto y tomar decisiones fundamentadas estableciendo conexiones con principios de enseñanza y aprendizaje.

Desde esta perspectiva, mirar profesionalmente implica centrar la atención en el pensamiento matemático de los estudiantes. Zapatera y Callejo (2018) señalan que esta competencia supone observar con atención las estrategias o respuestas de los alumnos, describirlas con precisión, interpretarlas a partir del conocimiento didáctico-matemático y atribuirles significado pedagógico con el objetivo de tomar decisiones que favorezcan el aprendizaje.

En el ámbito de la investigación en educación matemática, esta competencia se ha caracterizado a partir de tres destrezas interrelacionadas: identificar, interpretar y tomar decisiones (Jacobs et al., 2010). La destreza de identificar implica reconocer los aspectos matemáticamente relevantes en las estrategias utilizadas por los estudiantes. La destreza de interpretar consiste en analizar el razonamiento de los alumnos a partir de dichos elementos y del conocimiento sobre el desarrollo de los conceptos matemáticos. Finalmente, la destreza de tomar decisiones se refiere a la capacidad de utilizar la información obtenida sobre la comprensión de los estudiantes para planificar o seleccionar acciones didácticas que favorezcan su progreso (Jacobs et al., 2010).

Mason (2002, 2021) destaca la importancia de que los docentes desarrollen la capacidad de observar con intención las actividades matemáticas de los estudiantes, describir lo observado y considerar posibles alternativas de acción pedagógica. Por su parte, Sherin et al., (2011) y Tekin-Sitrava et al., (2022) han analizado cómo los docentes perciben y comprenden el pensamiento matemático de los estudiantes y cómo esta información influye en la toma de decisiones en el aula.

Para favorecer el desarrollo de esta competencia en la formación inicial, distintos programas de didáctica de las matemáticas han incorporado el uso de tareas profesionales, que buscan aproximar a los futuros docentes a situaciones cercanas a la práctica educativa (Llinares, 2013). Estas tareas implican movilizar conocimiento matemático y didáctico en actividades como anticipar o analizar respuestas de estudiantes, diseñar o evaluar actividades o reflexionar sobre la interacción en el aula (Moreno et al., 2024).

La relación entre el diseño de tareas y la formación del profesorado ha sido ampliamente estudiada. Así, Swan (2007) analizó la naturaleza y tipología de las tareas, Stein et al., (2009) estudiaron las características que deben cumplir para resultar cognitivamente demandantes y Charalambous (2010) examinó el papel del profesor en su implementación. En este contexto, Fortuny y Rodríguez (2012)

señalan que el trabajo con tareas constituye una oportunidad de aprendizaje para que los futuros docentes identifiquen aspectos clave de la enseñanza de las matemáticas. Desde esta perspectiva, uno de los retos de los programas de formación docente consiste en proporcionar a los futuros maestros herramientas conceptuales que les permitan utilizar el conocimiento teórico para analizar situaciones de enseñanza y comprender el pensamiento matemático de los estudiantes (Oonk et al., 2015; Ivars y Fernández, 2018; Bernabeu et al., 2018).

Simetría en educación Infantil

Promover un aprendizaje significativo de nociones matemáticas en edades tempranas implica comprender cómo las niñas y niños construyen su conocimiento y cómo interpretan determinadas situaciones matemáticas. En este sentido, el aprendizaje de nociones geométricas desempeña un papel relevante, ya que permite al alumnado describir, organizar y comprender el entorno que les rodea.

La simetría es una idea geométrica que puede abordarse desde edades tempranas y ofrece oportunidades para conectar las matemáticas con el entorno cotidiano. Tal como señala Jones (2002), el reconocimiento de la simetría facilita la organización y simplificación de la información visual, ya que las figuras simétricas suelen ser identificadas con mayor rapidez, discriminadas con mayor precisión y recordadas con mayor facilidad que las figuras no simétricas.

Moss et al., (2016) consideran que, en el contexto de las matemáticas en edades tempranas, un objeto, diseño o figura presenta simetría cuando contiene elementos idénticos que aparecen en diferentes orientaciones, como reflejos, traslaciones o rotaciones de un elemento original. La simetría de reflexión suele ser la primera que se introduce a las niñas y niños, ya que estos comienzan explorando objetos con líneas simples de simetría. A través de estas exploraciones, los estudiantes pueden comprender que un eje de simetría no tiene que ser únicamente vertical, sino que puede presentarse en diferentes direcciones, y que los objetos pueden tener más de un eje de simetría, infinitos ejes o incluso ser asimétricos. Además, estos autores señalan que la simetría facilita procesos cognitivos relacionados con la percepción visual des de edades tempranas. En sus estudios, observaron que el alumnado de entre 5 y 7 años muestra una notable capacidad para identificar ejes de simetría verticales en objetos cotidianos, comprende que al plegar una figura a lo largo de un eje de simetría las partes resultantes son congruentes y crea patrones simétricos al organizar objetos a ambos lados de un eje.

Seo y Ginsburg (2004); Bornstein et al., (1981) y Eberle (2014) también han mostrado que alumnado de las primeras edades se involucra de manera natural en actividades relacionadas con la simetría a través del juego, por ejemplo, al construir con bloques o explorar patrones. En estos contextos informales, las niñas y niños tienden a crear configuraciones simétricas y muestran sensibilidad hacia este tipo de estructuras, así como una preferencia por patrones simétricos. Asimismo, han identificado que el alumnado de edades tempranas es capaz de reconocer simetrías en objetos cotidianos, elementos de la naturaleza y producciones artísticas.

Desde la perspectiva de las trayectorias de aprendizaje, Vanegas et al., (2021) proponen una aproximación a la enseñanza de la simetría en educación infantil basada en diferentes procesos de desarrollo, entre los que destacan el reconocimiento de repeticiones y similitudes, la identificación de ejes de simetría, la clasificación, la estructuración y la aplicación de estas ideas en diferentes contextos. Sus resultados muestran que las niñas y niños son capaces de reconocer similitudes y repeticiones, identificar ejes de simetría horizontales y verticales y utilizar estos elementos al crear sus propias producciones, aunque la identificación de otros tipos de ejes resulta más compleja.

MÉTODO

Este estudio se enmarca en un enfoque cualitativo de carácter descriptivo, adoptando un estudio de caso centrado en la formación inicial de futuros maestros de educación infantil (Cohen et al., 2018). La investigación se desarrolla a partir del diseño e implementación de tareas profesionales, en las que

los participantes analizan producciones de niñas y niños de 5–6 años en actividades relacionadas con la simetría.

Los participantes fueron 80 futuros maestros, que cursaban el doble grado en Educación Infantil y Primaria o el grado en Educación Infantil en una universidad pública catalana. Los estudiantes del doble grado estaban cursando o ya habían cursado la asignatura Espacio y Forma, relacionada con el aprendizaje de la geometría, mientras que los futuros maestros del grado en Educación Infantil cursaban la asignatura Aprendizaje de las Matemáticas.

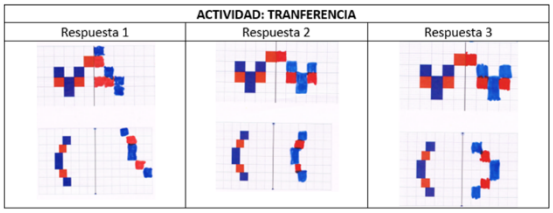
Para llevar a cabo la presente investigación, el proceso se estructuró en cinco fases, diseñadas de manera que cada una estuviera estrechamente relacionada con la anterior, garantizando coherencia metodológica y un desarrollo progresivo del estudio.

En la primera fase, se realizó una revisión exhaustiva de la literatura sobre la formación del profesorado, la competencia docente de mirar profesionalmente y la enseñanza de la simetría en educación infantil. La segunda fase consistió en el diseño, implementación y análisis de una trayectoria de aprendizaje de la noción de simetría para edades tempranas. En la tercera fase, se seleccionaron las respuestas de niñas y niños a actividades relacionadas con la simetría. La cuarta fase implicó el diseño de una serie de tareas profesionales basadas en estas respuestas, con preguntas específicas para evaluar cada destreza de la competencia docente (Figura 1). Finalmente, en la quinta fase, se implementaron las tareas profesionales con los participantes, se analizaron sus respuestas y se caracterizó la competencia docente de mirar profesionalmente.

Figura 1

Ejemplo de pregunta de la destreza interpretar en la tarea profesional 2

Actividad 4: los niños/as deben resolver el siguiente problema. La línea negra es un espejo, dibuja lo que se ve al otro lado del espejo.



P1. Describe las dificultades qué crees que han tenido los niños y niñas en esta tarea.

Respuesta 1:
Respuesta 2:
Respuesta 3:

Para analizar las respuestas de los futuros maestros se realizó un análisis cualitativo basado en categorías emergentes, lo que permitió identificar patrones y tendencias en las producciones de los participantes sin imponer una estructura de clasificación previa. El análisis se apoyó en el marco evaluativo propuesto por Jacobs et al., (2010), que distingue tres destrezas de la competencia de mirar profesionalmente: identificar, interpretar y tomar decisiones, cada una caracterizada por diferentes niveles de evidencia.

El proceso de análisis se desarrolló en tres fases. En primer lugar, se realizó una lectura exploratoria y detallada de las respuestas con el objetivo de familiarizarse con los datos e identificar regularidades en las argumentaciones de los futuros maestros. En esta fase se elaboró también una respuesta experta, basada en la literatura y en el conocimiento especializado en didáctica de las matemáticas, que sirvió como referencia para identificar elementos relevantes en el análisis de las producciones de niñas y niños.

En una segunda fase se realizó una organización preliminar de los datos para cada destreza, identificando aspectos clave a evaluar relacionados con las propiedades de la simetría, las estrategias

utilizadas por las niñas y niños, las posibles dificultades y las decisiones pedagógicas propuestas por los futuros maestros.

Finalmente, en la tercera fase se elaboraron los instrumentos definitivos de análisis (Figura 2), que permitieron categorizar las respuestas de los participantes y caracterizar el nivel de desarrollo de cada destreza de la competencia de mirar profesionalmente. Cada respuesta de los futuros maestros se analizó mediante este instrumento, asignando un nivel a cada destreza en función del grado de identificación de elementos matemáticos, la profundidad de la interpretación del pensamiento del alumnado y la coherencia de la toma de decisiones propuestas.

Figura 2

Ejemplo de instrumento para el análisis (destreza interpretar)

	NIVELES DE EVIDENCIA		
ASPECTO A EVALUAR	**Nivel 1**	**Nivel 2**	**Nivel 3**
Procesos matemáticos	El FM no nombra ningún proceso matemático relacionado con la geometría implicada en la actividad, los nombra sin describirlos o se limita a reproducir lo que dicen los niños y niñas.	El FM no nombra todos los procesos matemáticos relacionados con la geometría implicada en la actividad, describe los procesos sin relacionarlos/conectarlos con las respuestas del niño y niña, pero aporta conocimiento.	El FM nombra los procesos matemáticos relacionados con la geometría implicada en la actividad y los describe valorando las respuestas del niño y niña.
Dificultad	El FM reconoce respuestas correctas o incorrectas, pero no logra describir la dificultad.	El FM describe la dificultad del niño y niña, pero sin un lenguaje matemático adecuado.	El FM describe la dificultad del niño/a.

RESULTADOS

El análisis de las respuestas de los futuros maestros permite identificar algunas tendencias relevantes en el desarrollo de la competencia docente mirar profesionalmente al analizar producciones del alumnado de educación infantil relacionadas con la simetría. En términos generales, los resultados muestran un predominio del nivel bajo de evidencia en las tres destrezas evaluadas: identificar, interpretar y tomar decisiones.

En la destreza identificar, el 72 % de los participantes se sitúa en el nivel bajo, lo que indica dificultades para reconocer con precisión los elementos matemáticos relevantes presentes en las respuestas de las niñas y niños. En muchos casos, los futuros maestros se limitan a mencionar de forma general la noción de simetría o a describir aspectos superficiales de las producciones de las niñas y niños sin hacer referencia a elementos clave como el eje de simetría, la correspondencia entre partes o la conservación de la forma.

Las mayores dificultades se observan en la destreza interpretar, donde el 77 % de los participantes se ubica en el nivel bajo y solo un 3 % alcanza el nivel alto. Estos resultados sugieren que la mayoría de los futuros maestros presenta dificultades para inferir el razonamiento matemático del alumnado a partir de sus producciones. En muchos casos, las respuestas se centran en descripciones generales de las actividades sin establecer conexiones con la comprensión de la simetría ni con los posibles procesos de razonamiento espacial implicados.

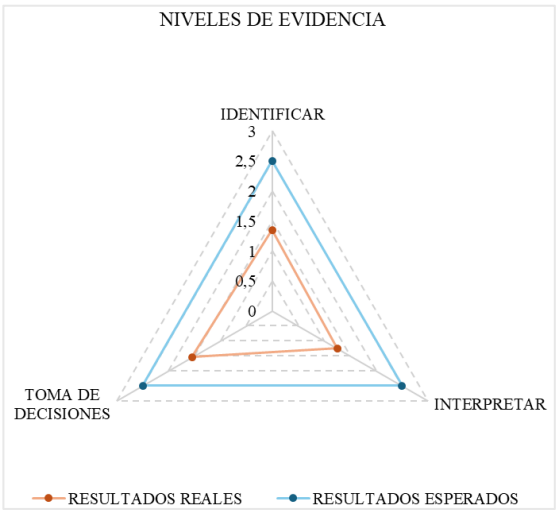
Por su parte, la destreza tomar decisiones presenta un desarrollo ligeramente superior, aunque sigue predominando el nivel bajo. En este caso, el 52 % de los futuros maestros propone estrategias pedagógicas inexistentes o muy generales, mientras que el 40 % plantea algunas acciones didácticas, aunque no siempre relacionadas con las dificultades observadas en las respuestas del alumnado. Solo un 8 % propone intervenciones concretas y coherentes con la comprensión de las niñas y niños.

En conjunto, estos resultados sugieren que, aunque algunos futuros maestros logran reconocer ciertos aspectos visibles en las producciones del alumnado, presentan mayores dificultades para interpretar el pensamiento matemático de las niñas y niños y para proponer decisiones pedagógicas fundamentadas.

A continuación, en la Figura 3, se presenta un gráfico radial, el cual se utiliza como recurso visual para comparar el desempeño de los futuros maestros en las tres destrezas analizadas: identificar, interpretar y tomar decisiones. Para ello, se asignó una puntuación a cada destreza, lo que permite contrastar los niveles de evidencia alcanzados con los considerados esperados. El gráfico muestra una brecha entre ambos, evidenciando un desempeño inferior al esperado en las tres destrezas.

Figura 3

Muestra de la brecha entre los resultados reales y los resultados esperados



Estos hallazgos ponen de manifiesto la necesidad de promover, en la formación inicial del profesorado, experiencias formativas que favorezcan el desarrollo de la competencia de analizar e interpretar las producciones matemáticas del alumnado de educación infantil.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos evidencian que la mayoría de los futuros maestros presenta dificultades para desarrollar las tres destrezas vinculadas con la competencia docente mirar profesionalmente: identificar, interpretar y tomar decisiones. En particular, se observa una mayor concentración de respuestas en el nivel bajo de evidencia, especialmente en la destreza de interpretar, lo que sugiere que los participantes encuentran dificultades para inferir el razonamiento matemático de las niñas y niños a partir de sus producciones.

Estos resultados son coherentes con investigaciones previas que señalan que el desarrollo de esta competencia docente requiere integrar el conocimiento matemático y didáctico para analizar el pensamiento de los estudiantes (Jacobs et al., 2010). En este sentido, diversos estudios han mostrado que los futuros maestros suelen centrarse inicialmente en aspectos visibles de las respuestas de los alumnos, pero encuentran mayores dificultades cuando deben interpretar el significado matemático de dichas producciones o vincularlas con posibles decisiones pedagógicas (Ivars et al., 2016; Fernández et al., 2018; Bernabeu et al., 2019).

En el caso específico de la simetría, estas dificultades pueden relacionarse también con la complejidad conceptual de esta noción geométrica. Comprender la simetría implica reconocer relaciones espaciales como la correspondencia entre partes, la conservación de la forma o la identificación de

ejes de simetría, aspectos que requieren procesos de visualización y razonamiento espacial (Moss et al., 2016). Si los futuros maestros no identifican con claridad estos elementos en las producciones del alumnado, resulta difícil que puedan interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes y proponer intervenciones didácticas ajustadas a sus necesidades de aprendizaje.

Los resultados también ponen de manifiesto la importancia del diseño e implementación de tareas profesionales en la formación inicial del profesorado, que permitan analizar producciones reales de los estudiantes y reflexionar sobre los procesos de pensamiento matemático implicados. Este tipo de tareas puede contribuir a que los futuros maestros desarrollen progresivamente la capacidad de centrar su atención en los aspectos matemáticamente relevantes de las respuestas del alumnado, interpretarlas desde una perspectiva didáctica y tomar decisiones pedagógicas fundamentadas. Asimismo, favorece que los futuros docentes reconozcan el potencial del estudiantado de edades tempranas para abordar nociones matemáticas y que reflexionen sobre cómo diseñar intervenciones pedagógicas que promuevan procesos de exploración, razonamiento y comprensión matemática.

Referencias

Bernabeu, M., Moreno, M. y Llinares, S. (2018). Cómo estudiantes para maestro/a anticipan posibles respuestas de niños/as en actividades de reconocimiento de figuras geométricas. En Rosabel Roig-Vila (Ed.), *El compromiso académico y social a través de la investigación e innovación educativas en la Enseñanza Superior* (pp. 59-68). Ediciones Octaedro.

Bernabeu, M., Moreno, M. y Llinares, S. (2019). *El conocimiento geométrico de los/las estudiantes para maestro/a de educación infantil a través de una tarea de clasificación de cuadriláteros*. Ediciones Octaedro.

Bornstein, M. H., Ferdinandsen, K. y Gross, C. G. (1981). Perception of symmetry in infancy. *Developmental Psychology*, 17(1), 82-86. https://doi.org/10.1037/0012-1649.17.1.82

Charalambous, C. Y. (2010). Mathematical knowledge for teaching and task unfolding: An exploratory study. *The Elementary School Journal*, 110(3), 247-278. https://doi.org/10.1086/648978

Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2018). *Research Methods in Education*. Routledge. https://doi.org/10.4324/9781315456539

Eberle, R.S. (2014). The role of children's mathematical aesthetics: The case of tessellations. *The Journal of Mathematical Behavior*, *35*, 129-143. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2014.07.004

Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G., Valls, J. y Callejo, M. L. (2018). Noticing students' mathematical thinking: characterization, development and contexts. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 13*, 39-61. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i13.229

Fortuny, J. M. y Rodríguez, R. (2012). Aprender a mirar con sentido: facilitar la interpretación de las interacciones en el aula. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *1*, 23-37. https://doi.org/10.35763/aiem.v1i1.3

Gasteiger, H, y Benz, C. (2018). Enhancing and analyzing kinderfarten teacher's professional knowledge for early mathematics education. *The Journal of Mathematical Behaviour.* https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2018.01.002

Gasteiger, H., Bruns, J., Benz, C., Brunner, E. y Sprenger, P. (2020). Mathematical pedagogical content knowledge of early childhood teachers: a standardized situation-related measurement approach. *ZDM Mathematics Education, 52*, 193-205. https://doi.org/10.1007/s11858-019-01103-2.

Ivars, P., Burfon, À. y Llinares, S. (2016). Características del aprendizaje de estudiantes para maestro de una trayectoria de aprendizaje sobre las fracciones para apoyar el desarrollo de la competencia "mirar profesionalmente". *Acta Scientiae*, *18(4)*, 48-66.

Ivars, P. y Fernández, C. (2018). The role of writing narratives in developing pre-service elementary teachers' noticing. En G. J. Stylianides y K. Hino (Eds.), *Research advances in the mathematical education of pre-service elementary teachers: an international perspective* (pp. 245-259). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68342-3_17

Jacobs, V. R., Lamb, L. L. C. y Philipp, R. A. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, *41*(2), 169-202. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.41.2.0169

Jones, K. (2002). Issues in the teaching and learning of geometry. In L. Haggarty (Ed), *Aspects of teaching secondary mathematics: Perspectives on practice* (pp. 121-139). London, UK: Routledge Falmer.

Llinares, S. (2013). Professional noticing: A component of the mathematics teacher's professional practice. *Sisyphus. Journal of Education*, *1*, 76-93. https://doi.org/10.25749/sis.3707

Mason, J. (2021). Learning about noticing, by, and through, noticing. *ZDM-Mathematics Education, 53*(1), 231-243. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01192-4

Mason, J. (2002). Researching your own practice: The discipline of noticing. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *6*, 77-91. https://doi.org/10.1023/A:1022107814447

Moreno, M., Santonja, P. y Llinares, S. (2024). Mirada profesional de los estudiantes para profesor de educación secundaria sobre situaciones de enseñanza de matemáticas. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 353-360). SEIEM

Moss, J., Bruce, C., Caswell, B., Flynn, T. y Hawes, Z. (2016). *Taking shape: activities to develop geometric and spatial thinking. Grades k-2* (C. D. Bruce, B. Caswell, T. Flynn, y Z. Hawes, Eds.). Pearson Canada Inc.

Oonk, W., Verloop, N. y Gravemeijer, K. (2015). Enriching Practical Knowledge: Exploring Student Teachers' Competence in Integrating Theory and Practice of Mathematics Teaching. *Journal for Research in Mathematics Education*, *46*(5), 559-598. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.46.5.0559

Seo, K.-H. y Ginsburg, H. P. (2004). What Is Developmentally Appropriate in Early Childhood Mathematics Education? *Lessons from New Research*. In D. H. Clements, y J. Sarama (Eds.), Engaging Young Children in Mathematics (pp. 91-104). Mahwah: Erlbaum Associates Inc.

Sherin, M., Jacobs, V. y Philipp, R. (2011). *Mathematics teacher noticing. Seeing through teachers' eyes*. Routledge. https://doi.org/10.4324/9780203832714

Stein, M. K., Smith, M. S., Henningsen, M. A. y Silver, E. A. (2009). *Implementing standards-based mathematics instruction*. Teachers College Press. NCTM.

Swan, M. (2007). The impact of task-based professional development on teachers' practices and beliefs: A design research study. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *10*, 217-237. https://doi.org/10.1007/s10857-007-9038-8

Tekin-Sitrava, R., Kaiser, G. y Işıksal-Bostan, M. (2022). Development of Prospective Teachers' Noticing Skills Within Initial Teacher Education. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *20*(7), 1611-1634. https://doi.org/10.1007/s10763-021-10211-z

van Es, E. y Sherin, M. (2002). Learning to notice: Scaffolding new teachers' interpretations of classroom interactions. *Journal of Technology and Teacher Education*, *10*(4), 571-596.

Zapatera, A. y Callejo, M. L. (2018). El conocimiento matemático y la mirada profesional de estudiantes para maestro en el contexto de la generalización de patrones. Caracterización de perfiles. *Revista Complutense de Educacion*, *29*(4), 1217-1235. https://doi.org/10.5209/RCED.55070

DISEÑO DE NUEVAS PIEZAS EN *COLOUR CODE* PARA CREAR RETOS DE MAYOR DEMANDA VISUAL: ANÁLISIS DE PIEZAS DISEÑADAS CON ALUMNADO CON TALENTO MATEMÁTICO

Designing new *Colour Code* pieces to create visually demanding challenges: An analysis of student-designed pieces with mathematically talented students

Rotger-García, L., Ribera-Puchades, J. M. y Petro-Balaguer, A. B.

Universitat de les Illes Balears

Resumen

En esta comunicación se analiza cómo 14 estudiantes con talento matemático (16–18 años), del programa MENTORiment, organizados en 7 parejas, diseñan piezas negras para Colour Code con el propósito de ampliar las posibilidades de diseñar retos con imágenes objetivo visualmente más demandantes. Se realizó un análisis cualitativo de piezas mediante la codificación de las 18 piezas originales y de las piezas diseñadas, aplicando una rúbrica de cuatro dimensiones: complejidad geométrica, orientación relevante, figura–fondo y superposición. Los resultados indican que varias piezas incorporan rasgos con potencial para generar restricciones visuales y configuraciones complejas, principalmente por orientación y superposición, más que por fragmentación geométrica. Se discuten implicaciones para el diseño de tareas centradas en visualización.

Palabras clave: *visualización, geometría, talento matemático, juego de mesa*

Abstract

This paper analyses how 14 mathematically talented students (ages 16–18), from the MENTORiment programme, working in seven pairs, designed black pieces for Colour Code to expand the possibilities for designing challenges with visually demanding target images. A qualitative analysis of pieces was conducted by coding the 18 original pieces and the student-designed pieces, applying a four-dimension rubric: geometric complexity, orientation relevance, figure–ground, and superposition. Results show that several student-designed pieces incorporate features with potential to generate visual constraints and complex configurations, mainly through orientation and superposition rather than geometric fragmentation. Implications for visualization-focused task design are discussed.

Keywords: *visualization, geometry, mathematical talent, board game*

INTRODUCCIÓN

La visualización es un eje clave del pensamiento matemático en tareas geométricas que requieren interpretar, transformar y validar configuraciones espaciales (Arcavi, 2003; Gutiérrez, 1996). En estas tareas, el alumnado coordina representaciones externas e imágenes mentales para anticipar resultados, validar soluciones y comparar configuraciones, movilizando habilidades como el análisis figura–fondo y la discriminación visual (Del Grande, 1990; Gutiérrez, 1996). Desde una perspectiva cognitiva, el trabajo geométrico implica la articulación entre visualización, construcción y razonamiento sobre representaciones (Duval, 1998).

Los juegos de mesa con componentes geométricos permiten estudiar estas demandas al exigir composición, transformación y verificación de resultados (De Guzmán, 1989). En *Colour Code*, los retos se resuelven reconstruyendo una imagen objetivo mediante piezas transparentes superpuestas; por ello, variaciones en orientación, solape o contraste pueden modificar la interpretación visual.

Rotger-García, L., Ribera-Puchades, J. M. y Petro-Balaguer, A. B. (2026). Diseño de nuevas piezas en *Colour Code* para crear retos de mayor demanda visual: análisis de piezas diseñadas con alumnado con talento matemático. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (pp. 529-536). SEIEM.

Aunque se ha mostrado el potencial del juego para movilizar habilidades de visualización durante la resolución (Ribera Puchades et al., 2024), existe menos evidencia sobre el paso de resolver retos a diseñar piezas que amplíen las posibilidades de proponer retos con imágenes objetivo visualmente complejas.

Figura 1

Alumnado realizando la experiencia a través del juego Colour Code



El objetivo de este estudio es analizar, mediante una rúbrica de potencial visual basada en el conjunto original de *Colour Code*, cómo alumnado con talento matemático diseña nuevas piezas que amplían las posibilidades de crear retos con imágenes objetivo visualmente complejas, identificando qué rasgos geométricos y visuales —complejidad geométrica, orientación relevante, ambigüedad figura–fondo y superposición— explican dicho potencial.

MARCO TEÓRICO

Visualización en geometría: representaciones, procesos y habilidades

La visualización ocupa un lugar central en educación matemática por su papel en la construcción, interpretación y uso de representaciones para comprender ideas y explorar relaciones (Arcavi, 2003). Revisiones recientes subrayan, además, la necesidad de caracterizar las visualizaciones según su tipo, medio y propósito de uso (Schoenherr y Schukajlow, 2024). En geometría, el marco de Gutiérrez (1996) la organiza en imágenes mentales, representaciones externas, procesos y habilidades de visualización, lo que resulta pertinente cuando se interpretan configuraciones planas generadas por superposición. Desde un enfoque cognitivo, la actividad geométrica implica coordinar visualización, construcción y razonamiento sobre registros de representación (Duval, 1998).

En este estudio interesan habilidades visuales como percepción figura–fondo, discriminación visual y rotación mental, relevantes para seleccionar elementos, controlar invariantes y validar configuraciones (Del Grande, 1990; Maier, 1996). También se ha señalado la importancia de analizar errores en la identificación de representaciones geométricas (Flores-Lamolda y Ramírez-Uclés, 2025), y en alumnado con talento se ha observado que las habilidades de visualización manifestadas en tareas geométricas pueden diferir de las medidas psicométricas tradicionales (Ramírez-Uclés y Flores, 2017).

Juegos geométricos, demanda visual y talento matemático

Los entornos lúdicos pueden promover actividad matemática significativa al combinar reglas, objetivos, estrategias y verificación de soluciones (De Guzmán, 1989). En juegos de mesa con componentes geométricos se ha señalado su potencial para favorecer habilidades espaciales vinculadas a la visualización (Chung et al., 2017). En *Colour Code*, la resolución exige interpretar

una imagen objetivo y reconstruirla mediante superposición; estudios previos han mostrado que esta dinámica moviliza discriminación visual y análisis figura–fondo (Ribera Puchades et al., 2024).

En relación con el talento matemático, se han descrito rasgos como uso eficiente de estrategias, flexibilidad y atención a estructuras en tareas complejas (Krutetskii, 1976; Passow, 1993). La literatura sobre visualización y talento subraya que no basta con producir imágenes, sino que estas deben articularse con estructuras matemáticas para controlar y verificar soluciones (Presmeg, 1986; Stylianou y Pitta-Pantazi, 2002). En este sentido, el diseño de nuevas piezas para *Colour Code* constituye un contexto adecuado para estudiar cómo se introducen propiedades geométricas y visuales orientadas a ampliar las posibilidades de crear retos con imágenes objetivo complejas.

MÉTODO

Diseño del estudio

Se llevó a cabo un estudio cualitativo descriptivo-interpretativo de análisis de piezas diseñadas como producciones del alumnado (Rico, 2012) y en la relación entre rasgos geométricos del diseño y su potencial para participar en retos con imágenes objetivo visualmente complejas junto con otras piezas. Se adoptó un estudio de caso exploratorio (Simons, 2009) con múltiples unidades de análisis (7 parejas) y procedimientos de clasificación deductiva para asegurar consistencia (Mayring, 2014).

Participantes y contexto

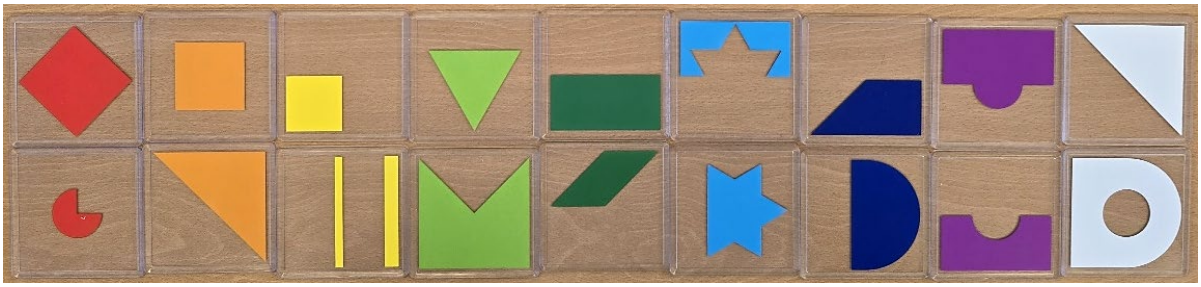
La experiencia se desarrolló en el programa MENTORiment (Illes Balears), dirigido a alumnado con altas capacidades seleccionado mediante prueba de talento. Participaron 14 estudiantes (16–18 años), organizados en 7 parejas (E1–E7), codificadas para garantizar anonimato. Esta muestra permite explorar el diseño de piezas en alumnado previamente identificado con altas capacidades, sin establecer comparaciones con otros perfiles. Este contexto es pertinente por la relación descrita entre talento matemático y uso eficiente de representaciones y razonamiento visual en tareas complejas (Passow, 1993; Krutetskii, 1976; Arcavi, 2003).

Materiales y tarea de diseño

Colour Code utiliza piezas transparentes con patrones de color que, al superponerse, generan imágenes bidimensionales; la superposición implica decisiones geométricas y perceptivas (encaje, orientación, coincidencia parcial y discriminación de regiones), constituyendo un contexto natural para estudiar la demanda de visualización (Gutiérrez, 1996; Arcavi, 2003). Se trabajó con el conjunto original (Figura 2). Cada pareja diseñó dos piezas nuevas usando el color negro, previamente asignado para la actividad y no presente en el conjunto original, manteniendo formato y medidas; una pareja solo completó una pieza por falta de tiempo. La sesión (3 horas) incluyó: (1) análisis matemático del conjunto original y de la progresión de niveles; (2) diseño con la consigna de crear piezas que pudieran incorporarse al juego y facilitar la construcción de retos visualmente más exigentes, con comprobaciones mediante pruebas propias y juego/intercambio entre parejas.

Figura 2

Conjunto de piezas originales del juego Colour Code



Se analizaron: (a) 13 fotografías de las piezas diseñadas (Figura 3) y, como línea base, imágenes de las 18 piezas originales (Figura 2); (b) bocetos y versiones intermedias; (c) diarios/notas de diseño; y (d) retos creados con las nuevas piezas. La triangulación de piezas diseñadas, bocetos, notas de diseño y retos permite interpretar el producto y las decisiones geométricas y visuales subyacentes.

Instrumento de análisis

Se elaboró una rúbrica analítica para caracterizar el potencial de una pieza para participar en retos con imágenes objetivo visualmente complejas, entendido como su capacidad para incrementar la complejidad de los retos y la demanda de visualización durante la resolución. La rúbrica se diseñó de forma deductiva tomando como referencia la geometría y el funcionamiento del conjunto original y la progresión de niveles del juego.

La rúbrica integra cuatro dimensiones, cada una valorada en una escala ordinal 1–4:

- Complejidad geométrica / partición del plano (CG): grado de fragmentación de la región coloreada, considerando número de regiones/componentes, conectividad y patrones internos; los intervalos actúan como umbrales ordinales de fragmentación. Niveles: 1 = región única conectada, simple y sin fragmentación; 2 = 2–4 regiones/componentes; 3 = fragmentación alta (5–7 regiones/componentes o patrones que generan varias zonas relevantes); 4 = ≥8 regiones o fragmentación fina con islas/huecos.
- Simetrías y orientaciones relevantes (OR): efecto de la rotación en la generación de configuraciones visualmente diferenciables y restricciones distintas. Niveles: 1 = una orientación relevante por simetría/equivalencia; 2 = dos orientaciones no equivalentes; 3 = cuatro orientaciones no equivalentes; 4 = orientaciones casi equivalentes que generan configuraciones visualmente próximas pero no idénticas.
- Ambigüedad figura–fondo y discriminación visual (FF): dificultad para identificar la región relevante y distinguirla del fondo o de regiones superpuestas. Niveles: 1 = lectura nítida; 2 = ambigüedad local; 3 = ambigüedad en varias zonas; 4 = ambigüedad alta y extendida.
- Potencia de superposición (SP): se consideró solape relevante aquel que modifica la imagen objetivo, oculta/revela regiones necesarias o introduce restricciones para decidir piezas y orientaciones válidas. Niveles: 1 = escasos; 2 = moderados; 3 = numerosos; 4 = altamente restrictivos, con múltiples configuraciones alternativas relevantes.

El índice global de potencial visual se obtuvo como la mediana de (CG, OR, FF, SP), redondeando hacia arriba en caso de 0,5, evitando infravalorar piezas con dos dimensiones situadas en el nivel superior. Se empleó la mediana por tratarse de una escala ordinal y para evitar que un único valor extremo determinara la clasificación global. Por ejemplo, el cuadrado rojo con orientación diagonal se codificó como CG1, OR1, FF1 y SP1 por su baja fragmentación, equivalencia entre rotaciones, lectura nítida y escasos solapes restrictivos. En cambio, una pieza nueva formada por cuatro puntos disconexos se codificó con FF3 y SP4 porque exige discriminación fina y genera restricciones locales al combinarse con otras piezas.

Análisis del conjunto original

Para uniformizar criterios, se codificaron las 18 piezas originales con la rúbrica (Tabla 1). Se incorporó un criterio contextual: las piezas blancas se consideraron con mayor ambigüedad figura–fondo por su superposición sobre el fondo habitual blanco, incrementando la demanda de discriminación visual (Del Grande, 1990). Este análisis de partida permitió situar descriptivamente los perfiles de las piezas nuevas en relación con las características geométrico-visuales del conjunto original. No se realizó un análisis exhaustivo de los retos oficiales por nivel; el conjunto original se utilizó como referencia geométrico-visual para calibrar la rúbrica.

Análisis de las piezas diseñadas

El análisis se desarrolló en tres fases: (1) clasificación y descripción de piezas (originales y nuevas), elaborando una ficha por pieza y justificando cada decisión con evidencias observables (componentes/regiones, orientaciones no equivalentes y patrones de superposición); los resultados se sintetizaron en dos tablas (conjunto original y diseño del alumnado). (2) análisis del proceso de diseño: los bocetos y notas se utilizaron como apoyo interpretativo para reconstruir decisiones de diseño (selección de formas, complementariedad, orientación y pruebas), interpretados desde la visualización como interacción entre representaciones externas e imágenes mentales y como activación de habilidades de visualización (Gutiérrez, 1996). (3) vinculación con la complejidad de los retos construidos: análisis de retos creados para describir cómo orientación y superposición se traducen en incrementos del potencial visual (más restricciones, mayor dependencia de la orientación y aparición de configuraciones casi equivalentes).

Los tres firmantes realizaron codificación independiente y sesiones de contraste para resolver discrepancias y acordar criterios finales, dejando registro de decisiones; algunos valores se ajustaron tras el contraste (p. ej., orientación relevante o discriminación visual en piezas con elementos pequeños), manteniendo trazabilidad del cambio (Mayring, 2014). No se incorporó una validación empírica externa; por ello, el índice global se interpreta como una estimación potencial basada en rasgos geométricos, orientación, figura–fondo y superposición, complementada con el tipo de retos.

RESULTADOS

La codificación del conjunto original (Tabla 1) muestra que la mayoría de piezas se codifican con índice global 2 de potencial visual, pocas alcanzan índice 1 (formas simples, alta simetría y baja potencia de superposición) y varias en índice global 3, asociadas sobre todo a (a) ambigüedad figura–fondo (especialmente en piezas blancas sobre fondo blanco) y (b) superposiciones con alta capacidad de generar restricciones. La Tabla 1 presenta las piezas originales siguiendo el orden de la Figura 2.

Tabla 1

Piezas originales de Colour Code y codificación del potencial visual

ID	Descripción	Dimensiones				Índice global
		CG	*OR*	*FF*	*SP*	
O1	Rojo cuadrado con orientación diagonal	1	1	1	1	1
O2	Rojo cuarto de círculo	1	3	1	2	2
O3	Naranja cuadrado	1	1	1	2	1
O4	Naranja triángulo rectángulo	1	3	1	3	2
O5	Amarillo cuadrado pequeño	1	1	1	2	1
O6	Amarillo dos barras	2	2	2	3	2
O7	Verde triángulo	1	3	1	2	2
O8	Verde "bandera" (muesca en V)	2	2	1	2	2
O9	Verde rectángulo	1	2	1	2	2
O10	Verde paralelogramo	1	2	1	2	2
O11	Cian "corona" (tres picos)	2	2	2	3	2
O12	Cian bloque con hueco en "estrella"	3	2	2	4	3
O13	Azul trapecio	1	3	1	2	2
O14	Azul semicírculo	1	2	1	2	2

ID	Descripción	Dimensiones				Índice global
		CG	*OR*	*FF*	*SP*	
O15	Morado "cúpula" (semicírculo arriba)	1	2	1	2	2
O16	Morado "U" con muesca semicircular	2	2	2	3	2
O17	Blanco triángulo grande	1	3	3	3	3
O18	Blanco arco con hueco circular	2	2	3	3	3

En las piezas diseñadas por el alumnado (Tabla 2) se identifican varias piezas con alto potencial para generar restricciones visuales: predomina el índice global 2, aparece un grupo de índice global 3 (E4–P1, E4–P2, E6–P2 y E7–P1) y solo una pieza queda en índice global 1 (E2–P1). El potencial para generar retos visualmente complejos se apoya principalmente en la orientación relevante (OR) y la superposición (SP). La Tabla 2 mantiene la codificación por parejas E1–E7 utilizada en la Figura 3.

Tabla 2

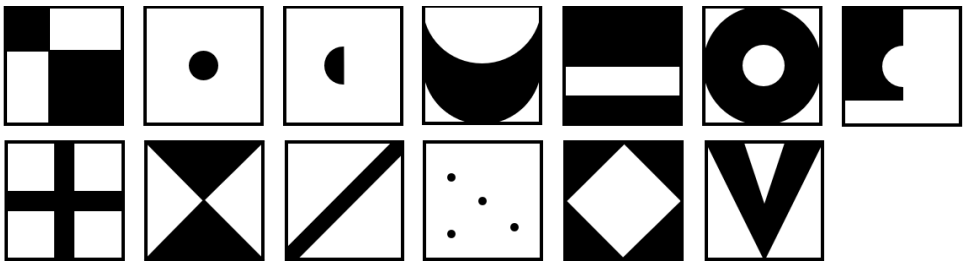
Piezas diseñadas por el alumnado y codificación del potencial visual

Pareja	Pieza	Descripción	Dimensiones				Índice global
			CG	*OR*	*FF*	*SP*	
E1	P1	Dos cuadrados en diagonal	2	2	1	2	2
E1	P2	Cruz (concavidades)	2	1	2	3	2
E2	P1	Círculo pequeño (menor que el rojo)	1	1	1	2	1
E2	P2	Partición triangular (ocultar triángulos)	2	2	1	3	2
E3	P1	Semicírculo/sector pequeño	1	3	1	3	2
E3	P2	Banda diagonal	1	2	2	3	2
E4	P1	Luna/creciente (interacción con O18)	2	3	2	4	3
E4	P2	Cuatro puntos disconexos	2	3	3	4	3
E5	P1	Dos franjas negras (arriba/abajo)	2	2	1	2	2
E5	P2	Complementaria del cuadrado rojo (diagonal)	2	1	1	3	2
E6	P1	Anillo/corona circular (envolver círculo rojo)	2	1	2	3	2
E6	P2	Forma en V (interacción con triangulares)	2	3	2	3	3
E7	P1	Variante “morada recortada” con mordida	2	3	1	3	3

El análisis por dimensiones identifica tres mecanismos principales: (i) Orientación relevante (OR)**,** cuando la rotación genera resultados no equivalentes (p. ej., E6–P2, E7–P1, E4–P1), restringiendo configuraciones posibles; (ii) superposición (SP), cuando la pieza introduce solapes significativos y restricciones o configuraciones alternativas, destacando E4–P1 y E4–P2 (SP4) por su carácter selectivo y la generación de configuraciones casi válidas, así como E5–P2 y E6–P1 por complementariedad con piezas originales; y (iii) Discriminación visual y figura–fondo (FF), relevante cuando el diseño incorpora elementos pequeños o bordes curvos que aumentan el esfuerzo perceptivo bajo solape, como E4–P2 cuyos puntos disconexos (FF3) exigen una discriminación fina.

Figura 3

Piezas creadas por el alumnado (E1–E7).



A partir del análisis comparativo se identifican tres familias de diseño: (1) complementarias/derivadas del conjunto original (p. ej., E5–P2 y E7–P1; también E4–P1 por su interacción con la pieza blanca O18), orientadas a aumentar restricciones por encaje; (2) intersección dirigida (p. ej., E3–P2 y E6–P2), que limita familias geométricas —como triangulares— y concentra el potencial visual en OR y SP; y (3) selectividad extrema (E4–P2), con marcadores puntuales que incrementan SP y FF al exigir validación muy precisa. En conjunto, las piezas del alumnado se caracterizan menos por aumentar CG y más por una intencionalidad funcional: orientar, complementar o seleccionar configuraciones mediante la superposición al combinarse con otras piezas.

DISCUSIÓN

Un resultado relevante es que el potencial para generar retos visualmente complejos no proviene principalmente de aumentar la partición del plano (CG), sino de diseñar piezas que modulan la interacción con el conjunto original mediante orientación (OR) y superposición (SP)**.** Este hallazgo es coherente con la visualización entendida como coordinación entre representaciones externas e imágenes mentales para anticipar, validar y discriminar configuraciones (Gutiérrez, 1996; Arcavi, 2003). En este sentido, el alumnado diseña piezas con mayor capacidad para aumentar la carga visual estratégica (rotaciones no equivalentes, encajes y configuraciones casi equivalentes), lo que resulta especialmente pertinente en un juego basado en capas, donde la dificultad no depende tanto de la complejidad de una pieza aislada como de la complejidad de su combinación con otras piezas.

Además, la naturaleza de varias piezas sugiere comportamientos compatibles con perfiles de alumnado con talento matemático: búsqueda de soluciones eficaces, atención a detalles estructurales y uso estratégico de recursos geométricos (Krutetskii, 1976; Passow, 1993). En vez de producir piezas recargadas, aparecen diseños basados en principios geométricos simples (complementariedad, recorte), lo que puede interpretarse como un uso eficiente de recursos geométricos para maximizar restricciones y, por tanto, aumentar el potencial de crear retos con imágenes objetivo más complejas. Este resultado enlaza con la idea de que las imágenes pueden actuar como soporte para operar matemáticamente y establecer relaciones (Arcavi, 2003), y con trabajos que vinculan visualización y talento matemático (Presmeg, 1986; Stylianou y Pitta-Pantazi, 2002). Aquí, la operación clave es la superposición: diseñar una pieza implica prever cómo se construyen y transforman imágenes globales a partir de partes visibles/ocultas. Asimismo, la comparación con el conjunto original confirma que la ambigüedad figura–fondo se concentra en piezas blancas sobre fondo blanco, aunque también puede aparecer en solapes entre piezas del mismo color o regiones visualmente similares, mientras que en las piezas del alumnado aumenta cuando aparecen elementos pequeños o bordes que exigen una discriminación más fina, reforzando la relevancia de habilidades específicas como figura–contexto y discriminación visual (Del Grande, 1990; Maier, 1996; Gutiérrez, 1996). Desde el punto de vista didáctico, estos resultados sugieren orientar el diseño de piezas hacia criterios explícitos de orientación, superposición y validación**,** más allá de hacer la pieza más compleja por fragmentación, y secuenciar la demanda visual desde SP1–SP2 hacia SP3–SP4 incorporando progresivamente la dependencia de orientación (OR) y la gestión de ambigüedad perceptiva (FF).

Este estudio interpreta el índice global como una estimación ordinal del potencial visual de las piezas basado en rasgos geométricos y visuales, sin una validación empírica externa que mida errores o tasa de éxito, ni una comparativa con alumnado ordinario. Por tanto, las puntuaciones de la rúbrica no deben interpretarse como dificultad de una pieza aislada, sino como una estimación ordinal de su potencial para participar en retos con imágenes objetivo visualmente más complejas al combinarse con otras piezas. Futuras investigaciones podrían complementar la rúbrica con un protocolo breve de validación empírica y explorar si los retos con imágenes objetivo que incorporan piezas con SP4 se traducen en mayores tasas de error o en patrones específicos de dificultades de visualización. Asimismo, sería relevante analizar con más detalle cómo las verbalizaciones del proceso de diseño reflejan la articulación entre imagen mental, representación externa y procesos de visualización (Gutiérrez, 1996).

Referencias

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 52*(3), 215-241. https://doi.org/10.1023/A:1024312321077

Chung, C.-C., Hsu, Y.-C., Yeh, R.-C. y Lou, S.-J. (2017). The influence of board games on mathematical spatial ability of grade 9 students in junior high school. *PEOPLE: International Journal of Social Sciences, 3*(1), 120-143. https://doi.org/10.20319/pijss.2017.31.120143

Del Grande, J. J. (1990). Spatial sense. *Arithmetic Teacher, 37*(6), 14-20. https://doi.org/10.5951/AT.37.6.0014

De Guzmán, M. (1989). Juegos y matemáticas. *Suma, 4*, 61-64.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. En C. Mammana y V. Villani (Eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century* (pp. 37-51). Kluwer.

Flores-Lamolda, L. y Ramírez-Uclés, R. (2025). Errores en la identificación de representaciones geométricas y algebraicas de las propiedades aritméticas. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. 180-187). SEIEM.

Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. En L. Puig y A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th PME Conference* (Vol. 1, pp. 3-19). Universidad de Valencia.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*. University of Chicago Press.

Maier, P. H. (1996). Spatial geometry and spatial ability: How to make solid geometry solid? En H.-G. Weigand, E. Cohors-Fresenborg, A. Peter-Koop, H. Maier, K. Reiss, G. Törner, B. Wollring, y K. Houston (Eds.), *Developments in Mathematics Education in Germany: Selected Papers from the Annual Conference on Didactics of Mathematics, Regensburg, 1996* (pp. 69-81). Goettingen State and University Library. https://webdoc.sub.gwdg.de/ebook/e/gdm/1996/index.html

Mayring, P. (2014). *Qualitative content analysis: Theoretical foundation, basic procedures and software solution*. Klagenfurt. https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:0168-ssoar-395173

Passow, A. (1993). National/State policies regarding education of the gifted. En K. Heller, F. Mönks, y A. H. Passow (Eds.), *International handbook of research and development of giftedness and talent* (pp. 29-46). Pergamon Press.

Presmeg, N. (1986). Visualization and mathematical giftedness. *Educational Studies in Mathematics, 17*(3), 297-311. https://doi.org/10.1007/BF00305075

Ramírez-Uclés, R. y Flores, P. (2017). Habilidades de visualización de alumnos con talento matemático: Comparativa entre los test psicométricos y las habilidades de visualización manifestadas en tareas geométricas. *Enseñanza de las Ciencias, 35*(2), 179-196. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2152

Ribera Puchades, J. M., Rotger García, L. y Petro Balaguer, A. B. (2024). Desarrollo de habilidades de pensamiento computacional y visualización a través del juego de mesa Colour Code. *Quadrante: Revista de Investigação em Educação Matemática, 33*(2), 244-266. https://doi.org/10.48489/quadrante.36881

Rico, L. (2012). Aproximación a la investigación en didáctica de la matemática. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 1*(1), 39-63. https://doi.org/10.35763/aiem.v1i1.4

Schoenherr, J. y Schukajlow, S. (2024). Characterizing external visualization in mathematics education research: A scoping review. *ZDM-Mathematics Education, 56*, 73-85. https://doi.org/10.1007/s11858-023-01494-3

Simons, H. (2009). *Case study research in practice*. SAGE.

Stylianou, D. y Pitta-Pantazi, D. (2002). Visualization and high achievement in mathematics: A critical look at successful visualization strategies. En F. Hitt (Ed.), *Representations and mathematics visualization* (pp. 31-46). Cinvestav-IPN.

EMERGENCIA DEL PENSAMIENTO COMPUTACIONAL: PROPUESTA DE UN PROTOCOLO DE OBSERVACIÓN CUALITATIVA

Emergence of computational thinking: a proposal for a qualitative observation protocol

Santaengracia, J. J.[a], Palop, B.[b] y Rodríguez-Muñiz, L. J.[a]

[a]Universidad de Oviedo, [b]Universidad Complutense de Madrid

Resumen

En el marco del creciente interés por integrar el pensamiento computacional en la educación matemática de primaria, este trabajo presenta un protocolo de observación cualitativa orientado a estudiar la emergencia de conceptos y componentes de este pensamiento en una tarea desenchufada de ordenación de pesos. El protocolo se fundamenta en el modelo de los tres pilares y organiza la observación de aula mediante categorías que permiten identificar acciones, decisiones y estructuras algorítmicas en la actividad del alumnado. La propuesta muestra cómo una tarea específica puede servir como base para organizar categorías de observación orientadas al análisis cualitativo de la emergencia del pensamiento computacional. Estos resultados sugieren que el protocolo constituye una herramienta útil para el estudio empírico del pensamiento computacional en el aula de matemáticas.

Palabras clave: *educación Primaria, metodología cualitativa, pensamiento computacional, protocolo de observación*

Abstract

Within the framework of the growing interest in integrating computational thinking into primary mathematics education, this study develops a qualitative observation protocol aimed at examining the emergence of concepts and components of computational thinking in an unplugged weight-sorting task. The protocol is grounded in the three-pillar model and structures classroom observation through categories that make it possible to identify actions, decisions, and algorithmic structures in students' activity. Its exploratory application shows that it is possible to systematically document different elements of computational thinking during task resolution. These results suggest that the protocol constitutes a useful tool for the empirical study of computational thinking in the mathematics classroom.

Keywords: *computational thinking; observation protocol; primary education; qualitative methodology*

INTRODUCCIÓN

El pensamiento computacional (PC) ha ganado relevancia en los últimos años en los currículos internacionales de educación primaria y secundaria y en la investigación educativa (Bocconi et al., 2022). En la actualidad, una parte importante de los estudios sobre su aplicación en el aula se centra en medir el impacto de las intervenciones mediante pruebas de muy diversa naturaleza, valorando su efectividad en el desarrollo del PC (Santaengracia et al., 2026a; Tang et al., 2020). Este crecimiento no ha venido acompañado con la misma intensidad de instrumentos metodológicos que permitan analizar y explicar cómo emerge el PC en situaciones naturales de aula, especialmente desde enfoques cualitativos e interpretativos. Más allá de determinar cuantitativamente si una intervención resulta

Santaengracia, J. J., Palop, B. y Rodríguez-Muñiz, L. J. (2026). Emergencia del Pensamiento Computacional: propuesta de un protocolo de observación cualitativa. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (pp. 537-544). SEIEM.

eficaz o no, es necesario comprender por qué lo es y de qué manera se manifiesta el PC durante el desarrollo de una actividad (Bisquerra et al., 2009).

Esta necesidad se hace especialmente patente en tareas computacionales más allá de la programación en las que la interacción, la manipulación de materiales, la toma de decisiones y el lenguaje natural ocupan un papel central. En este tipo de contextos, no siempre resulta evidente qué observar ni cómo hacerlo de manera sistemática (Cohen et al., 2000) y los instrumentos cuantitativos pueden verse limitados por las dificultades del alumnado para expresar por escrito cuestiones que les resulta más fácil explicar verbal o kinésicamente. Por este motivo, se plantea la necesidad de contar con un protocolo que permita dar respuesta a esta emergencia del PC a partir de registros de observación cualitativa. Por otro lado, una de las dificultades en el estudio del PC radica en identificar, dentro de la actividad del alumnado, las destrezas y los conceptos implicados en su desarrollo, ya que suelen manifestarse de forma entrelazada y, en ocasiones, resultan difíciles de distinguir.

Bajo estas premisas, los objetivos de esta comunicación son:

1. Diseñar una propuesta de protocolo de observación para el análisis de información cualitativa vinculada al PC.
2. Explorar cómo una tarea específica permite delimitar categorías de observación para el estudio cualitativo de la emergencia del PC.

MARCO TEÓRICO

Pensamiento computacional

El término PC fue popularizado a partir de la conceptualización de Wing (2006), quien lo definió como una forma de resolver problemas, diseñar sistemas y comprender fenómenos mediante conceptos fundamentales de la informática. Desde entonces, la literatura recoge múltiples aproximaciones al término con diferentes enfoques.

En el contexto de las contribuciones recientes presentadas en SEIEM, puede observarse una evolución desde trabajos centrados en la delimitación conceptual y curricular del PC hacia estudios orientados a sus implicaciones formativas y didácticas. Así, se han explorado las tareas desenchufadas de PC (Ayala-Altamirano, 2024; Rodríguez Muelas et al., 2024; Ruano-Cano et al., 2024) la formulación de problemas (Arencibia et al., 2025; Quevedo-Gutiérrez et al., 2025), la formación de profesorado respecto a percepciones y formación (Arjona-Aranda et al., 2025; Campos et al., 2024; Navarro-Clemente et al., 2025; Santaengracia et al., 2023) y el conocimiento especializado relativo al PC (Santaengracia et al., 2024, 2025). En conjunto, estas aportaciones dibujan una línea de investigación que avanza hacia la necesidad de comprender cómo se reconoce, moviliza y analiza el PC en contextos concretos de enseñanza y aprendizaje.

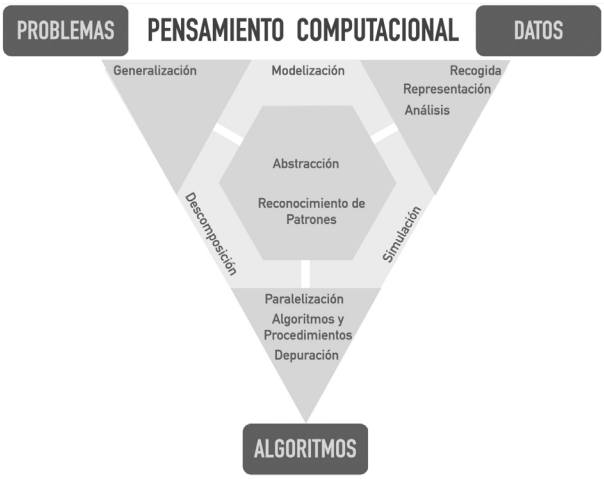
En este trabajo se asume la definición de Palop et al. (2025) del PC como: “la manera de razonar que permite enfrentarse a un problema, sobre unos datos, con el objetivo de que un ordenador lo resuelva” (Palop et al., 2025, p. 13396). En esta definición el PC es un proceso de razonamiento amplio, apoyado en tres pilares: problemas, datos y algoritmos, de ahí, el modelo de los tres pilares (MTP).

Elementos constitutivos del PC

Una de las dificultades en el estudio del PC en contextos educativos radica en la variedad de elementos que se incluyen en él en la literatura. Partiendo del modelo de Palop et al. (2025), las componentes del PC se entienden como los procesos que caracterizan pensar computacionalmente. Estas componentes se identifican en el interior de la Figura 1, situadas para facilitar su interpretación en relación de proximidad con los pilares del MTP. Al tratarse de procesos de pensamiento, estas componentes representan destrezas, competencias o habilidades en el proceso educativo.

Figura 1

Modelo de los tres pilares. Fuente: Palop et al. (2025, p. 13398, traducción propia)



Por otro lado, se pueden identificar también elementos que forman parte del PC y que tienen un carácter más conceptual, especialmente cuando nos referimos al PC en el ámbito educativo. Así en el trabajo de Brennan y Resnick (2012) se definen los conceptos algorítmicos de secuencia, bucle, condición, paralelismo, y eventos, así como conceptos sobre datos y operadores.

En este trabajo, la distinción entre componentes y conceptos del PC resulta especialmente relevante a la hora de estudiar su emergencia. Mientras que los conceptos remiten a contenidos computacionales concretos que pueden identificarse en la estructura de una tarea, las componentes aluden a procesos de pensamiento más amplios. Esta diferenciación resulta coherente con los marcos mencionados y hace que componentes y conceptos interactúen de forma complementaria en los procesos de enseñanza y aprendizaje del PC, de manera análoga a la interdependencia entre las competencias y los saberes definidos en el currículo español de matemáticas (Ministerio de Educación y Formación Profesional [MEFP], 2022; véase un análisis en Santaengracia et al., 2023).

MÉTODO

Con el fin de elaborar una propuesta de protocolo de observación de los procesos de enseñanza y aprendizaje del PC, el trabajo adopta un carácter exploratorio e interpretativo, orientado a construir una herramienta que permita identificar evidencias de PC a partir de los movimientos y del lenguaje natural del alumnado. No se aborda en esta comunicación la validación del instrumento, sino se propone un primer acercamiento fundamentado a la construcción del protocolo a partir de una tarea específica, por lo que su alcance queda vinculado al contexto concreto de la propuesta.

Para ello, se parte de una tarea computacional susceptible de ser analizada en el ámbito escolar, que sirve como sustento del estudio exploratorio, ya que ejemplifica la posible emergencia de distintos elementos del PC. A continuación, se propone una matriz de observación inicial con las categorías consideradas para la tarea seleccionada, organizada a partir de los elementos teóricos expuestos.

Tarea computacional

Se utiliza una tarea vinculada al estudio de algoritmos de ordenación en Educación Primaria, que se desarrolla mediante la utilización de materiales manipulativos (Santaengracia et al., 2026b). La actividad se plantea a partir de un conjunto de botes físicamente idénticos en apariencia, pero con pesos diferentes (diferenciándose en 7 gramos cada uno). El alumnado, en grupos de 3 o 4, debe ordenar los botes de menor a mayor peso, utilizando únicamente una balanza de dos platos (Figura 2). De este modo, la comparación entre elementos no puede realizarse de forma visual ni tampoco mediante estimaciones, sino exclusivamente a través de comparaciones binarias.

Figura 2

Ordenación de pesos con balanza. Fuente: elaboración propia.



Esta tarea es un problema computacional porque reproduce algunas restricciones propias de un ordenador: la comparación es únicamente binaria; no se conoce previamente el valor de los elementos; y una vez comparados no hay memoria de dicha comparación. Así, la balanza, muy habitual en el sentido de la medida, se convierte en un manipulativo idóneo para esta tarea de PC.

El diseño de la tarea permite establecer la hipótesis de que emergerán componentes como la descomposición, la depuración y la generalización, así como de los conceptos computacionales asociados a la algoritmia, como la secuencia, los bucles simples y anidados y los condicionales. En el caso de los bucles, por la naturaleza de la ordenación, denominaremos bucle interno a la reiteración de comparaciones consecutivas y bucle externo al anidamiento o reiteración del bucle interno. Además, la tarea podría dar lugar a la aparición de relaciones como la transitividad, que resulta especialmente útil como medida de control, al estar ampliamente estudiado su desarrollo en el alumnado desde la medida.

La Tabla 1 recoge las definiciones para la propuesta de protocolo de observación para esta tarea. En ella se incluyen los conceptos y componentes del PC que se acaban de mencionar, seleccionados a priori a partir del marco teórico de referencia, junto con una breve descripción y ejemplos de evidencias que podrían permitir identificar su manifestación en la resolución de la actividad.

Tabla 1

Propuesta de protocolo de observación del PC. Fuente: elaboración propia.

Concepto	Definición	Ejemplo
Secuencia	Evalúa la coherencia en la continuidad en el orden de las acciones del alumnado al aplicar el orden en sus comparaciones.	Colocar primero dos objetos en relación y, a partir de ese resultado, continuar comparando los siguientes sin romper el orden establecido.
Bucle interno	Valora el reconocimiento de comparaciones repetitivas durante la ordenación.	Comparar un mismo objeto con varios otros reiteradamente.
Bucle externo	Indica si el alumnado reconoce y excluye en pasos posteriores aquellos elementos ya ordenados.	Dejar aparte un objeto una vez situado correctamente y no volver a compararlo en las siguientes rondas.
Condicionales	Valora el uso de razonamientos condicionales, como “si este pesa más, entonces”, etc., para orientar la toma de decisiones.	Razonar que, si uno pesa más que el otro, entonces debe ir después en la fila.
Componente	**Definición**	**Ejemplo**
Depuración	Hace referencia a la capacidad de detectar y corregir errores durante la tarea.	Revisar una ordenación ya hecha, detectar que dos elementos están intercambiados y corregir su posición.

Generalización	Valora si el alumnado reconoce que la estrategia puede aplicarse a otros problemas o contextos.	Explicar que el mismo procedimiento serviría también para ordenar otros elementos o una cantidad distinta de los mismos objetos.
Descomposición	Identifica la capacidad de dividir la tarea global de ordenación en subtareas o pasos de decisión más manejables.	Separar conscientemente la tarea en pasos como: comparar dos elementos, decidir cuál va antes y repetir el proceso con los demás.

Fuente de datos y unidades de análisis

Los datos analizados proceden de la información cualitativa obtenida durante la resolución de la tarea. En la tarea, la recogida de información se realizó a través de tres vías complementarias: el registro en vídeo de las acciones del alumnado durante la tarea, la grabación de audio de la actividad y la toma de notas de campo por uno de los investigadores. En este sentido, el interés del análisis no se sitúa tanto en si el alumnado desarrolló correctamente la tarea, como en los movimientos, verbalizaciones e interacciones (interpersonales y con el material) que el alumnado desarrolla durante la resolución.

Consideramos como unidades de análisis todos los episodios o fragmentos de actividad. Tras una primera revisión del material audiovisual, se seleccionaron para su análisis en profundidad aquellos episodios en los que se identificaron evidencias potenciales de PC (en vídeo y audio, con ayuda de las notas de campo), siguiendo enfoques habituales de análisis de vídeo en investigación educativa (Derry et al., 2010). Se consideran especialmente relevantes aquellas situaciones en las que se identifica una acción significativa, una verbalización, una interacción entre estudiantes o una respuesta ante una intervención docente. La combinación de las tres fuentes de recogida de información permite enriquecer y contrastar la interpretación de estos episodios, ampliando las posibilidades de identificación de conceptos y componentes.

Proceso de construcción del protocolo

La construcción del protocolo parte de una revisión teórica previa. A partir de esta revisión, se seleccionan categorías iniciales fundamentadas en la literatura especializada. En concreto, para los conceptos, por las características de la tarea, se toman como referencia los conceptos de bucle, secuencia y condicional de la propuesta de Brennan y Resnick (2012), y las componentes de depuración, descomposición y generalización según la definición de Palop et al. (2025).

RESULTADOS

Protocolo propuesto

En la Tabla 1 se presentaba la propuesta de protocolo de observación. A continuación, en la Tabla 2, se exponen los niveles de logro definidos para cada concepto o componente.

Tabla 2

Niveles de logro definidos para cada concepto o componente. Fuente: elaboración propia.

Concepto	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3
Secuencia	Compara pesos sin un orden identificable y cambia de criterio durante la tarea.	Sigue una secuencia parcial, pero la interrumpe o la rehace varias veces.	Sigue una sucesión clara de pasos y mantiene el orden de actuación durante la tarea.
Bucle interno	No itera comparaciones de forma reconocible o lo hace sin sentido claro.	Itera comparaciones entre varios pesos sin poder explicar bien por qué lo hace.	Itera de forma sistemática las comparaciones para decidir la posición de un objeto.

Bucle externo	Reinicia la tarea completa cada vez o vuelve sobre objetos ya ordenados sin criterio.	Itera el procedimiento general, pero reincorpora elementos ya resueltos.	Itera el procedimiento sobre los pesos pendientes, dejando aparte las ya ordenadas.
Condicionales	Toma decisiones sin justificar la relación entre comparación y colocación.	Usa el resultado de alguna condición, pero no de manera consistente	Explicita condiciones y actúa de acuerdo con ellas.
Componente	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3
Depuración	Mantiene errores o contradicciones sin revisarlos o corregirlos.	Detecta errores, pero no los corrige completamente cuando revisa los procedimientos.	Detecta errores, identifica su causa y revisa el procedimiento para corregirlos.
Generalización	Explica su estrategia utilizando solo episodios de la tarea, sin proyectar a otros casos o situaciones similares.	Intuye que su estrategia podría servir en otra situación, pero no explica por qué ni cómo.	Explica que la misma estrategia puede aplicarse a otros objetos o a más pesos.
Descomposición	Afronta la tarea como un todo y no diferencia partes o subtareas.	Divide parcialmente la tarea, por ejemplo, buscando primero un peso concreto.	Organiza la tarea en subtareas claras, como comparar, fijar una posición y continuar.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Este trabajo propone un protocolo de observación cualitativa orientado a organizar el análisis de posibles evidencias de PC en una tarea desenchufada de aula. Frente a la abundancia de estudios centrados en la evaluación de la efectividad de intervenciones mediante pruebas específicas (Tang et al., 2020), sigue siendo menos claro cómo observar la emergencia del PC en la actividad del alumnado. Esta propuesta puede ponerse en diálogo con antecedentes próximos, aunque con diferencias claras. Lange et al. (2020) plantearon un protocolo de observación centrado en resolución de problemas y planificación, con orientación metacognitiva y en contextos postsecundarios, mientras que Zhao et al. (2026) desarrollaron y validaron un protocolo para aulas de ciencias de secundaria, con 17 subdimensiones y cuatro niveles de competencia. En contraste con estos estudios, el presente trabajo propone una herramienta cualitativa inicial cuyo objetivo no es medir progresión competencial general, sino observar la emergencia de conceptos y componentes del PC en contextos naturales de aula.

La propuesta supone una herramienta inicial con indicadores para orientar la identificación de posibles evidencias de la emergencia del PC en situaciones de aula. Además, se introduce una distinción explícita entre conceptos y componentes del PC, a menudo difuminada en la literatura. Como muestra la Tabla 2, ambos se manifiestan de forma distinta en la actividad del alumnado: los conceptos suelen hacerse visibles en la estructura de las acciones y en ciertas verbalizaciones, mientras que las componentes remiten a procesos más amplios de organización, revisión o transferencia de estrategias y no siempre se verbalizan. Distinguir ambos planos permite una observación más precisa y una interpretación más ajustada de los datos cualitativos.

El protocolo presentado debe entenderse como una primera propuesta situada, construida a partir de una tarea concreta y centrada principalmente en conceptos del PC ligados a la algoritmia. Es necesario ampliarlo a conceptos relacionados con los datos y los problemas computacionales, así como al resto de las componentes del PC del modelo de Palop et al. (2025). Las categorías y niveles propuestos responden a una situación específica y han sido formulados para recoger las evidencias que esa tarea puede hacer emerger con mayor claridad, por lo que es necesario explorar las adaptaciones necesarias para que no esté únicamente vinculado a la tarea que se analiza. Por tanto, su valor principal reside

en ofrecer una base inicial para sistematizar la observación cualitativa del PC y abre una línea de investigación orientada al estudio empírico de la emergencia del pensamiento computacional en el aula.

Agradecimientos

Trabajo financiado por el Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades con la Ayuda FPU21/05874 y el proyecto PID2024-155358NBI00 y por la Agencia de Ciencia, Competitividad e Innovación Empresarial Asturiana SEKUENS con el proyecto GRUPIN-IDE/2024/000713

Referencias

Arencibia, J. M., Quevedo, E., Perdomo-Díaz, J., Lijó, R. y de-Armas-González, P. (2025). Formulación de problemas de diseño e implementación de algoritmos en el marco del pensamiento computacional. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (p. 482). SEIEM.

Arjona-Aranda, G., Sánchez-Cruzado, C., Sánchez-Compaña, M. T. y León-Mantero, C. M. (2025). Desarrollo de destrezas del pensamiento computacional en la formación inicial del profesorado con entornos de realidad virtual. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (p. 484). SEIEM.

Ayala-Altamirano, C., Arjona-Aranda, G., Moral-Sánchez, S. N. y Sánchez-Cruzado, C. (2024). Iniciación al pensamiento computacional a través de tareas desconectadas sobre patrones. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 121–128). SEIEM.

Bisquerra, R. (Coord.). (2009). *Metodología de la investigación educativa.* La Muralla.

Bocconi, S., Chioccariello, A., Kampylis, P., Dagienė, V., Wastiau, P., Engelhardt, K., Earp, J., Horvath, M. A., Jasutė, E., Malagoli, C., Masiulionytė-Dagienė, V. y Stupurienė, G. (2022*). Reviewing Computational Thinking in Compulsory Education*. JRC Publications Repository. https://doi.org/10.2760/126955

Brennan, K. y Resnick, M. (2012). New Frameworks for Studying and Assessing the Development of Computational Thinking. En *Proceedings of the 2012 Annual Meeting of the American Educational Research Association* http://scratched.gse.harvard.edu/ct/files/AERA2012.pdf

Campos, C., del Olmo-Muñoz, J., Diago, P. D. y González-Calero, J. A. (2024). Estudio sobre la eficacia de la duración de sesiones orientadas al pensamiento computacional en la formación docente. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 569). SEIEM.

Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2000). *Research Methods in Education* (5.ª ed.). Routledge.

Derry, S. J., Pea, R. D., Barron, B., Engle, R. A., Erickson, F., Goldman, R., Hall, R., Koschmann, T., Lemke, J. L., Sherin, M. G. y Sherin, B. L. (2010). Conducting video research in the learning sciences: Guidance on selection, analysis, technology, and ethics. *Journal of the Learning Sciences, 19*(1), 3–53. https://doi.org/10.1080/10508400903452884

Lange, J., McCuaig, J. y Dawkins, H. (2020). A protocol for observation of computational thinking. En *ICERI2020 Proceedings* (pp. 4388–4397). IATED. https://doi.org/10.21125/iceri.2020.0972

Ministerio de Educación y Formación Profesional [MEFP] (2022). Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. *BOE (Boletín Oficial del Estado) 52*, de 2 de marzo de 2022, 24386–24504.

Navarro-Clemente, I., González-Calero, J. A., Del Olmo-Muñoz, J., Sotos-Serrano, M. A. y O'Connor, P. (2025). Pensamiento Computacional en educación infantil: Una mirada cualitativa a la visión del docente ante una enseñanza desconectada. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (p. 516). SEIEM.

Palop, B., Díaz, I., Rodríguez-Muñiz, L. J. y Santaengracia, J. J. (2025). Redefining computational thinking: A holistic framework and its implications for K-12 education. *Education and Information Technologies, 30*, 13385–13410. https://doi.org/10.1007/s10639-024-13297-4

Quevedo-Gutiérrez, E., Perdomo-Díaz, J., Lijó Sánchez, R. y de-Armas-González, P. (2025). Formulación de problemas de reconocimiento de patrones en el marco del pensamiento computacional. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. 373–380). SEIEM.

Rodríguez Muelas, D., Rodríguez Sánchez, M., Fuertes Prieto, M. A. y Alonso Ruano, B. M. (2024). Pensamiento computacional. Tratamiento desconectado en el aula de educación primaria. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 622). SEIEM.

Ruano-Cano, A., Sánchez-Cruzado, C., Moral-Sánchez, S. N., Sánchez-Compaña, T. y Raya-Fernández, A. (2024). Explorando el pensamiento computacional en matemáticas: experiencias desconectadas en educación primaria. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 627). SEIEM.

Santaengracia, J. J., Aguilar-González, A., Palop, B. y Rodríguez-Muñiz, L. J. (2024). Conocimiento especializado de estudiantes para maestro/a en una tarea sobre pensamiento computacional. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 489–496). SEIEM.

Santaengracia, J. J., Palop, B. y Rodríguez-Muñiz, L. J. (2023). Percepciones del profesorado sobre pensamiento computacional. Estudio de una formación. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 491–498). SEIEM.

Santaengracia, J. J., Palop, B. y Rodríguez-Muñiz, L. J. (2025). ¿Qué conocimiento especializado emerge tras una formación sobre pensamiento computacional? En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. 406–412). SEIEM.

Santaengracia, J. J., Palop, B. y Rodríguez-Muñiz, L. J. (2026a). Computational Thinking in K-6 Education: A Scoping Review of Instructional Practices. *Journal of Computers in Education.* https://doi.org/10.1007/s40692-025-00380-z

Santaengracia, J. J., Rodríguez-Muñiz, L. J. y Palop, B. (2023). Una situación de aprendizaje para el desarrollo del sentido estocástico en Educación Primaria. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 113*, 63–80.

Santaengracia, J. J., Rodríguez-Muñiz, L. J. y Palop, B. (2026b). How To Approach STEM in k–12: A Hands-On proposal for teacher training on Computational Thinking. *International Journal of Engineering Education, 42*(2), 293–299.

Tang, X., Yin, Y., Lin, Q., Hadad, R. y Zhai, X. (2020). Assessing computational thinking: A systematic review of empirical studies. *Computers and Education, 148*, 103798. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2019.103798

Wing, J. M. (2006). Computational thinking. *Communications of the ACM, 49*(3), 33–35. https://doi.org/10.1145/1118178.1118215

Zhao, H., Yu, J. y Li, G. (2026). Developing a process-oriented classroom observation protocol for assessing high school students' computational thinking in science classrooms: A Rasch-based proficiency framework. *Frontiers in Psychology, 17*, 1722422. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2026.1722422

CARACTERÍSTICAS DE LA PRÁCTICA PROFESIONAL "ANALIZAR TAREAS" DE ESTUDIANTES PARA MAESTRO DE EDUCACIÓN INFANTIL

Characteristics of professional practices "analyse tasks" by preservice early childhood teachers

Saorín, A., Buforn, À., Bernabeu, M. y Moreno, M.

Universidad de Alicante

Resumen

El objetivo de esta investigación es caracterizar el análisis realizado por estudiantes para maestros (EPM) de Educación Infantil de una tarea de geometría sobre el concepto de triángulo y cuadrilátero tras un módulo formativo diseñado ad hoc. 38 EPM resolvieron una práctica al inicio y al final del módulo formativo. Se realizó un análisis cualitativo deductivo de las producciones escritas en base a variables establecidas (ejemplo-especificidad; prototípico-especificidad; no-ejemplo-especificidad). Antes de la formación, la mayoría de los EPM eligió la Tarea A por su simplicidad y familiaridad. Tras la formación, casi todos seleccionaron la Tarea B, reconociendo la importancia de incluir variedad de ejemplos y no-ejemplos. Las justificaciones mostraron distintas características en el uso y contextualización del contenido y del vocabulario específico. De este modo, la formación favoreció la destreza interpretar tareas geométricas, aunque esta destreza aún requiere desarrollo.

Palabras clave: *curricular noticing, didáctica, geometría, práctica educativa, estudiantes para maestro*.

Abstract

The aim of this research is to characterise the analysis carried out by preservice teachers (PTs) in Early Childhood of a geometry task on the concepts of triangles and quadrilaterals following a specially designed training module. 38 PTs completed a practical exercise at the start and end of the training module. A deductive qualitative analysis of the written work was carried out based on established variables (example-specificity; prototypical-specificity; non-example-specificity). Before the training, most PTs chose Task A due to its simplicity and familiarity. After the training, almost all selected Task B, recognising the importance of including a variety of examples and non-examples. The justifications revealed different characteristics in the use and contextualisation of specific content and vocabulary. Thus, the training enhanced the ability to interpret geometric tasks, although this ability still requires further development.

Keywords: *curriculum noticing, didactics, geometry, educational practice, preservice teachers.*

INTRODUCCIÓN Y MARCO TEÓRICO

Uno de los objetivos en la formación inicial del profesorado es promover el desarrollo de competencias profesionales. En este sentido, la competencia mirar profesionalmente se presenta como un tópico central en la investigación en educación matemática (Zhang et al., 2025). Mason (2002) entiende la competencia docente mirar profesionalmente como atender a los detalles relevantes de una situación de enseñanza para dotarla de sentido considerando el objetivo de aprendizaje matemático pretendido. La investigación desarrollada desde esta perspectiva ha permitido comprender mejor cómo docentes en ejercicio y futuros docentes movilizan esta competencia en diferentes prácticas profesionales y dominios matemáticos (e. g., Fernández et al.,

Saorín, A., Buforn, À., Bernabeu, M. y Moreno, M. (2026). Características de la práctica profesional "analizar tareas" de estudiantes para maestro de Educación Infantil. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (pp. 545-552). SEIEM.

2026; Moreno et al., 2021). Entendemos por práctica profesional las acciones que realiza un docente (o futuro docente) en el proceso de enseñanza como, por ejemplo, mirar el razonamiento matemático de los alumnos, analizar materiales curriculares, planificar o analizar las clases de matemáticas y reflexionar sobre la enseñanza de las matemáticas en sí misma (Llinares y Ribeiro, 2026). En este estudio nos centramos en la práctica profesional de analizar materiales curriculares (recursos manipulativos, fichas, programas educativos, páginas webs, etc.).

En cuanto a esta práctica profesional, los docentes deben ser capaces de analizar de forma reflexiva y crítica estos materiales, identificando potencialidades y limitaciones relacionadas con un aprendizaje matemático significativo (Choy y Dindyal, 2021), entendiendo este proceso como mirar profesionalmente los materiales curriculares (*curricular noticing*) (Amador et al., 2017; Dietiker et al., 2018). De esta forma, mirar profesionalmente los materiales curriculares se presenta como una extensión necesaria de la mirada profesional. Dietiker et al. (2018) conceptualizan esta competencia a partir de tres destrezas interrelacionadas: (a) identificar aspectos relevantes en los materiales curriculares disponibles; (b) interpretar las oportunidades y limitaciones didácticas que ofrecen; y (c) decidir cómo utilizarlos en base a dichas oportunidades (y limitaciones) para el diseño de intervenciones de enseñanza. En este sentido, investigaciones previas avalan la necesidad de comprender cómo futuros docentes interactúan con los materiales curriculares durante la planificación de la actividad docente (Amador et al., 2017; Fernández et al., 2026; Rotem y Ayalon, 2023; Zorrilla et al., 2024).

En este estudio nos centramos en la destreza interpretar. En concreto, en cómo EPM de Educación Infantil miran profesionalmente un material curricular en el ámbito de la geometría para reconocer las oportunidades y/o limitaciones didácticas que ofrece. Las investigaciones enmarcadas en la mirada profesional de los materiales curriculares han mostrado que interpretar tareas no es un proceso neutro y objetivo. Amador et al. (2017) evidenciaron que futuros docentes identificaron diferencias entre tareas con un mismo objetivo matemático, reconociendo que pequeñas variaciones en su diseño generaban distintas interpretaciones. Otros estudios, como los de Fernández et al. (2026), Rotem y Ayalon (2023) y Zorrilla et al. (2024), muestran discrepancias entre las destrezas interpretar y decidir, señalando que los futuros docentes no siempre mantienen la coherencia entre la interpretación de las tareas y las actividades que posteriormente proponen para mejorarlas. Estos hechos señalan la importancia de adquirir esta práctica profesional durante la formación inicial docente.

Este marco se ha aplicado al estudio de contenidos y conceptos matemáticos como, por ejemplo, las fracciones (Zorrilla et al., 2024). Sin embargo, los trabajos centrados en la interpretación de tareas geométricas son escasos. Ortiz-Laso et al. (2025) destacaron que después de una instrucción, la mayoría de los estudiantes para maestro fueron capaces de identificar limitaciones y/o potencialidades de tareas de reconocimiento de cuerpos geométricos de un libro de texto al interpretarlas, siendo las representaciones mostradas prototípicas. En las aulas, el proceso de reconocer figuras y/o cuerpos geométricos está condicionado por la influencia de este tipo de representaciones. Centrándonos en la geometría plana, diversos estudios han mostrado la tendencia de los alumnos/as a asociar los conceptos geométricos con determinadas representaciones prototípicas (forma, tamaño y posición), familiares o regulares, ignorando propiedades esenciales como el cierre del contorno o la no curvatura de los lados (Bernabeu et al., 2025; Clements et al., 2018; Özkan y Bal, 2017). Por ello, es frecuente que reconozcan como triángulos o cuadriláteros únicamente aquellas figuras que responden a estas imágenes prototípicas (como triángulos equiláteros apoyados sobre su base o cuadrados con la base paralela al soporte de dibujo) sin atender a los atributos que las definen (Bernabeu et al., 2025). Estas dificultades revelan una dependencia de criterios perceptivos que pueden persistir en etapas educativas posteriores (Clements et al., 2018; Halat y Yesil-Dagli, 2016). En este sentido, la literatura subraya la importancia de incorporar a las tareas ejemplos variados (prototípicos y no-prototípicos) y no-ejemplos que permitan delimitar con mayor precisión los atributos necesarios y suficientes que definen un polígono (Clements et al., 2018). La presentación de figuras abiertas, con lados que se

cruzan o curvos, así como la inclusión de variantes no-prototípicas (figuras rotadas, irregulares o cóncavas), favorece el tránsito de un razonamiento meramente perceptivo hacia uno más analítico (Özkan y Bal, 2017).

Así, caracterizar cómo los futuros docentes interpretan tareas destinadas al reconocimiento de triángulos y cuadriláteros, puede ayudar a mejorar los programas de formación inicial para que los EPM desarrollen la competencia docente mirar profesionalmente.

Este trabajo es parte de una investigación más amplia cuyo objetivo es caracterizar la competencia mirar profesionalmente los materiales curriculares en estudiantes para maestro de Educación Infantil. En concreto, la cuestión que guía este estudio es:

- ¿Cómo los EPM de Educación Infantil interpretan una tarea sobre el reconocimiento de triángulos y cuadriláteros tras una formación sobre la importancia del papel de los ejemplos y no-ejemplos en la adquisición del concepto?

METODOLOGÍA

Participantes y contexto

Los participantes fueron 38 EPM de Educación Infantil de la Universidad de Alicante que cursaron la asignatura "Aprendizaje de la Geometría" durante el curso 2024-25. Los EPM no habían recibido instrucción previa sobre contenido geométrico durante el grado, pues ninguno de ellos era repetidor. El programa formativo de esta asignatura tiene como objetivo proporcionar oportunidades para que los EPM desarrollen prácticas profesionales, como mirar el pensamiento geométrico de los alumnos/as, diseñar y/o modificar tareas geométricas, planificar propuestas de aprendizaje de geometría, etc. La asignatura está organizada en módulos de 6-8 horas de duración, en los que se incluyen información teórica sobre contenidos geométricos (como concepto de polígono, cuerpos geométricos o isometrías) y sobre su aprendizaje y su enseñanza, y prácticas específicas que deben ser resueltas usando la información proporcionada.

En el módulo sobre la enseñanza-aprendizaje de figuras geométricas se introdujo la progresión en el aprendizaje geométrico desde una percepción global de las figuras hasta el reconocimiento de sus partes y atributos. Los EPM disponían de información teórica sobre el valor de los ejemplos/no-ejemplos y las representaciones prototípicas/no prototípicos (Aslan y Arnas, 2007; Buforn y Bernabeu, 2023) para favorecer una construcción sólida del concepto y superar errores asociados al uso exclusivo de representaciones prototípicas (Duval, 2006; Vinner y Hershkowitz, 1983). Asimismo, los EPM resolvieron prácticas profesionales para analizar y discutir tareas dirigidas a Educación Infantil, apoyándose en la información teórica proporcionada. Una de estas prácticas, sobre el reconocimiento de triángulos y cuadriláteros, se usó como instrumento de recogida de datos. Los EPM la resolvieron antes del inicio del módulo (pretest) y al finalizar la asignatura (postest).

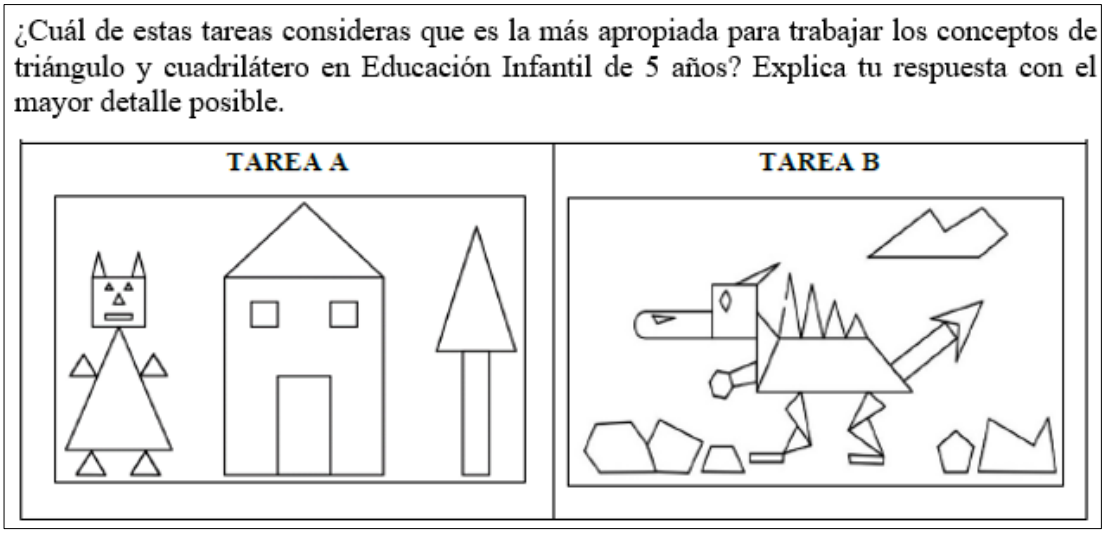
Instrumento de recogida de datos

Los datos de este estudio son las respuestas de los participantes a la práctica sobre reconocimiento de triángulos y cuadriláteros recogidas antes del desarrollo del módulo (pretest) y al final de la asignatura, como parte de la prueba de evaluación (postest). En esta práctica (Figura 1) se muestran dos imágenes correspondientes a dos tareas diferentes (Tarea A y Tarea B). Los EPM debían analizarlas para decidir y justificar cuál era más apropiada para el aprendizaje de los conceptos de triángulo y cuadrilátero en alumnado de Educación Infantil de 5 años. En la Tarea A aparecen triángulos equiláteros e isósceles como ejemplos de triángulo, y cuadrados y rectángulos como ejemplos de cuadriláteros, todos ellos en diferentes tamaños y en posición prototípica. La concepción sobre el concepto de triángulo y cuadrilátero que puede generar esta tarea en los alumnos/as es pobre, ya que se limita a dos tipos de triángulos y a dos tipos de cuadriláteros en posición prototípica. La imagen de la Tarea B incluye más variedad de figuras geométricas, ejemplos y no-ejemplos de

polígonos, diversos tipos de triángulos (escalenos, obtusángulos, rectángulos, etc.) en diferentes tamaños y posiciones, y ejemplos de cuadriláteros como trapecios (convexo) y un trapezoide (cóncavo), un rectángulo en posición no prototípica, entre otros. Además, se incluyen no-ejemplos de triángulos y cuadriláteros como figuras con curvas o abiertas, hexágonos, pentágonos (cóncavos y convexos), y un heptágono cóncavo. Todo ello permitiría generar una concepción sobre estos conceptos rica que permitiría al alumnado definir el triángulo como un polígono de tres lados, y los cuadriláteros como polígonos de cuatro lados, considerando que propiedades como la concavidad/convexidad o la regularidad no son propiedades relevantes para la definición requerida.

Figura 1

Práctica propuesta



La respuesta de los EPM a la pregunta profesional permitirá examinar cómo estos interpretan la tarea seleccionada a través del uso de la información teórica proporcionada en el módulo, así como las características de la argumentación escrita de los EPM al tomar una decisión sobre la idoneidad de las tareas para alcanzar el objetivo propuesto.

Análisis

El estudio se diseñó desde una perspectiva cualitativa e interpretativa de tipo pretest-postest. El enfoque desde el curricular noticing permitió analizar los aspectos teóricos que los EPM usaban en sus respuestas y cómo los consideraban, desde una perspectiva didáctica, para interpretar las oportunidades de aprendizaje presentes en las tareas. Así, el análisis se centró en los aspectos de la destreza interpretar que movilizaron los EPM en el contexto de una práctica profesional (simulada) de analizar tareas antes y después de la formación teórica correspondiente. Los datos fueron analizados considerando las siguientes variables: ejemplos de polígonos/variantes, prototípico y no-ejemplo, así como la especificidad con la que se referían a estos términos, tanto en la respuesta escrita del pretest como del postest. Se identificaron con 1/0 el uso de dichos términos en su argumentación o no, respectivamente. Además, para cada variable se consideró la columna especificidad, en la que se anotaban cómo hacían referencia a la característica correspondiente, y otra columna de observaciones para recoger información relevante que podría añadir o completar la información según la variable considerada. De esta forma, a cada EPM se le asignó un vector de siete componentes: uno para recoger la tarea elegida (A/B), y seis con 0 y 1 que reflejaba la variable a la que había hecho referencia y si habían proporcionado alguna evidencia de la variable. A modo de ejemplo, mostramos

el vector del estudiante EPM009 correspondiente a la respuesta del pretest: (A; 1,1, 0, 0, 0, 0). A, indica que eligió la Tarea A como la más adecuada para alcanzar el objetivo pretendido; 1, hizo referencia a ejemplos de figuras "contiene esas figuras [énfasis añadido: triángulo y cuadrilátero] en sus distintas variantes"; 1, especificó ejemplos de esas figuras "Cuadrado, rectángulo, isósceles, equilátero"; 0, no hizo referencia a figuras prototípicas; 0, no proporcionó evidencias de figuras prototípicas; 0, no se refirió a no-ejemplos; 0, no proporcionó evidencias de no ejemplos. Lo que se refleja en su respuesta: "*La tarea A, porque solo contiene estas figuras geométricas en sus distintas variantes, lo que nos permite mostrar ejemplos tanto de cuadriláteros (cuadrado, rectángulo) como de triángulo (isósceles, equilátero, …). Se podrían añadir figuras como el rombo o el trapecio"*.

Una vez analizadas todas las respuestas, se agruparon aquellas que compartían el mismo vector de 0/1, identificando 4 grupos de EPM atendiendo al uso que hicieron de los contenidos del módulo de formación y a las evidencias que usaban para justificar estos contenidos. Esta forma de agrupar a los EPM proporciona características de cómo incorporan elementos teóricos en su discurso escrito para justificar una toma de decisiones y, además, cómo su discurso va aumentando el grado de especificidad. A continuación, se describen los resultados de la investigación.

RESULTADOS

Selección de la tarea antes y después de la formación

En el pretest, la Tarea A fue considerada la más adecuada para trabajar los conceptos de triángulo y cuadrilátero en 5 años por 33 de los 38 EPM. Solo dos del total eligieron la Tarea B, y tres optaron por ambas tareas. La mayoría justificaron su idoneidad por la "sencillez" y "familiaridad" de las figuras. Los que seleccionaron ambas, indicaron que la Tarea A era más "adecuada para empezar" o "para introducir" el concepto de triángulo y cuadrilátero a los alumnos/as, mientras que la Tarea B era "más avanzada" al exigir discriminar entre más figuras. Este mismo argumento fue usado por los que eligieron la Tarea B, ya que mostraba "más ejemplos", "figuras de 5, 6, …, lados" o incluía "diferentes tipos de cuadriláteros expuestos desde perspectivas diferentes". Estos EPM no usaron términos específicos como variedad de ejemplos prototípicos y no-prototípicos (en forma y posición) y no-ejemplos de triángulo y cuadrilátero, aunque sí hicieron referencia a estos en su justificación ("*expuestos desde perspectivas diferentes*", "*figuras no tan básicas*").

En el postest, de los 38 EPM, 36 seleccionaron la Tarea B como la más adecuada y solo dos EPM eligieron la Tarea A, argumentando su elección por la simplicidad de las figuras ("*figuras más simples (Tarea A); la Tarea B puede liar*"). La mayoría de las justificaciones de los EPM que consideraron la Tarea B enfatizaron la variedad de ejemplos, la presencia de figuras prototípicas y no-prototípicas, y de no-ejemplos de triángulos y cuadriláteros, o bien argumentaron considerando las limitaciones de la Tarea A ("*La Tarea A proporciona polígonos prototípicos y no ampliarían el conocimiento más que lo básico*").

Justificación de la elección de la Tarea usando contenido del módulo formativo

El análisis realizado nos permitió caracterizar cuatro grupos de EPM según las características de la argumentación de la tarea elegida y las evidencias proporcionadas.

Grupo 0 (no hacen referencia a contenidos del módulo de formación, ni los evidencian): Tras la formación, solo un EPM (EPM038), no usó contenidos del módulo ni proporcionó evidencias de lo que estaba interpretando del potencial de la tarea. Por ejemplo, este EPM indicó que la tarea más adecuada era la A por su simplicidad y que la B era más compleja: "*Pienso que la tarea A es la más adecuada porque tiene figuras más simples, y si es para trabajar triángulos y cuadriláteros, la tarea B puede liar a los niños a la hora de reconocer figuras*".

Grupo 1 (hacen referencia a al menos uno de los contenidos del módulo de formación, pero sin proporcionar evidencias): Un grupo de EPM (n=11) mostró que la formación les ayudó a integrar

vocabulario específico del contenido trabajado en su argumentación, indicando al menos uno de los contenidos del módulo, pero sin proporcionar evidencias en la tarea concreta. Por ejemplo, el EPM037 indicó que la Tarea B era más apropiada, ya que ayudaba a los alumnos/as a comprender las definiciones de las figuras geométricas, contrastando esta información con que la Tarea A presentaba "*formas prototípicas"*. Además, añadió que en la Tarea B se presentaban "*ejemplos"* de diversos polígonos; "*junto a los contraejemplos* […] (lo que) *provoca que desarrollen una definición y una imagen del concepto más* […] *completa*". Sin embargo, este EPM no proporcionó en su justificación evidencias concretas presentes en la tarea, sino que nombró los conceptos de manera general. Es decir, no especificó dicho contenido.

Grupo 2 (hacen referencia a al menos uno de los contenidos del módulo de formación, proporcionando evidencias de al menos uno de estos contenidos): Otros EPM (n=11) integraron es sus justificaciones vocabulario específico del contenido, indicando al menos uno de estos contenidos, y proporcionaron al menos una evidencia de alguno de esos contenidos en la tarea seleccionada. En general, los EPM evidenciaron en sus justificaciones ejemplos o no-ejemplos de triángulos y cuadriláteros, siendo pocos los que hicieron referencia a representaciones concretas de figuras prototípicas. Por ejemplo, el EPM020 especificó "*tipos"* (ejemplos) de triángulos y cuadriláteros que aparecían en la tarea "*cuadriláteros: trapecio escaleno, punta de flecha y rombo, romboide; y de los triángulos: triángulo rectángulo y triángulo escaleno*". Además, usó el término "*no-ejemplos de polígonos*" y "*no prototípico/habitual de presentar una figura*", aunque no proporciono evidencias concretas de la tarea. Otro caso de este mismo grupo sería el EPM040, que en su justificación solo se refería a los no-ejemplos, proporcionando evidencias de las mismas como "*figura curva*", y solo se refirió a los términos ejemplos y prototípico de manera general, sin proporcionar evidencias ("*presenta una mayor variedad de figuras y estas están presentadas en posiciones no prototípicas por ejemplo, inclinadas o torcidas*").

Grupo 3 (hacen referencia a todos los contenidos del módulo de formación, proporcionando evidencias de al menos dos de estos): El resto de EPM (n=15), integraron el vocabulario específico del módulo proporcionando evidencias de al menos dos de estos contenidos en la tarea concreta. Por ejemplo, el EPM030 proporcionó evidencias de figuras prototípicas al referirse a la tarea A, como "(triángulo) *isósceles y el equilátero, y en posición prototípica y cuadriláteros prototípicos como el cuadrado y el rectángulo y en posición prototípica*"; se refirió a la variedad de ejemplos de la tarea B indicando que "*han variado las características irrelevantes como la regularidad, simetría*"; y a los no-ejemplos al evidenciar que la Tarea B "*han añadido figuras con curvas que no son polígonos*".

CONCLUSIONES

El objetivo de este estudio era caracterizar cómo los estudiantes para maestro de Educación Infantil interpretan una tarea sobre el reconocimiento de triángulos y cuadriláteros tras una formación sobre la importancia del papel de los ejemplos y no-ejemplos en la adquisición del concepto. Antes de la formación, la mayoría de los EPM indicaron la Tarea A como la más adecuada para abordar el concepto de triángulo y de cuadrilátero, justificando su elección en base a la simplicidad y familiaridad de las figuras que la componían. Este resultado sugiere que los EPM asociaban que la enseñanza de los polígonos era mejor si se mostraban figuras con simplicidad visual y familiares a los alumnos/as. De hecho, algunos EPM (n=14) compararon ambas tareas para reforzar esta idea. Esta interpretación inicial pone de manifiesto la tendencia de los EPM a asociar los conceptos geométricos con representaciones prototípicas y familiares (Clements et al., 2018; Bernabeu et al., 2025). Además, priorizan aspectos como la claridad visual o la sencillez de las figuras. Por tanto, presentan una interpretación bastante limitada y sesgada de las oportunidades didácticas de las tareas presentadas, centrada en las características superficiales y no en los contenidos matemáticos y didácticos que podrían favorecer el aprendizaje de los conceptos de triángulo y cuadrilátero.

Tras el módulo de formación, la elección mayoritaria de los EPM pasó a ser la Tarea B (excepto en dos casos). Estos resultados muestran que los EPM comienzan a reconocer la importancia didáctica de incorporar una amplia variedad de ejemplos (prototípicos y no-prototípicos) y de no-ejemplos para promover la construcción de los conceptos de triángulo y cuadrilátero (Clements et al., 2018; Özkan y Bal, 2017). De esta forma, la formación permitió a los EPM, desde el marco del *curricular noticing* (Dietiker et al., 2018), comenzar a interpretar las tareas desde una perspectiva más conceptual, al dejar de centrarse en la simplicidad visual y poner el foco en los atributos de las figuras que contribuyen a la comprensión del concepto.

Por otro lado, 15 EPM lograron integrar el vocabulario específico del contenido en sus argumentaciones y proporcionar evidencias de las tareas propuestas; 11 utilizaron dicho vocabulario, pero no lograron proporcionar evidencias en su totalidad; 11 utilizaron el vocabulario específico, pero de forma general, sin proporcionar evidencias; por último, un EPM ni utilizó el vocabulario específico ni mostró evidencias. Este hecho sugiere que la formación favoreció su incorporación del discurso teórico, pero la conexión entre dicho discurso y el análisis de las tareas es un proceso todavía en desarrollo. La identificación de estos grupos de EPM, según el uso de vocabulario específico del contenido apoyados por evidencias de las tareas propuestas, es indicativo de que el desarrollo de la destreza interpretar no es homogénea, siendo susceptible de mejora. Por tanto, se trata de una destreza compleja que requiere de tiempo y oportunidades para su adecuado desarrollo (Fernández et al., 2026; Rotem y Ayalon, 2023). Además, la adquisición de la práctica profesional analizar materiales curriculares implica reconocer determinados conceptos y usarlos para interpretar dicho material.

Este estudio aporta información sobre cómo la formación inicial puede favorecer el desarrollo de la mirada profesional de los materiales curriculares de los EPM. Sin embargo, también subraya la necesidad de diseñar (o modificar) intervenciones que permitan a los EPM conectar los contenidos geométricos con el análisis de los materiales curriculares para reconocer las posibilidades didácticas que éstos ofrecen. Por último, dado que la práctica se desarrolló en un contexto formativo (y evaluable), no podemos descartar que algunas respuestas estuvieran condicionadas por las expectativas de los EPM respecto a lo que se esperaba académicamente en la asignatura.

Agradecimientos

Esta investigación se ha llevado a cabo con el apoyo del proyecto CIGE/2026/218 de la Conselleria de Educación, Cultura y Universidades, del Programa de Redes-ICE de investigación en docencia universitaria del Instituto de Ciencias de la Educación de la Universidad de Alicante (convocatoria 2024-26) (Ref.: 6203) y de la Agencia Estatal de Investigación, Ministerio de Ciencia e Innovación (PID2023-149624NB-100).

Referencias

Amador, J. M., Males, L. M., Earnest, D. y Dietiker, L. (2017). Curricular noticing: Theory on and practice of teachers' curricular use. En E. O. Schack, M. H. Fisher y J. A. Wilhelm (Eds.), *Teacher noticing: Bridging and broadening perspectives, contexts, and frameworks* (pp. 427–443). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-46753-5_25

Bernabeu, M., Saorín, A., Buforn, À. y Sancho, M. (2025). Reconocimiento de triángulos en estudiantes de 1º a 6º de Educación Primaria. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán y I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. 132-139). SEIEM.

Choy, B. H. y Dindyal, J. (2021). Productive teacher noticing and affordances of typical problems. *ZDM—Mathematics Education*, *53*(1), 195–213. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01203-4

Clements, D. H., Sarama, J., Swaminathan, S., Weber, D. y Trawick-Smith, J. (2018). Teaching and learning geometry: Early foundations. *Quadrante, 27*(2), 7-31. https://doi.org/10.48489/quadrante.22970

Dietiker, L., Males, L. M., Amador, J. M. y Earnest, D. (2018). Curricular Noticing: A framework to describe teachers' interactions with curriculum materials. *Journal for Research in Mathematics Education, 49*(5), 521–532. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.49.5.0521

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, *9*(1), 143-168.

Fernández C, Ortiz-Laso Z, Saorín A. y Bernabeu M. (2026). Pre-Service Teachers' Interpretations and Decisions About a 3D Geometry Activity Sequence. *Education Sciences, 16*(1), 54. https://doi.org/10.3390/educsci16010054

Halat, E. y Yesil-Dağli, Ü. Y. (2016). Preschool students' understanding of a geometric shape, the square. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *30*, 830-848. https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n55a25

Llinares, S. y Ribeiro, A. (2026). Different approaches in mathematics teacher education: Participants, tools, contexts and professional learning. *Education Sciences*, *16*(2), 328. https://doi.org/10.3390/educsci16020328

Mason, J. (2002). *Researching your own practice: The discipline of noticing.* Routledge Falmer.

Moreno, M., Sánchez-Matamoros, G., Callejo, M. L., Pérez-Tyteca, P. y Llinares, S. (2021). How prospective kindergarten teachers develop their noticing skills: The instrumentation of a learning trajectory. *ZDM—Mathematics Education*, *53*(1), 57–72. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01234-5

Ortiz-Laso, Z., Saorín, A., Bernabeu, M. y Fernández, C. (2025). Pre-service primary school teachers' curricular noticing: interpreting a sequence of activities about 3D geometry. En M. Bosch, G. Bolondi, S. Carreira, C. Spagnolo y M. Gaidoschik (Eds.), *Proceedings of the Fourteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME14)* (pp. 3059-3066). Free University of Bozen-Bolzano and ERME.

Özkan, M. y Bal, A. (2017). Analysis of the Misconceptions of 7th Grade Students on Polygons and Specific Quadrilaterals. *Eurasian Journal of Educational Research, 67,* 161-182. https://doi.org/10.14689/ejer.2017.67.10

Rotem, S. H. y Ayalon, M. (2023). Constructing coherency levels to understand connections among the noticing skills of pre-service mathematics teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 1–27. https://doi.org/10.1007/s10857-023-09574-7

Vinner, S. y Hershkowitz, R. (1983). On concept formation in geometry. *Zentralblatt für Didaktikder Mathematik (ZDM)*, *83*(1), 20-25.

Zhang, Q., Choy, B. H. y Lee, M. Y. (2025). Teacher noticing in diverse educational contexts: Concepts, research, and future pathways. *ECNU Review of Education*, *8*(3), 924–934. https://doi.org/10.1177/20965311251350160

Zorrilla, C., González-Forte, J. M., Ivars, P. y Fernández, C. (2024). Mirar profesionalmente los materiales curriculares: Coherencia entre interpretar y decidir. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 537–544). SEIEM.

APRENDER MATEMÁTICAS FUERA DEL AULA: ANÁLISIS EXPLORATORIO DE LA EXPERIENCIA DEL ALUMNADO EN UN PROGRAMA DE ENRIQUECIMIENTO

Learning mathematics beyond the classroom: an exploratory analysis of students' experiences in a mathematical enrichment program

Serrano, J. Á., Martínez-Juste, S. y Oller-Marcén, A. M.

Universidad de Zaragoza

Resumen

Esta comunicación analiza la experiencia del alumnado en un programa de enriquecimiento matemático. El estudio, enmarcado en la didáctica de las matemáticas en contextos no formales, analiza el impacto del Taller de Talento Matemático (TTM) a través de tres ejes teóricos: dimensión socioafectiva, relación entre educación formal y no formal, y orientación académica. Se emplea un diseño que integra datos cuantitativos y cualitativos para fundamentar una codificación temática. Los resultados destacan la importancia del disfrute intelectual, la percepción del taller como un espacio de aprendizaje diferenciado y su influencia en la construcción de horizontes formativos. La información obtenida proporciona un sistema de categorías que contribuye a la comprensión de estos programas y abre la vía a futuras investigaciones de carácter longitudinal.

Palabras clave: *Educación matemática no formal, enriquecimiento matemático, afectividad en matemáticas, talento matemático, actividades extraescolares.*

Abstract

This communication examines students' experiences within a mathematical enrichment program. Framed within research on mathematics education in non-formal contexts, the study analyses the impact of the Mathematical Talent Workshop (TTM) through three theoretical axes: the socio-affective dimension, the relationship between formal and non-formal education, and academic orientation. A design integrating quantitative and qualitative data is employed to establish a thematic coding. The findings highlight the importance of intellectual enjoyment, the perception of the workshop as a differentiated learning space, and its influence on the development of educational horizons. The information obtained provides a system of categories that contributes to the understanding of such programs and opens avenues for future longitudinal research.

Keywords: *Non-formal mathematics education, mathematical enrichment, affectivity in mathematics, mathematical talent, extracurricular activities.*

INTRODUCCIÓN Y OBJETIVO

En los últimos años se ha incrementado la presencia de programas de enriquecimiento matemático, talleres y actividades extraescolares orientadas a alumnado con interés por la disciplina. Estos espacios, situados en la intersección entre educación formal y no formal, constituyen contextos potencialmente relevantes para la investigación en didáctica de las matemáticas, ya que permiten analizar la relación del alumnado con la disciplina fuera de las dinámicas curriculares ordinarias. En ellos, la participación suele ser voluntaria, las propuestas didácticas pueden adoptar formatos más exploratorios y se generan oportunidades para el desarrollo de comunidades de práctica en torno a la actividad matemática. Sin embargo, en el contexto español, la literatura ofrece escasas evidencias de estudios empíricos centrados en el análisis sistemático de este tipo de programas. Aunque existen

Serrano, J. Á., Martínez-Juste, S. y Oller-Marcén, A. M. (2026). Aprender matemáticas fuera del aula: análisis exploratorio de la experiencia del alumnado en un programa de enriquecimiento. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (pp. 553-560). SEIEM.

referencias a iniciativas de enriquecimiento o a la participación en competiciones matemáticas (Gaspar et al., 2022), son poco frecuentes los trabajos que documenten el impacto de estos espacios en la experiencia del alumnado. Esta omisión pone de manifiesto la necesidad de desarrollar investigaciones que permitan comprender mejor el papel de las iniciativas de aprendizaje en contextos no formales y su influencia en la relación de nuestro alumnado con las matemáticas.

Las investigaciones existentes sugieren que la participación en programas de enriquecimiento puede tener influencia sobre los estudiantes, entre otros aspectos, a nivel epistemológico, socioafectivo y vocacional. Algunos testimonios de estudiantes (Jaime et al., 2021) ponen de manifiesto la importancia de experiencias extracurriculares a la hora de fomentar el interés por la materia, favorecer el encuentro con iguales y reforzar su motivación. Por otro lado, existen iniciativas que evidencian el potencial de estos programas para ampliar las oportunidades de aprendizaje matemático fuera del aula. Por ejemplo, Contreras (2021) muestra que las Jornadas Matemáticas Preuniversitarias y Vocacionales de la Universidad de La Serena constituyen un espacio orientado a fomentar el interés por las matemáticas a través de retos, encuentros y actividades formativas. En España, el proyecto ESTALMAT, con más de dos décadas de trayectoria, ha consolidado un modelo de atención al talento matemático basado en el enriquecimiento y la profundización conceptual, ofreciendo a estudiantes con interés y capacidad matemática un entorno de aprendizaje diferenciado y sostenido en el tiempo (Jaime y Gutiérrez, 2017). Teniendo en cuenta la relevancia de estos programas como espacios complementarios a las experiencias matemáticas en contextos formales, se hace necesario llevar a cabo nuevos estudios que permitan analizar otras experiencias concretas y, en particular, comprender cuál es la percepción de las mismas por parte del alumnado participante.

En esta línea, nuestro trabajo analiza las respuestas del alumnado participante en el Taller de Talento Matemático de Aragón (TTM) a una encuesta de valoración enviada al finalizar el curso escolar 2024-2025. El objetivo principal de este estudio es explorar y analizar las experiencias del alumnado en el programa de enriquecimiento en relación con tres ejes fundamentales: las dimensiones socioafectivas, la orientación académica y la relación entre la educación formal y no formal. En particular, esta investigación busca identificar la presencia y precisar el impacto de estas dimensiones en la experiencia del estudiante.

MARCO TEÓRICO

Siguiendo el objetivo de esta comunicación, nuestro marco teórico está organizado en torno a tres ejes: la dimensión socioafectiva en el aprendizaje de las matemáticas, las diferencias o tensiones entre educación formal y no formal, y la proyección académica y vocacional.

Dimensión socioafectiva

Beltrán-Pellicer y Godino (2019) caracterizan el dominio afectivo como un agregado de emociones, actitudes, creencias y valores que interactúan entre sí y con otros dominios del aprendizaje. La dimensión socioafectiva constituye uno de los ejes centrales en la investigación sobre aprendizaje matemático en contextos no formales, especialmente en programas de enriquecimiento extracurriculares. En primer lugar, cabe mencionar que la participación voluntaria y el afecto positivo durante las actividades se asocian con un mayor nivel de implicación en el momento de la realización de la actividad (Beymer et al., 2018). Por otro lado, el desarrollo de actividades de enriquecimiento fuera del aula muestra que los contextos que apoyan la autonomía, la competencia y el aprendizaje entre iguales contribuyen a mantener objetivos de aprendizaje, mitigando el descenso en la motivación del alumnado característico de la educación secundaria (Grolnick et al., 2007). Otros estudios centrados específicamente en el enriquecimiento matemático extraescolar evidencian que este tipo de iniciativas puede reforzar la confianza del alumnado en sus propias capacidades matemáticas y aumentar su interés y disfrute por la disciplina (Jensen y Sjaastad, 2013), además de promover formas de implicación conductual, emocional y cognitiva cuando las propuestas se perciben como desafiantes e interactivas (Lyakhova y Neate, 2024). En esta misma línea, los aspectos

sociales inherentes a la participación en un programa de estas características juegan un papel importante en los afectos del alumnado, su interés y el desarrollo de la confianza en sus propias capacidades. Por otra parte, el sentimiento de pertenencia a una actividad puede actuar como nexo entre las competencias sociales del alumnado y su motivación en matemáticas y ciencias (Hoffman et al., 2021). En un contexto específicamente matemático, Brodie (2022) documenta cómo un club extraescolar genera experiencias diferenciadas del aula formal, favoreciendo la colaboración, el intercambio de ideas y el desarrollo de relaciones más positivas con la disciplina.

Educación formal vs. no formal

Más allá de la dimensión socioafectiva, la literatura ha analizado cómo los programas extraescolares configuran marcos de actividad diferenciados respecto a la escolaridad ordinaria. En este sentido, diversos autores han abordado la relación entre educación formal y no formal en el ámbito STEM subrayando que la diferencia entre ambos contextos no es meramente organizativa, sino que implica un marco pedagógico y finalidades parcialmente diferenciadas. En este sentido, Sonnert et al. (2025) distinguen entre una lógica instrumental, vinculada al contexto escolar y orientada a la preparación académica y profesional, y una lógica intrínseca, propia de experiencias voluntarias fuera del horario lectivo, que tiene que ver también con el desarrollo del interés del alumnado por las materias STEM. Esta distinción permite situar los programas extraescolares no solo como ampliación del currículo, sino como espacios con metas y dinámicas específicas. La evidencia empírica refuerza esta diferenciación. Jaggy et al. (2025) muestran que estudiantes con altas capacidades perciben mayores niveles de activación cognitiva, adaptabilidad e interés en un programa extracurricular de enriquecimiento que en sus clases regulares, lo que apunta a la existencia de un régimen didáctico experimentado como más ajustado a sus intereses y necesidades. En el ámbito específicamente matemático, Kennedy y Smolinsky (2016) caracterizan los círculos matemáticos (*Math Circles*) como entornos de participación voluntaria e interacción horizontal que aproximan al alumnado a prácticas propias de la disciplina, promoviendo formas de implicación distintas a las de la clase tradicional.

Orientación académica

Un tercer eje se refiere a la incidencia de los programas extracurriculares en la proyección académica futura del alumnado. En el contexto de competiciones matemáticas, He et al. (2022) analizan el sistema chino y evidencian que la participación en estos entornos selectivos no solo potencia habilidades matemáticas avanzadas, sino que se asocia con elecciones académicas posteriores fuertemente vinculadas a las matemáticas: la mayoría de los antiguos participantes encuestados cursaron estudios universitarios en matemáticas o áreas afines, y cerca de la mitad manifestó la intención de dedicarse a la investigación matemática o a profesiones estrechamente relacionadas. Lo anterior señala la influencia de la experiencia competitiva en la orientación académica y vocacional, al reforzar la identidad matemática del alumnado y su proyección hacia estudios relacionados con esta disciplina. Desde una perspectiva más relacionada con las ciencias experimentales, Van Meter-Adams et al. (2014) muestran que, entre estudiantes con alto talento e interés científico, los programas extracurriculares desempeñan un papel clave en la atracción inicial hacia estos campos. En particular, de entre las actividades propuestas en estos programas, son aquellas relacionadas con la investigación las que permiten mantener en el tiempo el interés del alumnado. En el estudio citado, una mayoría significativa atribuye a encuentros fuera del aula —como influencias familiares o experiencias tempranas— el origen de su interés por las materias STEM, y señala las actividades relacionadas con la investigación como factor decisivo para mantener la orientación académica en esta dirección. En el contexto del TTM, las anteriores experiencias estarían más relacionadas con sesiones de resolución de problemas o prácticas guiadas relacionadas con la investigación matemática. Teniendo en cuenta lo anterior, el análisis de las experiencias del alumnado participante en el TTM puede contribuir a comprender cómo influye este programa sobre su orientación académica, atendiendo también al desarrollo de sus expectativas académicas en esta dirección.

METODOLOGÍA

El TTM de Aragón es una actividad extraescolar dirigida a alumnado de 3.º de ESO, 4.º de ESO y Bachillerato con interés en las matemáticas y la resolución de problemas. Las sesiones se celebran los viernes por la tarde e incluyen charlas de divulgación en formato de lección magistral, competiciones matemáticas por equipos, talleres participativos o prácticas guiadas (Manero et al., 2021). La inscripción es libre y gratuita sin ningún proceso de selección del alumnado participante.

La recogida de información se llevó a cabo mediante un cuestionario digital enviado a los 202 participantes, obteniendo 47 respuestas válidas. Aunque la tasa de respuesta representa una fracción baja de la población, la muestra es equilibrada atendiendo a los porcentajes de los segmentos: el reparto por cursos (desde 3.º de ESO a 2.º de Bachillerato con variaciones de entre el 19% y 29%) y género (55,3% chicos, 42,5% chicas) refleja fielmente la composición demográfica habitual del programa, minimizando sesgos de representatividad por sexo o nivel educativo.

Descripción del instrumento

En la Tabla 1 se describen las 13 preguntas del cuestionario no relacionadas con la caracterización de la muestra, agrupadas según su función e indicando los trabajos de referencia de los que se han extraído y adaptado cada bloque de preguntas. El cuestionario combina variables categóricas nominales, dicotómicas y múltiples con preguntas abiertas. Esto nos permite combinar la recogida de datos cuantitativos, de carácter descriptivo, con información cualitativa procedente de las respuestas abiertas, dando una visión más amplia de las percepciones del alumnado.

Tabla 1

Estructura del cuestionario y ejes temáticos con los que se vincula

Preguntas	Eje temático vinculado	Tipo
¿Por qué motivo te has apuntado al TTM?	*Dimensión socioafectiva* Hoffman et al. (2021) Beymer et al. (2018) Brodie (2022)	Abierta
¿Qué es lo que más te ha gustado de participar?		Cerrada
¿Qué cambiarías del TTM?		Abierta
¿Te planteas volver el año que viene?		Sí/No
¿Por qué? Explica tu respuesta		Abierta
¿Ha sido como te esperabas?	*Educación formal vs. no formal* Kennedy y Smolinsky (2016) Jaggy et al. (2025)	Sí/No
¿Por qué? Explica tu respuesta		Abierta
¿Ha cambiado tu manera de ver las matemáticas?		Sí/No
¿Por qué? Explica tu respuesta		Abierta
¿Vas a cursar un grado relacionado con las matemáticas?	*Orientación académica* He et al. (2022) Van Meter-Adams et al. (2014)	Sí/No
En caso afirmativo, ¿cuál?		Abierta
¿Ha influido el TTM en tu decisión?		Sí/No
¿De qué modo dirías que ha influido?		Abierta

Análisis de los datos

Las preguntas cerradas se analizaron mediante frecuencias absolutas. Esto permite describir tendencias generales de la muestra y segmentar de manera general las respuestas del alumnado y su distribución. Las respuestas abiertas se han analizado mediante un análisis temático de tipo inductivo (Braun y Clarke, 2006). En este tipo de análisis, la codificación de los datos permite organizar la información en categorías que facilitan identificar patrones y tendencias dentro de nuestro conjunto de datos. En particular, el proceso se ha desarrollado siguiendo las fases propuestas por estos autores.

RESULTADOS

En relación con las preguntas relacionadas con la dimensión socioafectiva, las respuestas permiten identificar varios motivos recurrentes para inscribirse en el TTM: el más frecuente es una motivación

intrínseca hacia las matemáticas, manifestada por 20 de los 47 estudiantes. En segundo lugar, 12 estudiantes indican su interés por ampliar conocimientos más allá del currículo ordinario. Como ejemplo, podemos citar a un alumno que comenta: "siempre me gustaron las matemáticas y no se me daban mal, por lo que me apunté para profundizar mi aprendizaje en ellas más allá de las clases del instituto". De manera algo menos significativa, para 8 participantes, el TTM aparece como una oportunidad novedosa y diferente. En 5 de las respuestas aparece como motivo principal la influencia externa o componente social: recomendaciones de docentes, familiares, o el deseo de seguir con compañeros. Por último, 2 participantes mencionan su orientación académica futura como origen de su interés por el TTM.

La pregunta acerca de lo que más les ha gustado de participar en el TTM tiene formato de opción múltiple, de modo que el conteo se ha efectuado considerando cada opción marcada. El resultado más destacado es que 37 de 47 participantes señalan como aspecto más valorado el hecho de aprender matemáticas que no ven en clase. El segundo elemento más citado, con 22 menciones, es la posibilidad de conocer a otros chicos y chicas aficionados a las matemáticas. La opción "Entender mejor las matemáticas" ha sido escogida por 15 personas, mientras que 12 estudiantes destacan la resolución de problemas en equipo. Por último, 2 personas han escogido la opción "Otro".

Por contra, las respuestas acerca de qué cambiarían del TTM se encuentran distribuidas entre más categorías. La valoración predominante es positiva, ya que 24 personas afirman que no cambiarían nada o no se les ocurre qué cambiar. De entre quienes manifiestan algún aspecto negativo, 8 personas proponen cambios en contenidos o temas tratados según preferencias personales, mientras que otras 8 personas señalan cambios organizativos o logísticos. Por otra parte, 6 participantes preferirían que las sesiones fueran más dinámicas, más prácticas o con explicaciones más sencillas. Por ejemplo, una respuesta apunta a que las sesiones de preparación para la Olimpiada pueden vivirse con un ritmo demasiado acelerado: "Las prisas por dar tanto […] hace que las clases se sientan como las del instituto, con teoría explicada rápido y ejercicios difíciles." Por último, 1 alumno manifiesta que le gustaría que hubiera mayor interacción entre alumnado de distintos niveles.

Al ser preguntados sobre si volverían al TTM el año que viene observamos una alta intención de continuidad, ya que 39 de 47 participantes afirman que se plantean volver al Taller. En cuanto a los motivos para ello, la mayoría (30 personas) señala la satisfacción general y la voluntad de seguir aprendiendo en cursos sucesivos. Como ejemplo ilustrativo, un participante indica que volvería al TTM "porque quiero aprender más cosas y me parece una buena oportunidad para ello". Entre las respuestas minoritarias se indica la componente social (5 personas) y la preparación para olimpiadas (4 personas). Cabe destacar que 8 personas mencionan la imposibilidad de volver por terminar la etapa, aunque les gustaría continuar en el TTM. Un participante señala: "Porque estaré en la universidad, claro… Pero si no, ¡volvería!"

Los resultados relacionados con la percepción de las diferencias entre el contexto formal y el no formal en el aprendizaje de las matemáticas señalan que el TTM se percibe como un contexto claramente diferenciado del aula ordinaria. De los encuestados, 36 participantes señalan que el TTM ha cambiado su manera de ver las matemáticas, mientras que 11 personas indican que no lo ha hecho. Las razones para ambas son variadas: 14 personas señalan que el TTM muestra unas matemáticas más amplias o distintas a las del aula ordinaria. Como ejemplo, un alumno señala que el Taller "me ha ayudado a entenderlas más allá de hacer cuentas o resolver ecuaciones." A su vez, 11 participantes mencionan que el Taller permite ver la aplicación práctica, cotidiana o real de las matemáticas. Como señala un estudiante: "En el TTM te das cuenta de lo útiles e importantes que son las matemáticas. Que son necesarias para todo y están en casi todos los aspectos de nuestra vida." Cabe resaltar que las 6 personas que indican que no ha cambiado su visión manifiestan que ha sido porque ésta ya era positiva. Entre las respuestas más minoritarias, 5 de ellas apuntan a que el Taller modifica la relación afectiva con las matemáticas: más disfrute, interés, belleza o motivación. Entre ellas, destaca una que introduce explícitamente la dimensión social: "Me ha mostrado que las matemáticas pueden ser una experiencia social tremendamente interesante." Por su parte, 4 estudiantes señalan que el TTM enseña

nuevas estrategias, formas de razonar o maneras de resolver problemas, y 2 personas indican que el Taller mejora o complementa el aprendizaje del aula ordinaria. Por último, 5 personas dicen que su visión no ha cambiado sin aportar más explicaciones.

La parte del cuestionario relacionada con la influencia del TTM en la orientación académica futura del alumnado tiene una muestra menor (9 respuestas válidas), ya que se dirige únicamente a los estudiantes de Bachillerato. A la pregunta acerca de si piensan cursar un grado relacionado con las matemáticas, 7 de los estudiantes responden que sí, mientras que 2 señalan que no. De entre las personas que responden afirmativamente, la opción principal son las matemáticas (3 personas), seguidas de física (2 personas), doble grado en física y matemáticas (1 persona) e ingeniería (1 persona). Al ser preguntados acerca de si el TTM ha influido en su decisión, 6 participantes consideran que sí lo he hecho, mientras que 3 manifiestan que no lo ha hecho. Cabe señalar que, en estos casos, la ausencia de influencia no significa necesariamente falta de valoración del Taller: en una respuesta se indica explícitamente que la decisión ya estaba tomada.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El análisis presentado constituye una primera aproximación al estudio de la experiencia del alumnado en un programa de enriquecimiento matemático en un contexto no formal. En relación con la dimensión socioafectiva, las respuestas muestran que el TTM es percibido como un espacio de disfrute intelectual y de ampliación matemática. En la pregunta sobre los aspectos más valorados, 79 % del alumnado señala el aprendizaje de matemáticas que no se trabajan en clase, el 47 % destaca la posibilidad de conocer a otras personas aficionadas a las matemáticas y el 26 % menciona la resolución de problemas en equipo. Los resultados sugieren que la valoración positiva del TTM no se limita al contenido matemático, sino que incorpora también una dimensión social. Esto es coherente con investigaciones que han documentado el papel del sentido de pertenencia en el desarrollo del interés en contextos no formales de aprendizaje STEM (Hoffman et al., 2021). La elevada valoración afectiva del programa observada en las respuestas coincide con resultados obtenidos en otros estudios sobre programas de enriquecimiento extracurriculares (Beymer et al., 2018) y nuestros resultados también son coherentes con la observación de Brodie (2022) respecto a que este tipo de actividades pueden favorecer relaciones positivas con la disciplina y reforzar la identidad matemática a través de la resolución de problemas desafiantes y el intercambio de ideas.

Uno de los resultados más consistentes es que el TTM permite al alumnado acceder a contenidos y enfoques matemáticos percibidos como diferentes a los del aula ordinaria. De nuevo, en la pregunta sobre los aspectos más valorados, el 79 % indica “aprender matemáticas que no vemos en clase”. Además, al explicar si el Taller ha cambiado su manera de ver las matemáticas, la categoría más frecuente —el 30 % de las respuestas— alude precisamente a que el TTM muestra unas matemáticas más amplias, variadas o distintas a las del currículo escolar. Esta percepción coincide con la caracterización que varios estudios realizan de los programas de enriquecimiento matemático, por ejemplo, en el caso de los *Math Circles*, Kennedy y Smolinsky (2016) documentan que estos espacios promueven la exploración de ideas, la discusión colectiva de problemas y una interacción más “horizontal” entre alumnado y docentes. Por otra parte, estudios recientes sobre programas extracurriculares indican que los estudiantes suelen percibir un aumento de su motivación en estos contextos en comparación con sus clases habituales (Jaggy et al., 2025). Estos resultados permiten interpretar las respuestas del alumnado del TTM, que con frecuencia definen su experiencia por oposición a las vivencias propias del aula ordinaria: en las respuestas del alumnado, esta diferencia entre contexto formal y no formal aparece de manera recurrente. Al justificar si el Taller había cambiado su manera de ver las matemáticas, el 30 % señaló que le había permitido descubrir unas matemáticas distintas a las del aula ordinaria, y el 23 % destacó que le había ayudado a reconocer su aplicación práctica, cotidiana o real. Lo anterior abre una posible línea de investigación centrada en cómo los contextos no formales favorecen la construcción de significado matemático y qué elementos del diseño de estas actividades favorecen esta percepción de “matemáticas diferentes”.

Por último, aunque esta parte del cuestionario fue respondida solo por 9 participantes, los datos apuntan a una posible relación entre la participación en el TTM y la orientación hacia estudios vinculados con las matemáticas. En esta submuestra, el 78 % indica que va a cursar un grado relacionado con las matemáticas y el 67 % afirma que el TTM ha influido en su decisión. Por tanto, más que establecer una relación causal, los resultados permiten observar cómo el TTM puede actuar como un espacio de refuerzo, exploración o consolidación de intereses académicos próximos a las matemáticas. Estos resultados son coherentes con investigaciones previas (He et al., 2022), en las que se muestra que antiguos participantes en Olimpiadas Matemáticas optan por carreras universitarias relacionadas con esta disciplina. En un sentido más amplio, las investigaciones sobre trayectorias en materias STEM indican la influencia de las experiencias extracurriculares tanto en el origen como en el mantenimiento en el tiempo del interés por estas ramas del conocimiento (Van Meter-Adams et al., 2014). Así, los resultados permiten abordar un análisis centrado en la relación entre participación en programas de enriquecimiento y construcción de trayectorias académicas, entendida no como efecto inmediato y lineal, sino como proceso progresivo de consolidación de intereses y proyectos.

Para finalizar, los resultados obtenidos sugieren que los programas de enriquecimiento matemático no solo tienen interés para el alumnado con alta motivación inicial, sino que también pueden ofrecer claves para repensar la enseñanza ordinaria de las matemáticas. Al presentar la disciplina como una actividad exploratoria, social, creativa y conectada con contextos reales, estos programas pueden contribuir a cuestionar ciertas creencias reduccionistas, como entender las matemáticas únicamente como cálculo, fórmulas o procedimientos mecánicos. No obstante, también es necesario reconocer sus limitaciones: al tratarse de actividades voluntarias suelen llegar en muchos casos a alumnado ya interesado o con condiciones familiares, académicas y logísticas que facilitan su participación. Por ello, más que considerarlos una alternativa al aula ordinaria, estos programas pueden entenderse como espacios complementarios que permiten identificar prácticas valiosas susceptibles de inspirar mejoras en la enseñanza de las matemáticas para un alumnado más amplio. En este sentido, algunas características del TTM podrían inspirar propuestas didácticas orientadas a mejorar la relación del alumnado con las matemáticas.

En cuanto a las limitaciones del propio estudio, cabe destacar que la encuesta ha sido respondida por 47 de los 202 participantes del TTM, por lo que podría haber un sesgo en las respuestas si la decisión de participar en la encuesta hubiera estado motivada, por ejemplo, por su satisfacción con el programa. No obstante, la consistencia de las respuestas cualitativas permite una primera aproximación sólida que deberá ser confirmada en etapas posteriores de nuestro trabajo.

Referencias

Beltrán-Pellicer, P. y Godino, J. D. (2019). An onto-semiotic approach to the analysis of the affective domain in mathematics education. *Cambridge Journal of Education*, *50*(1), 1-20. https://doi.org/10.1080/0305764X.2019.1623175

Beymer, P. N., Rosenberg, J. M. y Naftzger, N. J. (2018). Examining Relationships among Choice, Affect, and Engagement in Summer STEM Programs. *Journal of Youth and Adolescence*, *47*(6), 1178-1191. https://doi.org/10.1007/s10964-018-0814-9

Braun, V. y Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in Psychology, 3*(2), 77-101. https://doi.org/10.1191/1478088706qp063oa

Brodie, K (2022). Learning Mathematics in an After-school Mathematics Club. *African Journal of Research in Mathematics Science and Technology Education 26*(3), 237-247. https://doi.org/10.1080/18117295.2022.2131267

Contreras, D. (2021). Programa JOMAT ULS, jornadas matemáticas preuniversitarias y vocacionales de la Universidad de La Serena. En A. Gutiérrez, M. J. Beltrán-Meneu, J. M. Ribera, R. Ramírez-Uclés, A. Jaime, E. Arbona, C. Sua, L. Rotger, C. Jiménez-Gestal, A. A. Magreñán, y A. M. Damián (Eds.), *Jornadas Internacionales de Investigación y Práctica Docente en Alta Capacidad Matemática* (pp. 69-74). Universidad de la Rioja.

Gaspar, M., Fauring P. y Falk, M. E. L. (2022). The Iberoamerican mathematics olympiad, competition and community. *ZDM-Mathematics Education 54*(5), 1059-1071. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01338-6

Grolnick, W. S., Farkas, M. S. y Valsiner, J. (2007). Facilitating motivation in young adolescents: Effects of an after-school program. *Journal of Applied Developmental Psychology*, *28*(4), 332-344. https://doi.org/10.1016/j.appdev.2007.04.004

He, Y. J., Xiong, B., Lin, T. y Zhang, Y. (2022). Mathematics competitions in China: Practice and influence. *ZDM–Mathematics Education, 54*(5), 1087-1100. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01325-3

Hoffman, A. J., McGuire, L., Rutland, A., Hartstone-Rose, A., Irvin, M.J., Winterbottom, M., Balkwill, F., Fields, G.E. y Mulvey, K. L. (2021). The Relations and Role of Social Competencies and Belonging with Math and Science Interest and Efficacy for Adolescents in Informal STEM Programs. *Journal of Youth and Adolescence 50*(2), 314-323. https://doi.org/10.1007/s10964-020-01302-1

Jaggy, A. K., Wagner, W., Fütterer, T, Göllner, R. y Trautwein, U. (2025). Teaching quality in STEM education: Differences between in- and out-of-school contexts from the perspective of gifted students. *International Journal of STEM Education, 12*(1), article number 53. https://doi.org/10.1186/s40594-025-00576-w

Jaime, C., Contreras, D. y Mora, M. (2021). Estudiantes con talento matemático opinan. En A. Gutiérrez, M. J. Beltrán-Meneu, J. M. Ribera, R. Ramírez-Uclés, A. Jaime, E. Arbona, C. Sua, L. Rotger, C. Jiménez-Gestal, A. A. Magreñán, y A. M. Damián (Eds.), *Jornadas Internacionales de Investigación y Práctica Docente en Alta Capacidad Matemática* (pp. 3-7). Universidad de la Rioja.

Jaime, A. y Gutiérrez, Á. (2017). Investigación sobre estudiantes con alta capacidad matemática. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 71-89). SEIEM.

Jensen, F. y Sjaastad, J. (2013). A Norwegian Out-of-School Mathematics Project's Influence on Secondary Students' STEM Motivation. *International Journal of Science and Mathematics Education 11*(6), 1437-1461. https://doi.org/10.1007/s10763-013-9401-4

Kennedy, E. y Smolinsky, L. (2016). Math circles: A tool for promoting engagement among middle school minority males. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 12*(4), 717-732. https://doi.org/10.12973/eurasia.2016.1223a

Lyakhova, S. y Neate, A. (2024). Engagement and online mathematics enrichment for secondary students. *Teaching Mathematics and its Applications 43*(3), 224-245. https://doi.org/10.1093/teamat/hrae003

Manero, V., Muñoz-Escolano, J. M. y Oller-Marcén, A. M. (2021). Diseño e implementación de tareas de alta demanda cognitiva basadas en la sucesión look and say. *Avances De Investigación En Educación Matemática*, *20*, 161-183. https://doi.org/10.35763/aiem20.3998

Sonnert, G., Reid, T., Sunbury, S. y Sadler, P. M. (2025). How do formal and informal science learning experiences during high school shape students' career interest and STEM identity? *International Journal of STEM Education, 12*(1), article number 55. https://doi.org/10.1186/s40594-025-00568-w

Van Meter-Adams, A., Frankenfeld, C. L., Bases, J., Espina, V. y Liotta, L. A. (2014). Students Who Demonstrate Strong Talent and Interest in STEM Are Initially Attracted to STEM through Extracurricular Experiences. *CBE—Life Sciences Education, 13*(4), 687-697. https://doi.org/10.1187/cbe.13-11-0213

RELACIONES ENTRE EL CONOCIMIENTO DEL TEMA DE PATRONES Y SU ENSEÑANZA: UN ANÁLISIS DESDE EL MODELO MTSK

Relations between knowledge of patterns as a topic and its teaching: an analysis from the MTSK model

Tarisfeño-Vásquez, S.[a], Zakaryan, D. [a] y Escudero-Ávila, D.[b]

[a]Pontificia Universidad Católica de Valparaíso; [b]Universidad Complutense de Madrid

Resumen

Este estudio forma parte de una investigación más amplia sobre el conocimiento del profesor de primaria de patrones, en el que se establecen relaciones entre los descriptores de dos subdominios del modelo Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK), conocimiento del tema de patrones y conocimiento de la enseñanza de patrones. Para ello, se ha realizado una revisión de la literatura especializada mediante el análisis de contenido, lo que ha permitido sistematizar elementos de conocimiento especializado relacionados al tema de patrones, generando descriptores de conocimiento para las categorías de los subdominios considerados, y establecer relaciones entre estos. Los resultados sugieren que la estructura espacial y numérica de los patrones actúa como un elemento transformador que eleva una secuenciación recursiva hacia el razonamiento estructural.

Palabras clave: *patrones, álgebra temprana, conocimiento especializado.*

Abstract

"This study is part of a broader research project on primary school teachers' knowledge of patterns, establishing relationships between descriptors from two subdomains of the Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model: Knowledge of Topics (KoT) in patterns and Knowledge of Mathematics Teaching (KMT). To this end, a specialised literature review was conducted through content analysis, which allowed for the systematisation of specialised knowledge elements related to patterns. This process generated knowledge descriptors for the categories of the subdomains considered and established relationships between them. The results suggest that the spatial and numerical structure of patterns acts as a transforming element that elevates recursive sequencing towards structural reasoning.

Keywords: *patterns, early algebra, specialised knowledge.*

INTRODUCCIÓN

El tema de los patrones constituye un eje central en los currículos de educación primaria de distintos países ya que posibilita la introducción temprana de nociones algebraicas a partir del trabajo con estructuras, regularidades, funciones lineales y relaciones entre variables, así como de los procesos de generalización y sus distintas formas de representación (Blanton et al., 2015; Kieran, 2022). Sin embargo, diversas investigaciones señalan que el profesorado de educación primaria no siempre reconoce la conexión entre el trabajo con patrones en los primeros grados y su implicancia en conceptos algebraicos futuros, lo que puede limitar el potencial de este tema en la promoción del pensamiento algebraico temprano (Demonty et al., 2018).

Esta situación invita a profundizar en el conocimiento especializado requerido para la enseñanza y el aprendizaje de patrones en primaria. Al respecto, se asume la premisa de Demonty et al. (2018), quienes sostienen que la investigación en dominios matemáticos constituye un corpus teórico robusto

Tarisfeño-Vásquez, S., Zakaryan, D. y Escudero-Ávila, D. (2026). Relaciones entre el conocimiento del tema de patrones y su enseñanza: Un análisis desde el modelo MTSK. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (pp. 561-568). SEIEM.

para identificar dichos saberes. Bajo esta perspectiva, cabe preguntarse: ¿qué elementos del conocimiento especializado se identifican en la literatura científica actual y de qué manera se relacionan entre sí?

Para abordar esta interrogante, se adopta el modelo *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* (MTSK), el cual ofrece una estructura de subdominios y categorías que permite operacionalizar este análisis mediante un instrumento específico (Climent y Montes, 2022). Considerando la importancia de articular el conocimiento matemático y el didáctico en la enseñanza de la matemática (McCrory et al., 2012), el objetivo de este estudio es establecer relaciones, particularmente, entre los subdominios KoT y KMT, a partir de descriptores de conocimiento sobre patrones identificados y sistematizados desde la literatura especializada.

MARCO TEÓRICO

Patrones

Un patrón puede ser entendido como una regularidad numérica o espacial, y la relación entre los diversos componentes del patrón constituye su estructura (Mullingan et al., 2006). El estudio de patrones representa un medio privilegiado para introducir nociones clave, como el cambio y la covariación, junto con la construcción de estructuras y el uso de diversas representaciones —tablas, gráficos y diagramas— que permiten explorar y expresar relaciones de tipo funcional (Fuentes y Cañadas, 2021; Pérez-Martos et al., 2023). esto, a su vez, favorece la comprensión de funciones en etapas posteriores (Stephens et al., 2017).

El modelo MTSK

El MTSK es un modelo analítico diseñado para caracterizar el conocimiento especializado del profesor de matemáticas. Su estructura se organiza en dos dominios principales de conocimiento y uno transversal de Creencias sobre la matemática y su enseñanza y aprendizaje. El primer dominio, el Conocimiento Matemático (MK), incluye el saber disciplinar y se compone de los subdominios: Conocimiento de los Temas (KoT), Conocimiento de la Estructura de las Matemáticas (KSM) y Conocimiento de la Práctica Matemática (KPM). El segundo, el Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK), se vincula con la enseñanza y aprendizaje de los contenidos e integra los subdominios de: Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT); Conocimiento de las Características del Aprendizaje (KFLM); Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje (KMLS) (Carrillo et al., 2018). Dado que el objetivo de este trabajo es analizar las relaciones entre el KoT y el KMT, se describen a continuación ambos en exclusiva. El KoT se compone de cuatro categorías de conocimiento: *fenomenología y aplicaciones*, que contempla el conocimiento sobre los fenómenos que originan el contenido matemático, así como sus usos y aplicaciones; *definiciones, propiedades y sus fundamentos*, aborda el conocimiento sobre los conceptos y la selección de sus propiedades; esto incluye la capacidad para fundamentar y definir; (*registros de representación* referido al conocimiento sobre las diversas formas de representar un contenido matemático; y *procedimientos* contempla el saber sobre las acciones y secuencias vinculadas a un contenido específico. Esto incluye el conocimiento sobre ¿cómo se hace? ¿cuándo puede hacerse?, ¿por qué se hace así? y las características del resultado (Vasco y Moriel, 2022). El KMT se estructura en tres categorías: *teorías de enseñanza*, que aborda desde teorías personales y experiencia hasta marcos teóricos formales derivados de la investigación; *recursos didácticos* (físicos y digitales), referida al conocimiento sobre la potencialidad y limitaciones de dichos recursos; y *estrategias, técnicas, tareas y ejemplos* involucra el conocimiento sobre el diseño y la gestión de actividades, considerando su capacidad para favorecer el aprendizaje o superar obstáculos en aprendizaje del contenido (Sosa y Reyes, 2022).

METODOLOGÍA

El presente trabajo forma parte de un estudio más amplio desarrollado mediante una revisión bibliográfica con enfoque cualitativo, enmarcado en el paradigma interpretativo (Creswell, 2012).

Para la construcción del corpus, se consultaron las bases de datos Scopus y Web of Science, seleccionando artículos publicados entre 2016–2025 bajo las palabras clave: *pattern generalisation*, *early algebra*, *early algebraic thinking* y *functional thinking*. A partir de una base inicial de 168 documentos, se eliminaron los duplicados y se seleccionaron los de acceso abierto. Asimismo, la búsqueda se restringió a profesores de educación primaria en formación y en ejercicio, lo que resultó en un corpus final de 64 documentos. En estos, se utilizaron como unidades de análisis las categorías de los subdominios KoT y KMT previamente detalladas en el marco teórico. La aplicación de los criterios metodológicos y las unidades de análisis descritas permitieron sistematizar los hallazgos en tres dimensiones: primero, la formulación de descriptores para el KoT; segundo, la formulación de descriptores para el KMT; y, finalmente, la articulación de ambos mediante sus descriptores.

RESULTADOS

Conocimiento de los temas (KoT)

(*FA*) *Fenomenología y aplicaciones*

La literatura destaca el uso de fenómenos significativos para el estudio de patrones, tales como problemas contextualizados, contextos culturales o secuencias figurales, los cuales permiten identificar regularidades y cantidades covariantes (Cañadas et al., 2023; Hunter y Miller, 2022; Ramírez-Úcles et al., 2020). De este modo, la exploración de estos fenómenos favorece el tránsito hacia la modelización de relaciones lineales (Blanton et al., 2019). En este marco, se propone el descriptor FA1. "conocimiento sobre fenómenos de crecimiento o decrecimiento constante —en contextos cotidianos o matemáticos— y su generalización por medio de relaciones lineales".

(*DP) Definiciones, propiedades y sus fundamentos*

Pincheira et al. (2025) definen el patrón como una regularidad de elementos con una unidad de repetición que sirve para generalizar y promover el razonamiento matemático, surge el descriptor DP1. "El conocimiento del patrón como una regularidad estructurada por una unidad de repetición, cuya identificación es fundamental para la formulación de reglas generales". Asimismo, Hunter y Miller (2022) caracterizan los patrones lineales, como secuencias definidas por la existencia de una regla de variación basada en incrementos o disminuciones constantes entre elementos consecutivos. En este contexto, se establece el descriptor DP2. "conocimiento de los patrones lineales como secuencias figurales o numéricas organizadas por una regla de variación constante, cuya estructura puede analizarse a partir de la disposición espacial de sus elementos y de la cantidad que compone cada término". En este contexto, la noción se refiere a la capacidad de reconocer y establecer relaciones de similitud y diferencia dentro de una estructura (Mason, citado en Kieran, 2022) que permite identificar, de manera explícita, la relación entre las variables (Pinto y Cañadas, 2017). Zapatera (2018) distingue entre estructura espacial, como la distribución de los elementos de la figura, y estructura numérica, como el número de elementos que la componen. Desde esta perspectiva, surge el descriptor DP3. "conocimiento de la estructura espacial y numérica, como la cantidad de elementos que conforman cada figura en un patrón, lo que permite analizar su crecimiento y generalización, incluyendo estructuras aditivas, multiplicativas o aditivo-multiplicativas". De este modo, la organización de las relaciones entre los valores de las variables (Torres et al., 2021) suele expresarse mediante funciones lineales de tipo $f(n)=n$, $f(n)=n+a$, $f(n)=an$ y $f(n)=an+b$ (Blanton et al., 2019; Pinto y Cañadas, 2017; Zapatera, 2018). Por otro lado, más allá de ser secuencias ordenadas, los patrones caracterizan una relación funcional entre dos cantidades que varían simultáneamente. Esta distinción permite analizar la relación funcional subyacente entre estas cantidades (Ayala-Altamirano y Molina, 2021; Torres et al., 2021), vinculando la posición con el número de elementos (Wilkie, 2016; Zapatera, 2018). A partir de ello, en este escenario formulamos el descriptor DP4. "conocimiento del papel de las variables en los patrones (independiente y dependiente) y de las relaciones que se establecen entre ellas (covariación y correspondencia)", elementos de conocimiento que la literatura

utiliza para describir, respectivamente, el cambio simultáneo entre cantidades y la relación específica entre sus valores (Hunter y Miller, 2022; Wilkie, 2016).

(*RR*)*Registros de representación*

Las representaciones desempeñan un papel fundamental en la comprensión y generalización de patrones, dado que el uso de diversos registros permite visualizar distintos aspectos de los patrones (Cañadas et al., 2023; Hunter y Miller, 2022). Bajo esta premisa, resulta esencial el descriptor RR1. "conocimiento de los distintos registros de representación de un patrón (lenguaje natural, simbólico, figural, tabular y gráfico)." No obstante, no basta con identificar las distintas formas de representación, sino que se requiere el descriptor RR2. "conocimiento sobre el aporte de cada una de ellas a la interpretación y comprensión del patrón", lo cual fundamenta la importancia de transitar entre registros para alcanzar la generalización. En esta línea, la representación figural permite visualizar la estructura del patrón y reconocer regularidades estructurales (Zapatera, 2018), mientras que el lenguaje natural facilita la expresión de relaciones funcionales de forma accesible, actuando como un puente hacia la formalización (Cañadas et al., 2023; Ramírez-Úcles et al., 2020). Por otro lado, las tablas permiten el análisis explícito de la covariación entre variables (Stephens et al., 2017; Wilkie, 2016) y las representaciones gráficas ayudan a identificar la tasa de cambio, permitiendo distinguir entre relaciones proporcionales y no proporcionales (Pérez-Martos et al., 2023; Stephens et al., 2017). Finalmente, las expresiones simbólicas esquematizan la regularidad en una regla general aplicable a cualquier valor de la variable (Wilkie, 2016; Zapatera, 2018), lo que permite avanzar hacia la generalización simbólica (Cañadas et al., 2023).

(*P*) *Procedimientos*

Desde los patrones figurales se requiere la coordinación entre la estructura espacial y la estructura numérica (Zapatera, 2018), proceso que genera una secuencia numérica, lo que nos lleva al descriptor P1. "conocimiento de la coordinación entre la estructura espacial y numérica del patrón". En este contexto, la continuación de la secuencia se aborda mediante iteraciones aditivas o multiplicativas que facilitan la determinación de términos cercanos (Stephens et al., 2017; Zapatera, 2018); esto se traduce en el descriptor P2. "conocimiento de las iteraciones recursivas para continuar una secuencia". Finalmente, la comprensión de la variación conjunta permite coordinar las variables y establecer la relación funcional entre ellas (Ayala-Altamirano y Molina, 2020; Stephens et al., 2017; Wilkie, 2016), lo cual configura nuestro descriptor P3. "conocimiento de la manipulación de la variación conjunta para la generalización de relaciones funcionales".

Una vez sistematizados los descriptores que definen el conocimiento especializado de patrones, resulta fundamental analizar cómo estos se ponen en acción a través del subdominio KMT.

Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT)

(*TE*) *Teorías de enseñanza*

Una parte importante de la investigación no se adscribe explícitamente a ninguna teoría de enseñanza específica, sino que se fundamenta en el álgebra temprana, entendida como el estudio de la generalización de estructuras impulsado a través de prácticas de pensamiento algebraico ampliamente documentadas en la literatura reciente (Blanton et al., 2019; Kieran, 2022). Bajo este enfoque, cobra relevancia el descriptor TE1. "conocimiento de la perspectiva del álgebra temprana como marco para la enseñanza de patrones, el cual promueve prácticas algebraicas tales como representar, justificar y razonar sobre estructuras y relaciones matemáticas".

(*RD*) *Recursos didácticos*

El uso de materiales manipulativos como fósforos, bloques o tarjetas es valorado por la investigación actual, dado que permite identificar elementos invariantes y el cambio dentro de una secuencia. Esta estrategia moviliza el descriptor RD1. "conocimiento de materiales manipulativos que visibilizan la

estructura del patrón y sus variables, facilitando la exploración intuitiva de la covariación", aunque diversos autores advierten que esta práctica podría restringir el tránsito hacia la abstracción si el estudiante permanece en una etapa puramente perceptiva (Ramírez-Úcles et al., 2020; Wilkie, 2016), por lo que, resulta necesario el descriptor RD2. "conocimiento de que los materiales manipulativos pueden promover estrategias de conteo y recursivas, dificultando el tránsito hacia la generalización".

(*E*) *Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos*

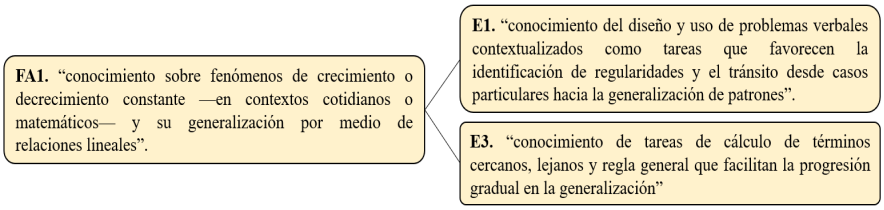
Por otra parte, la enseñanza de patrones en contextos histórico-culturales favorece el desarrollo del pensamiento algebraico temprano al promover formas de razonamiento sobre regularidades y relaciones entre variables (Torres et al., 2021; Wilkie, 2016). Por tanto, los problemas verbales contextualizados se consolidan como una herramienta didáctica fundamental, ya que permiten identificar variables, constantes y relaciones funcionales en escenarios significativos (Ayala-Altamirano y Molina, 2021; Cañadas et al., 2023; Torres et al., 2021). Esta estrategia didáctica nos permite plantear el descriptor E1. "conocimiento del diseño y uso de problemas verbales contextualizados como tareas que favorecen la identificación de regularidades y el tránsito desde casos particulares hacia la generalización de patrones". Al promover la identificación de estructuras, los estudiantes pueden avanzar hacia generalizaciones sofisticadas mediante el análisis de términos lejanos (Cañadas et al., 2023; Hunter y Miller, 2022; Pinto y Cañadas, 2017). No obstante, la introducción de variables simbólicas es viable siempre que se garanticen espacios de discusión y el uso de registros diversos (Ayala-Altamirano y Molina, 2020). En este contexto, surge el descriptor E2. "conocimiento de estrategias de enseñanza que articulan representaciones múltiples (figural, tabular, gráfica, verbal y simbólica) para favorecer la construcción de relaciones funcionales". Asimismo, se resalta la importancia de diseñar tareas con distintos niveles de dificultad —tales como la generalización cercana, lejana y la formulación de una regla general— para favorecer la transición desde casos particulares hacia relaciones generales (Ayala-Altamirano y Molina, 2021). De esta evidencia se desprende la necesidad de un descriptor E3. "conocimiento de tareas de generalización cercana, lejana y de regla general para promover la progresión gradual en la generalización", permitiendo que el estudiante escale en complejidad de forma coherente. En esta línea, autores como Zapatera (2018) y Torres et al. (2021) proponen el uso de problemas que articulen formas directas e inversas de una relación funcional para promover el uso de reglas explícitas y la comprensión de la función como objeto matemático. Esta recomendación surge E4. "conocimiento de tareas que integran formas directas e inversas de una relación funcional". Una vez sistematizados los descriptores para el KoT y KMT de forma independiente, resulta fundamental analizar cómo interactúan entre sí. Esta convergencia es la que permite comprender el conocimiento especializado del profesor como una unidad integrada donde el 'qué se enseña' (KoT) sustenta y da coherencia al 'cómo se enseña' (KMT).

Relación entre los descriptores de los subdominios KoT y KMT

A continuación, dada la importancia de la articulación del conocimiento matemático y el didáctico en la enseñanza (McCrory et al., 2012), se presentan las justificaciones de relaciones de algunos descriptores del KoT y cómo estos se vinculan con descriptores del KMT.

Figura 1

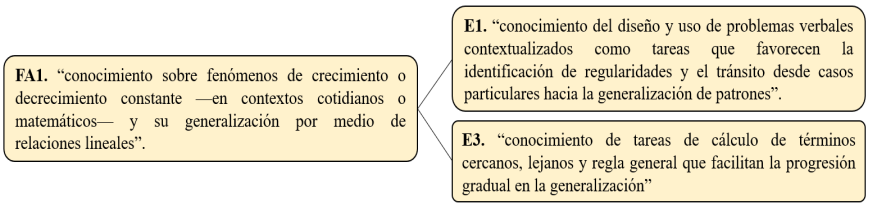
Descriptor FA1 y su relación con E1 y E2



Los fenómenos de crecimiento o decrecimiento constante (FA1) guarda relación con el diseño de tareas contextualizadas (E1), ya que el uso de fenómenos significativos permite al estudiante identificar regularidades, cantidades variables y constantes en escenarios con sentido Ayala-Altamirano y Molina, 2021; Cañadas et al., 2023; Torres et al., 2021). Además, el FA1 se vincula, además con tareas didáctica que favorece el tránsito desde casos particulares hacia casos generales (E3) (Hunter y Miller, 2022; Ramírez et al., 2020).

Figura 2

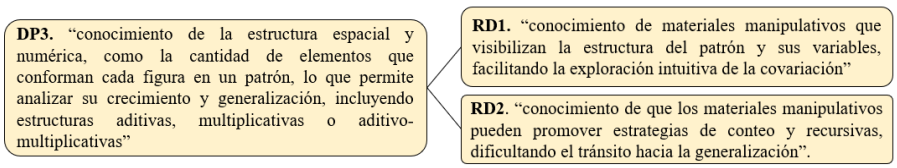
Descriptor DP1 y su relación con TE1



La unidad de repetición como regularidad estructurada no es solo un componente aritmético en los patrones (DP1), sino la base estructural sobre la cual se cimienta el razonamiento matemático (Pincheira y Alsina, 2025). Por lo que la enseñanza de patrones deja de ser una búsqueda del "siguiente" para convertirse en el análisis de estructuras (Blanton et al., 2019; Kieran, 2022). Para ello, el estudiante no solo debe continuar de la secuencia, sino que debe justificar y razonar (TE1) sobre la relación matemática subyacente (Sterner, 2024).

Figura 3

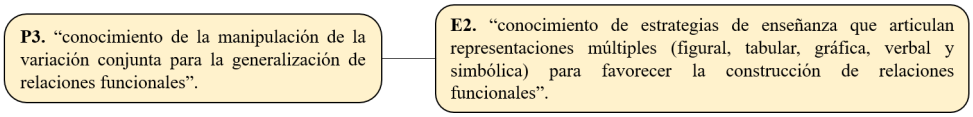
Descriptor DP3 y su relación con RD1 y RD2



El conocimiento de la estructura espacial y numérica (DP3) radica en la capacidad de transformar la noción aritmética del patrón en un objeto de aprendizaje algebraico. Si se identifica en una secuencia la naturaleza aditiva, multiplicativa o mixta, los recursos didácticos, cumplen el propósito de visibilizar la estructura del patrón y sus variables (RD1), facilitando la exploración de la covariación (Ramírez-Úcles et al., 2020; Wilkie, 2016). No obstante, para evitar el conteo simple o la recursividad (RD2) se debe articular los recursos manipulativos con otras representaciones.

Figura 4

Descriptor P3 y su relación con E2



El análisis de las relaciones entre los descriptores nos permite observar que el conocimiento para la enseñanza de patrones no reside únicamente en el dominio de conceptos aislados, sino cómo la articulación dialéctica entre el saber matemático y el saber didáctico.

5. Conclusiones y discusión

Las relaciones evidencian que el conocimiento de la estructura numérica y espacial actúa como el eje transformador que eleva la secuenciación al nivel del álgebra temprana. La identificación de la unidad de repetición (patrón) y la naturaleza de la estructura (aditiva o multiplicativa) permiten el diseño de tareas que trascienden el cálculo recursivo para fomentar el razonamiento estructural y la justificación

(Blanton et al., 2019; Kieran, 2022). En línea con Pinto y Cañadas (2017), que conectan la idea de patrón a la recursividad, y la estructura al establecimiento de una relación entre variables. Por otro lado, la operacionalización de la variación conjunta es el motor del tránsito hacia la generalización de patrones como relaciones funcionales (Stephens, 2017; Wilkie, 2016). Como lo afirman Fuentes y Cañadas (2021), este proceso se optimiza mediante el vínculo entre fenómenos significativos, diversas representaciones y una progresión gradual de tareas de generalización. El conocimiento disciplinar y didáctico posibilita la articulación de representaciones múltiples, así como plantear tareas de reversibilidad (formas directas e inversas), consolidando así la comprensión de la función como un objeto matemático integrado en los patrones.

Este estudio presenta limitaciones asociadas a la naturaleza de la revisión bibliográfica. Como la restricción de búsqueda a documentos de acceso abierto en las bases de datos Scopus y Web of Science, es posible que se hayan omitido investigaciones relevantes publicadas en otros repositorios o formatos. Por otro lado, se ha dejado fuera de este trabajo los otros subdominios del modelo.

El principal aporte de esta investigación radica en la propuesta de un sistema de descriptores especializados que integra de forma coherente el saber disciplinar y didáctico sobre los patrones. Al operacionalizar las relaciones entre categorías del KoT y KMT, este estudio ofrece un marco analítico para futuras investigaciones que busquen evaluar o caracterizar el conocimiento de profesores en ejercicio. Como proyección, se propone que estos resultados sirvan de base para el diseño de programas de desarrollo profesional y materiales curriculares que enfaticen la visión estructural del álgebra temprana. La transición desde procedimientos recursivos hacia relaciones funcionales, identificada aquí como un punto crítico de articulación, abre una línea de investigación necesaria sobre cómo el profesor puede mediar de forma efectiva entre la percepción figural y la abstracción simbólica, consolidando así el estudio de patrones como un precursor sólido del pensamiento funcional en la educación primaria.

Referencias

Ayala-Altamirano, C. y Molina, M. (2021). Fourth graders' justifications in early algebra tasks involving a functional relationship. *Educational Studies in Mathematics, 107*(2), 359-382. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10036-1

Blanton, M., Stephens, A., Knuth, E., Gardiner, A., Isler, I. y Kim, J. (2015). The development of children's algebraic thinking: The impact of a comprehensive early algebra intervention in third grade. *Journal for Research in Mathematics Education, 46*(1), 39-87. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.46.1.0039

Blanton, M., Stroud, R., Isler-Baykal, I., Stephens, A., Knuth, E. y Gardiner, A. M. (2019). Growth in children's understanding of generalizing and representing mathematical structure and relationships. *Educational Studies in Mathematics, 102*(2), 193-219. https://doi.org/10.1007/s10649-019-09894-7

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236-253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Cañadas, M. C., Castro-Rodríguez, E. y Molina, M. (2023). Functional thinking evidenced by primary school students when solving contextualized problems. *International Journal of Science and Mathematics Education, 21*(3), 657-676. https://doi.org/10.1007/s10763-022-10218-3

Climent, N. y Montes, M. (2022). El modelo MTSK: antecedentes y estructura. En J. Carrillo, M. Montes y N. Climent (Eds.), *Investigación sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): 10 años de camino* (pp. 27-34). Dykinson.

Creswell, J. (2012). *Educational Research: Planning, Conducting, and Evaluating Quantitative and Qualitative Research*. Pearson.

Demonty, I., Vlassis, J. y Fagnant, A. (2018). Algebraic thinking, pattern activities and knowledge for teaching at the transition between primary and secondary school. *Educational Studies in Mathematics* 99, 1-19. https://doi-org.pucv.idm.oclc.org/10.1007/s10649-018-9820-9

Fuentes, S. y Cañadas, M. C. (2021). Funciones $f(x)=3x$ y $f(x)=5x$ en primero de primaria: estrategias y representaciones utilizadas por alumnos. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 269- 277). SEIEM.

Hunter, J. y Miller, J. (2022). The use of cultural contexts for patterning tasks: Supporting young diverse students to identify structures and generalise. *ZDM - Mathematics Education, 54*(6), 1349-1362. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01386-y

Kieran, C. (2022). The multi-dimensionality of early algebraic thinking: Background, overarching dimensions, and new directions. *ZDM - Mathematics Education, 54*(6), 1131-1150. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01435-6

McCrory, R., Floden, R., Ferrini-Mundy, J., Reckase, M. D. y Senk, S. L. (2012). Knowledge of Algebra for Teaching: A Framework of Knowledge and Practices. *Journal for Research in Mathematics Education, 43*(5), 584-615. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.43.5.0584

Mullingan, J., Mitchelmore, M. y Prescott, A. (2006). Integrating concepts and processes in early mathematics: the australian pattern and structure mathematics awareness Project (PASMAP). En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká y N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 209-216). PME.

Pérez-Martos, M. C., Moreno, A., Cañadas, M. C. y Torres, M. D. (2023). Una mirada a través de gráficos funcionales del alumnado de quinto de educación primaria. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 435-442). SEIEM.

Pincheira, N., Alsina, Á. y Acosta, Y. (2025). Desarrollo profesional del profesorado de matemáticas de educación infantil y primaria: Contribuciones de un curso de formación continua sobre el sentido algebraico. *Contextos Educativos, 35*, 87-115. https://doi.org/10.18172/con.6496

Pinto, E. y Cañadas, M.C. (2017). Estructuras y generalización de estudiantes de tercero y quinto de primaria: un estudio comparativo. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 407-416). SEIEM.

Ramírez-Úcles, R., Brizuela, B. M. y Ayala-Altamirano, C. (2020). Word problems associated with the use of functional strategies among grade 4 students. *Mathematics Education Research Journal, 34*(2), 317-341. https://doi.org/10.1007/s13394-020-00346-7

Sosa, L. y Reyes, A. M. (2022). Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas. En J. Carrillo, M. Montes y N. Climent (Eds.), *Investigación sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK):10 años de camino,* (pp.71-82). Dykinson.

Stephens, A. C., Fonger, N., Strachota, S., Isler, I., Blanton, M., Knuth, E. y Murphy Gardiner, A. (2017). Alearning progression for elementary students' functional thinking. *Mathematical Thinking and Learning, 19*(3), 143-166. https://doi.org/10.1080/10986065.2017.1328636

Torres, M., Cañadas, M. C., Moreno, A. y Gómez, P. (2021). Structures in direct and inverse forms of a function evidenced by 7-8-year-old students. *Uniciencia, 35*(2), 1-16. https://doi.org/10.15359/ru.35-2.16

Vasco Mora, D. y Moriel Junior, J. (2022). Conocimiento de los temas. En J. Carrillo, M. Montes y N. Climent (Eds.), *Investigación sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): 10 años de camino*, (pp. 35-46). Dykinson.

Wilkie, K. J. (2016). Students' use of variables and multiple representations in generalizing functional relationships prior to secondary school. *Educational Studies in Mathematics, 93*(3), 333-361. https://doi.org/10.1007/s10649-016-9703-x

Zapatera, A. (2018). Cómo alumnos de educación primaria resuelven problemas de generalización de patrones. Una trayectoria de aprendizaje. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 21*(1), 87-104. https://doi.org/10.12802/relime.18.2114

EXPLORANDO RELACIONES ENTRE ACTIVIDADES MATEMÁTICAS Y MARCAS GRÁFICAS EN REPRESENTACIONES INFANTILES

Exploring relationships between mathematical activities and graphic marks in children's representations

Torregrosa, A., Edo, M. y Fábrega, J.

Universitat Autònoma de Barcelona

Resumen

El objetivo de este estudio es analizar posibles relaciones entre las actividades matemáticas realizadas en ocho talleres de descomposición numérica y los tipos de marcas gráficas que los alumnos de educación infantil producen en una tarea con consigna abierta. A partir de 710 representaciones de 103 alumnos, los resultados muestran que los talleres más manipulativos favorecen la representación de marcas pictográficas, mientras que los talleres más abstractos favorecen las marcas simbólico-matemáticas. No obstante, numerosos alumnos representan relaciones numéricas y operaciones en talleres donde no se han trabajado explícitamente, lo que evidencia transferencia de conocimientos y autonomía representacional. Estos hallazgos subrayan la importancia de ofrecer espacios de representación abierta para interpretar y comprender el desarrollo del pensamiento matemático en edades tempranas.

Palabras clave: *descomposición del número, educación infantil, marcas gráficas, representación*

Abstract

This study aims to analyse potential relationships between mathematical activities in eight numerical decomposition workshops and the types of graphic marks produced by early childhood students in an open-ended task. Based on 710 representations from 103 students, the results indicate that workshops involving more manipulation encourage the use of pictographic marks, while more abstract workshops encourage the use of mathematical-symbolic marks. However, many students represented numerical relationships and equations in workshops where these topics had not been explicitly covered, demonstrating representational transference. These findings highlight the importance of providing open representation spaces to interpret and understand the development of mathematical thinking in early childhood.

Keywords: *number decomposition, early childhood education, graphic marks, representation*

INTRODUCCIÓN

En educación matemática infantil, las representaciones que los niños elaboran sobre el papel, entendidas como las formas externas mediante las cuales expresan, organizan y comunican sus ideas matemáticas (Goldin, 2020), constituyen un elemento clave para acceder a los significados que construyen sobre los conceptos matemáticos. Desde esta perspectiva, las prácticas escolares han abarcado una amplia gama de enfoques didácticos que difieren en el grado de protagonismo otorgado a la representación matemática en el aprendizaje, así como en el nivel de estructuración y mediación docente implicados. Dentro de este amplio abanico, encontramos prácticas más dirigidas y estructuradas, centradas principalmente en la repetición o reproducción de procedimientos, como fichas, ejercicios mecánicos o tareas de trazo de números, en las que la representación de ideas matemáticas sobre el papel suele estar previamente definida y dirigida por el docente, limitando las

Torregrosa, A., Edo, M. y Fábrega, J. (2026). Explorando relaciones entre actividades matemáticas y marcas gráficas en representaciones infantiles. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (pp. 569-576). SEIEM.

elecciones expresivas del alumnado (Worthington y Carruthers, 2011). Por otro lado, también encontramos prácticas escolares de carácter más abierto, como los ambientes (Laski et al., 2015) o el juego libre, en las que el protagonismo recae en la acción y la exploración del niño y en las que la representación de ideas matemáticas sobre el papel, cuando aparece, no siempre se explicita ni se aborda de manera intencional, quedando en ocasiones en un segundo plano. Estas prácticas, entre otras, pueden dificultar el acceso a una comprensión individual del pensamiento matemático infantil si no se ofrece un espacio que permita a cada niño representar por escrito sus propias ideas.

La investigación sobre las representaciones matemáticas infantiles se ha desarrollado principalmente en torno a dos focos de interés complementarios. Por un lado, el análisis de las ideas matemáticas que el alumnado expresa a través de sus representaciones sobre papel (García-Triana et al., 2024). Por otro lado, el estudio de los modos de representación que los niños utilizan para comunicar dichas ideas, atendiendo a la diversidad de recursos gráficos que emergen en sus producciones (Worthington y Carruthers, 2011). No obstante, encontramos pocos estudios que analicen en profundidad si los modos de representación que utilizan los niños y niñas están o no relacionados con el tipo de actividad matemática que realizan. En el presente estudio, y siguiendo las investigaciones de Carruthers y Worthington (2006), nos referimos a los modos de representación con el término marcas gráficas (del inglés *graphic marks*), usándolo para englobar los distintos tipos de grafismos, símbolos, dibujos o palabras que los niños emplean para expresar significados matemáticos. Desde esta perspectiva, la pregunta que orienta el presente estudio es: ¿En qué medida la tipología de actividades realizadas por alumnos de educación infantil en una sesión de matemáticas influye en los tipos de marcas gráficas que seleccionan para representar sus ideas sobre papel? Para responder a esta cuestión, se plantea un único objetivo: Analizar posibles relaciones entre los tipos de marcas gráficas empleadas por alumnos de 5-6 años y las actividades matemáticas desarrolladas en 8 talleres de descomposición numérica, con el fin de identificar en qué medida dichas actividades influyen en las elecciones representacionales de los niños.

MARCO TEÓRICO

Representaciones matemáticas en Educación Infantil

Pape y Tchoshanov (2001) definen las representaciones matemáticas infantiles como las formas internas y externas mediante las cuales los alumnos organizan, expresan y construyen su comprensión de las ideas matemáticas. Para estos autores, las representaciones internas aluden a las imágenes mentales, relaciones y conexiones cognitivas que los niños construyen de manera progresiva. En cambio, las representaciones externas se refieren a las producciones personales que los alumnos elaboran sobre papel para expresar sus ideas matemáticas, sin que el docente determine qué deben representar ni cómo hacerlo. En las representaciones externas son los propios alumnos quienes deciden cómo plasmar su pensamiento, seleccionando los trazos, signos o configuraciones gráficas que consideran más adecuadas para comunicarlo por escrito (García-Triana et al., 2024). Este hecho, permite al alumnado generar nuevas ideas, favoreciendo la construcción, transformación y consolidación de conceptos matemáticos a través de sistemas personales de representación. Por ello, distintos autores sostienen que estas representaciones constituyen una ventana privilegiada al pensamiento matemático infantil y a los procesos iniciales de simbolización (Carruthers y Worthington, 2006; Dwyer et al., 2024; Goldin, 2020).

Al representar sus ideas matemáticas sobre el papel, los alumnos seleccionan distintos modos de representación a los que denominamos, siguiendo la nomenclatura de Carruthers y Worthington (2006), marcas gráficas. Entendemos por marcas gráficas el conjunto de dibujos, palabras, símbolos, diagramas u otros grafismos escritos que los niños producen para expresar su pensamiento matemático. El estudio de las marcas gráficas ha sido abordado por diversos autores (Dwyer et al., 2024; García-Triana et al., 2024) constituyendo un campo de estudio consolidado.

Bruner (1966) fue uno de los primeros autores en describir tres modos de representación (enactivo, icónico y simbólico) mediante los cuales los niños construyen y comunican significado. A partir de esta base, Hughes (1986) amplió el enfoque anterior incorporando la presencia de los garabatos y los símbolos propios proponiendo así cuatro tipos de marcas gráficas: idiosincráticas (garabatos o símbolos inventados), pictográficas (dibujos figurativos), icónicas (esquemas simplificados o símbolos creados ad hoc) y simbólicas (numerales y signos matemáticos convencionales). Posteriormente, Carruthers y Worthington (2006) distinguieron entre marcas dinámicas (garabatos narrativos), pictográficas, icónicas, escritas (palabras, letras o frases) y simbólicas (numerales y signos matemáticos como +, − o =). El trabajo de estas autoras mostró que las marcas gráficas que los niños representan no son aleatorias, sino que son elecciones deliberadas mediante las cuales los niños estructuran y expresan sus ideas matemáticas. Recientemente, estudios como los de Dwyer et al. (2024) y García-Triana et al. (2024) han mostrado que los niños suelen movilizar principalmente tres grandes tipos de marcas: pictográficas, simbólicas y verbales y que estas actúan como auténticas voces visuales, combinando conocimientos, experiencias y emociones. En conjunto, la literatura coincide en que las representaciones externas conformadas por distintos tipos de marcas gráficas constituyen una ventana privilegiada al pensamiento matemático y un elemento clave para comprender la evolución del razonamiento en la educación infantil.

La representación del número

La representación del número en educación infantil constituye un aspecto central en la construcción del sentido numérico. Representar un número no se limita a escribir su grafía convencional, sino que implica expresar cantidades, relaciones y transformaciones numéricas mediante distintos sistemas de representación que evolucionan durante los primeros años de escolarización (Hughes, 1986). En las primeras etapas, los niños suelen recurrir a representaciones concretas y figurativas para expresar cantidades, como dibujos de objetos o colecciones, que les permiten establecer correspondencias uno a uno y justificar cuantificaciones de forma visual. Estas representaciones cumplen una función cognitiva fundamental, ya que apoyan la coordinación entre el conteo, la cantidad representada y el número como objeto abstracto (Mix, 2002). Progresivamente, los niños incorporan representaciones más convencionales, como numerales escritos o configuraciones simbólicas, que les permiten expresar no solo cantidades aisladas, sino también relaciones entre números y estructuras aditivas simples. Diversos autores señalan que la comprensión profunda del número se construye a través de la coordinación y traducción entre distintos tipos de representaciones (Goldin, 2020). Desde esta perspectiva, representar un número implica poder expresarlo de múltiples maneras, por ejemplo, como una cantidad total, como una descomposición en partes o como una operación que relaciona números entre sí. En educación infantil, estas formas de representación conviven y no siguen necesariamente una progresión lineal (Carruthers y Worthington, 2006; Hughes, 1986).

MÉTODO Y RECOLECCIÓN DE DATOS

El presente estudio se realizó con 103 niños de 5-6 años de dos escuelas concertadas cercanas a Barcelona. En el curso 2023-2024 participaron dos grupos (A y B) de la Escuela 1, y en el curso 2024-2025 la muestra se amplió con tres grupos adicionales: dos de la Escuela 1 (grupos C y D) y un grupo E de la Escuela 2. Esta ampliación de una a dos escuelas y de dos a cinco grupos permitió validar los resultados y comprobar que no dependían de las características específicas tanto de la Escuela 1 como de los grupos A y B. Ambas escuelas (1 y 2) son concertadas de nivel socioeconómico similar y fueron seleccionadas por utilizar una misma propuesta editorial para el desarrollo de las sesiones de matemáticas. Dicha propuesta editorial incluye talleres de matemáticas que combinan actividades manipulativas, exploratorias y de interacción en pequeño y gran grupo, que finalizan con un momento individual de representación en papel. Este momento de representación se realiza mediante una herramienta denominada la Página en Blanco, incorporada de forma habitual a las sesiones de matemáticas. La Página en Blanco está conceptualizada por Edo y Marín (2017) y ha sido utilizada en distintas investigaciones previas (García-Triana et al., 2024). Esta herramienta se

presenta al alumnado tras finalizar una secuencia de actividades matemáticas y los invita a representar libremente aquello que han vivido o comprendido, sin recibir indicaciones sobre qué representar ni sobre el modo de hacerlo. Al formar parte de la propuesta curricular utilizada en ambas escuelas, todos los alumnos participantes en este estudio emplean la Página en Blanco desde los 3 años como medio habitual para representar y comunicar por escrito sus ideas matemáticas.

El estudio se centró en analizar las representaciones sobre papel elaboradas en la Página en Blanco realizadas por los 103 durante ocho talleres de descomposición numérica extraídos de la propuesta editorial que usan ambas escuelas. Estos talleres siguen el modelo CRA (Concreto–Representativo–Abstracto) (Laski et al., 2015) y abordan la descomposición de los números 7, 8, 9 y 10. Para cada número se desarrollan dos talleres: la Parte 1 (de lo Concreto a lo Representativo) y la Parte 2 (de lo Representativo hacia lo Abstracto). A continuación, se detallan brevemente los 8 talleres y las actividades (A1, A2 o A3) que los conforman.

- Taller del número 7, parte 1 (7.1): Los alumnos lanzan individualmente 7 objetos hacia una caja (A1) y registran en una tabla de doble entrada los objetos dentro y fuera de la caja (A2).
- Taller del número 7, parte 2 (7.2): Los alumnos representan las puntuaciones del taller anterior mediante torres de cubitos (A1) y crean la operación correspondiente usando cartas de números y símbolos (A2). Finalizan buscando todas las parejas que suman 7 (A3).
- Taller del número 8, parte 1 (8.1): Escuchan el "Cuento de las torres mágicas" (A1) y construyen torres de distintas alturas con un total de 8 cubitos (A2). Posteriormente, representan la cantidad de cubitos de cada torre con cartas numéricas (A3).
- Taller del número 8, parte 2 (8.2): Recuerdan las parejas de números que suman 8 trabajadas en el taller anterior (A1) y buscan combinaciones de dos o más números que sumen 8 (A2). Finalmente juegan a "¡Veo un 8!" identificando parejas de números que suman 8 (A3).
- Taller del número 9, parte 1 (9.1): Exploran la descomposición del 9 a partir de un autobús de 9 plazas (A1). Recrean distintas situaciones de subida y bajada de pasajeros (A2) y escriben combinaciones de asientos libres y ocupados que siempre suman 9 (A3).
- Taller del número 9, parte 2 (9.2): Buscan parejas de números que sumen 9 mediante juegos con tarjetas y cubitos (A1 y A2). Crean sumas y restas con números y signos (A3).
- Taller del número 10, parte 1 (10.1): Colocan 10 bolos y lanzan una pelota para derribarlos (A1). Registran el resultado en una tabla 5x2 (A2) y verbalizan cuántos bolos han caído y cuántos no (A3).
- Taller del número 10, parte 2 (10.2): Buscan y ordenan parejas que suman 10 con cartas numéricas (A1) y juegan al juego de "la Mona" emparejando cartas que suman 10 (A2).

Cada taller duró 75 minutos (45 min de actividades y 30 min para la representación individual en la Página en Blanco y su verbalización). La ejecución de las actividades fue realizada por las docentes tutoras, sin intervención de las investigadoras. Las docentes presentaban la Página en Blanco al finalizar el taller bajo la consigna: "¿Queréis representar lo que hemos hecho hoy?". Al acabar, cada estudiante explicaba individualmente su representación en respuesta a: "¿Quieres explicarme lo que has representado hoy?". Esta explicación se grabó en audio y, además, se tomaron notas de campo. El presente estudio reúne 710 representaciones matemáticas en la Página en Blanco procedentes de los 8 talleres de descomposición numérica. Dado el objetivo del estudio, el análisis se centró en las representaciones en papel elaboradas por cada alumno. Las verbalizaciones grabadas y las notas de campo solo se usaron como apoyo para comprender dichas representaciones, pero no formaron parte del cuerpo principal de datos analizados.

ANÁLISIS DE DATOS

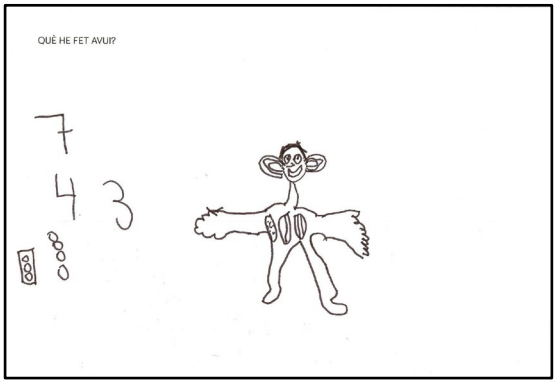
El análisis se realizó desde un enfoque cualitativo e interpretativo orientado a comprender cómo los niños dan significado a situaciones matemáticas a través de sus marcas gráficas (Einarsdóttir y Perry, 2011). En primer lugar, se codificaron todas las representaciones asignando a cada una un código alfanumérico único. Posteriormente, se clasificó cada representación según los tipos de marcas que incluían. Para ello, se emplearon las categorías de marcas señaladas por García-Triana et al., (2024) a las que llamaremos "categorías de primer nivel": pictográfica, simbólico-matemática y verbal-escrita. Una vez categorizadas todas las representaciones, se presentó el sistema de categorías al grupo IEMI (Investigación en Educación Matemática Infantil) de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática y se detectaron mejoras a aplicar dentro de la categoría simbólico-matemática (ya que resultó demasiado amplia). Un nuevo análisis deductivo-inductivo, produjo que dicha categoría se subdividiera en tres nuevas categorías obteniendo así, las cinco "categorías de segundo nivel" empleadas en el presente estudio:

- Pictográfica (PI): Incluye dibujos o formas esquemáticas que representan objetos o situaciones de la vida real.
- Simbólico-matemática: números aislados (SMNA): Incluye el uso de números aislados, sin relacionarlos entre sí ni combinarlos con símbolos.
- Simbólico-matemática: relaciones entre números (SMRN): Incluye relaciones entre números, por ejemplo, parejas de números que suman un total.
- Simbólico-matemática: operaciones (SMO): Incluye el uso de símbolos matemáticos como +, − o = combinados con números para expresar operaciones.
- Verbal-escrita (VE): Incluye el uso de palabras o frases escritas.

La Figura 1 muestra la representación D_7.1_19 categorizada como Simbólico-matemática: relaciones entre números (SMRN) y Pictográfica (PI). En ella, el alumno usa marcas SMRN para escribir un 7, que es el número de objetos lanzados. Debajo escribe un 4 y un 3, que son el número de objetos de fuera y de dentro de la caja. Con marcas PI representa los tres objetos de dentro de la caja y los cuatro de fuera. Finalmente, con marcas pictográficas también se representa a él mismo.

Figura 1

Representación D_7.1_19 categorizada como PI y SMRN



Para analizar la relación entre las actividades realizadas en los talleres y los tipos de marcas gráficas producidas por el alumnado, se identificó en cada taller (del 7.1 al 10.2) qué actividades estaban vinculadas específicamente con determinadas categorías simbólico-matemáticas (Tabla 1). Para ello, se etiquetaron las actividades según las categorías de segundo nivel SMRN (relaciones entre números) y SMO (operaciones). La categoría SMNA (números aislados) se consideró implícitamente presente en todos los talleres dado su objetivo. No se etiquetaron las categorías PI ni VE porque no

existían actividades diseñadas exclusivamente para favorecerlas. Si una actividad no fomentaba explícitamente ninguna de las categorías SMRN o SMO la casilla correspondiente a esta actividad en la Tabla 1 está en blanco.

Tabla 1

Presencia de actividades centradas en SMRN y SMO en cada taller (del 7.1 al 10.2)

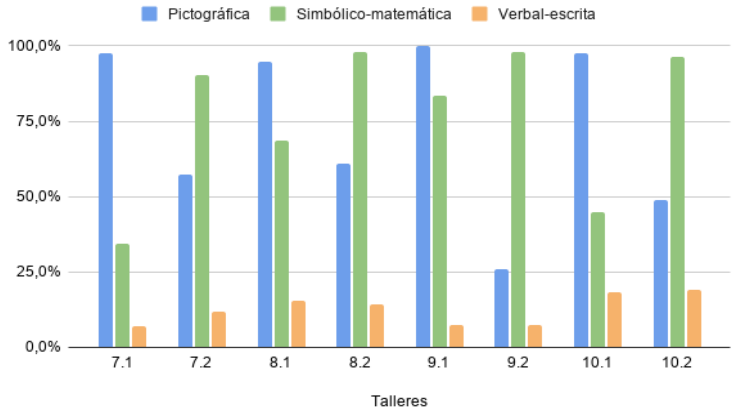
	7.1	7.2	8.1	8.2	9.1	9.2	10.1	10.2
Actividad 1 (A1)		SMRN		SMRN		SMRN		SMRN
Actividad 2 (A2)	SMRN	SMO		SMRN		SMRN		SMRN
Actividad 3 (A3)		SMRN	SMRN	SMRN	SMRN	SMO		

RESULTADOS

En la Figura 2 se muestra, para los ocho talleres realizados (del 7.1 al 10.2), el porcentaje de alumnos que empleó cada una de las tres categorías de primer nivel: pictográfica (PI), simbólico-matemática (SM) y verbal-escrita (VE). El análisis contabiliza la presencia de cada tipo de marca, tanto si aparece de forma exclusiva en una representación, como si aparece de manera combinada. Por ello, un mismo alumno puede figurar en más de una categoría.

Figura 2

Porcentaje de uso de las categorías de primer nivel por taller

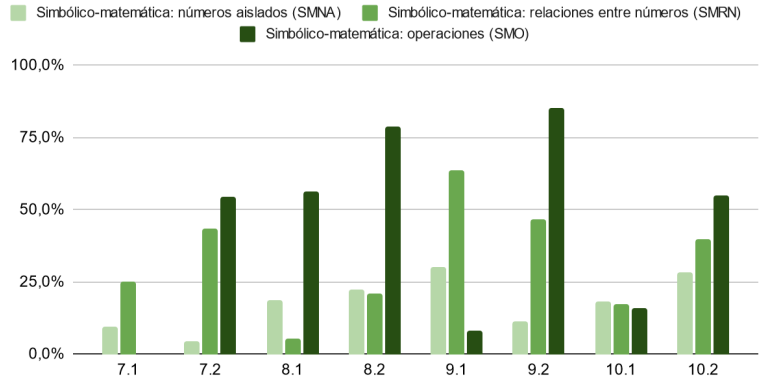


Tal y como observamos en la Figura 2, en los talleres correspondientes a la parte 1 (7.1, 8.1, 9.1 y 10.1) en los cuales se trabaja la introducción a la descomposición de los números 7, 8, 9 y 10 respectivamente, más del 90% del alumnado utiliza marcas pictográficas, representando objetos, escenas o situaciones vividas durante la actividad. Este dato es coherente con la naturaleza manipulativa de las actividades iniciales y con la transición que propone el modelo CRA desde lo concreto hacia lo representativo. En los talleres parte 2, aunque la frecuencia de marcas pictográficas disminuye (60% de uso o menos), observamos que nunca desaparecen, lo que confirma su relevancia como recurso expresivo incluso en fases más abstractas del aprendizaje matemático. Respecto a las marcas simbólico-matemáticas, en el taller 7.1 solo un 35% de los alumnos las usa, mientras que en los demás talleres su uso supera el 70%. Destaca el taller 10.1, donde solo un 40% las utiliza. En general, en los talleres de la parte 2 el uso de marcas simbólico-matemáticas aumenta y siempre supera el 90%. En cuanto a las marcas verbales-escritas, menos del 25% de los alumnos las usan para representar ideas matemáticas, sin diferencias evidentes entre los talleres parte 1 y parte 2. Para analizar en detalle las marcas simbólico-matemáticas, la Figura 3 muestra, en cada uno de los 8 talleres, el porcentaje de alumnos que usó cada categoría de segundo nivel: Simbólico-matemática: números aislados (SMNA), simbólico-matemática: relaciones entre números (SMRN) y simbólico-

matemática: operaciones (SMO). Al igual que en la figura anterior, se considera la presencia de cada marca sin importar si se usó sola o combinada con otras.

Figura 3

Porcentaje de uso de las categorías simbólico-matemáticas de segundo nivel por taller



Focalizando en el uso de las distintas marcas simbólico-matemáticas, no se identifica un patrón simple y homogéneo de diferenciación entre los talleres de la parte 1 y la parte 2 para las tres categorías analizadas. Por este motivo, se examina la posible correspondencia entre el uso de marcas SMRN y SMO y la tipología de actividades SMRN y SMO desarrolladas en cada taller. En los talleres 7.1 y 7.2, las representaciones reflejan principalmente las actividades realizadas en el taller (actividades SMRN). En los talleres 8.1 y 8.2, entre el 55% y 75% de las representaciones son SMO, aunque no se trabajó el uso de símbolos matemáticos ni operaciones durante el taller (Tabla 1). En los talleres 9.1 y 9.2, existe una relación clara entre actividades y representaciones. Por el contrario, en los talleres 10.1 y 10.2 las marcas usadas en las representaciones no reflejan directamente las actividades del taller. En el 10.1, donde no se han trabajado ni números ni símbolos, entre el 15 y 20% de los alumnos usan las tres categorías simbólico-matemáticas (MSNA, MSRN, MSO). En el taller 10.2, donde se han realizado únicamente actividades de parejas numéricas (SMRN), aparecen representaciones de las tres categorías en proporciones similares: cerca de 30% SMNA, cerca de 40% SMRN y más de 55% SMO.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En respuesta a la pregunta de investigación, los resultados muestran que el tipo de taller influye en las marcas gráficas predominantes de primer nivel. En este sentido, en los talleres parte 1 (más manipulativos y representativos) destacan las representaciones con marcas pictográficas, mientras que en los talleres parte 2 (más simbólicos y abstractos) aumentan claramente las representaciones con marcas simbólico-matemáticas. Sin embargo, esta relación no siempre es directa. En algunos talleres (7.1, 7.2, 9.1 y 9.2) las marcas gráficas utilizadas por el alumnado coinciden mayoritariamente con los tipos de marcas gráficas promovidos por las actividades desarrolladas en dichos talleres. En cambio, en otros talleres (8.1, 8.2, 10.1 y 10.2) los alumnos utilizan marcas gráficas, especialmente simbólico-matemáticas, que no se han trabajado explícitamente en el taller. En los talleres 8.1 y 8.2, por ejemplo, muchos niños emplean símbolos como + e = en sus representaciones sin que estos hayan aparecido durante el taller, lo que indica que recuperan aprendizajes de talleres previos y los aplican de manera autónoma. Un patrón similar aparece en el taller 10.1, donde a pesar de no usar ningún elemento simbólico-matemático en ninguna actividad, una parte relevante del alumnado, cerca del 45%, recurre igualmente al uso de marcas simbólicas. Este comportamiento sugiere un proceso de transferencia representacional: los niños movilizan conocimientos adquiridos en talleres anteriores para expresar nuevas ideas, lo que refleja no sólo comprensión numérica, sino también flexibilidad representacional (Carruthers y Worthington, 2006). Lejos de limitarse a reproducir lo trabajado en la

sesión, seleccionan de forma personal los recursos que consideran más adecuados para comunicar significado (Dwyer et al., 2024).

Llegados a este punto, queremos señalar ciertas limitaciones del estudio. Una de ellas, es que los datos recogidos proceden de dos centros educativos que implementan un mismo programa educativo, lo que puede restringir la generalización de los resultados. Además, no se han considerado variables individuales, como el nivel de lectoescritura, que podrían incidir en la elección de marcas. Pese a ello, los resultados ponen de relieve la importancia de ofrecer espacios de representación abierta en el aula, que permitan a los niños expresar y comunicar libremente sus ideas matemáticas. Este tipo de prácticas favorece el acceso al pensamiento matemático infantil, respeta los ritmos individuales y legitima la diversidad de formas de representación (Worthington y Carruthers, 2011).

Referencias

Bruner, J. S. (1966). *Toward a theory of instruction (Vol. 59).* Harvard University Press.

Carruthers, E. y Worthington, M. (2006). *Children's mathematics: Making marks, making meaning (2nd ed.)*. Paul Chapman Publishing.

Dwyer, J., Sikder, S. y MacDonald, A. (2024). Children's mathematical graphics illustrating inner "voices": A literature review. En L. Mahony, S. McLeod, A. Salamon, y J. Dwyer (Eds.), *Early childhood voices: Children, families, professionals. International perspectives on early childhood education and development* (pp. 71-84). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-56484-0_6

Edo, M. y Marín, A. (2017). La hoja en blanco en la representación matemática en infantil. En J. Gairín y I. Vizcaíno (Eds.), *Manual de Educación Infantil. Orientaciones y Recursos (0-6 años)* (pp. 1-17). Wolters Kluwer.

Einarsdóttir, J. y Perry, B. (2011). Young children's access to real life: Ethical issues in research with children. *Early Child Development and Care, 181*(1), 1-14. https://doi.org/10.1080/03004430903224584

García-Triana, B., Edo, M. y Albarracín, L. (2024). Representaciones matemáticas en papel de estudiantes de I5 sobre la descomposición del número 7. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 265-272). SEIEM.

Goldin, G. A. (2020). Mathematical representations. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 566-572). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_103

Hughes, M. (1986). *Children and number: Difficulties in learning mathematics.* Blackwell.

Laski, E. V., Jor'dan, J. R., Daoust, C. J. y Murray, A. (2015). What makes mathematics manipulatives effective? Lessons from cognitive science and Montessori education. *SAGE Open, 5*(2). https://doi.org/10.1177/2158244015589588

Mix, K. S. (2002). The construction of number concepts. *Cognitive Development, 17*(3-4), 1345-1363. https://doi.org/10.1016/S0885-2014(02)00123-5

Pape, S. J. y Tchoshanov, M. A. (2001). The role of representation(s) in developing mathematical understanding. *Theory into Practice, 40*(2), 118-127. https://doi.org/10.1207/s15430421tip4002_6

Worthington, M. y Carruthers, E. (2011). *Understanding children's mathematical graphics: Beginnings in play.* McGraw Hill Education.

EL LENGUAJE PROBABILÍSTICO EN LAS NORMATIVAS CURRICULARES ESPAÑOLAS

Probabilistic language in Spanish curriculum regulations

Torres-Escoriza, V.[a], Díaz-Levicoy, D.[b] y López-Martín, M. M.[a]

[a]Universidad de Almería, [b]Universidad Católica del Maule

Resumen

Este estudio analiza el lenguaje probabilístico en los documentos curriculares españoles de Educación Primaria y Educación Secundaria Obligatoria. Mediante un análisis documental basado en el modelo de alfabetización probabilística de Gal (2005), se identifican los tipos de lenguaje probabilístico presentes en los diferentes componentes del currículo y su relación con las grandes ideas y las preguntas críticas de la probabilidad. Los resultados muestran diferencias entre ambas etapas educativas. En Educación Primaria predominan los registros verbal y numérico, mientras que en Educación Secundaria se incorporan de forma sistemática los lenguajes gráfico, tabular y simbólico. Esta diversidad de representaciones muestra que combinar lenguajes verbales, numéricos, gráficos, tabulares y simbólicos favorece la comprensión de la probabilidad y ayuda al alumnado a interpretar críticamente la información en situaciones de incertidumbre.

Palabras clave: *alfabetización probabilística, lenguaje probabilístico, análisis curricular, pensamiento crítico.*

Abstract

This study analyses probabilistic language in Spanish primary and secondary school curricula. Using a documentary analysis based on Gal's (2005) probabilistic literacy model, it identifies the types of probabilistic language present in the different components of the curriculum and their relationship to the big ideas and critical questions of probability. The results show differences between the two educational stages. In primary education, verbal and numerical registers predominate, while in secondary education, graphic, tabular, and symbolic languages are systematically incorporated. This diversity of representation registers allows us to analyse how the curriculum articulates different probabilistic languages in relation to the big ideas and critical questions of probability.

Keywords: p*robabilistic literacy, probabilistic language, curriculum analysis, critical thinking.*

INTRODUCCIÓN

La probabilidad se apoya de manera esencial en el lenguaje para expresar y comunicar la incertidumbre. Términos como *probable*, *posible*, *seguro* o *azar*, así como expresiones numéricas, gráficas o simbólicas, permiten formular, interpretar y justificar afirmaciones sobre fenómenos aleatorios (Batanero y Díaz, 2012; Borovcnik, 2016). Desde esta perspectiva, la probabilidad puede entenderse no solo como un conjunto de técnicas de cálculo, sino también como un sistema de significados que permite describir, interpretar y comunicar fenómenos caracterizados por la incertidumbre (Batanero et al., 2025). En consecuencia, su enseñanza requiere atender tanto a los procedimientos de cálculo como a las formas en que se formulan, interpretan y justifican las afirmaciones probabilísticas en distintos contextos (Ortiz et al., 2001).

En este sentido, el concepto de alfabetización probabilística propuesto por Gal (2005) ofrece un marco teórico adecuado para analizar el papel del lenguaje en la interpretación de la información probabilística. Esto implica que los ciudadanos sean capaces de interpretar y evaluar críticamente

Torres-Escoriza, V., Díaz-Levicoy, D. y López-Martín, M. M. (2026). El lenguaje probabilístico en las normativas curriculares españolas. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (pp. 577-584). SEIEM.

afirmaciones relacionadas con el azar y la incertidumbre, apoyándose en distintos registros de representación y en una comprensión básica de las ideas del pensamiento estocástico (Batanero et al., 2005; Wild y Pfannkuch, 1999). En este modelo, el conocimiento probabilístico se articula en torno a dos elementos clave: las grandes ideas, que recogen los conceptos fundamentales del razonamiento bajo incertidumbre, y las preguntas críticas, orientadas a analizar y evaluar la información probabilística (Gal, 2005).

En el ámbito educativo, el currículo constituye un referente fundamental para el desarrollo de estas competencias, ya que establece los contenidos, enfoques y orientaciones que guían la enseñanza a lo largo de las distintas etapas educativas (Gimeno, 2012). Como sistema organizado de conocimientos, el currículo estructura la progresión del aprendizaje y orienta las prácticas de enseñanza (McPhail, 2021; Young, 2013). Su análisis permite comprender cómo se introduce la probabilidad y qué papel se otorga al lenguaje probabilístico en la formulación, representación e interpretación de situaciones aleatorias.

En el contexto español, la normativa vigente (Boletín Oficial del Estado [BOE], 2022a, 2022b) sustituye el bloque tradicional de *Estadística y Probabilidad* por el de *Sentido Estocástico*, promoviendo una visión integrada de los datos y el azar. En este marco, el presente estudio se centra en la dimensión vinculada a la incertidumbre, examinando el papel del lenguaje probabilístico en el tratamiento de situaciones aleatorias y en su articulación con las grandes ideas y preguntas críticas de la probabilidad dentro del currículo.

MARCO CONCEPTUAL

En este trabajo se emplea el término *lenguaje probabilístico* para referirse a las formas de representación y comunicación de la incertidumbre y el azar. Dicho término constituye una noción más específica dentro del *lenguaje estocástico*, entendido este último como un concepto más amplio que engloba los significados asociados tanto a la probabilidad como a la estadística (Batanero, 2005; Gal, 2005).

Componentes clave de la alfabetización probabilística

La alfabetización probabilística integra diferentes componentes que permiten comprender, interpretar y evaluar información relacionada con el azar y la incertidumbre. El modelo propuesto por Gal (2005) organiza estas componentes en dos grandes grupos: elementos de conocimiento y elementos disposicionales, necesarios para utilizar la probabilidad de forma informada y crítica (Braga et al., 2022; Gal, 2005).

Entre los elementos de conocimiento destaca el lenguaje probabilístico, entendido como el conjunto de recursos que permiten describir e interpretar fenómenos aleatorios mediante distintos registros de representación, y las *grandes ideas probabilísticas*, que constituyen el núcleo del razonamiento bajo incertidumbre (Gal, 2005). Estas incluyen la variabilidad (fluctuación de resultados), la aleatoriedad (imprevisibilidad de los procesos), la independencia (ausencia de relación entre sucesos), la predictibilidad (anticipación a partir de patrones) y la incertidumbre (falta de certeza sobre los resultados).

El modelo también incorpora las *preguntas críticas*, que permiten analizar la validez y la interpretación de la información probabilística (Gal, 2005). Estas se organizan en cinco dimensiones: el contexto, que examina si la situación implica aleatoriedad; la fuente, que considera la procedencia y fiabilidad de la información; el proceso, centrado en cómo se han obtenido y analizado los datos; el significado del mensaje, que precisa qué expresa la afirmación probabilística; y la interpretación reflexiva, que valora su razonabilidad antes de aceptarla. En conjunto, estas dimensiones contribuyen a desarrollar una lectura crítica de la información basada en incertidumbre (Watson, 2006).

En este marco, el lenguaje probabilístico desempeña un papel fundamental, ya que media entre las grandes ideas y su concreción en el currículo. Dado que estas ideas son constructos abstractos, requieren expresarse mediante formas de lenguaje como palabras, números, gráficos, tablas o símbolos. Así, el lenguaje no solo comunica, sino que hace accesibles y operativas estas ideas en el aula; por ejemplo, la variabilidad se reconoce a través de representaciones como tablas o gráficos que muestran la fluctuación de los resultados. De este modo, el lenguaje permite transformar nociones teóricas en objetos representables e interpretables, favoreciendo la construcción de significado y una interpretación crítica de la información en contextos de incertidumbre (Braga et al., 2022; Gal, 2005; Vásquez y Alsina, 2017).

El lenguaje matemático

El Enfoque Ontosemiótico (EOS) considera el lenguaje como uno de los objetos primarios de la práctica matemática, junto con problemas, conceptos-definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos (Godino, 2024; Godino et al., 2007). Dentro de esta ontología, el lenguaje constituye la parte ostensiva mediante la cual se expresan y articulan los objetos matemáticos, permitiendo establecer una correspondencia semiótica entre las expresiones y sus significados (Font y Godino, 2006). Desde esta perspectiva, el lenguaje cumple una doble función: representativa, al permitir nombrar y describir los objetos matemáticos mediante distintos sistemas de expresión, y operativa, al intervenir en acciones como interpretar un gráfico, completar una tabla o manipular una expresión simbólica (Godino, 2024; Godino et al., 2007).

En el caso de la probabilidad, se distinguen cinco tipos principales de lenguaje (p ej., Gómez et al., 2013): lenguaje verbal, que incluye términos y expresiones utilizadas para describir fenómenos aleatorios; lenguaje numérico, asociado a la cuantificación y comparación de probabilidades; lenguaje tabular, que organiza datos en tablas para analizar frecuencias; lenguaje gráfico, que utiliza representaciones visuales para representar relaciones probabilísticas; y lenguaje simbólico, que emplea notación formal para expresar relaciones entre sucesos. Esta clasificación permite identificar los distintos sistemas de representación presentes en el currículo y analizar su relación con las grandes ideas y las preguntas críticas de la alfabetización probabilística (Gal, 2005).

MÉTODO

La investigación adopta un enfoque cualitativo de carácter documental, centrado en el análisis de la normativa que regula la educación obligatoria en España. En concreto, se examinan los documentos curriculares vigentes correspondientes a Educación Primaria (EP) y Educación Secundaria Obligatoria (ESO). Como técnica de análisis se emplea el análisis de contenido (Krippendorff, 2019), que permite examinar de manera sistemática el tratamiento del lenguaje probabilístico (Batanero y Díaz, 2012; Watson, 2006). El proceso se basa en una categorización deductiva fundamentada en el modelo de alfabetización probabilística de Gal (2005), orientada a identificar los elementos vinculados al uso del lenguaje probabilístico en la normativa y su relación con las grandes ideas y preguntas críticas.

El corpus de análisis está constituido por el Real Decreto 157/2022 (Educación Primaria) y el Real Decreto 217/2022 (Educación Secundaria Obligatoria) (BOE, 2022a, 2022b). La unidad de análisis está formada por los saberes básicos, las competencias específicas y los criterios de evaluación del bloque de *Sentido Estocástico*, considerados como las unidades de contenido a partir de las cuales se identifican los elementos vinculados al lenguaje probabilístico.

El análisis se organiza en torno a dos categorías derivadas del modelo de Gal (2005), las grandes ideas probabilísticas y las preguntas críticas. Como variables de análisis se consideran los sistemas de representación presentes en el currículo (verbal, numérico, gráfico, tabular y simbólico), con el fin de identificar los tipos de lenguaje probabilístico y su relación con dichas categorías. La relación entre lenguaje y grandes ideas se establece a partir del contenido de los elementos curriculares, identificando el tipo de registro implicado y la idea probabilística a la que se asocia. Por ejemplo, el uso de la "regla

de Laplace" se vincula el lenguaje simbólico con la gran idea de incertidumbre. La identificación de las preguntas críticas no se basó únicamente en términos explícitos, sino en un análisis interpretativo del significado e intencionalidad de los elementos curriculares. Así, la dimensión de fuente se reconoce en referencias a la fiabilidad de la información (por ejemplo, contrastar información de diferentes fuentes seguras y fiables), mientras que la interpretación reflexiva se identifica en propuestas que implican emitir juicios o tomar decisiones ante la incertidumbre, es decir, en términos o acciones que invitan al cuestionamiento de la información presentada.

RESULTADOS

Los resultados se presentan mediante tablas de doble entrada que relacionan los tipos de lenguaje probabilístico (verbal, numérico, gráfico, tabular y simbólico) con las categorías del modelo de alfabetización probabilística de Gal (2005), que incluyen las grandes ideas del pensamiento estocástico y las preguntas críticas asociadas a la interpretación de la información probabilística.

La Tabla 1, correspondiente al análisis curricular de Educación Primaria (centrado en el segundo y tercer ciclo, dada la ausencia de contenidos específicos de probabilidad en los dos primeros cursos), evidencia un claro predominio del lenguaje verbal y numérico, que aparecen asociados a la mayoría de las grandes ideas identificadas. En cambio, el lenguaje tabular y el simbólico presentan una presencia más limitada, mientras que el lenguaje gráfico no se identifica en los contenidos analizados.

Tabla 1

Presencia del lenguaje en las grandes ideas y preguntas críticas en Educación Primaria

Variable	Verbal	Numérico	Gráfico	Tabular	Simbólico
Grandes Ideas					
Variabilidad	X	X		X	
Aleatoriedad	X	X			
Independencia					
Predictibilidad	X	X		X	X
Incertidumbre	X	X			X
Preguntas críticas					
Contexto	X				
Fuente	X				
Proceso	X	X			X
Significado	X				
Interpretación reflexiva	X	X			X

El lenguaje verbal constituye el principal medio de formulación de los contenidos probabilísticos en esta etapa. A través de él se describen situaciones aleatorias y se introducen diversas ideas probabilísticas, como la variabilidad, la aleatoriedad, la predictibilidad o la incertidumbre. Por ejemplo, el currículo plantea la "identificación de suceso seguro, suceso posible y suceso imposible" (BOE, 2022a, p. 24498), lo que permite reconocer que los resultados de un experimento pueden variar. Asimismo, la aleatoriedad se aborda mediante el reconocimiento de "fenómenos aleatorios en situaciones de la vida cotidiana" (BOE, 2022a, p. 24486), apoyado en un lenguaje verbal informal. En las preguntas críticas, el lenguaje verbal se relaciona con todas las dimensiones del análisis (contexto, fuente, proceso, significado e interpretación reflexiva), ya que se formulan mediante descripciones que interpretan situaciones probabilísticas. Por ejemplo, respecto a la fuente, el currículo promueve "buscar, seleccionar y contrastar información, de diferentes fuentes seguras y fiables, usando los criterios de fiabilidad de fuentes" (BOE, 2022a, p. 24426), y en cuanto al significado e interpretación reflexiva, pide "interpretar el lenguaje matemático sencillo presente en la vida cotidiana en diferentes formatos, adquiriendo vocabulario apropiado y mostrando comprensión

del mensaje" (BOE, 2022a, p. 24499). Estos elementos evidencian el papel central del discurso verbal en el desarrollo inicial de la alfabetización probabilística.

El lenguaje numérico aparece vinculado a varias de las grandes ideas probabilísticas, en particular a la variabilidad, la aleatoriedad, la predictibilidad y la incertidumbre, ya que permite cuantificar y analizar resultados de experimentos aleatorios. En este sentido, el currículo plantea la "comprobación de la estabilización de las frecuencias relativas en experimentos aleatorios repetitivos" (BOE, 2022a, p. 24502), lo que permite analizar la variabilidad de los resultados y reconocer patrones en los datos. Del mismo modo, la incertidumbre se aborda mediante la "cuantificación y estimación subjetiva de la incertidumbre" (BOE, 2022a, p. 24502). En relación con las preguntas críticas, el lenguaje numérico adquiere especial relevancia en las dimensiones de proceso e interpretación reflexiva, donde se exige que el alumnado "compruebe la corrección matemática de las soluciones de un problema y su coherencia en el contexto planteado" (BOE, 2022a, p. 24498).

El lenguaje tabular aparece de forma puntual vinculado a la organización de resultados obtenidos en experimentos aleatorios, lo que permite registrar y comparar las frecuencias observadas y se relaciona principalmente con la gran idea de variabilidad, al facilitar la observación de la fluctuación de resultados en experimentos repetidos. Por su parte, el lenguaje simbólico se introduce de manera incipiente en relación con las grandes ideas de predictibilidad e incertidumbre, por ejemplo, mediante la utilización de la "regla de Laplace" (BOE, 2022a, p. 24502), que permite calcular probabilidades en situaciones equiprobables. Asimismo, el lenguaje simbólico aparece junto con el lenguaje numérico en las dimensiones de proceso e interpretación reflexiva de las preguntas críticas, donde interviene en la comprobación de resultados y en la valoración de su coherencia mediante expresiones simbólicas como los signos "=", "≠", "<" y ">" (BOE, 2022a, p. 24502).

En ESO, se observa una ampliación importante en el uso de los lenguajes probabilísticos respecto a lo observado en EP (véase Tabla 2). Mientras que en primaria predominaban los lenguajes verbal y numérico, en secundaria se incorpora de forma más sistemática los registros gráfico, tabular y simbólico, reflejando un tratamiento más estructurado de los fenómenos aleatorios.

Tabla 2

Presencia del lenguaje en las grandes ideas y preguntas críticas en Educación Secundaria

Variable	Verbal	Numérico	Gráfico	Tabular	Simbólico
Grandes Ideas					
Variabilidad	X	X	X	X	X
Aleatoriedad	X	X			X
Independencia	X	X	X		X
Predictibilidad	X	X	X	X	X
Incertidumbre	X	X			X
Preguntas críticas					
Contexto	X	X			X
Fuente	X		X	X	
Proceso	X	X	X	X	X
Significado	X	X			X
Interpretación reflexiva	X	X			X

El lenguaje verbal sigue desempeñando un papel central en la formulación y explicación de las grandes ideas probabilísticas. Por ejemplo, en relación con la variabilidad, el currículo propone la "identificación de fenómenos deterministas y aleatorios" (BOE, 2022b, p. 41735), lo que permite al alumnado distinguir entre situaciones previsibles y aquellas en las que interviene el azar. Asimismo, la aleatoriedad se aborda mediante la explicación de procesos asociados a la "asignación de probabilidades mediante experimentación, el concepto de frecuencia relativa y la regla de Laplace"

(BOE, 2022b, p. 41735), favoreciendo la comprensión del significado de la probabilidad a partir de situaciones experimentales y su progresiva formalización (Wilhelmi, 2009).

El lenguaje numérico adquiere un papel relevante en la cuantificación de los fenómenos aleatorios, especialmente en relación con la gran idea de incertidumbre, donde el currículo introduce la "probabilidad como medida de la incertidumbre" (BOE, 2022b, p. 41726). Este tipo de lenguaje permite expresar numéricamente el grado de posibilidad de que ocurra un suceso y consolidar una interpretación cuantitativa de la probabilidad (Ortiz et al., 2001).

Una de las principales diferencias respecto a EP es la incorporación del lenguaje gráfico, que se utiliza para representar experimentos aleatorios más complejos. En este sentido, el uso de "diagramas de árbol" (BOE, 2022b, p. 41744) para analizar situaciones relacionadas con la independencia de sucesos, facilita la visualización de las posibles combinaciones de resultados y la comprensión de las relaciones entre los sucesos implicados en un experimento compuesto (Batanero et al., 2025). El lenguaje tabular aparece vinculado al registro y análisis de resultados experimentales, permitiendo organizar la información obtenida y observar patrones probabilísticos. En este sentido, el currículo propone el análisis de la aproximación de las "frecuencias relativas" (BOE, 2022b, p. 41777), lo que contribuye a comprender la variabilidad de los resultados en experimentos repetidos (Gómez et al., 2013). Por su parte, el lenguaje simbólico adquiere una mayor presencia en esta etapa, especialmente en la formalización de las expresiones probabilísticas y en la representación matemática de las relaciones entre sucesos.

En relación con las preguntas críticas del modelo de Gal (2005), el currículo promueve la interpretación y análisis de la información probabilística mediante distintos lenguajes. Por ejemplo, en la dimensión contexto se plantea la "asociación de expresiones simbólicas al contexto del problema" (BOE, 2022b, p. 41738), mientras que en la dimensión fuente se fomenta el "análisis e interpretación de tablas y gráficos […] en contextos reales" (BOE, 2022b, p. 41737). Asimismo, en las dimensiones de proceso y significado se destaca la importancia de "describir, explicar y justificar razonamientos, procedimientos y conclusiones" (BOE, 2022b, p. 41731). Finalmente, en la interpretación reflexiva se espera que el alumnado pueda utilizar "estrategias de deducción de conclusiones a partir de una muestra con el fin de emitir juicios y tomar decisiones adecuadas" (BOE, 2022b, p. 41735), valorando la coherencia de los resultados obtenidos y su significado en el contexto planteado.

CONCLUSIONES

El análisis del currículo español de Educación Primaria y Educación Secundaria Obligatoria muestra que este incorpora distintos tipos de lenguaje probabilístico para abordar el estudio de los fenómenos aleatorios. En Educación Primaria predominan los registros verbal y numérico, mientras que en Educación Secundaria se observa una mayor diversidad de lenguajes mediante la incorporación de representaciones gráficas, tabulares y simbólicas. Este resultado coincide con investigaciones previas que han analizado el tratamiento del lenguaje probabilístico en libros de texto, donde también se observa un predominio inicial de registros verbales y numéricos y una incorporación progresiva de representaciones más diversas en niveles educativos superiores (Gómez et al., 2013; Gómez et al., 2015; Ortiz et al., 2001; Ortiz et al., 2016).

La presencia de distintos sistemas de representación resulta especialmente relevante en el aprendizaje de la probabilidad. Diversos autores han señalado que la comprensión de los objetos matemáticos requiere interpretar y coordinar diferentes registros de representación, ya que cada uno de ellos permite destacar aspectos distintos del mismo concepto (e. g., Duval, 2006; Pimm, 1987). En el caso de la probabilidad, el uso combinado de representaciones verbales, numéricas, gráficas, tabulares y simbólicas facilita la descripción de situaciones aleatorias, el análisis de datos experimentales y la formalización de relaciones entre sucesos (Jones et al., 2007). Esta diversidad de representaciones también se relaciona con el tratamiento de las ideas fundamentales del pensamiento estocástico, como la variabilidad, la aleatoriedad o la independencia. El estudio de estas ideas requiere analizar los

fenómenos probabilísticos desde diferentes representaciones y niveles de formalización (Batanero et al., 2005; Wild y Pfannkuch, 1999). Desde la perspectiva de la alfabetización probabilística, la interpretación y evaluación de información basada en el azar y la incertidumbre exige comprender y utilizar distintos formatos de representación de los datos y de las relaciones probabilísticas (Gal, 2005; Vásquez y Alsina, 2017; Watson, 2006).

Asimismo, la diversidad de lenguajes probabilísticos presentes en el currículo puede favorecer la construcción de significados probabilísticos más ricos, al ofrecer diferentes formas de representar y analizar los fenómenos aleatorios a lo largo de la educación obligatoria (Alsina y Vásquez, 2016). En particular, esta diversidad de representaciones se relaciona con la coexistencia de distintos significados del concepto de probabilidad (intuitivo, frecuentista, clásico o subjetivo) que intervienen en su aprendizaje y enseñanza (Batanero, 2005; Jones et al., 2007). La articulación de estos significados a través de distintos lenguajes contribuye a una comprensión más amplia del concepto de probabilidad en los procesos de enseñanza y aprendizaje. La presencia de estos distintos lenguajes en el currículo tiene importantes implicaciones para la enseñanza y, especialmente, para la formación inicial del profesorado, ya que exige que los futuros docentes desarrollen competencias para interpretar, representar y comunicar situaciones aleatorias mediante registros diversos. En este sentido, la enseñanza de la probabilidad no se limita al cálculo de probabilidades, sino que implica también saber expresar y traducir significados probabilísticos a través de diferentes formas de representación en el aula.

Agradecimientos

Investigación realizada como parte del proyecto de investigación PID2022-139748NB-100 financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033/ y por FEDER, UE, con apoyo del Grupo de Investigación HUM-886 (Junta de Andalucía)

Referencias

Alsina, Á. y Vásquez, C. (2016). La enseñanza de la probabilidad en Educación Primaria: el currículo versus el libro de texto. En FESPM (Ed.), *17 Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas. Actas JAEM 2015.* (pp. 1-14). FESPM.

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 8*(3), 247-264.

Batanero, C. y Díaz, C. (2012). Training school teachers to teach probability: reflections and challenges. *Chilean Journal of Statistics*, *3*(1), 3-13

Batanero, C., Elgueda, M. y Gea, M. M. (2025). Probabilistic language in Spanish secondary textbooks. *Education Sciences, 15*(8), 979. https://doi.org/10.3390/educsci15080979

Batanero, C., Henry, M. y Parzysz, B. (2005). The nature of chance and probability. En G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school* (pp. 15-37). Springer.

BOE. (2022a). *Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria* (BOE núm. 59, de 9 de marzo de 2022). https://www.boe.es/eli/es/rd/2022/03/01/157

BOE. (2022b). *Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato* (BOE núm. 80, de 1 de abril de 2022). https://www.boe.es/eli/es/rd/2022/03/29/217

Borovcnik, M. (2016). Probabilistic thinking and probability literacy in the context of risk. *Educação Matemática Pesquisa, 18*(3), 1491-1516.

Braga, E. R., Coragem, C. y Viali, L. (2022). Actividades contextualizadas sobre Covid-19: desarrollo de la alfabetización probabilística en 6° año de Primaria. *Unión, 18*(65), 1-19.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in learning mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1), 103-131.

Font, V. y Godino, J. D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educaçao Matemática Pesquisa, 8*(1), 67-98.

Gal, I. (2005). Towards "probability literacy" for all citizens. En G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school* (pp. 39-63). Springer.

Gimeno, J. (2012). ¿Qué significa el currículum? En J. Sacristán, R. Feito, P. Perrenoud y M. Clemente (Eds.), *Diseño, desarrollo e innovación del currículum* (pp. 25-47). Morata.

Godino, J. D. (2024). *Enfoque ontosemiótico en educación matemática. Fundamentos, herramientas y aplicaciones*. McGraw-Hill, Aula Magna.

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM, 39* (1-2), 127-135.

Gómez, E., Contreras, J.M. y Batanero, C. (2015). Significados de la probabilidad en libros de texto para Educación Primaria en Andalucía. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp.73-87). SEIEM.

Gómez, E., Ortiz, J. J., Batanero, C. y Contreras, J. M. (2013). El lenguaje de probabilidad en los libros de texto de Educación Primaria. *Unión, 35*, 75-91.

Jones, G., Langrall, C. y Mooney, E. (2007). Research in probability: Responding to classroom realities. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (Vol. 2, pp. 909-955). Information Age Publishing and NCTM.

Krippendorff, K. (2019). *Content analysis: An introduction to its methodology*. SAGE. https://doi.org/10.4135/9781071878781

McPhail, G. (2021). The search for deep learning: a curriculum coherence model. *Journal of Curriculum Studies, 53*(4), 420-434. https://doi.org/10.1080/00220272.2020.1748231

Ortiz, J. J., Batanero, C. y Serrano, L. (2001). El lenguaje probabilístico en los libros de texto. *Suma, 38,* 5-13.

Ortiz, J. J., Albanese, V. y Serrano, L. (2016). El lenguaje de la estadística y probabilidad en libros de texto de Educación Secundaria Obligatoria. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 397-406). SEIEM.

Pimm, D. (1987). *Speaking mathematically.* Routledge.

Schmidt, W. H. y Houang, R. T. (2012). Curricular coherence and the Common Core State Standards for Mathematics. *Educational Researcher, 41*(8), 294-308. https://doi.org/10.3102/0013189X12464517

Vásquez, C. y Alsina, Á. (2017). Lenguaje probabilístico: un camino para el desarrollo de la alfabetización probabilística. Un estudio de caso en el aula de Educación Primaria. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *31*(57), 454-478. https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a22

Watson, J. (2006). *Statistical literacy at school*. Lawrence Erlbaum.

Wild, C. J. y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review*, *67*(3), 223-265.

Wilhelmi, M. R. (2009). Didáctica de la Estadística. En C. Gaita (Ed.), *IV Coloquio Internacional de Enseñanza de las Matemáticas*. (pp. 89-103). Pontificia Universidad Católica del Perú.

Young, M. (2013). Overcoming the crisis in curriculum theory: a knowledge-based approach. *Journal of Curriculum Studies, 45*(2), 101-118. https://doi.org/10.1080/00220272.2013.764505

EXPLORANDO LA NO UNICIDAD DE LA GENERALIZACIÓN RECURSIVA EN SUCESIONES NUMÉRICAS

Exploring the non-uniqueness of recursive generalisation in numerical sequences

Trigueros, E.[a] y Montejo-Gámez, J.[b]

[a]Universidad Nacional de Costa Rica, [b]Universidad de Granada

Resumen

Este trabajo investiga las estrategias recursivas y relaciones de recurrencia que surgen en la identificación de un patrón exponencial dado por una sucesión numérica, para lo que se analizaron las producciones escritas de 50 estudiantes de un curso de Ingeniería en Sistemas de la Universidad Nacional de Costa Rica. El análisis de los datos mostró el predominio de estrategias basadas en la conjeturación directa de una relación de recurrencia, que dieron lugar a relaciones lineales homogéneas de orden 2. Sin embargo, cuando el estudiantado añadió el análisis sistemático de las diferencias entre términos se incrementó la incidencia de relaciones no homogéneas de orden 1. Se observan así indicios de que la identificación de relaciones de recurrencia en ciertos patrones involucra habilidades de generalización altas. También se plantea que su presentación a través de sucesiones numéricas genera variedad de relaciones para el mismo patrón.

Palabras clave: *Formación de Ingenieros, Recursividad, Pensamiento algebraico, Patrones, Relaciones de recurrencia*

Abstract

This study investigates the recursive strategies and recurrence relations emerging when identifying an exponential pattern from a numerical sequence. To this aim, the written productions of 50 students in a Systems Engineering course at the Universidad Nacional de Costa Rica was analysed. Data analysis revealed the prevalence of strategies based on the direct conjecture of a recurrence relation. These were mainly associated with linear relations of order 2. However, when the students added a systematic analysis of the differences between terms increased the incidence of non-homogeneous relations of order 1. This provides signs that the identification of recurrence relations in certain nonlinear patterns is relevant for developing algebraic thinking. It is also raised that showing it through numerical sequences leads to emergence of different relationships for the same pattern.

Keywords: *Engineer Education, Recursion, Algebraic Thinking, Patterns, Recurrence Relations*

INTRODUCCIÓN, MARCO TEÓRICO Y PLANTEAMIENTO DE LA INVESTIGACIÓN

El aprendizaje de la recursividad es una cuestión de interés creciente para la educación matemática de alumnado de diferentes niveles educativos. Esto se debe no sólo a las últimas normativas curriculares que promueven el aprendizaje matemático desde el enfoque STEM, sino por la conexión existente entre los razonamientos de tipo recursivo y competencias matemáticas escolares como el pensamiento computacional (Bianco et al., 2024). Autores como Sandefur y Manaster (2022) subrayaron también la importancia del pensamiento recursivo para la resolución de problemas y el pensamiento algebraico, y demandaron más investigación sobre el aprendizaje de la recursividad.

El empleo de razonamientos de tipo recursivo cobra especial relevancia en los grados universitarios asociados a las Ciencias de la Computación (Hamouda et al., 2017), en los que la recursividad aparece de manera transversal en diferentes ramas de las matemáticas como la Lógica, la Teoría de Conjuntos

Trigueros, E. y Montejo-Gámez, J. (2026). Explorando la no unicidad de la generalización recursiva en sucesiones numéricas. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (pp. 585-592). SEIEM.

o la Matemática Discreta. Esto se refleja en el plan de estudios del grado universitario en el que se enmarca esta investigación, que en su primer año incluye cursos de matemáticas focalizados en el análisis de funciones de variable real, y en el segundo contempla un curso de Estructuras Discretas para la Informática. Esta materia pone el foco en las sucesiones numéricas, que constituyen un marco idóneo para trabajar la recursividad desde una formulación algebraica. En efecto, las sucesiones involucran de forma tácita una relación de dependencia funcional de los valores de la sucesión *a(n)* respecto de su posición *n*. Además, si se concibe la recursividad a partir de aquellos objetos o procesos matemáticos cuya definición se generan en función de sí mismos (Rosen, 2019), cualquier relación que permita obtener el término *a(n)* de una sucesión a partir de términos anteriores como son *a(n-1), a(n-2),* etc., ejemplifica el potencial de las sucesiones numéricas para trabajar la recursividad.

Además, atendiendo a lo anterior, la obtención del término general de una sucesión numérica *a(n)* admite, al menos, dos tipos de formulación algebraica: (i) *Explícita*, que expresa la dependencia funcional de *a(n)* respecto de *n;* (ii) *Relación de recurrencia (RR),* que es una igualdad que involucra diferentes términos de la sucesión (y puede también incluir funciones de *n*). Además, para este estudio son de interés las *RR lineales*, que son las que se pueden escribir de la forma $c0 \cdot a(n) + c1 \cdot a(n-1) + \ldots + cn \cdot a(0) = f(n)$, donde los valores *ci* corresponden a constantes y *f(n)* a una función. Del mismo modo, se hablará de *RR* lineal *homogénea* si *f(n)* es idénticamente nula, y *no homogénea* en el resto de los casos (Murillo-Tsijli, 2018). Finalmente, se dice que una relación de recurrencia es de *orden k* cuando conecta el término *a(n)* con los *k* términos anteriores de la sucesión, a saber, *a(n-1), a(n-2), ..., a(n-k)*. La identificación y escritura de fórmulas explícitas y *RR* asociadas a una sucesión numérica está conectada con las destrezas de pensamiento algebraico, lo que constituye el foco teórico del estudio.

Pensamiento algebraico desde la formulación de relaciones de recurrencia

La generalización es un aspecto que muchos autores reconocen como el corazón del razonamiento algebraico y el núcleo mismo de la actividad matemática (Kaput, 2008; Sterner, 2024). En este sentido, Kieran (2022) enfatizó la importancia de la generalización como integrante del pensamiento algebraico y señaló que la identificación de patrones es una actividad pertinente para su desarrollo, afirmación compartida por otros autores (Torres et al., 2023; Burgos et al., 2024).

Cuando se trabaja con patrones basados en sucesiones numéricas, de acuerdo a la discusión previa, se contemplan en principio dos tipos de generalización: aquella orientada a obtener la fórmula explícita, y la orientada a encontrar una relación de recurrencia. La investigación en educación matemática ha abordado de manera desigual estas dos posibilidades, ya que el grueso de los estudios sobre generalización de patrones se centra principalmente en los primeros años de la educación secundaria (p.e., Pérez et al., 2025), la educación primaria (p. e., Pinto y Cañadas, 2021; Narváez et al., 2025) o el profesorado de primaria (p.e., Vargas, 2025). En estos niveles, hay consenso entre los investigadores en que la generalización de un patrón incluye tres procesos clave: (i) identificar una característica común entre los elementos iniciales, (ii) extenderla a los siguientes términos y (iii) escribir una expresión que permita calcular cualquier término de la sucesión sin necesidad de observar todos los anteriores (Radford, 2013). En todas estas investigaciones se identifica el máximo nivel de generalización con la obtención de la relación funcional (la fórmula explícita), correspondiente al proceso (iii). La conexión entre términos consecutivos (la relación de recurrencia), vinculada al proceso (ii), se concibe como un nivel menor de generalización (p. e., Pinto y Cañadas, 2021; Stephens et al., 2017; Sterner, 2024, Pérez et al., 2025).

Es decir, en la literatura se interpreta la generalización a partir de la relación entre la posición *n* y el valor del patrón *a(n)*, que suele ser de tipo $a(n)=An+B$. En estos casos, la diferencia entre dos términos consecutivos es constante, por lo que la habilidad de generalización necesaria para desarrollar el proceso (ii) se percibe como baja. Sin embargo, hay casos en los que la capacidad de generalización relevante está asociada con las relaciones entre términos de la sucesión. Por ejemplo,

en una sucesión como *1, 7, 18, 34, 55, 81,…,* la diferencia entre términos consecutivos es *5n+1*. En este caso el proceso (ii), de extender la relación entre los primeros términos de la sucesión, conduce a identificar una *RR general,* lo que ya requiere una capacidad de generalización análoga a la investigada por la mayor parte de la literatura. La conexión con la recursividad de este tipo de capacidades hace pertinente su estudio en grados universitarios de ingeniería en informática, pero no se han encontrado antecedentes que lo hayan abordado. Esto llevó a desarrollar un estudio previo basado en el análisis de un patrón cuadrático dado por una representación pictórica (Trigueros y Montejo-Gámez, 2025). En dicha investigación se observó que el estudiantado de ingeniería optó mayoritariamente por la búsqueda de la relación de recurrencia general (en lugar de la fórmula explícita). La estrategia de mayor éxito se basó en la obtención de la sucesión numérica para los primeros casos y un proceso de análisis sistemático de las diferencias, que permitió generalizar la diferencia entre términos consecutivos de la sucesión, aunque evidenció dificultades para escribir en símbolos algebraicos la relación de recurrencia general.

En síntesis, se ha observado una primera evidencia de que la *generalización recursiva*, entendida como la identificación y escritura de relaciones de recurrencia generales asociadas a ciertos patrones no lineales, involucra habilidades propias de la generalización, tal y como esta se entiende usualmente en la literatura sobre pensamiento algebraico. Sin embargo, el estudio previo desarrollado planteó interrogantes sobre la naturaleza de estas habilidades. En primer lugar, surge su posible dependencia de la relación funcional involucrada en el patrón: hay indicios de que la introducción de patrones no lineales cuadráticos potencia la generalización recursiva, pero quedan dudas si esto ocurre en patrones como los exponenciales, que aparecen en la formación de ingenieros. Además, la estrategia de éxito mayoritario encontrada en Trigueros y Montejo-Gámez (2025) está relacionada con ideas trabajadas en el curso, por lo que se plantea qué ocurre en situaciones donde estas no conducen al éxito en la identificación del patrón. En segundo lugar, se intuye la relevancia de la representación en la que se presenta el patrón, ya que los patrones pictóricos pueden inducir ciertas formas de conteo que restrinjan la capacidad de generalización a expresar, restricción que no se da para las sucesiones numéricas. Finalmente, debe destacarse que la escritura de *RR* de patrones no lineales puede no ser única. Por ejemplo, se comentó previamente que la relación de recurrencia *a(n)=a(n-1)+5n+1* permite definir la sucesión *1, 7, 18, 34, 55, 81….* Sin embargo, una experiencia previa de trabajo con patrones mostró a estudiantado que buscaron relaciones entre 1 y 7 con el 18, que luego se pudo extender al 7 y 18 con el 34, y así sucesivamente, lo que llevó a la relación de recurrencia *a(n)=2a(n-1)-a(n-2)+5,* encontrando así una relación distinta pero válida para la misma sucesión. En este contexto, es de interés ver qué relaciones de recurrencia pueden surgir para un patrón, y de qué depende la elección de uno u otro.

Pregunta de investigación

Los antecedentes descritos previamente conducen a plantear la siguiente pregunta de investigación: *¿Qué tipo de estrategias y relaciones de recurrencia utilizan los estudiantes de segundo año de ingeniería para generalizar un patrón exponencial escrito como sucesión numérica, y cuál es la conexión entre estrategias y relaciones de recurrencia?*

METODOLOGÍA

El presente estudio es parte de una investigación más amplia orientada a conocer y potenciar el aprendizaje de la recursividad del estudiantado de segundo año del grado en Ingeniería en Sistemas de la Universidad Nacional de Costa Rica, a partir del trabajo con patrones y sucesiones numéricas, entre otros. En este caso concreto, se llevó a cabo un análisis exploratorio y descriptivo a partir de datos cualitativos para responder a la pregunta de investigación planteada.

Participantes e instrumento de recogida de datos

Participaron un total de 50 estudiantes matriculados en los dos grupos del curso "Estructuras Discretas para Informática" durante el primer ciclo del año 2025. El curso contiene un tema centrado en la recursividad, que este estudiantado había cursado de forma previa a la investigación y que incluye la identificación de patrones usando diferentes representaciones que incluyen la notación de suma/serie, la fórmula explícita y las relaciones de recurrencia. Concretamente, cuando se realizó la recogida de datos se habían abordado estrategias específicas de cambio entre representaciones, como analizar diferencias o productos entre términos, así como técnicas matemáticas para encontrar la fórmula explícita de la sucesión a partir de diferentes tipos de relaciones de recurrencia (Vilchez, 2015).

Tarea. Considere la sucesión a(n) = {2, 2, 6, 10, 22, 42, 86}. A partir de ella, determine el enésimo término

El instrumento diseñado para la investigación de partida contenía 6 tareas sobre patrones: tres de ellos basados en una representación pictórica, dos basados en una situación contextualizada y una última basada en una sucesión numérica, que es la que se analiza en este estudio. Esta tarea fue seleccionada por las siguientes razones: (i) la sucesión propuesta representa un patrón exponencial escrito como secuencia numérica, de acuerdo a la pregunta de investigación. (ii) La escritura directa de su fórmula explícita (sin pasar por la relación de recurrencia) resulta complejo, ya que esta corresponde a: $a(n) = (4/3)\ 2^n + (2/3)\ (-1)^n$, con $n = 0, 1, 2, \ldots$ (iii) La técnica para obtener esta fórmula a partir de la relación de recurrencia se había trabajado previamente durante el curso, por lo que la expectativa inicial fue que el estudiantado abordara el patrón desde la relación de recurrencia indicada, en lugar de buscar directamente la relación explícita. Concretamente, la sucesión se puede obtener de forma recursiva a partir de la relación $a(n) = a(n-1) + 2(n-2)$ si $n>1$, $a(0)=a(1)=2$, sin embargo, esa relación no es única pues también se admite $a(n) = 2^n - a(n-1)$ para $n>1$. Esto ilustra que (iv) la sucesión numérica propuesta se puede generalizar utilizando *RR* diversas.

Recogida y análisis de datos

Los participantes del estudio resolvieron la tarea integrada en el instrumento de seis tareas comentadas previamente, para lo que dispusieron de 2 horas. El estudiantado abordó las tareas de manera individual, en una sesión dirigida por un investigador, que era profesor de uno de los grupos, y el profesor del segundo grupo como observadores no participantes. El resultado de la sesión dio lugar a 50 producciones escritas con las resoluciones de la tarea desarrolladas por los estudiantes.

Para analizar cada una de las producciones recogidas, se identificaron en primer lugar las producciones de carácter recursivo. Estas fueron aquellas que apoyaron sus cálculos o expresiones para el término general de la sucesión usando los términos anteriores al buscado. El análisis de estas producciones fue desarrollado por uno de los investigadores y contrastado por el segundo de ellos, en torno a dos criterios. (a) Existencia (o no) de justificación que sustentara la relación ofrecida, y (b) relación numérica entre términos sobre la que se apoya la justificación dada (suma o diferencia entre términos). De esta manera, la clasificación de las producciones usando estos criterios dio lugar a tres categorías emergentes, que fueron denominadas *estrategias*, ya que recogen las tres formas en las que los participantes abordaron la tarea: *Fórmula Conjeturada*, *Análisis de Diferencias y Suma de Términos,* cuyas definiciones se describen en la sección de resultados. A continuación, se identificaron los tipos de *RR* especificadas en las producciones: *Lineal homogénea de orden 2*, *Lineal no homogénea de orden 1, Lineal no homogénea de orden 2, y Otras* y se elaboró una tabla de doble entrada (Tabla 1 debajo) para visualizar la incidencia de las relaciones de recurrencia utilizadas en cada categoría de estrategias, lo que permitió discutir la conexión entre estrategias y relaciones de recurrencia. En esa tabla se registraron el número de producciones que identificaron correctamente el patrón, con la intención de visualizar el éxito de cada tipo de estrategia y relación encontradas.

RESULTADOS

Entre las 50 producciones recogidas se contabilizaron 8 que no dieron respuesta, o esta no era identificable, una producción que muestra un intento por responder usando directamente una fórmula explícita, y 41 producciones que abordaron la tarea bajo una lógica recursiva. Los resultados del análisis de estrategias y relaciones de recurrencia que se realizó con estas se muestran en la Tabla 1.

Tabla 1

Recuento de estrategias y relaciones de recurrencia identificadas entre las producciones que utilizaron estrategias recursivas. Entre paréntesis se contabilizan las que identificaron correctamente el patrón

Relación de recurrencia Estrategia	**LHO2**	**LNO1**	**LNO2**	**Otras**	**NE**	**Total**
Fórmula Conjeturada (FC)	14 *(14)*	7 *(7)*	1 *(1)*	1	1	24 *(22)*
Análisis de Diferencias (AD)	1 *(1)*	-	-	3	4	8 *(1)*
FC y AD	2 *(2)*	5 *(3)*	1	-	-	8 *(5)*
Suma de Términos	-	-	-	-	1	1
Total	17 *(17)*	12 *(10)*	2 *(1)*	4	6	41 *(28)*

Nota: *LHO2 = Lineal homogénea de orden 2, LNO1 = Lineal no homogénea de Orden 1, LNO2 = Lineal no homogénea de orden 2, NE= No escribe relación de recurrencia*

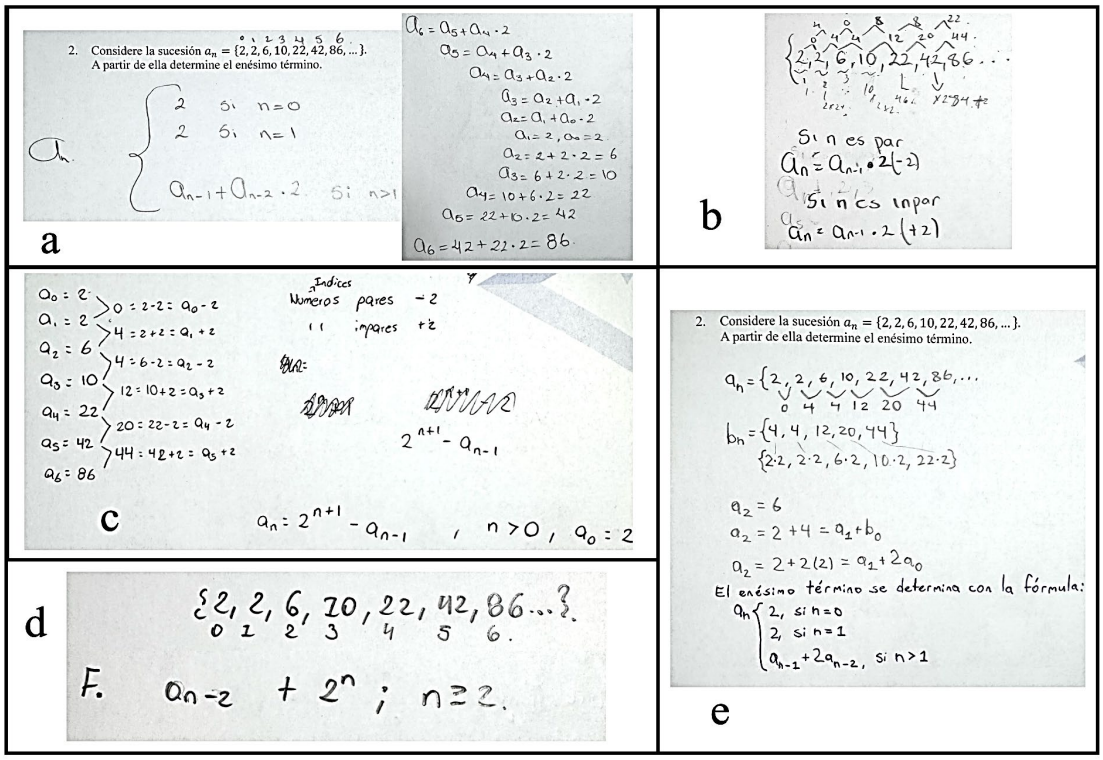
Respecto a las estrategias empleadas para identificar el patrón, se encontró que la categoría *FC* fue la más exitosa, ya que apareció como estrategia exclusiva en un total de 24 ocasiones y en 22 de ellas permitió identificar una relación de recurrencia correcta. Esta categoría incluye aquellas producciones que obtuvieron una fórmula recursiva sin justificación, desde la observación directa de la sucesión numérica: en algunas ocasiones se aporta evidencia de comprobación *a posteriori* de la conjetura encontrada (p. e., Figura 1a) y en otras no (Figura 1d). A continuación, se observó que la categoría *AD* emergió como estrategia exclusiva en un total de 8 ocasiones, pero solo en una de ellas condujo a una relación de recurrencia correcta. Esta categoría recoge producciones que obtuvieron de manera sistemática las diferencias entre términos consecutivos de la sucesión numérica, entre las diferencias de esas diferencias, o bien entre dos términos de forma alternada, por ejemplo *a(5)* con *a(3)*, *a(6)* con *a(4)*, etc. Se encontraron además 8 casos que combinaron estos dos tipos de estrategias dentro de la misma producción (Figuras 1b y 1e), y 5 de ellos con éxito en la identificación del patrón. En estos casos, el análisis de las diferencias no guardó relación con la *RR* formulada. La última estrategia observada, de carácter anecdótico, fue *Suma de Términos*, que apareció solo en una ocasión (sin éxito), y consistió en sumar todos los términos anteriores a *a(n)* para relacionarla con este término.

Con respecto a las *RR* obtenidas y su conexión con las estrategias, el tipo de relación que se presentó con mayor frecuencia (17 veces) fue la *LHO2* (Figura 1a y 1e), que surgió principalmente en estrategias de *FC*. Además, todas las producciones que usaron este tipo de relación fueron exitosas para identificar el patrón. El segundo tipo de relación utilizada (12 veces) fue *la LNO1*, que surgió en 7 ocasiones de la conjeturación directa (Figura 1d), dando siempre la *RR* exitosa, y en otras 5 en combinación con el *AD*, lo que originó 3 relaciones que describían correctamente el patrón. Atendiendo a los datos, se observó que la vía mayoritaria para obtener este tipo de relaciones fue la de descubrir que *a(n)* se obtiene a partir del doble de *a(n-1),* agregándole o restándole 2 (dependiendo si la posición a obtener era par o impar). En algunos casos se encontró que los estudiantes escribían ese comportamiento como $2(-1)^n$, y otros lo indicaban de forma textual (Figura 1b). Dentro de la categoría de relaciones no homogéneas de orden 1 también se observó una producción que identificó, tras el análisis de las diferencias, el término *a(n)* de la sucesión partiendo de una potencia de 2 a la que restó el término *a(n-1),* véase la Figura 1c. Un tercer tipo de relación encontrada, más minoritaria, fueron las *LNO2*, que se encontró en dos producciones. Una de ellas tomaba también como base una potencia de 2, y le sumaba el término *a(n-2)* (Figura 1d). En la segunda ocasión, la respuesta sumaba

dos términos anteriores más la posición. Finalmente, se recogieron en la categoría *Otras*, algunas relaciones de orden 3 y otras donde se multiplicaban términos anteriores, aunque ninguna identificó el patrón correctamente.

Figura 1

Ejemplos de estrategias y relaciones de recurrencia recogidas en el estudio



INTERPRETACIÓN Y DISCUSIÓN

Los resultados muestran la prevalencia de aproximaciones recursivas frente a las que buscaron encontrar la forma explícita del término general de la sucesión. Los datos de la Tabla 1, además, reflejan un grupo de estudiantes razonablemente numeroso que visualizaron alguna relación de recurrencia correcta para el patrón propuesto sin necesidad de justificación, lo que apoya la hipótesis de que la identificación de relaciones entre términos de una sucesión numérica estimula capacidades de generalización. Esto contrasta en apariencia con resultados como los de Pinto y Cañadas (2021) o Sterner (2024), que interpretaron la identificación de estas relaciones como descriptores de bajos niveles de generalización. No obstante, la hipótesis de que la relación funcional subyacente al patrón es relevante para activar estas habilidades cobra fuerza a partir de los datos recogidos. En efecto, de forma coherente a lo obtenido en Trigueros y Montejo-Gámez (2025) para un patrón cuadrático, el presente estudio ofrece indicios de que un patrón exponencial también estimula capacidades de generalización para expresar relaciones entre términos en lugar de la fórmula explícita de un patrón, ya que esta es compleja, pero hay *RR* asociadas a la sucesión y accesibles al estudiantado.

La Tabla 1 también muestra un grupo importante de participantes (8 AD + 8 FC y AD) que recurrieron al análisis sistemático de las diferencias trabajadas en el curso. Si bien es cierto que muchos de ellos no tuvieron éxito, situación que se esperaba para el patrón propuesto dadas sus características, se han registrado casos que supieron aprovechar el contenido escolar para identificar al patrón. En este sentido, se ha observado con sorpresa la aparición de relaciones no homogéneas de orden 1 (Figura 1b y 1e) e incluso 2 (Figura 1d), que incluyen el uso de potencias de dos (quizá porque los casos base originales son iguales a 2), y que también reflejan la aparición de habilidades de generalización.

En cuanto al uso de *RR* y su distribución en función de las estrategias utilizadas, es destacable que se han encontrado dos tipos de *RR* exitosas y con frecuencia importante dentro de este estudio. De forma coherente a lo señalado, el estudiantado que proporcionó la fórmula de manera directa obtuvo con mayor frecuencia la relación lineal homogénea de orden 2, pero en 8 casos también obtuvo relaciones no homogéneas. Por su parte, hubo menos producciones que se apoyaron en el *AD* frente al estudio previo (Trigueros y Montejo-Gámez, 2025), y estas identificaron mayormente relaciones de orden 1, posiblemente debido a las características de esta estrategia, que pone el foco en las relaciones entre términos estrictamente consecutivos, que en este caso requería identificar una potencia de 2. Este resultado ilustra el potencial de la tarea para originar riqueza de relaciones de recurrencia a pesar de que el patrón admite una única forma explícita. Aunque la acción de los dos grupos de estudiantes mencionados (los *intuitivos,* que conjeturaron, y los *sistemáticos* que analizaron diferencias) puede ser una razón que explique esta variabilidad, es posible que el uso de la representación de sucesión numérica para presentar el patrón (frente a la pictórica) haya sido un factor también relevante.

CONCLUSIONES

El presente estudio da cuenta de las estrategias y relaciones de recurrencia que usa el estudiantado de ingeniería de sistemas para analizar un patrón exponencial presentado a través de una sucesión numérica. Se ha observado que la formulación de relaciones de recurrencia puede estimular capacidades de generalización útiles en la formación de ingenieros por su conexión con la recursividad y su potencial para generar escrituras algebraicas diversas de un mismo patrón. Esta es la mayor contribución del trabajo, ya que el grueso de la literatura sobre patrones se centra en otros niveles educativos y asocia la generalización a la representación de su (única) fórmula explícita.

En respuesta a la pregunta de investigación, se han encontrado una mayoría de estudiantes que conjeturaban de forma directa relaciones lineales homogéneas de orden 2. Además, aquellos participantes en el estudio que llevaron a cabo también el *AD* ofrecieron mayor incidencia de relaciones no homogéneas de orden 1. Estos hallazgos indican que la presentación de patrones no lineales por medio de sucesiones numéricas genera variedad de relaciones para el mismo patrón, y trabaja un tipo particular de generalización que admite varias escrituras algebraicas, lo que presenta una riqueza que se debe seguir explorando. Estas apreciaciones son consistentes con las de Sandefur y Manaster (2022), que subrayaron la conexión entre el pensamiento recursivo y el algebraico.

En cuanto a las limitaciones del estudio, deben señalarse las siguientes. En relación con el enunciado de la tarea, se considera que los resultados habrían sido más ricos si se hubiera solicitado justificación, o la especificación de términos cercanos, como es usual en la literatura. Por otra parte, es posible que ubicar la tarea analizada en un instrumento más amplio pueda haber conducido a respuestas de menor calidad que hacerlo de forma aislada, debido al eventual cansancio de los estudiantes, o que los participantes pudieran abordar esta tarea condicionados por tareas anteriores en el instrumento. También es necesario mencionar el sesgo de los resultados obtenidos que se deriva de haber efectuado la recogida de datos tras el curso. En efecto, se ha encontrado una frecuencia alta de estrategias de análisis de diferencias, que probablemente sería más baja si la recogida de datos se hubiera hecho previa al curso. Este factor será tenido en cuenta en próximas investigaciones que incluirán recogidas de datos previas y posteriores a la celebración del mismo. Otra línea de trabajo futura es determinar qué tipo de tareas son más útiles para estimular las habilidades de generalización recursiva que, en particular, incluye contrastar si el uso de secuencias numéricas genera mayor riqueza de *RR*. Finalmente, es de interés identificar las habilidades de generalización asociadas a la formulación de relaciones de recurrencia generales. Esto permitiría valorar el interés de la generalización recursiva en contextos educativos más amplios al analizado, y se deja para futuras investigaciones.

Referencias

Bianco, G., Donatiello, A. y Nicchiotti, B. (2024). Fibonacci numbers between history, semiotics, and storytelling: The birth of recursive thinking. *Education Sciences, 14*(4), 394. https://doi.org/10.3390/educsci14040394

Burgos, M., Tizón-Escamilla, N. y Godino, J. D. (2024). Expanded model for elementary algebraic reasoning levels. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 20*(7), em2475. https://doi.org/10.29333/ejmste/14753

Hamouda, S., Edwards, S. H., Elmongui, H. G., Ernst, J. V. y Shaffer, C. A. (2017). A basic recursion concept inventory. *Computer Science Education, 27*(2), 121–148. https://doi.org/10.1080/08993408.2017.1414728

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? En J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5–17). Taylor & Francis.

Kieran, C. (2022). The multi-dimensionality of early algebraic thinking: background, overarching dimensions, and new directions. *ZDM Mathematics Education, 54*, 1131–1150. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01435-6

Murillo-Tsijli, M. (2018). *Introducción a la matemática discreta* (5 ed.). Editorial Tecnológica de Costa Rica.

Narváez, R., Adamuz-Povedano, N. y Cañadas, M. C. (2025). Análisis bibliométrico sobre pensamiento algebraico en educación infantil y primaria en Scopus. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 27*, 43-65. https://doi.org/10.35763/aiem27.5825

Pérez, O., De Gamboa, G. y Badillo, E. (2025). Análisis de las estrategias de generalización utilizadas por el alumnado de secundaria en la resolución de tres versiones de una secuencia de tareas de generalización de patrones lineales. En M.Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. 349–356). SEIEM.

Pinto, E. y Cañadas, M. C. (2021). Generalizations of third and fifth graders within a functional approach to early algebra. *Mathematical Education Research Journal, 33*, 113–134. https://doi.org/10.1007/s13394-019-00300-2

Radford, L. (2013). En torno a tres problemas de la generalización. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina y I. Segovia (Eds.), *Investigación en didáctica de la matemática: Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 3–12). Editorial Comares.

Rosen, K. H. (2019). *Discrete mathematics and its applications* (8th ed.). McGraw-Hill Education.

Sandefur, J. y Manaster, A. B. (2022). Encouraging research on recursive thinking through the lens of a model of the spread of contagious diseases. *ZDM Mathematics Education, 54*, 895–907. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01354-6

Stephens, A. C., Fonger, N., Strachota, S., Isler, I., Blanton, M., Knuth, E. y Murphy Gardiner, A. (2017). A Learning Progression for Elementary Students' Functional Thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, *19*(3), 143–166, https://doi.org/10.1080/10986065.2017.1328636

Sterner, H. (2024). Using graphical representations to develop students' correspondence relationships and covariational thinking in pattern generalizations in primary school. *International Journal of Science and Mathematics Education, 23,* 1573–1597. https://doi.org/10.1007/s10763-024-10520-z

Torres, M. D., Moreno, A., Vergel, R. y Cañadas, M. C. (2023). The evolution from "I think it plus three" towards "I think it is always plus three." Transition from arithmetic generalization to algebraic generalization. *International Journal of Science and Mathematics Education. Advance online publication, 22*, 971–991. https://doi.org/10.1007/s10763-023-10414-6

Trigueros-Rodríguez, E. y Montejo-Gámez, J. (2025). Formulación de relaciones de recurrencia utilizadas por estudiantes de ingeniería para la identificación de patrones. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. 445–452). SEIEM.

Vargas, M. F. (2025). Conocimiento algebraico de futuros docentes de primaria: el caso de los patrones y sucesiones. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. 461–468). SEIEM.

Vílchez Quesada, E. (2015). *Estructuras discretas con Mathematica*. Alphaomega.

DISEÑO INCLUSIVO DE UN REI EN INFERENCIA ESTADÍSTICA EN SECUNDARIA: ADAPTACIONES DESDE EL DUA

Inclusive design of an SRP in statistical inference in secondary education: adaptations from UDL

Vásquez, S.[a], Moreno, O.[b], López-Serentill, P.[a] y Barquero, B.[b]

[a]Universitat de Girona, [b]Universitat de Barcelona

Resumen

Este trabajo aborda la atención a la diversidad en secundaria mediante el diseño de un Recorrido de Estudio e Investigación (REI) para la enseñanza de la inferencia estadística informal. Situada en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) y enmarcada en una ingeniería didáctica cíclica, la investigación presenta el diseño a priori de un nuevo ciclo que, en continuidad con el ciclo previo, propone graduar una misma actividad mediante la modificación de variables didácticas para atender a la diversidad. Analizamos la evolución prevista del proceso de estudio a través de la mesogénesis, la topogénesis y la cronogénesis, en relación con los principios del Diseño Universal para el Aprendizaje (DUA). Se espera que esta articulación TAD-DUA ofrezca al profesorado un marco para planificar adaptaciones sin alterar el objeto matemático en estudio, en contextos heterogéneos.

Palabras clave: *diseño universal para el aprendizaje, recorrido de estudio e investigación, inferencia estadística informal.*

Abstract

This work addresses the issue of diversity in secondary education by designing a Study and Research Path (SRP) for teaching informal statistical inference. Grounded in the Anthropological Theory of Didactics (ATD) and framed within a cyclical didactic approach, the research presents the a priori design of a new cycle that, in continuity with the previous cycle, proposes to adapt the same activity by modifying didactic variables. We analyse the expected evolution of the study process through mesogenesis, topogenesis, and chronogenesis, in relation to the principles of Universal Design for Learning (UDL). It is hoped that this ATD-UDL articulation will offer teachers a framework for planning adaptations without altering the mathematical object of study, in heterogeneous contexts.

Keywords: *universal design for learning, study and research path, informal statistical inference*

INTRODUCCIÓN

La atención a la diversidad constituye uno de los principios fundamentales de los sistemas educativos actuales, orientado a garantizar que todos los estudiantes tengan acceso a una educación de calidad. En educación matemática, este principio adquiere especial relevancia debido a la tradicional percepción de la matemática como una disciplina selectiva y generadora de desigualdades educativas (Boaler, 2015). Desde enfoques inclusivos, la diversidad se entiende como un rasgo inherente a las aulas que requiere diseñar propuestas que anticipen la diversidad del alumnado y favorezcan la participación y el aprendizaje de todos (Ainscow et al., 2006; Comité Español de Matemáticas, 2021; National Council of Teachers of Mathematics, 2014). En el sistema educativo español, la LOMLOE (Jefatura del Estado, 2020) organiza la respuesta educativa a la diversidad en tres niveles: medidas universales, adicionales e intensivas. El presente trabajo se sitúa en el nivel universal, orientado a atender los diferentes ritmos de aprendizaje del alumnado, complementario y no sustituto de las

Vásquez, S., Moreno, O., López-Serentill, P. y Barquero, B. (2026). Diseño inclusivo de un REI en inferencia estadística en secundaria: adaptaciones desde el DUA. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (pp. 593-600). SEIEM.

medidas adicionales o intensivas que algunas necesidades específicas requieren. En este marco, el Diseño Universal para el Aprendizaje (DUA) se ha consolidado como un referente pedagógico para diseñar entornos de aprendizaje flexibles, basados en múltiples formas de representación, acción y expresión, e implicación (CAST, 2024; Meyer et al., 2014).

Sin embargo, en investigación en educación matemática esta problemática aparece todavía de forma limitada. Los últimos cinco años de simposios de la SEIEM reflejan esta cuestión solo de manera incipiente, abordando principalmente necesidades educativas especiales muy concretas, como propuestas para alumnado con discapacidad intelectual (Hidalgo-Herrero et al., 2025) o discapacidad visual (Lois-Prados et al., 2025), mientras que son menos frecuentes los trabajos que abordan la inclusión como problema docente en el aula ordinaria (Esteve et al., 2021).

Este trabajo se sitúa en continuidad con un estudio previo sobre un Recorrido de Estudio e Investigación (REI) para la enseñanza de la inferencia estadística informal en secundaria, presentado en el último simposio de la SEIEM (Vásquez et al., 2025). El análisis de aquella primera experimentación puso de manifiesto la invisibilidad del tratamiento de datos en la cultura escolar, observable en la escasa espontaneidad del alumnado para registrar observaciones y en la ausencia de un vocabulario compartido para describir técnicas de recogida y organización de datos. A partir de estos resultados, presentamos el diseño a priori de un nuevo ciclo de experimentación del REI que incorpora adaptaciones orientadas a la atención a la diversidad. En particular, la pregunta de investigación que abordamos es: ¿Cómo puede el diseño de un REI de inferencia estadística incorporar adaptaciones para atender la diversidad del aula ordinaria sin modificar el objeto matemático en estudio? Este artículo aborda la pregunta desde la fase de análisis preliminar y diseño a priori del nuevo ciclo: identificamos qué decisiones de diseño permiten incorporar adaptaciones a la diversidad y qué razones teóricas las sostienen. La validación empírica corresponde a fases posteriores del ciclo y será objeto de un trabajo futuro.

MARCO TEÓRICO Y METODOLÓGICO

En el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), la cuestión de la inclusión se ha abordado desplazando el foco desde los déficits cognitivos o individuales hacia el análisis de las condiciones y dificultades o restricciones institucionales en las que se organiza el estudio matemático (Ladage et al., 2024; Maksym'yak y Ruiz-Munzón, 2026). En este marco, los REI (Bosch, 2019) se conciben como dispositivos didácticos organizados a partir de una cuestión generatriz, cuyo estudio no admite respuesta inmediata y abre un campo de subpreguntas y respuestas provisionales que orienta la producción y la institucionalización progresiva de saberes, es decir, su reconocimiento como saber oficial compartido por el grupo. El REI ofrece así un marco para pensar propuestas inclusivas: al sostener la indagación mediante apoyos y técnicas que se construyen en la propia actividad, posibilita diferentes formas de participación y de acceso al problema sin renunciar al sentido matemático del estudio.

En un REI, la evolución de este proceso de estudio se puede describir a través de tres dimensiones genéticas: la cronogénesis, que se refiere a la gestión del tiempo didáctico y el avance de los saberes impulsado por la dialéctica entre nuevas preguntas y sus respuestas; la mesogénesis, que describe la evolución y el enriquecimiento del medio de estudio, es decir, el sistema de objetos, materiales y fuentes de información (media), con los que se elabora y valida la respuesta, a medida que se incorporan nuevos recursos para validar las respuestas provisionales; y la topogénesis, que analiza el reparto de roles y responsabilidades, favoreciendo que los estudiantes asuman progresivamente un papel más activo en la toma de decisiones durante la investigación (Bosch, 2019).

En el marco de la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) (Brousseau, 1983), las variables didácticas se entienden como elementos constitutivos de una situación matemática que pueden tomar distintos valores y cuya modificación provoca cambios en las estrategias necesarias para resolverla. Una variable es propiamente didáctica en la medida en que sus valores pueden fijarse o modificarse

con intención didáctica, generando a partir de una misma situación fundamental un campo de problemas con costes, niveles de validez y grados de complejidad diferentes. La TAD integra esta noción en el marco del estudio colectivo (Chevallard et al., 1997): en un REI, la modulación de variables no es solo responsabilidad del docente sino también objeto de la comunidad de estudio, que progresivamente identifica qué condiciones del problema sostienen la indagación.

Este trabajo se inscribe metodológicamente en un estudio de diseño en el marco de la ingeniería didáctica, concebida como un proceso cíclico de cuatro fases (análisis preliminar, diseño a priori, análisis in vivo y a posteriori) (Artigue, 2014). El presente artículo abre un nuevo ciclo que da continuidad a la investigación presentada en (Vásquez et al., 2025) y analizada en Vásquez et al. (2026), situándose ahora en el análisis preliminar y diseño a priori del dispositivo revisado. El análisis preliminar recoge tres elementos: el análisis del ciclo anterior; la revisión de la literatura sobre inclusión en educación matemática y, específicamente, sobre el tratamiento de la diversidad desde la TAD (Ladage et al., 2024; Maksym'yak y Ruiz-Munzón, 2026); y la consideración del DUA como referente pedagógico complementario. El diseño a priori constituye el objeto principal de este artículo: comprende el rediseño del REI mediante la identificación y modulación de variables didácticas, elaborado de forma conjunta con los profesores que lo implementarán, y el análisis reflexivo de las decisiones de diseño en términos de las dimensiones genéticas del proceso de estudio en relación con los principios del DUA.

RESULTADOS

Diseño del REI para el nuevo ciclo de experimentaciones

En coherencia con el posicionamiento adoptado en la introducción, el diseño se organiza como una respuesta de carácter universal: la atención a la diversidad se concreta en la modulación intencional de las condiciones de la actividad de estudio para anticipar diferentes ritmos de aprendizaje, conocimientos previos y formas de participación. Las variables didácticas constituyen el principal recurso para esta modulación: su elección regula el espacio de hipótesis, las técnicas movilizadas, el ritmo de avance del estudio y las formas de participación posibles. Esta perspectiva universal no excluye atender situaciones específicas que afectan al funcionamiento del dispositivo (como el daltonismo o el alumnado con altas capacidades, contemplados en la Tabla 1), ni la coexistencia con medidas adicionales o intensivas que determinadas necesidades puedan requerir y que quedan fuera del alcance del presente trabajo.

El ciclo previo del REI se organizaba en torno a la cuestión generatriz Q_0: *¿Cuántas bolas de cada color hay en la botella?* que solicitaba inferir la composición interna de una botella opaca que contenía 25 bolas de cuatro colores, organizadas en dos tipos (A/B) a partir de muestras parciales. El análisis a posteriori de la implementación puso de manifiesto que la complejidad inicial dejaba en segundo plano el trabajo sobre registro de datos y dificultaba la emergencia de un vocabulario compartido para describir muestras, frecuencias y variabilidad. El nuevo ciclo conserva Q_0 y la estructura general, pero reorganiza la progresión introduciendo una botella inicial de baja complejidad (5 bolas y 2 colores) durante las dos primeras sesiones, antes de transferir el trabajo a una botella más compleja (15 o 25 bolas y cuatro colores). Esta decisión permite dedicar tiempo explícito a estabilizar las técnicas de registro y el vocabulario, conservando el problema inferencial.

La sesión 1 tiene como objetivo abrir el problema inferencial y hacer emerger formas espontáneas de observación y registro. Se entrega a cada grupo una botella opaca con la consigna de inferir su composición observando la bola que queda expuesta en el orificio. Cada grupo formula una primera hipótesis y un primer juicio de seguridad, y la puesta en común permite acordar un vocabulario mínimo (observación, muestra, hipótesis, composición) y abrir la cuestión de la variabilidad. La adaptación respecto del ciclo previo consiste en sustituir la entrada directa al sistema A/B por una situación más sencilla, que estabiliza el registro antes de afrontar la complejidad de varias poblaciones. La sesión 2 tiene como objetivo introducir el tamaño muestral y su relación con la

confianza. Con la misma botella, la consigna pide recoger datos de forma sistemática (N=50 o N=100), construir una tabla de frecuencias y discutir qué cambia al aumentar N. No se espera aún formalización proporcional, sino criterios comparativos que anticipen la necesidad de razonar en frecuencias relativas. La adaptación consiste en dedicar una sesión completa a esta progresión cuantitativa antes de la inferencia proporcional, que en el diseño anterior aparecía sin esta preparación. La sesión 3 tiene como objetivo transitar de los recuentos a la inferencia proporcional. Se introduce la botella 2 (15 o 25 bolas, cuatro colores) con la consigna de estimar su composición a partir de frecuencias relativas, incluyendo la interpretación de decimales y el redondeo, con posibilidad de ampliar la muestra (N=150). La adaptación es que esta transición se apoya ahora en el vocabulario y los procedimientos estabilizados en las sesiones anteriores, mientras que en el diseño previo el alumnado debía construirlos en paralelo. La sesión 4 tiene como objetivo institucionalizar las técnicas de inferencia y los criterios de validación. Se dedica a la puesta en común y al trabajo con datos agregados: cuando hay A/B, los registros se separan por tipo antes de agregar, para discutir criterios de equivalencia y producir estimaciones más precisas. El cierre incluye una hipótesis final justificada, un grado de confianza y una síntesis sobre tamaño muestral, variabilidad y decisiones. La adaptación consiste en reservar un espacio explícito para la institucionalización, debilitada en el diseño anterior por restricciones de tiempo.

La gestión del estudio: modulación de variables didácticas

Tabla 1

Variables didácticas, valores y consecuencias

Variable	Decisiones	Consecuencias
Número de bolas de la botella (M)	Botella 1 ($M_1 = 5$) y botella 2 ($M_2 = 25$) Adaptaciones: $M_2 = 10$ o 15	M pequeño reduce el espacio de hipótesis (composiciones posibles) y permite inferencias más accesibles. M grande incrementa la necesidad de técnicas proporcionales y de ajustes (coherencia de que la suma final sea M), reforzando la institucionalización de reglas de inferencia.
Número de colores (C)	Botella 1 ($C_1 = 2$) y botella 2 ($C_2 = 4$). Adaptaciones: $C_2 = 3$	A mayor C, aumenta la necesidad de organización de datos (tablas de frecuencias), y se hace más visible el papel de las frecuencias relativas para comparar categorías. $C = 4$ favorece la emergencia de técnicas distribucionales (no solo "qué color sale más", sino cómo se reparte el total).
Variedad de botellas a estudiar	2 niveles de complejidad: botella 1 (simple), botella 2 (compleja) Adaptaciones: Empezar directamente con la botella compleja	Con fase simple se facilita que aparezcan y se estabilicen técnicas de registro (lista/tabla), primeras inferencias y vocabulario operativo antes de exigir proporcionalidad explícita. Sin fase simple, aumenta el riesgo de que la complejidad numérica capture la atención y debilite la discusión sobre variabilidad y confianza.
Número de poblaciones en juego	Botellas A/B (datos solo agregables por tipo). Adaptaciones: Misma composición (directamente agregables).	A/B fuerza técnicas de comparación y clasificación ("¿qué botellas son iguales?"), y exige criterios para validar antes de agregar. Una sola población permite centrar la discusión en variabilidad muestral sin la complicación adicional de mezclar poblaciones distintas.
Configuración de composición	Composiciones cercanas entre colores (extremos, p. ej., 2 de un color y 3 del otro) Adaptaciones: Composiciones extremas entre colores (p. ej., 1 de un color y 4 del otro).	Composiciones cercanas obligan a aumentar N total y sostener técnicas más finas (porcentajes, comparación relativa) para validar. Extremos facilitan la discriminación A/B con tamaños muestrales moderados.

Variación del tamaño muestral (N)	Inicialmente $N_1 = 50$ o 100 y luego aumentarlo (>150)	N controla la emergencia de la idea "más datos implica hipótesis más fiable" (ley de los grandes números) y permite institucionalizar la relación entre N y nivel de confianza. El escalado (50→100→150) hace visible la disminución de variabilidad y sostiene la validación de hipótesis.
Multiplicidad entre N y M	Inicialmente, elegir $N = 10M$ Luego aumentarlo a un no múltiplo de M. Adaptaciones: N múltiplo de M.	Si el valor de N es múltiplo del número de bolas, se simplifica la técnica de inferencia de las frecuencias esperadas, para compararlas con las totales.

La Tabla 1 sintetiza las principales variables didácticas y sus consecuencias didácticas. Su interés no reside en cada variable considerada aisladamente, sino en cómo su combinación permite modular la complejidad de una misma situación de estudio. Una decisión clave es la relación entre N y M: en las fases iniciales se priorizan valores de N múltiplos de M para facilitar inferencias por correspondencia; posteriormente valores no múltiplos fuerzan la formalización de criterios proporcionales. La presencia de una o varias poblaciones (botellas idénticas o A/B) modula la complejidad, exigiendo criterios de comparación y validación antes de agregar datos. La modulación de estas variables didácticas se concibe como una forma de atender la diversidad: en lugar de introducir tareas distintas para distintos niveles, el diseño ofrece distintas condiciones de acceso a una misma actividad.

Evolución del proceso de estudio y el DUA

Múltiples formas de representación: mesogénesis

Este principio se concreta en el REI en la evolución prevista del medio de estudio. En el marco de la TAD, el medio no se concibe solo como soporte material sino como sistema de objetos, materiales y representaciones con los que se elabora la respuesta; su enriquecimiento progresivo (mesogénesis) es lo que sostiene la diversificación de formas en que el alumnado puede acceder al fenómeno matemático. Una dimensión de esta diversificación es la progresión deliberada de complejidad del sistema experimental, que transforma el medio sin modificar Q_0 y permite que nociones como frecuencia, variabilidad o confianza entren gradualmente como objetos de referencia compartidos.

Figura 1

Uso de material manipulativo para inferir la composición de la botella a partir de los datos recogidos



Una segunda dimensión es el repertorio de representaciones complementarias del mismo fenómeno que el medio pone a disposición a lo largo de las cuatro sesiones: el material concreto (las botellas y las bolas, presentes desde la sesión 1); la guionización del material mediante el registro secuencial de observaciones, propio de la fase exploratoria (sesión 1); la tabla de frecuencias absolutas como herramienta de organización sistemática (sesión 2); las frecuencias relativas y la representación proporcional (sesión 3); las representaciones manipulativas para inferir composiciones a partir de los datos recogidos (Figura 1, sesiones 3 y 4); y los registros colectivos que permiten contrastar resultados entre grupos y entre tipos de botella en la puesta en común (sesión 4). Cada representación habilita

operaciones distintas: recuento, organización, comparación, agregación, estabilización; y, por tanto, sostiene la emergencia de procedimientos de inferencia y de validación accesibles desde puntos de partida diferentes. Esta diversificación es lo que articula la mesogénesis con el principio DUA de múltiples formas de representación: al disponer simultáneamente de varias representaciones del fenómeno, el alumnado puede acceder al problema y elaborar respuestas desde aquellas en las que se siente más competente: el manipulativo y gráfico (perceptivo), el numérico, el tabular (simbólico) o el comparativo entre grupos (conceptual), sin que ninguna sea condición previa para participar.

Múltiples formas de acción y expresión: topogénesis y mesogénesis

El principio de múltiples formas de acción y expresión se articula en el REI como una combinación entre mesogénesis (el medio pone a disposición un repertorio de acciones) y topogénesis (el alumnado decide cuáles ejecutar y cómo comunicar resultados). El repertorio de acciones que el dispositivo legitima a lo largo de las cuatro sesiones es deliberadamente amplio: extracción y registro de muestras, recuento manual y transformación en frecuencias relativas, organización tabular, comparación visual de distribuciones entre grupos, agregación de datos según A/B, y manipulación de material para inferir composiciones a partir de los datos recogidos (Figura 1). Estas acciones no son excluyentes: cada grupo decide en qué orden las ejecuta, cuántas extracciones realiza antes de organizar los datos, qué tipo de tabla construye, cuándo recurre al material manipulativo y cuándo a la representación numérica. Esta gradiente de decisión es el núcleo del margen de elección que el dispositivo ofrece al alumnado.

El repertorio de modos de expresión es igualmente diverso. El alumnado puede comunicar sus respuestas mediante (1) expresión manipulativa, representando con algún material la composición inferida; (2) expresión gráfica y tabular, mediante tablas de frecuencias, registros secuenciales o esquemas comparativos; (3) expresión numérica, mediante recuentos, frecuencias relativas o proporciones; (4) expresión oral, en la puesta en común y en la defensa de hipótesis dentro del grupo; y (5) expresión escrita, en el registro de procedimientos y la justificación de decisiones. El dispositivo legitima estas expresiones dentro de un mismo marco de validación: un grupo puede sostener su hipótesis inicialmente mediante una composición manipulativa de bolas, otro mediante una tabla comparativa de frecuencias entre grupos, y otro mediante un razonamiento proporcional formalizado.

Dos decisiones de diseño refuerzan estos márgenes de elección. En primer lugar, la explicitación de roles estables (administrador, portavoz, secretario) vinculados a responsabilidades de organización, comunicación y de registro y redacción de justificaciones, amplía las formas legítimas de participación en el trabajo matemático. En segundo lugar, los criterios de formación de grupos se pueden ajustar según las características del grupo clase, configurando equipos heterogéneos o atendiendo a condiciones que afectan al funcionamiento de los roles (por ejemplo, el daltonismo), sin recurrir a categorizaciones basadas en niveles de rendimiento.

Múltiples formas de implicación: cronogénesis y topogénesis

Este principio se articula en el REI con la cronogénesis (avance del tiempo didáctico por la dialéctica cuestión-respuesta) y la topogénesis (redistribución de la responsabilidad sobre el estudio). La implicación se sostiene principalmente desde el sentido matemático del problema (Q0 como pregunta genuinamente investigable) más que desde una vinculación temática con intereses del alumnado. El propio dispositivo, sin embargo, genera un interés contextual genuino: la opacidad de la botella convierte cada sesión en una invitación abierta, y experimentaciones previas del REI han evidenciado de forma sostenida la curiosidad del alumnado por descubrir qué hay dentro. Esta curiosidad, lejos de ser anecdótica, funciona como motor de la actividad y conecta el estudio con una pregunta accesible para cualquier estudiante con independencia de su trayectoria escolar previa.

La cronogénesis se organiza con cierres provisionales y reaperturas sucesivas: se formulan hipótesis, se amplía el tamaño de la muestra, se confrontan resultados entre grupos, se agregan datos y se

reformulan hipótesis con un grado de confianza explícito. Este encadenamiento favorece la implicación porque el alumnado percibe que el avance no depende de "acertar" la composición, sino de mejorar las condiciones de validación: producir evidencia más robusta, comparar con criterios compartidos y decidir con argumentos. Un fenómeno particularmente fértil para la implicación, identificado en experimentaciones previas, es el momento en que el alumnado quiere "abrir la botella" para verificar directamente la hipótesis. El diseño no elude este momento, sino que lo incorpora explícitamente como ocasión didáctica: abre la discusión sobre qué situaciones de la vida real está modelizando este experimento (situaciones en las que no podemos acceder directamente al fenómeno y debemos inferir su composición a partir de muestras parciales) y sobre por qué la estadística desarrolla precisamente las técnicas de inferencia y validación con las que se está trabajando.

La autonomía del alumnado está distribuida a lo largo de las cuatro sesiones como una sucesión de márgenes de decisión. En la sesión 1, cada grupo decide cómo registrar sus observaciones, qué consideran muestra suficiente para la primera hipótesis y qué grado de seguridad le atribuyen. En la sesión 2, deciden cómo organizar los recuentos en una tabla, qué tamaño muestral añadir y qué criterio utilizar para comparar con la hipótesis previa. En la sesión 3, deciden cuándo y cómo transitar al razonamiento proporcional, qué hacer con los decimales y cómo comunicar una composición inferida. En la sesión 4, deciden qué datos agregar, qué criterios de equivalencia aplicar entre botellas y cómo justificar la hipótesis final. Estos márgenes están sostenidos por la cuestión generatriz y por los acuerdos progresivos en los que el grupo encuentra respuestas distintas y las argumenta. Por último, el diseño incorpora una evaluación formativa al final de cada sesión mediante cuestiones graduadas que habilitan trayectorias de respuesta con demandas distintas sin cambiar el objeto matemático, fijando hitos parciales de institucionalización (tales como muestra, variabilidad o confianza).

DISCUSIÓN

En este artículo hemos presentado el diseño a priori de un nuevo ciclo de experimentación de un REI sobre inferencia estadística informal, mostrando cómo la atención a la diversidad puede integrarse en el dispositivo sin modificar el objeto matemático en estudio. El análisis realizado, al articular TAD y DUA, permite identificar qué decisiones de diseño sostienen la evolución del proceso de estudio: (i) una progresión de complejidad y múltiples representaciones que enriquecen el medio (mesogénesis), (ii) distintos modos de acción y expresión que redistribuyen responsabilidades en la comunidad de estudio (topogénesis), y (iii) mecanismos de implicación e institucionalización progresiva de técnicas y criterios de validez a lo largo del tiempo (cronogénesis). Desde esta perspectiva, el trabajo muestra cómo la modulación de variables didácticas puede constituir un recurso para graduar una misma actividad de estudio y ofrecer distintas condiciones de acceso al problema sin fragmentar el contenido matemático ni introducir tareas paralelas para distintos niveles del alumnado.

De cara a las próximas implementaciones, esperamos observar que el trabajo con una botella inicial más sencilla (5 bolas, 2 colores) hará más visible la variabilidad, especialmente en muestras pequeñas, y contribuirá a mantener viva la cuestión central del recorrido antes de transferir el estudio a situaciones más complejas. Asimismo, anticipamos que las cuestiones derivadas como el registro de datos, la comparación entre muestras, la discusión del grado de confianza o la validación de hipótesis emergerán también en grupos con mayores dificultades.

Agradecimientos

Proyectos PID2021-126717NB-C31 (MCIU/AEI/FEDER, UE) y PDC2022-133812-C22.

Referencias

Ainscow, M., Booth, T. y Dyson, A. (2006). *Improving schools, developing inclusion*. Routledge. https://doi.org/10.4324/9780203967157

Artigue, M. (2014). Didactic engineering in mathematics education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 159-162). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_44

Boaler, J. (2015). *Mathematical mindsets: Unleashing students' potential through creative math, inspiring messages and innovative teaching*. Jossey-Bass.

Bosch, M. (2019). Study and research paths: A model for inquiry. En B. Sirakov, P. N. de Souza y M. Viana (Eds.), *Proceedings of the International Congress of Mathematicians 2018* (pp. 4001-4022). World Scientific. https://doi.org/10.1142/9789813272880_0210

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques, 4*(2), 165-198.

CAST (2024). *Universal Design for Learning guidelines version 3.0*. https://udlguidelines.cast.org

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas: El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. ICE UB y Editorial Horsori.

Comité Español de Matemáticas (2021). *Bases para la elaboración de un currículo de matemáticas en educación no universitaria*.

Esteve, S., Barquero, B. y Domingo-Peñafiel, L. (2021). Dificultades y problemas para la enseñanza de las matemáticas en la escuela multigrado: Un estudio exploratorio desde la visión de los maestros. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 253-260). SEIEM.

Hidalgo-Herrero, M., Lerma, A. M., García, F. J., Ortega, C. y Sierra, T. A. (2025). Análisis de técnicas empleadas por jóvenes con discapacidad intelectual para resolver problemas multiplicativos. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. 204-211). SEIEM.

Jefatura del Estado. (2020). Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. *Boletín Oficial del Estado, 340*, 122868-122953

Lois-Prados, C., Blanco, T. F., Fernández-López, A. y Gorgal-Romarís, A. (2025). Faceta cognitiva de futuros maestros a través del modelado de maquetas 3D inclusivas. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (p. 509). SEIEM.

Ladage, C., Dintrich, M., Paris, H. y Péninque, S. (2024). ATD and the study of didactic and pedagogical issues in the face of the social situations of transformation that are constantly working and renewing human societies. En I. Florensa, N. Ruiz-Munzón, K. Markulin, B. Barquero, M. Bosch y Y. Chevallard (Eds.), *Extended abstracts 2022: Proceedings of the 7th International Conference on the Anthropological Theory of the Didactic (CITAD7)* (Trends in Mathematics, Vol. 16, pp. 157-168). Birkhäuser. https://doi.org/10.1007/978-3-031-55939-6_11

Maksym'yak, N. y Ruiz-Munzón, N. (2026). Study and research path for students with cognitive disabilities: Uncovering assumed conditions and constraints. En *CITAD 8 pre-proceedings: Eighth International Conference on the Anthropological Theory of the Didactic* (pp. 662-674).

Meyer, A., Rose, D. H. y Gordon, D. (2014). *Universal Design for Learning: Theory and practice*. CAST Professional Publishing.

National Council of Teachers of Mathematics (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. NCTM.

Vásquez, S., Barquero, B. y Bosch, M. (2025). ¿Qué se esconde dentro de la botella? Una propuesta de recorrido de estudio e investigación para la educación secundaria. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán y I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. 469-476). SEIEM.

Vásquez, S., Moreno, O., Barquero, B. y Bosch, M. (2026). What is hidden inside the bottle? Praxeological analysis of a study and research path about statistical inference. En *CITAD 8 pre-proceedings: Eighth International Conference on the Anthropological Theory of the Didactic* (pp. 566-577).

NIVELES DE LECTURA DE GRÁFICOS QUE MOVILIZAN DOCENTES AL FORMULAR PREGUNTAS A PARTIR DE UNA ACTIVIDAD DE LIBRO DE TEXTO

Levels of graph reading mobilised by teachers when formulating questions from a textbook activity

Verón, M. A.[a], Cruz, M. F.[b], Nacimento, G. F.[a], Giacomone, B.[c] y Benitez, M. C.[d]

[a]Universidad de Barcelona, [b]Universidad de Córdoba, [c]Università della Repubblica di San Marino, [d]Universidad Nacional de Misiones.

Resumen

Este trabajo presenta un análisis del diseño e implementación de una propuesta de formación en la que 17 docentes en servicio modifican una actividad de interpretación de gráficos tomada de un libro de texto y elaboran nuevas preguntas. El objetivo es identificar y caracterizar los niveles de lectura de gráficos que movilizan dichas preguntas, sin conocer la clasificación de niveles, aunque orientados por consignas. Con un enfoque cualitativo descriptivo–interpretativo, se aplicó una matriz basada en Curcio (leer los datos; leer entre/dentro; leer más allá) y Gal (leer detrás). Los resultados muestran un predominio de lecturas literal y procedimental, presencia menor de inferencias/pronósticos y emergencia acotada de lectura crítica. Se concluye que estas instancias son pertinentes para diseñar preguntas que impulsen lecturas más profundas y críticas de los gráficos estadísticos.

Palabras clave: *lectura de gráficos, formulación de preguntas, formación docente continua.*

Abstract

This work presents an analysis of the design and implementation of a training proposal in which 17 in-service teachers modify a graph interpretation activity taken from a textbook and formulate new questions. The aim is to identify and characterize the levels of graph reading mobilised by these questions, without the teachers knowing the classification of levels, although guided by prompts. Using a descriptive–interpretive qualitative approach, a matrix based on Curcio (reading the data; reading between/within the data; reading beyond the data) and Gal (reading behind the data) was applied. The results show a predominance of literal and procedural readings, a lower presence of inferences/predictions, and a limited emergence of critical reading. It is concluded that these instances are relevant for designing questions that promote deeper and more critical readings of statistical graphs.

Keywords: *graph reading, question formulation, in-service teacher education.*

INTRODUCCIÓN

Los gráficos estadísticos constituyen una herramienta clave para la interpretación y comunicación de información en la sociedad actual (Gal, 2002). Sin embargo, investigaciones previas muestran limitaciones tanto en su comprensión como en las oportunidades de aprendizaje que se promueven en torno a ellos. Gea et al. (2017) evidencian que, incluso en futuros profesores, predominan interpretaciones centradas en niveles iniciales e intermedios de lectura gráfica, mientras que Arteaga et al. (2021) señalan que las tareas propuestas en libros de texto privilegian actividades de lectura entre los datos, con escasa presencia de lecturas críticas. En este contexto, las preguntas formuladas por el profesorado para promover niveles de lectura de gráficos constituyen un tema de interés actual.

Verón, M. A., Cruz, M. F., Nacimento, G. F., Giacomone, B. y Benitez, M. C. (2026). Niveles de lectura de gráficos que movilizan docentes al formular preguntas a partir de una actividad de libro de texto. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (pp. 601-608). SEIEM.

En la educación secundaria Argentina, la interpretación de información presentada en distintas representaciones ocupa un lugar central en los Núcleos de Aprendizaje Prioritarios (NAP, 2012) del Ciclo Básico. Estos documentos destacan la necesidad de que el alumnado organice datos, identifique variables, construya representaciones adecuadas, interprete medidas estadísticas y transite entre diferentes formas de representación. Así, trabajar la lectura de gráficos en el aula favorece procesos de comprensión, comparación, explicación y justificación a partir de datos. En este marco, cabe señalar, como plantea Tauber (2010), que "aunque los contenidos estocásticos están considerados en los Contenidos Básicos Comunes, una gran proporción de docentes no llega a desarrollarlos efectivamente en sus clases" (p. 55). La autora sostiene que esto puede deberse a la falta de tiempo, dado que estos contenidos suelen ubicarse al final del programa, o bien a la falta de conocimientos por parte del profesorado sobre estos temas y sobre modos de enseñarlos.

Los libros de texto continúan siendo un recurso curricular predominante en la enseñanza de la matemática, con una influencia ampliamente documentada en distintos niveles educativos (Cárcamo, 2012; Fan, 2013). La investigación internacional confirma esa influencia, pero advierte que su uso debe ser reflexivo y crítico, de modo que el profesorado interprete, adapte y amplíe las propuestas según el contexto y los propósitos de enseñanza (Gueudet y Trouche, 2009; Remillard, 2005). Por esto, consideramos relevante analizar cómo el profesorado, a través de preguntas propias, transforma una actividad de libro y genera diversas oportunidades de aprendizaje, en este caso orientadas a activar distintos niveles de lectura de gráficos.

Entre las decisiones docentes que pueden ampliar o limitar el potencial de una actividad, la formulación de preguntas ocupa un lugar central, ya que orienta qué y cómo se lee un gráfico y qué tipo de razonamiento estadístico se pone en juego. En este marco, el objetivo de este trabajo es identificar y caracterizar los niveles de lectura de gráficos que se movilizan en las preguntas elaboradas por docentes participantes en un curso de formación continua al modificar una actividad tomada de un libro de texto. La pregunta de investigación que guía el estudio es la siguiente: ¿cómo se describen y caracterizan los niveles de lectura de gráficos presentes en las preguntas elaboradas por docentes al modificar una actividad de un libro de texto? Esta indagación busca aportar criterios para un uso reflexivo de los libros de texto y para el diseño de andamiajes que promuevan lecturas inferenciales y críticas en la enseñanza de la estadística.

MARCO TEÓRICO

Para analizar las preguntas formuladas por el profesorado, este estudio articula los niveles de lectura de gráficos estadísticos propuestos por Curcio (1989) y ampliados por Gal (2002) con aportes sobre el papel de las preguntas docentes en la interpretación de gráficos (Friel et al., 2001; Monteiro y Ainley, 2003). Este marco permite analizar procesos de lectura que van desde lo literal hasta lo inferencial y crítico, y ofrece criterios para distinguir cómo las preguntas del profesorado activan distintos niveles de interpretación al trabajar con actividades procedentes de libros de texto.

Niveles de lectura de gráficos

La comprensión de gráficos estadísticos puede describirse en niveles de complejidad creciente, lo que permite caracterizar qué tipo de interpretaciones son promovidas por una tarea o por las preguntas del profesorado. En la clasificación clásica de Curcio (1989) se distinguen tres niveles: leer los datos, leer entre/dentro de los datos y leer más allá de los datos. Posteriormente, esta perspectiva fue ampliada con una dimensión crítica que incorpora el nivel leer detrás de los datos (Gal, 2002). En este estudio adoptamos estos cuatro niveles como marco de referencia para identificar y caracterizar las lecturas que emergen en las preguntas docentes.

Nivel 1. Leer los datos: lectura literal de la información explícita del gráfico (valores, etiquetas, títulos), sin requerir transformaciones ni cálculos adicionales.

Nivel 2. Leer entre/dentro de los datos: lectura relacional o procedimental que demanda comparaciones, sumas, restas o cálculos simples (p. ej., promedios) para obtener información no directamente visible.

Nivel 3. Leer más allá de los datos: lectura inferencial que implica interpretar, generalizar o predecir a partir de los datos representados, yendo más allá de lo estrictamente mostrado.

Nivel 4. Leer detrás de los datos: lectura crítica que examina la calidad de la información, los métodos de recogida, la representatividad y la validez de los datos y de las conclusiones; se vincula con la formación de un juicio informado sobre lo que los gráficos permiten o no permiten concluir.

El papel de las preguntas docentes

Monteiro y Ainley (2003) señalan que las preguntas del profesorado son centrales en la interpretación de gráficos, ya que orientan la atención del lector y el tipo de lectura que realiza. Retomando la clasificación de Curcio, muestran que estas pueden promover una lectura literal, relacional o inferencial. Además, introducen la noción de sentido crítico, entendida como la capacidad de analizar críticamente los datos y sus relaciones, en lugar de aceptar la impresión inicial del gráfico. Así, las preguntas docentes no solo movilizan distintos niveles de lectura, sino que también pueden favorecer una lectura crítica al cuestionar la calidad de los datos, su recogida, su representatividad o la validez de las conclusiones.

En la misma línea, Friel et al. (2001) consideran el questioning un componente fundamental de la cognición y la comprensión. Distinguen entre preguntas de bajo nivel, centradas en el contenido explícito, y preguntas profundas, que requieren inferencia, aplicación, síntesis y evaluación. Desde esta perspectiva, subrayan la importancia de que el profesorado disponga de un marco para decidir qué preguntas formular al enseñar a leer gráficos. Esta idea resulta relevante para este estudio, pues vincula el tipo de pregunta con la profundidad de la lectura promovida; por ello, se analizan las preguntas generadas en la intervención.

METODOLOGÍA

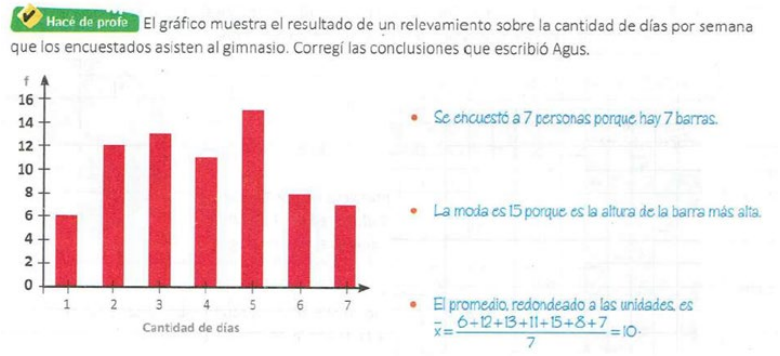
Este estudio se enmarca en una perspectiva cualitativa descriptivo-interpretativa, con carácter exploratorio (Flick, 2012). Participaron 17 docentes en servicio de un curso de formación continua centrado en el análisis y la modificación de una actividad de interpretación de gráficos tomada de un libro de texto de educación secundaria. Del total, 5 docentes se desempeñaban en educación primaria, 2 en educación especial y 10 en matemática del nivel secundario, pertenecientes a la Diplomatura en Matemática Inclusiva de la Universidad Nacional de Misiones (Argentina).

Contexto y la tarea (actividad de libro de texto)

La actividad analizada fue seleccionada de un libro de texto de primer año del nivel secundario (estudiantes de 12–13 años): Entre números I Matemática (Kaczor y Outón, 2017).

Figura 1

Actividad del libro de texto



Fuente: Kaczor, P. y Outón, V. (2017, p. 137)

Consignas propuestas al profesorado participante

Se trabajó con una guía de actividades en la que se pidió, para la Actividad 1, lo siguiente:

1) Resolver la actividad del libro de texto.
2) Escribir al menos dos preguntas que impliquen lectura literal de los datos.
3) Escribir al menos dos preguntas que impliquen realizar cálculos con los datos.
4) Escribir una pregunta que implique realizar una inferencia no obtenible directamente del gráfico.
5) Escribir una pregunta que implique predecir una tendencia o realizar un pronóstico.

Cabe mencionar que los y las docentes no conocían la clasificación de Curcio al momento de formular sus preguntas. Aunque las consignas orientaban hacia distintos tipos de lectura, se pretendía que el profesorado las concretara libremente. Las consignas 2, 3, 4 y 5 se corresponden, respectivamente, con leer los datos (Nivel 1), leer entre/dentro de los datos (Nivel 2), leer más allá de los datos (Nivel 3) y, nuevamente, leer más allá de los datos (predicción/pronóstico). La eventual lectura detrás de los datos (Nivel 4, dimensión crítica) no estaba explícitamente pedida en las consignas, pero se evaluó si emergía espontáneamente.

Procedimientos de recolección y análisis de los datos

La intervención se desarrolló como una tarea domiciliaria e individual. Tras presentar la actividad del libro y las consignas, cada docente dispuso de una semana para resolver la actividad original y elaborar nuevas preguntas orientadas a lectura literal, cálculos, inferencias y pronósticos, sin instrucción previa sobre los niveles de lectura. Al finalizar el plazo, el profesorado entregó en el campus virtual un informe con la resolución y las preguntas formuladas. Todas las producciones fueron recopiladas, anonimizadas y preparadas para su análisis. Es decir, los informes finales elaborados por cada participante constituyen la información que se analiza en este trabajo, dado que en ellos formularon las 80 preguntas que conforman el corpus de análisis del estudio.

El análisis adoptó un enfoque cualitativo descriptivo–interpretativo, centrado en identificar el tipo de lectura promovido por cada pregunta. El marco de categorías se basó en los niveles de lectura de gráficos de Curcio (1989) y se amplió con la dimensión crítica de Gal (2002), clasificando cada pregunta según el nivel requerido para responderla. Asimismo, se consideró el questioning como componente cognitivo, distinguiendo entre preguntas centradas en información explícita y preguntas que demandan inferencia, síntesis, evaluación o juicio crítico.

Aunque las consignas sugerían distintos tipos de lectura, el análisis se orientó a determinar el nivel efectivamente movilizado por cada formulación docente. La unidad de análisis fueron las preguntas

elaboradas individualmente por cada participante, y se examinaron todas las producciones correspondientes a la Actividad 1 tal como fueron entregadas en el campus virtual.

Categorías de análisis

Para clasificar cada pregunta se aplicó la siguiente matriz de categorías:

Tabla 1

Criterios y categorías de análisis

Categoría (Nivel)	Criterio	Indicadores en la pregunta
N1 Leer los datos	Lectura literal: solicita información explícita del gráfico; no exige cálculos ni relaciones entre barras.	Localizar valores, identificar la categoría modal (barra más alta), identificar el mínimo (barra más baja), realizar búsqueda inversa (frecuencia dada hacia categoría) y listar/leer la tabla de frecuencias.
N2 Leer dentro de los datos	Relación o cálculo simple: requiere sumar, restar, comparar, promediar o agrupar rangos de categorías.	Cálculo de total, sumas parciales o acumulados por rangos, diferencias entre categorías, promedios (incluida media ponderada), verificación de igualdad de frecuencias y filtrado por condiciones (al menos, más de, o menos).
N3 Leer más allá de los datos	Inferencia o pronóstico: pide explicar patrones, justificar decisiones o proyectar tendencias; la respuesta no está en el gráfico.	¿Por qué…? (motivos de la moda, preferencia por 3 días), evaluación/decisión (¿qué conviene más…?), escenario hipotético (si llueve…, si se mantiene la tendencia…), proyección temporal (próximo mes / 1 año), relación con constructos no medidos pero inferidos (condición física, rutina más estructurada).
N4 Leer detrás de los datos	Valoración crítica: cuestiona calidad/obtención de datos, representatividad, validez, sesgos o pertinencia del diseño.	Cuestionamiento de variables no consideradas (como edad, sexo, día de la semana o tiempo libre), atención al tamaño y composición de la muestra, discusión sobre la posibilidad de generalizar los resultados, valoración de la moda como medida representativa, análisis de la pertinencia del gráfico e identificación de los límites de las conclusiones que permite establecer.

Cuando una pregunta presenta elementos de más de un nivel, se asignó el nivel más alto.

Las preguntas elaboradas por cada docente fueron compiladas y anonimizadas antes del análisis. Dos integrantes del equipo realizaron una codificación inicial, asignando a cada pregunta uno de los cuatro niveles de lectura (N1–N4) según la intencionalidad de lectura que requería para ser respondida. Cuando una pregunta mostraba elementos de más de un nivel, se asignó el nivel más alto implicado. Posteriormente, los casos dudosos fueron revisados conjuntamente y se alcanzó consenso en todas las clasificaciones, asegurando coherencia en la aplicación de los criterios.

Para asegurar transparencia en el análisis, cada pregunta quedó asociada a un código de participante y a la categoría asignada según el nivel de lectura (N1–N4). Dado que la lectura crítica (N4) no formaba parte explícita de las consignas, su presencia se consideró emergente.

Además de la codificación cualitativa, se realizó un conteo por nivel (N1–N4) y se desglosó N3 en inferencias y pronósticos, con fines descriptivos. Asimismo, el carácter situado de la actividad, basada en un único ítem de libro y un grupo acotado de docentes en formación continua, delimita el alcance de los resultados, aspecto que se retoma en la discusión.

RESULTADOS

El análisis de las preguntas se realizó a partir de la clasificación de niveles de lectura de gráficos propuesta por Curcio (1989) y ampliada con la dimensión crítica planteada por Gal (2002). Este marco distingue cuatro niveles: leer los datos, leer entre/dentro de los datos, leer más allá de los datos

y leer detrás de los datos. Las preguntas analizadas fueron elaboradas por el profesorado en respuesta a las consignas de la actividad, que sugerían distintos tipos de lectura (literal, cálculo, inferencia y pronóstico). La distribución por nivel (N=80) fue la siguiente: N1: 31 (39%), N2: 23 (29%), N3-Inferencia: 9 (11%), N3-Pronóstico: 8 (10%) y N4: 9 (11%).

Lectura literal (N1)

Las producciones se correspondieron con una lectura literal del gráfico. Predominaron preguntas que requieren identificar información explícita sin cálculos ni interpretaciones adicionales, como "¿Cuántas personas asisten al gimnasio tres días?", "¿Cuántas personas van un solo día a la semana?" o "¿Cuántas personas van todos los días al gimnasio?". En todos los casos, la respuesta se obtiene directamente a partir de la altura de las barras o de las frecuencias representadas, sin necesidad de procesamientos adicionales.

Relaciones y cálculos (N2)

En esta consigna, las preguntas se ubicaron principalmente en el Nivel 2, al requerir establecer relaciones entre categorías del gráfico mediante operaciones simples. Predominaron formulaciones como "¿Cuántas personas asisten al gimnasio entre 2 y 4 días por semana?", "¿Cuántas personas en total fueron encuestadas?" o "¿Cuántos días eligen ir la mayoría de las personas?" Para contestarlas es necesario combinar información de distintas barras, sumar frecuencias o calcular promedios; es decir, procesar los datos representados porque la respuesta no se encuentra explícita en el gráfico.

Inferencias no explícitas (N3)

En esta consigna, las preguntas producidas se ubicaron en el Nivel 3, al requerir inferir información que no se obtiene directamente del gráfico. Este nivel supone interpretar la representación y elaborar explicaciones o hipótesis a partir de los datos. Se identificaron formulaciones como: "¿Por qué algunas personas no asisten al gimnasio todos los días de la semana?" o "¿Por qué ocurre que más personas asisten al gimnasio tres días por semana?". En todos los casos, la respuesta demanda justificar patrones o proponer razones plausibles que trascienden lo mostrado en las barras.

Pronósticos y proyecciones (N3)

En esta consigna, que solicitaba formular preguntas orientadas a realizar predicciones o pronósticos, las producciones se ubicaron en el nivel 3, ya que su resolución exige proyectar tendencias a partir de la información disponible en el gráfico. Las preguntas elaboradas, como "¿Crees que más gente irá al gimnasio cinco o más días por semana en los próximos meses?" o "Si la tendencia que se observa en el gráfico continúa por un largo periodo de tiempo, ¿qué consecuencia podría tener en la salud de las personas?" requieren realizar inferencias prospectivas basadas en los datos representados. La respuesta supone anticipar posibles comportamientos futuros apoyándose en la distribución observada, por lo que trasciende la mera recuperación de información explícita.

Lectura crítica (N4)

Las preguntas clasificadas en N4 (11%) se orientaron al cuestionamiento crítico del gráfico y de las conclusiones que este permite establecer. Incluyeron aspectos como variables no consideradas, tamaño y composición de la muestra, posibilidad de generalización, pertinencia de la representación y validez de la moda como medida representativa. Algunos ejemplos de preguntas formuladas por el profesorado en este nivel son: "Si se repite el relevamiento el próximo mes, ¿seguirá siendo 5 días el valor más frecuente de asistencia en el gimnasio?" o "¿La frecuencia con la que se asiste al gimnasio varía en invierno?". Aunque estas preguntas podrían asociarse a una proyección temporal, se clasificaron en N4 porque no pueden responderse con el gráfico disponible y exigen reflexionar sobre los límites de la visualización, la forma en que se produjo la muestra, el momento en que se recogieron los datos y la información contextual ausente. En este sentido, resultan coherentes con la dimensión crítica de Gal (2002). En términos globales, del total de 80 preguntas, N1 y N2 concentran el 68%

(39% y 29%, respectivamente), N3 alcanza el 21% (11% inferencias; 10% pronósticos) y N4 representa el 11%. En conjunto, predomina la lectura literal y procedimental, seguida por formulaciones inferenciales y de pronóstico, con una presencia no nula de lectura crítica. Estos datos son consistentes con el análisis por consignas presentado previamente.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Los resultados ponen de manifiesto que el papel del profesorado resulta decisivo en el uso didáctico de actividades de libro de texto: el potencial educativo de estas actividades no depende solo de lo que proponen los materiales, sino de las decisiones docentes al interpretarlas, adaptarlas y ampliarlas mediante preguntas. En este sentido, la formulación de preguntas actúa como una mediación clave para activar distintos niveles de lectura del gráfico y, por tanto, para orientar el tipo de razonamiento estadístico que se promueve en el aula.

En línea con el marco de los niveles de lectura de gráficos, el análisis mostró una concentración de preguntas en los niveles literal (leer los datos) y relacional/procedimental (leer entre/dentro de los datos), una presencia menor de formulaciones inferenciales (leer más allá) y pocas preguntas que convocaran la lectura crítica (leer detrás de los datos). Los resultados dialogan con estudios previos que han señalado limitaciones en las oportunidades de aprendizaje vinculadas a gráficos estadísticos. La concentración de preguntas en N1 y N2 es coherente con Gea et al. (2017), quienes evidencian el predominio de interpretaciones centradas en niveles iniciales e intermedios de lectura gráfica. Asimismo, la escasa presencia de preguntas críticas coincide con Arteaga et al. (2021), quienes muestran que las tareas de libros de texto privilegian la lectura entre los datos, con limitada atención a lecturas críticas. En nuestro estudio, aun cuando se solicitó al profesorado ampliar una actividad de libro mediante preguntas, la dimensión crítica también tuvo una presencia reducida. Esto sugiere que, aun cuando se invita a modificar la actividad, las producciones analizadas muestran una tendencia a privilegiar la recuperación de datos y los cálculos, con menor énfasis en la explicación de patrones y sin cuestionamientos sobre la calidad, representatividad o validez de la información representada. Así, la dimensión crítica emerge en menor medida y requiere andamiajes específicos e intencionalidad formativa para incorporarse sistemáticamente en la práctica, lo que se corresponde con el bajo porcentaje de preguntas clasificadas en N4. No obstante, la emergencia espontánea de algunas preguntas críticas resulta significativa, ya que evidencia indicios de reflexión sobre la calidad y los límites de la información representada. Una posible interpretación es que la formulación de preguntas inferenciales y críticas requiere un conocimiento didáctico más sofisticado sobre la lectura estadística, cuya explicitación no siempre forma parte de los procesos habituales de formación docente.

Cabe señalar que, aunque las consignas de la tarea orientaban la formulación de preguntas hacia determinados tipos de lectura, el análisis permitió observar cómo dichas orientaciones se concretaron en las producciones del profesorado y qué niveles de lectura fueron movilizados.

Desde la perspectiva curricular, en línea con los NAP, interpretar información estadística es una competencia central. Por ello, el profesorado necesita herramientas conceptuales y didácticas que no solo sostengan la lectura literal de gráficos, sino también la elaboración de inferencias y pronósticos y la valoración crítica de datos y conclusiones. En este marco, la formación continua resulta clave para: analizar el potencial de las actividades de libro, reformular actividades con preguntas que escalen de lo literal a lo inferencial y crítico y diseñar andamiajes que promuevan progresivamente los cuatro niveles de lectura.

La distribución (N1–N2 = 68%; N3 = 21%; N4 = 11%) muestra que, aun con consignas orientadas a distintos tipos de lectura, predominan las formulaciones centradas en niveles literal y procedimental. Para promover niveles inferenciales y críticos, proponemos escalonar las consignas desde N1 y N2 hacia N3 e incorporar explícitamente N4 en torno a la calidad de los datos, su representatividad y la

validez de las conclusiones. En este sentido, la modificación de actividades de libro constituye una estrategia formativa pertinente.

En cuanto a las limitaciones y líneas futuras, este estudio se circunscribe a una única actividad de libro de texto y a un grupo acotado de docentes en formación continua; además, la lectura crítica (N4) no fue consigna explícita, por lo que su eventual aparición dependió de la iniciativa del profesorado. Como líneas futuras, se sugiere ampliar el repertorio de actividades y representaciones, incorporar intervenciones formativas específicas para el diseño de preguntas críticas e indagar su impacto en aula cuando se introducen andamiajes orientados a N4.

Los hallazgos sugieren que el tipo de preguntas formuladas influye en los niveles de lectura que se activan y, con ello, en el tipo de razonamiento estadístico que se favorece. Para trascender una enseñanza centrada en lo literal y procedimental, resulta clave formar al profesorado en el diseño intencional de preguntas que integren inferencia y crítica, favoreciendo así un uso reflexivo de los libros de texto y una interpretación profunda y responsable de los gráficos estadísticos.

Referencias

Arteaga, P., Jiménez-Castro, M. y Batanero, C. (2021). Variables que caracterizan los gráficos estadísticos y las tareas relacionadas con ellos en los libros de texto de educación secundaria en Costa Rica. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 20*, 125–140.

Curcio, F. R. (1989). *Developing graph comprehension: Elementary and middle school activities*. NCTM.

Fan, L. (2013). Textbook research as scientific research: Towards a common ground on issues and methods of research on mathematics textbooks. *ZDM Mathematics Education, 45*(5), 765–777. https://doi.org/10.1007/s11858-013-0530-6

Flick, U. (2012). *Introducción a la investigación cualitativa* (3ª ed). Morata.

Friel, S. N., Curcio, F. R. y Bright, G. W. (2001). Making sense of graphs: Critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in Mathematics Education, 32*(2), 124–158. https://doi.org/10.2307/749671

Gal, I. (2002). Adults' statistical literacy: Meanings, components, responsibilities. *International Statistical Review, 70*(1), 1–25.

Gea, M.M., Arteaga, P. y Cañadas, G.R. (2017). Interpretación de gráficos estadísticos por futuros profesores de Educación Secundaria. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 12*, 19-37.

Gueudet, G. y Trouche, L. (2009). Towards new documentation systems for mathematics teachers? *Educational Studies in Mathematics, 71*(3), 199–218. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9159-8

Kaczor, P. y Outón, V. (2017). *Entre números I Matemática*. Editorial Santillana.

Ministerio de Educación de la Nación Argentina. (2012). *Núcleos de aprendizajes prioritarios: Ciclo básico. Educación secundaria. Matemática (1.º y 2.º / 2.º y 3.º años)*. Consejo Federal de Educación. https://www.argentina.gob.ar/sites/default/files/nap_matematica_ciclo_basico.pdf

Monteiro, C. y Ainley, J. (2003). Interpretation of graphs: Reading through the data. In J. Williams (Ed.), *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics (Vol. 23, No. 3*, pp. 31–36). British Society for Research into Learning Mathematics. https://bsrlm.org.uk/wp-content/uploads/2016/02/BSRLM-IP-23-3-6.pdf

Remillard, J. T. (2005). Examining key concepts in research on teachers' use of mathematics curricula. *Review of Educational Research, 75*(2), 211–246. https://doi.org/10.3102/00346543075002211

Tauber, L. (2010). Análisis de elementos básicos de alfabetización estadística en tareas de interpretación de gráficos y tablas descriptivas. *Ciencias Económicas, 8(1),* 53-74.

ESTUDIO EXPLORATORIO DE ALGUNAS MANIFESTACIONES DE PENSAMIENTO COMPUTACIONAL EN LA RESOLUCIÓN DE SEIS TAREAS BEBRAS EN EDUCACIÓN PRIMARIA

Exploratory study of some manifestations of computational thinking in solving of six Bebras tasks in primary education

Vila-López, R.[a] y Zapatera-Llinares, A.[b]

[a]Universidad CEU Cardenal Herrera, [b]Universidad de Alicante

Resumen

Este estudio explora algunas manifestaciones de aspectos del pensamiento computacional en alumnado del último ciclo de Educación Primaria a través de la resolución de seis tareas de carácter lógico-matemático. Se examinan sus producciones teniendo en cuenta el rendimiento, las estrategias utilizadas y las dimensiones del pensamiento computacional activadas en cada situación. Los resultados muestran un mayor éxito en problemas visuales o con reglas bien definidas, mientras que las tareas que requieren traducir información a representaciones o planificar secuencias algorítmicas revelan mayor dificultad. Además, se observa en el alumnado de cursos superiores un uso más explícito de estrategias metacognitivas. Los datos obtenidos ayudan a identificar necesidades y proponer orientaciones didácticas para favorecer el desarrollo del pensamiento computacional en Primaria.

Palabras clave: *didáctica de las matemáticas, pensamiento computacional, educación primaria, tareas Bebras*

Abstract

This study explores some manifestations of aspects of computational thinking in upper primary school students through the resolution of six logical-mathematical tasks. Their work is analysed with regard to performance, the strategies used, and the dimensions of computational thinking activated in each situation. The findings indicate higher success rates in visual tasks or those with well-defined rules, while activities requiring translation into representations or algorithmic planning show greater difficulty. Moreover, students in the higher grade demonstrate more explicit use of metacognitive strategies. The data obtained help to identify needs and to propose didactic guidelines to foster the development of computational thinking in Primary Education.

Keywords: *mathematics education, computational thinking, primary education, Bebras tasks*

INTRODUCCIÓN

El Pensamiento Computacional constituye hoy un marco clave en la Didáctica de la Matemática. Las dimensiones que lo articulan permiten analizar cómo el alumnado aborda problemas, selecciona estrategias, evalúa resultados y los comunica. Éste no se limita al ámbito de la programación, sino que se presenta como una habilidad cognitiva fundamental para la resolución de problemas en diversos ámbitos de la vida (Zapata-Ros, 2019). Desde el año 2006 en que Wing acuñó el concepto de Pensamiento Computacional (PC), introducido previamente por Papert (1980), su desarrollo ha sido muy intenso en el campo educativo. En este contexto, este trabajo presenta un estudio exploratorio, cuyo objetivo principal es analizar cómo, estudiantes de 5º y 6º de Primaria muestran signos de desarrollo de las distintas habilidades del PC al abordar seis tareas Bebras. Además, también en este estudio se lleva a cabo un análisis del rendimiento obtenido, una evaluación de estrategias y

Vila-López, R. y Zapatera-Llinares, A. (2026). Estudio exploratorio de algunas manifestaciones de pensamiento computacional en la resolución de seis tareas Bebras en educación Primaria. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (pp. 609-616). SEIEM.

de razonamientos espontáneos utilizados y una valoración de la relación entre tipo de tarea, estrategias y éxito. Sin pretender evaluar el PC como constructo global. La novedad de este estudio es aportar indicios sobre cómo como el alumnado moviliza procesos asociados al PC de manera diferenciada según la naturaleza del problema y proponer algunas orientaciones didácticas enfocadas a una mejora en la formación de los alumnos de primaria.

MARCO TEÓRICO

Pensamiento computacional (PC). Definición y componentes

El término "Pensamiento Computacional" fue popularizado por Wing en 2006, quien lo definió como una habilidad fundamental para todos, no solo para los informáticos, que implica resolver problemas, diseñar sistemas y comprender el comportamiento humano haciendo uso de los conceptos fundamentales de la informática. Según la revisión de Polanco Padrón et al. (2021), el PC se entiende hoy como un proceso de pensamiento que permite formular problemas y sus soluciones de manera que puedan ser representados como secuencias de instrucciones y algoritmos. No se trata necesariamente de pensar "como un ordenador", sino de aplicar la lógica y la abstracción informática para resolver problemas complejos de forma eficiente. En este sentido, trabajos como los de Brennan y Resnick (2012), Grover y Pea (2013) o Román-González et al., (2017), han contribuido a delimitar el constructo en el ámbito educativo. Desarrollos posteriores en este ámbito, presentan principios clave del PC entre los que la International Society for Technology in Education y Computer Science Teachers Association (2011), enumera: descomposición, patrones, abstracción y algoritmos. El consenso académico aconseja trabajarlos interrelacionados en el aula de Primaria.

Descomposición: dividir una tarea en partes más pequeñas que pueden entenderse, resolverse y evaluarse por separado. Esto facilita la resolución del problema al abordar cada fragmento por separado (Ribera Puchades y Rotger García, 2024).

Patrones: Identificar que un problema actual comparte características con uno resuelto anteriormente, permite al estudiante aplicar soluciones conocidas a nuevas situaciones (Martín Barroso et al., 2024).

Abstracción: Habilidad de filtrar la información irrelevante para centrarse los aspectos cruciales del problema. Permite crear modelos generales que simplifican la realidad para poder analizarla y resolverla (Ribera Puchades y Rotger García, 2024).

Algoritmos: Se refiere al diseño de una serie de pasos ordenados y precisos para resolver un problema o completar una tarea. En Primaria, esto se traduce en la creación de secuencias lógicas, como las reglas de un juego o los pasos para una receta (Martín Barroso et al., 2024).

En este trabajo se adopta una concepción del PC como conjunto de estrategias de resolución de problemas observables en contextos específicos, evitando considerarlo como una capacidad global evaluable mediante un número limitado de tareas.

El pensamiento computacional en la enseñanza de las Matemáticas. Integración curricular

En los últimos años, el PC ha ganado importancia dentro de la comunidad educativa, proponiéndose como una habilidad fundamental del currículo educativo obligatorio. La inclusión del PC en Educación Primaria aporta múltiples beneficios que trascienden la competencia digital.

En el contexto educativo español, la actual ley educativa (LOMLOE) ha dado un paso decisivo al integrar explícitamente el pensamiento computacional en el currículo de Educación Primaria. Aunque tradicionalmente se asociaba a actividades extracurriculares o tecnológicas, la normativa vigente lo incorpora como un elemento transversal y específico, especialmente vinculado al área de Matemáticas y a la Competencia Digital. El enfoque curricular actual promueve que el PC se trabaje "desde Infantil a Bachillerato", asegurando así una progresión en la complejidad de los contenidos.

Documentos recientes, como la tesis doctoral de Moreno Palma (2025) y los trabajos del Laboratorio de Pensamiento Computacional de la URJC (Martín Barroso et al., 2024), destacan que esta integración se realiza desde una perspectiva competencial. Trabajos como las de Ayala-Altamirano, et al. (2024), refuerzan la importancia de esta integración, mostrando los beneficios del desarrollo del PC a través de tareas desconectadas.

Por otra parte, se ve la necesidad de la formación del profesorado en este campo pues, estudios como los de Santaengracia et al. (2023), revelan que el profesorado no percibe una buena preparación ni en sus compañeros ni es ellos mismos.

Relación con la resolución de problemas. Estrategias

Investigaciones recientes, como el metaanálisis realizado por Moreno Palma et al. (2024), confirman una correlación positiva y significativa entre el entrenamiento en PC y la mejora en las habilidades generales de resolución de problemas.

Dentro de las estrategias para el desarrollo del PC, las tareas Bebras (Castor, en lituano) ocupan un lugar destacado. Bebras es una iniciativa internacional nacida en Lituania en 2004 de la mano de la profesora Valentina Dagiene, cuyo objetivo es promover la informática y el pensamiento computacional entre estudiantes de todas las edades (Dagiene y Stupurienė, 2016). Los retos Bebras son tareas cortas, independientes y visualmente atractivas que se pueden resolver sin conocimientos técnicos previos. Cada tarea está diseñada para representar un concepto informático fundamental pero envuelto en una narrativa cotidiana o lúdica (Choca Valverde, 2024). El uso de problemas Bebras por su formato estandarizado permite a los docentes evaluar el desempeño del alumnado en habilidades específicas del PC, identificando fortalezas y debilidades en áreas como la descomposición o la abstracción algorítmica. Estas tareas son especialmente motivadoras en Primaria ya que permiten la experimentación y el ensayo-error (Bebras International, 2024).

METODOLOGÍA Y ANÁLISIS DE DATOS

Participantes

El estudio se llevó a cabo con un total de 60 estudiantes del último ciclo de Educación Primaria (10 a 12 años): 30 alumnos de 5º curso (10 de cada aula) y 30 de 6º curso (10 de otras tres aulas). La elección de estos niveles responde a que, según los currículos vigentes, el alumnado a partir del tercer ciclo de Primaria ha adquirido un mayor dominio de distintas formas de representación y está en disposición de abordar desafíos que requieren razonamiento lógico y pensamiento computacional.

Instrumento de recogida de datos

Para el estudio, se utilizaron seis tareas Bebras, seleccionadas por su diversidad en formato, tipo de razonamiento y componente cognitivo.

Todas ellas están diseñadas para movilizar las cuatro dimensiones del pensamiento computacional y permiten recoger información tanto del proceso como del resultado final.

Se registraron las respuestas de cada estudiante y las reflexiones escritas en su proceso de resolución.

Cada estudiante resolvió los seis problemas en papel.

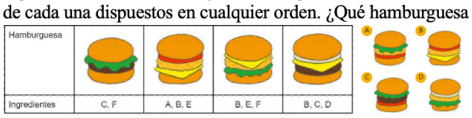
No se ofrecieron ayudas directas más allá de la lectura del enunciado, con el objetivo de observar cómo el alumnado activaba sus estrategias naturales de resolución. Además de la solución, se pidió al alumnado que describiera brevemente la estrategia utilizada, lo cual permitió recoger información metacognitiva relevante.

Las tareas quedan recogidas en la Figura 1.

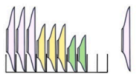
Figura 1

Enunciado de las 6 tareas Bebras seleccionadas

P1. Ingredientes para las hamburguesas: El bar de hamburguesas Burger King Way utiliza seis tipos de ingredientes: A, B, C, D, E y F. En la siguiente tabla se muestran las hamburguesas que preparan, y los ingredientes de cada una dispuestos en cualquier orden. ¿Qué hamburguesa está hecha con los ingredientes A, E y F? (A, B, C o D)



P2. Platos: El ordenado Castor siempre coloca los platos en el lavavajillas en el orden siguiente, como se ve en esta imagen: primero, los grandes; luego, los medianos; y, por último, los pequeños. Ahora tiene que poner otro plato grande en el lavavajillas, el que se ve en la parte derecha de la imagen. **¿Cuál es el** número mínimo de platos (incluido el nuevo) que deberá mover para dejarlos ordenados dentro del lavavajillas? A: 3 B:4 C:5 D:6



P3. El árbol mágico: Benito el castor tiene un árbol mágico que crece cerca de su casa. Cada vez que un pájaro se posa sobre él ( ), del árbol crecen 2 manzanas. Cada vez que una ardilla sube ( ), el árbol deja caer 1 manzana (si tiene alguna). Benito también ha notado que cada vez que una serpiente visita el árbol ( ), ¡todas las manzanas desaparecen instantáneamente! Una mañana, Benito nota que el árbol mágico contiene 25 manzanas. Luego, él pasa el resto del día haciendo dibujos de todos los animales que se acercan al árbol. Los dibujos, en orden, son están a continuación ¿Cuántas manzanas quedan en el árbol al final del día



P4. Sombrilla: Esta es la sombrilla de Anna:



Una de las cuatro imágenes, muestra la sombrilla de Anna. ¿Cuál es? (A, B, C o D)



P5. La casa soñada de Karla: Karla tiene tres mapas y todos muestran exactamente la misma área. Un mapa muestra los bosques, otro muestra los ríos y el otro las casas. La casa de sus sueños está en el bosque y cerca de la orilla del río. ¿Puedes señalarla en el tercer dibujo?



P6. Calles: Los mapas de los coches necesitan conocer los sentidos permitidos en cada calle. Los castores han ideado el siguiente sistema para programarlos: Para guardar la información de que la Calle del Pino es en una calle de sentido único pero que la Calle del Castor es de doble sentido, escriben en una tabla los tres cruces 1, 2 y 3, tanto en las filas como en las columnas. En la primera columna representan desde dónde se sale y en la primera fila indican hacia dónde se va. En la tabla marcan, para cada dos cruces diferentes, los sentidos en los que está permitido circular. Los castores necesitan registrar con este sistema los sentidos de circulación de esta otra zona de la ciudad. Aquí puedes ver la tabla vacía para la nueva zona. ¿Puedes ayudar a los castores rellenando esta tabla?



Análisis de datos

Para cada una de las seis tareas se registraron los aciertos y errores, explicación de la estrategia seguida y número de intentos (si cambió de estrategia). Se analizó de forma cuantitativa para cada tarea los siguientes ítems:

- Porcentajes de éxito general y por curso.
- Correlaciones entre éxito y metacognición declarada.
- Correlación entre éxito y peso de los componentes del PC.
- Análisis de dispersión en la respuesta. (Solamente en la tarea de mayor demanda cognitiva).

El análisis cualitativo se centró en: explicaciones del alumnado sobre su proceso, estrategias mencionadas, errores típicos, presencia de elementos metacognitivos e identificación de manifestaciones de cada dimensión del PC.

Ambos análisis se combinaron para ofrecer una interpretación global de cómo el alumnado activa el pensamiento computacional al resolver tareas de naturaleza diversa. Se utilizaron las categorías previamente definidas en el marco teórico. La asignación del peso de las dimensiones del PC en cada tarea se realizó mediante análisis teórico de sus demandas cognitivas, considerando el tipo de

operaciones requeridas (comparación, secuenciación, etc.), con la información aportada por Brebras International (2024). Quedan categorizadas en la Tabla 1.

Tabla 1

Categorización del peso del PC en los 6 problemas estudiados
Descomposición (D), Patrones (P), Abstracción (Ab) y Algoritmos (Al)
Escala: Bajo=1 Medio=2 Medio-Alto=3 Alto=4 Muy Alto=5

Tarea	*D*	*P*	*Ab*	*Al*	Total
P1	Bajo	Medio-Alto	Medio	Medio	8
P2	Medio-Alto	Medio	Medio	Alto	11
P3	Bajo	Bajo	Alto	Alto	10
P4	Bajo	Muy Alto	Alto	Bajo	9
P5	Medio-Alto	Medio	Medio-Alto	Medio	10
P6	Medio	Medio	Muy Alto	Alto	13

RESULTADOS

Resultados globales

El análisis cuantitativo de las respuestas de los 60 estudiantes muestra diferencias claras entre tareas, tanto en el porcentaje de aciertos como en el tipo de razonamiento implicado. En conjunto, los problemas de carácter visual o con reglas explícitas presentan mayores tasas de éxito, mientras que las tareas que requieren traducir información entre representaciones o planificar secuencias algorítmicas se asocian a un rendimiento significativamente menor. Se resumen en la Tabla 2.

Tabla 2

Porcentaje de aciertos por curso y tarea

Tarea	*5ºPrimaria*	*6ºPrimaria*	Total
P1	60,00%	83,33%	43/60
P2	33,33%	13,33%	14/60
P3	63,33%	83,33%	44/60
P4	40,00%	43,33%	25/60
P5	43,33%	60,00%	31/60
P6	3,33%	3,33%	2/60

Resultados por tarea

Se muestran en la Tabla 3, los resultados por curso, obtenidos en cuanto a aciertos y fallos.

Tabla 3

Resultados (aciertos y fallos) obtenidos por tarea y curso

Tarea	*Aciertos 5º*	*Fallos 5º*	*Aciertos 6º*	*Fallos 6º*	*p-Valor* X^2
P1	18	12	25	5	0,086
P2	10	20	4	26	0,127
P3	19	11	25	5	0,144
P4	12	18	13	17	1,000
P5	13	17	18	12	0,301
P6	1	29	1	29	1,000

Se observa que 6º supera a 5º en P1, P3 y P5; 5º supera a 6º en P2; P4 es similar y P6 resulta muy difícil para ambos cursos. No hay diferencia significativa 5º-6º ($p>0.05$).

P1. Hamburguesa: La mayoría del alumnado identifica correctamente la opción que coincide con los tres ingredientes dados, lo que evidencia un uso adecuado del reconocimiento de patrones y la comparación de atributos. Los errores se asocian a confusiones en el orden de los elementos o a la identificación incompleta de las coincidencias. Las explicaciones de tipo “miré cuáles se repetían”

reflejan estrategias de descarte sistemático. Muy similar en éxito los dos cursos: en 6º aparecen algunas verbalizaciones metacognitivas como: "la estrategia inicial funcionó" o "cambié a escribir los ingredientes".

P2. Platos: En esta tarea destaca la dispersión entre las soluciones incorrectas (4, 5, 6, 8 y 11), esto muestra dificultades para visualizar la secuencia mínima y distinguir entre los conceptos, "mover", "desplazar" o "recolocar". Se muestran los datos en la Tabla 4. El alumnado tiende a describir procedimientos lineales sin evaluar estados intermedios, y muchos dudan sobre si contabilizar el movimiento final. El error típico es el sobre cómputo. En ambos cursos hay dispersión; en 6º se registran más cambios de estrategia declarados "*tras visualizar mejor*" o al agrupar movimientos (mayor planificación). Ejemplos de respuestas erróneas representativas: *"Muevo todos hacia delante", "Primero quito uno, pero no sabía si contaba".*

Tabla 4

Distribución de respuestas erróneas

Respuesta marcada	*Frecuencia*
4	6
5	14
6	21
8	1
11	1

P3. Árbol mágico: El alumnado identifica con éxito la regla +2/–1 y algunos de 6º, también el reinicio tras la serpiente, lo que indica mayor abstracción y control del estado. Los fallos provienen de no aplicar el reinicio o de errores en las operaciones.

P4. Sombrilla: La mayoría resuelve comparando la continuidad de líneas y la orientación. Algunos estudiantes, especialmente de 6º, mencionan rotación mental o cambio de perspectiva. La tasa de acierto es similar entre cursos. No hay diferencias claras de éxito en 6º. Ejemplo de respuesta: *"He buscado el dibujo que tiene las líneas igual colocadas."*

P5. La casa soñada de Karla: La mayoría acierta al superponer los tres mapas. La combinación correcta de información revela buena integración espacial. Los errores se deben a usar solo una de las capas. En 5º abunda "juntar mapas" y "dibujar todo en el C"; en 6º se observan más verbalizaciones de cambio de estrategia (de intuición a medición), lo que sugiere mayor control metacognitivo. Ejemplo: *"Busqué cuál estaba en el bosque y más cerca del río con la regla."*

P6. Calles: Es la tarea de mayor dificultad en ambos cursos. Solo dos alumnos de todo el grupo la resolvieron correctamente. Hay varias reflexiones de tipo "no lo entendí", "me lo inventé" y cumplimentaciones incompletas. Las dificultades principales aparecen en la traducción del mapa con flechas a la tabla, especialmente en la distinción entre sentidos único y doble. En 6º aparecen más intentos de apoyarse en el ejemplo y de cambiar la estrategia, pero la representación tabular sigue siendo un cuello de botella conceptual. Lo que puede indicar que la dificultad proceda del cambio de representación y no de la madurez cognitiva.

Correlación entre metacognición y éxito

Para estudiar la correlación metacognición y éxito, se codifica de 0 a 3 la metacognición declarada con las respuestas de estrategia, cambió de estrategia y si era el caso, número de intentos. (0 =n o describe estrategia; 1 =e str. superficial (ej. "lo he intentado"), 2 = estr.operativa (ej. "he unido mapas") y 3 = estr. planificada (ej. "reinicié tras serpiente"). Se obtiene la correlación Spearman y en ningún caso es significativo.

Los resultados están expresados en la Tabla 5.

Tabla 5

Resultados numéricos Correlación Spearman

Nivel de análisis	□ *(rho)*	*p-Valor*
Global	0,020	0,707
Solo 5º	0,106	0,158
Solo 6º	-0,054	0,474
Por alumno	0,066	0,618

Estos datos, llevan a pensar que la metacognición no se asocia linealmente con más aciertos; lo cual no invalida su valor formativo. Es probable que la metacognición sea necesaria pero no suficiente en tareas con alta traducción de registros.

Correlación peso en PC tendencia al éxito

Se recogen en la Tabla 6 los datos que relacionan el peso de los componentes en cada tarea y su "tendencia" al éxito.

Tabla 6

Síntesis entre peso de componentes de PC y tendencia al éxito
Descomposición (D), Patrones(P), Abstracción (Ab) y Algoritmos (Al)
Escala: Bajo=1 Medio=2 Medio-Alto=3 Alto=4 Muy Alto=5. E=Tendencia al éxito

Tarea	*D*	*P*	*Ab*	*Al*	Peso PC	E
P1	Bajo	Medio-Alto	Medio	Medio	8	Alta
P2	Medio-Alto	Medio	Medio	Alto	11	Baja
P3	Bajo	Bajo	Alto	Alto	10	Alta
P4	Bajo	Muy Alto	Alto	Bajo	9	Media Baja
P5	Medio-Alto	Medio	Medio-Alto	Medio	10	Media
P6	Medio	Medio	Muy Alto	Alto	13	Muy Baja

El conjunto de tareas activa de forma diferenciada las cuatro dimensiones del PC. P3 y P5 muestran éxito alto y medio al combinar reglas claras y representaciones adecuadas; P4 consolida patrones visuales. En cambio, P2 (optimización) y P6 (cambio de representación) exigen más planificación y abstracción—de ahí su dificultad.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El análisis de las seis tareas muestra como el alumnado moviliza procesos asociados al PC de manera diferenciada según la naturaleza del problema. Las tareas con estructuras visuales claras, facilitan la identificación de patrones y la integración de información, mientras que aquellas que requieren traducción entre registros o planificación secuencial, generan mayores dificultades en ambos cursos.

Los resultados también apuntan a que el alumnado de 6º manifiesta un mayor control metacognitivo, especialmente a través de la verbalización de estrategias, la revisión de errores y la medición deliberada. Sin embargo, esta ventaja no se traduce necesariamente en un rendimiento superior en todas las tareas, lo que sugiere como hipótesis a comprobar, que la metacognición es un soporte valioso, pero no suficiente, cuando la tarea exige una comprensión profunda de reglas o representaciones complejas. Desde una perspectiva didáctica, los resultados sugieren la necesidad de:

-Trabajar explícitamente estrategias cognitivas y metacognitivas.

-Utilizar representaciones, que contribuyen a reducir el error y favorecen la claridad procedimental.

-Diseñar tareas que favorezcan la comprensión progresiva.

En conjunto, los resultados revelan, que el PC puede desarrollarse de manera efectiva mediante tareas breves y accesibles como las Bebras, siempre que se acompañen de un acompañamiento didáctico estructurado adecuado. No obstante, los resultados obtenidos deben interpretarse con cautela dado el

carácter exploratorio del estudio, el número limitado de tareas analizadas y en concreto en una de ellas el bajo número de respuestas por la dificultad encontrada por los alumnos. Por lo que las sugerencias didácticas previamente citadas, podrían ser una línea de trabajo futuras.

Referencias

Ayala-Altamirano, C., Arjona-Aranda, G., Moral-Sánchez, S. N. y Sánchez-Cruzado, C. (2024). Iniciación al pensamiento computacional a través de tareas desconectadas sobre patrones. En N. Adamuz-Povedano, E., Fernández Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 121-128). SEIEM

Bebras International. (2024). Examples of Tasks. *Bebras Challenge*. https://www.bebras.org/examples.html

Brennan, K. y Resnick, M. (2012). New Frameworks for Studying and Assessing the Development of Computational Thinking. *Proceedings of the 2012 Annual Meeting of the American Educational Research Association*, Vol. 1, p.25.

Choca Valverde, A. C. (2024). Pensamiento Computacional en Educación Primaria [*Trabajo de Análisis Pedagógico]*. Instituto de Formación Docente "Elia Caputi de Corbacho".

Dagiene, V. y Stupurienė, G. (2016). Bebras - a sustainable community building model for the concept based learning of informatics and computational thinking. *Informatics in Education*, 15(1), 25-44. https://doi.org/10.15388/infedu.2016.02

Grover, S. y Pea, R. (2013). Computational thinking in K-12: A review of the state of the field. *Educational Researcher*, 42(1) https://doi.org/10.3102/0013189X12463051

International Society for Technology in Education y Computer Science Teachers Association. (2011). *Computational thinking leadership toolkit*. ISTE; CSTA.

Martín Barroso, E., Zapata Cáceres, M. y Fanchamps, N. (2024). *Laboratorio de Pensamiento Computacional: Ideas y actividades para el aula.* Universidad Rey Juan Carlos.

Moreno Palma, N. (2025). Integración de los elementos básicos del pensamiento computacional para la formación inicial de maestros [*Tesis Doctoral, Universidad de Granada*]. Digibug UGR.

Moreno Palma, N., Hinojo Lucena, F. J., Romero Rodríguez, J. M. y Ramos Navas-Parejo, M. (2024). Desarrollo del pensamiento computacional "desenchufado" mediante resolución de problemas: una revisión sistemática y meta-análisis. *Revista de Investigación en Educación*, 22(3), 390-405. https://doi.org/10.35869/reined.v22i3.5755

Papert, S. (1980). Mindstorms: Children, computers, and powerful ideas. *Basic Books*, Inc

Polanco Padrón, N., Ferrer Planchart, S. y Fernández Reina, M. (2021). Aproximación a una definición de pensamiento computacional. RIED. *Revista Iberoamericana de Educación a Distancia*, 24(1), 55-76. https://doi.org/10.5944/ried.24.1.27419

Ribera Puchades, J. M. y Rotger García, L. (2024). Modificaciones a una tarea de pensamiento computacional desenchufado generadas por alumnado con talento matemático. NÚMEROS. *Revista de Didáctica de las Matemáticas,* 117, 83-95.

Román-González, M., Pérez-González J. C. y Jiménez-Fernández, C. (2017). Which cognitive abilities underlie computational thinking? Criterion validity of the Computational Thinking Test. *Computers in human behabior,* 72, 678-691. https://doi.org/10.1016/j.chb.2016.08.047

Santaengracia, J. J., Palop, B. y Rodríguez-Muñiz, L. J. (2023). Percepciones del profesorado sobre pensamiento computacional. Estudio de una formación. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo, E. y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 491–498). SEIEM.

Wing, J. (2006). Computational Thinking. *Communications of the ACM*, 49(3), 33-35. https://doi.org/10.1145/1118178.1118215

Zapata-Ros, M. (2019). Computational Thinking Unplugged. *Education in the Knowledge Society*, 20, 1-29. https://doi.org/10.14201/eks2019_20_a18

PÓSTERES

COMPRENSIÓN ESTRUCTURAL EN PATRONES DE REPETICIÓN: EL CONTEXTO DE ENSEÑANZA

Structural understanding in repeating patterns: the teaching context

Acosta, Y., Alsina, Á. y Pincheira, N.

Universitat de Girona

El pensamiento algebraico temprano incluye, junto con el análisis de relaciones y el cambio, la capacidad de reconocer estructuras en patrones de repetición, lo que permite a los niños identificar la unidad que se repite y generalizarla (Acosta y Alsina, 2024; Junker et al., 2025). Desde esta perspectiva, el presente estudio analiza la comprensión estructural de 24 escolares de 5 años al resolver tareas con patrones de repetición en distintos contextos de enseñanza, siguiendo los planteamientos del Enfoque de los Itinerarios de Enseñanza de las Matemáticas (EIEM; Alsina, 2022): contextos informales (situaciones reales, manipulativos y juegos), intermedios (recursos literarios y tecnológicos) y formales (recursos gráficos). Se adopta un diseño cualitativo descriptivo centrado en el análisis de representaciones y del discurso, con una categorización basada en Mulligan y Mitchelmore (2013) y Lüken (2018). Los resultados muestran diferencias según el tipo de tarea: en situaciones reales, el 71,4% identifica la unidad de repetición, mientras que en los contextos intermedios y formales predominan niveles preestructurales y emergentes. Estos resultados evidencian que los contextos más concretos facilitan la identificación de relaciones estructurales, mientras que los más abstractos requieren mayor mediación didáctica. Asimismo, los datos sugieren que la progresión hacia la generalización es incipiente y se observa únicamente en una parte de los participantes, lo que reafirma la necesidad de diseñar tareas que promuevan explícitamente la identificación y transferencia de la unidad de repetición (Junker et al., 2025). En consecuencia, la comprensión estructural no se deriva de la mera exposición, sino del tipo de actividad cognitiva que las tareas movilizan. Se concluye que el contexto de enseñanza opera como un factor didáctico clave en la construcción del pensamiento algebraico temprano: modula las oportunidades de abstracción y reclama una mayor intencionalidad didáctica en los contextos formales.

Referencias

Acosta, Y. y Alsina, Á. (2024). Modos de pensamiento algebraico en educación infantil: efectos de un itinerario de enseñanza de patrones de repetición. *PNA, 18*(2), 189-222. https://doi.org/10.30827/pna.v18i2.26256

Alsina, Á. (2022). *Itinerarios didácticos para la enseñanza de las matemáticas (3 a 6 años)*. Graó.

Junker, A., Nortvedt, G. A. y Farsani, D. (2025). Patterning strategies in grade 1 students with low and high number sense proficiency. *Educational Studies in Mathematics, 118*, 29-51. https://doi.org/10.1007/s10649-024-10341-5

Lüken, M. M. (2018). Repeating pattern competencies in three- to five-year old kindergartners: A closer look at strategies. En I. Elia, J. Mulligan, A. Anderson, A. Baccaglini-Frank, y C. Benz (Eds.), *Contemporary research and perspectives on early childhood mathematics education. ICME-13 monographs*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-73432-3_3.

Mulligan, J. T. y Mitchelmore, M. C. (2013). Early awareness of mathematical pattern and structure. En L. D. English, y J. T. Mulligan (Eds.), *Reconceptualizing early mathematics learning* (pp. 29-45). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-6440-8_3

Acosta, Y., Alsina, Á. y Pincheira, N (2026). Comprensión estructural en patrones de repetición: el contexto de enseñanza. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 619). SEIEM.

TIPOLOGÍA DE ERRORES EN LA IDENTIFICACIÓN DE DEMOSTRACIONES FORMALES *BASADAS EN* ARGUMENTOS INFORMALES

Error typology in the identification of formal proofs *based on* informal arguments

Acosta-Hernández, C., Marrero, I. y Camacho-Machín, M.

Universidad de La Laguna

En Acosta-Hernández et al. (2024), analizamos las respuestas de 22 estudiantes de cuarto curso del Grado en Matemáticas a un cuestionario de *juicios FBI* (decidir si una demostración formal se *basa en* un argumento informal dado), adaptado de Zazkis y Villanueva (2016). Las tasas de éxito obtenidas por los participantes sugerían que su formación avanzada facilita la conexión entre la intuición geométrica y su formalización analítica. En el presente trabajo se profundiza en dicho análisis, con el objetivo de caracterizar los errores y dificultades al conectar argumentos informales con demostraciones formales. Las preguntas que lo guían son: *¿Qué errores sistemáticos cometen los estudiantes al justificar sus juicios FBI y qué concepciones subyacentes revelan? ¿En qué medida la formación avanzada garantiza el desarrollo de las competencias de reconocimiento y conceptual?* Se considera que una *demostración formal* es un argumento deductivo que se ajusta a las normas del sistema de representación verbal-simbólico (razonamiento sintáctico); un *argumento informal* recurre a la visualización matemática sin ajustarse a dichas normas (razonamiento semántico) y puede considerarse un apoyo provisional a la consecución de la demostración. El cuestionario consta de tres tareas[6]. Para cada una de ellas, se proporciona un argumento informal, una demostración basada en el argumento informal, y otra distractora. El análisis se centra en las justificaciones escritas por los participantes, complementado por entrevistas semiestructuradas con dos de ellas –EA y EB-- sobre las mismas tareas. Se codifican los errores en seis tipos (M1-M5 y O6). Los errores M1 (valoración superficial) y O6 (justificaciones vagas) aparecen transversalmente. Los errores M2 (confusión entre solapamiento y separación de entornos) y M3 (interpretar "estar en dos lugares a la vez" como igualdad y no como contradicción) son específicos de T2 y reflejan dificultades para traducir la intuición visual a la estructura lógica de la reducción al absurdo. Significativamente, M4 (desconexión entre tangente y derivada como límite) y M5 (sobregeneralización de la regla de la cadena) concentran 10 de los 16 errores en T3: M4 muestra que la intuición no logra formalizarse; M5, que el formalismo procedimental prescinde de la intuición. El análisis de casos complementa estos hallazgos. EA prioriza la familiaridad de la regla de la cadena, interpretándola como traducción directa de la idea de pendientes opuestas; EB distingue con nitidez el criterio matemático del didáctico e identifica la opción correcta, pero elige la distractora porque su criterio docente prevalece. Se concluye que la formación avanzada no garantiza *per se* la competencia conceptual. Los juicios FBI pueden estar mediatizados por dimensiones valorativas e identitarias (no solo cognitivas), lo que abre nuevas líneas de investigación sobre la influencia de estas dimensiones en la conexión entre el razonamiento semántico y el razonamiento sintáctico.

Agradecimientos: Subvención parcial por el proyecto PID2022-139007NBI00 (MICIU/AEI/FEDER).

Referencias

Acosta-Hernández, C., Camacho-Machín, M. y Marrero, I. (2024). Argumentos informales para el aprendizaje de la demostración formal en Matemáticas. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 547). SEIEM.

Zazkis, D. y Villanueva, M. (2016). Student conceptions of what it means to base a proof on an informal argument. *Int. J. Res. Undergrad. Math. Ed.*, *2*, 318-337. https://doi.org/10.1007/s40753-016-0032-3

[6] En orden de dificultad creciente: T1.- Demostrar que $\int_{-a}^{a} \text{sen}^3(x)\,dx = 0$. T2.- Probar que si una sucesión (a_n) tiene límite, éste es único. T3.- Demostrar que la derivada de una función par es una función impar.

Acosta-Hernández, C., Marrero, I. y Camacho-Machín, M. (2026). Tipología de errores en la identificación de demostraciones formales *basadas en* argumentos informales. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 620). SEIEM.

CREENCIAS EN MAESTROS EN FORMACIÓN DESDE EL KFML

Beliefs among teacher trainees from the KFLM

Alegre, M. P. y Costado, M. T.

Universidad de Cádiz

El ámbito afectivo ejerce una influencia significativa en el aprendizaje de las matemáticas y en la futura práctica docente, por lo que se hace necesario incluirlo en la formación del profesorado. El objetivo de esta investigación es analizar de qué manera las prácticas en el aula de los formadores docentes favorecen la evolución de las creencias sobre las matemáticas del alumnado y, por ende, cómo podría cambiar su conocimiento especializado, concretamente, el subdominio KFLM. Para ello se ha llevado a cabo un estudio de caso desde una perspectiva cuantitativa con un grupo de 59 estudiantes en el que se analiza la evolución de sus creencias antes y después de impartir un taller sobre geometría y magnitudes en el que se crea un objeto 3D y se elabora un informe (Costado Dios, 2023).

La hipótesis de partida sostiene que la praxis empleada por el formador de maestros puede modificar los sistemas de creencias de sus alumnos, y, por lo tanto, su KFLM. Esta afirmación se basa en el estudio Costado Dios (2023), donde se concluye que el taller provocó un aumento en los niveles de confianza de los estudiantes al proporcionarles el proceso de aprendizaje adecuado. Para confirmar esta hipótesis, se realiza un análisis de las respuestas dadas por los estudiantes a un cuestionario aplicado antes y después del taller realizado en clases, estudiando si existía una variación significativa entre los dos conjuntos de datos obtenidos. El instrumento implementado fue el cuestionario referido a las creencias elaborado por (Gil y al. 2006). Para obtener una prueba específica relacionada con el taller intramatemático —vinculado a los subdominios del modelo MTSK—, llevamos a cabo un análisis de componentes principales (ACP) en SPSS utilizando el método de rotación Varimax con normalización de Kaiser.

Los resultados muestran cómo la praxis promueve un cambio en parte de los sistemas de creencias de los futuros docentes y, por ende, que sus conocimientos especializados puedan tener el mismo efecto. Las creencias asociadas a la autoeficacia mejoran al sentir que: son más capaces de resolver la tarea, el profesorado tiene una actitud positiva hacia ellos y son valorados. Estas afirmaciones derivan del análisis de la significancia y la d de Cohen de los ítems 6 y 9 del cuestionario. Los niveles de significancia de 0,001 y 0,005 y un coeficiente d de Cohen de 0,65 y 0,56 respectivamente indican que la tarea matemática tuvo un efecto significativo en la percepción que tienen los alumnos del apoyo y la validación de sus profesores. Del mismo modo, los resultados nos permiten discernir cómo pueden tenerse en cuenta estas relaciones para orientar posibles investigaciones futuras sobre el vínculo entre el ámbito afectivo y el modelo MTSK.

Referencias

Costado Dios M. T. (2023). Una experiencia de formación para futuros maestros de educación primaria: Implementación de una actividad de geometría y medida. *Educación Matemática, 35*(1), 255-278. https://doi.org/10.24844/EM3501.10

Gil, N., Guerrero, E. y Blanco, L. (2006). El dominio afectivo en el aprendizaje de las matemáticas. *Revista Electrónica de Investigación Psicoeducativa, 4*(1), 47-72. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=293123488003

Alegre, M. P. y Costado, M. T. (2026). Creencias en maestros en formación desde el KFML. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 621). SEIEM.

CONNECT THE DOTS: CONECTANDO CON EL CONOCIMIENTO LÓGICO-MATEMÁTICO

Connect the dots: connecting with logical-mathematical knowledge

Antequera-Barroso, J. A.[a], Cáceres-García, M. J.[b] y Sánchez-Barbero, B.[b]

[a]Universidad de Extremadura, [b]Universidad de Salamanca

Los videojuegos se presentan como una manera divertida de mostrar situaciones que las/os jugadoras/es deben solventar a través de una serie de estrategias o planteamientos que les ayuden a superar el nivel o la pantalla.

Aprovechando el carácter lúdico de los videojuegos se planteó un taller con un doble objetivo: trabajar nociones topológicas y analizar las estrategias de resolución de los diferentes niveles que ofrece el videojuego. Carmona y Cardeñoso (2019) indican que las posibles estrategias planteadas para jugar podrían ser muy similares a las utilizadas para la resolución de problemas matemáticos.

El taller se realizó con el videojuego "Connect the dots". Participaron 100 estudiantes voluntarios del Grado de Educación Primaria de la Universidad de Extremadura, cuyos datos fueron anonimizados para el tratamiento de la información recogida. El taller se llevó a cabo

1 en dos momentos: un primer momento, de juego libre, para que se familiarizasen con la dinámica del juego y un segundo momento, de juego guiado, con el fin de obtener información sobre los aspectos deseados: nociones y estrategias de resolución. La recogida de los datos se realizó a través de un informe redactado donde los participantes reflejaron toda aquella información que consideraron importante para pasar de pantalla y nivel.

Los resultados obtenidos indican que las nociones topológicas que aparecen con más frecuencia en los informes son nociones de frontera, puntos, líneas, continuidad y proximidad. Aparecen expresiones como: "*Voy a buscar puntos del mismo color y unirlos con líneas rectas sin salirme del tablero: primero los más alejados y luego los más cercanos*". En esta frase se identifican nociones topológicas en la estrategia de resolución planteada. El desarrollo de la estrategia muestra que el estudiantado que consigue superar los niveles, en su descripción, sigue unos pasos muy similares a los del modelo de Pólya (1985). Estos resultados coinciden con lo indicado por Antequera-Barroso et al. (2024).

A modo de conclusión, podríamos decir que el estudiantado, en la mayoría de los casos (67 %), identifica nociones topológicas, y un 94 % es capaz de definir algún tipo de estrategia de resolución. Por lo que los videojuegos podrían constituir una manera distinta para trabajar diferentes nociones matemáticas de una manera lúdica y divertida.

Referencias

Antequera-Barroso, J. A., Cáceres-García, M. J., Sánchez-Barbero, B. y Carmona-Medeiro, E. (2024). Portal 2: Una aproximación lúdica a la resolución de problemas. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 552). SEIEM.

Carmona, E. y Cardeñoso, J. M. (2019). Situaciones basadas en juegos de mesa para atender la elaboración del conocimiento matemático escolar. *Épsilon, Revista de Educación Matemática*, *101*, 57-81. https://thales.cica.es/epsilon_d9/node/4777

Pólya, G. (1985). *How to solve it: A new aspect of mathematical method* (2nd ed.). Princeton University Press

Antequera-Barroso, J. A., Cáceres-García, M. J. y Sánchez-Barbero, B. (2026). Connect the dots: conectando con el conocimiento lógico-matemático. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 622). SEIEM.

ROL DE EJEMPLOS Y CONTRAEJEMPLOS AL ANALIZAR LA VALIDEZ DE ENUNCIADO POR DOCENTES EN FORMACIÓN

Role of examples and counterexamples in the analysis of the validity of a statement by teachers in training

Arce, M. y Conejo, L.

Universidad de Valladolid

La formación inicial de docentes de matemáticas ha de contemplar tareas formativas para revisar y desarrollar un adecuado conocimiento matemático y didáctico de los procesos de razonamiento y prueba, como procesos matemáticos clave también en Ed. Primaria. Este póster se enmarca en un estudio longitudinal que busca determinar la trayectoria de desarrollo de este conocimiento durante la formación inicial, centrándose este póster en un análisis de la situación inicial. Se toma como modelo el *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* (MTSK, Carrillo et al., 2018), usado como marco analítico, en concreto los subdominios KoT (conocimiento de los temas) y KPM (conocimiento de la práctica matemática). El uso de este modelo se complementa con el de los *esquemas de prueba* (EP, Harel y Sowder, 2007) acerca de qué constituye certeza y persuasión sobre la veracidad de un enunciado para una persona, y con el marco REP (*Role of Examples in Proving*, Buchbinder y Zaslavsky, 2019) que analiza el rol de ejemplos y contraejemplos al justificar enunciados. Se presentan aquí los resultados del análisis de las respuestas dadas por 31 docentes de Ed. Primaria en formación inicial (DFI) al pedirles justificar la veracidad o no del enunciado (falso): "Si n es un número natural, cualquier número de la forma n^2+n+41 es un número primo", junto con el grado de convencimiento en su respuesta y si consideran que con lo hecho está ya probado o refutado el resultado, para poder identificar sus esquemas de prueba y el rol dado a ejemplos y contraejemplos. La tarea fue propuesta el primer día de clase de la primera asignatura de matemáticas y su didáctica.

De los 31 DFI participantes, 18 dieron por válido el enunciado. Trece de ellos detectaron uno o varios ejemplos sustituyendo en la expresión (KoT: procedimientos), sin detectar contraejemplos; y entre ellos once expresaron su convencimiento de que la afirmación era cierta, tomando los ejemplos como ejemplos de validación y no de apoyo (Buchbinder y Zaslavsky, 2019), y evidenciando un EP inductivo (debilidad del KPM: rol de ejemplos y contraejemplos). Entre los 13 DFI que dieron el enunciado por falso, diez de ellos encontraron un contraejemplo con n=40 o n=41 (KoT: definiciones, propiedades y fundamentos; procedimientos), pero únicamente cuatro consideran que no es necesario hacer nada más para refutar la afirmación (KPM: rol de ejemplos y contraejemplos), lo que evidencia que comprenden el rol del contraejemplo al analizar una conjetura (Buchbinder y Zaslavsky, 2019).

Trabajo vinculado a la red MTSK y apoyado por el MCIU (Referencia PID2024-158877NB-100).

Referencias

Buchbinder, O. y Zaslavsky, O. (2019). Strengths and inconsistencies in students' understanding of the roles of examples in proving. *The Journal of Mathematical Behavior, 53*, 129-147. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2018.06.010

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236–253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Harel, G. y Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. En F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 805– 842). Information Age.

Arce, M. y Conejo, L. (2026). Rol de ejemplos y contraejemplos al analizar la validez de enunciado por docentes en formación. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 623). SEIEM.

FORMULACIÓN DE PROBLEMAS DE ABSTRACCIÓN EN EL MARCO DEL PENSAMIENTO COMPUTACIONAL DESENCHUFADO

Posing abstraction problems within the framework of unplugged computational thinking

Arencibia Cabrera, J. M.[a], Perdomo-Díaz, J.[b] y Quevedo Gutiérrez, E. G.[a]

[a]Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, [b]Universidad de La Laguna

La incorporación del pensamiento computacional (PC) en la educación matemática exige formar al profesorado en el diseño de tareas que promuevan sus habilidades. Entre ellas se encuentra la abstracción, entendida como una habilidad compuesta por subhabilidades, entre las que se incluye la generalización (Çakiroğlu y Çevik, 2022). Este trabajo se centra en la formulación de problemas que invitan a pasar del estudio de casos particulares de una situación a una expresión general de la misma. El objetivo es analizar cómo futuros docentes formulan problemas de generalización, como subhabilidad asociada a la abstracción, en el marco de una propuesta formativa sobre PC. El estudio, de carácter exploratorio, se desarrolló con estudiantes de primero de Educación Primaria de la Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. La propuesta formativa se centró en la formulación de problemas como estrategia para trabajar cuatro habilidades del PC: descomposición, reconocimiento de patrones, abstracción y diseño e implementación de algoritmos. La formación duró 6 horas en las que se utilizaron dos situaciones de referencia adaptadas a cada una de las habilidades del PC (Quevedo et al., 2025). Se consideró que un problema es de abstracción cuando ofrece ejemplos suficientes y solicita una generalización aplicable a cualquier cantidad de números, de forma descriptiva o mediante una expresión matemática (de Armas et al., 2026).

En este trabajo se presentan ejemplos de problemas plausibles, planteados por los participantes, que muestran formulaciones diferentes de los ejemplos de referencia. El análisis de estos ejemplos permite observar cómo el futuro profesorado concreta esta habilidad al formular problemas escolares, considerando la relación entre la generalización solicitada, el contexto de la situación descrita y la precisión de la pregunta formulada. Además, se ofrece una aproximación preliminar a las dificultades que emergen al formular problemas de abstracción en términos de generalización.

Agradecimientos: Este trabajo ha sido realizado gracias al apoyo del proyecto PID2022-139007NB-I00 financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033/ FEDER, UE y al contrato predoctoral FPU2024/03951 financiado por el Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades.

Referencias

Çakiroğlu, Ü. y Çevik, İ. (2022). A framework for measuring abstraction as a sub-skill of computational thinking in block-based programming environments. *Education and Information Technologies*, *27*(7), 9455-9484. https://doi.org/10.1007/s10639-022-11019-2

De-Armas González, P., Perdomo Díaz, J. y Quevedo Gutiérrez, E. G. (2026). Formular problemas para el desarrollo de habilidades de pensamiento computacional. *UNO,* 111, 31–37.

Quevedo Gutiérrez, E., Perdomo-Díaz, J., Lijó Sánchez, R. y de-Armas-González, P. (2025). Formulación de problemas de reconocimiento de patrones en el marco del pensamiento computacional. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marvin e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. 373-380). SEIEM.

Arencibia Cabrera, J. M., Perdomo-Díaz, J. y Quevedo Gutiérrez, E. G. (2026). Formulación de problemas de abstracción en el marco del pensamiento computacional desenchufado. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 624). SEIEM.

SIGNIFICADOS DEL PORCENTAJE: UNA REVISIÓN SISTEMÁTICA DE LA LITERATURA

Meanings of percentage: a systematic literature review

Arias, J. R. y Arce, M.

Universidad de Valladolid

El porcentaje es un concepto valioso para la alfabetización matemática ciudadana, por su amplia presencia y utilidad en situaciones cotidianas, ya sea en contextos económicos o de tratamiento de la información. El currículo de matemáticas refleja su importancia con contenidos en Educación Primaria y en la ESO asociados a su comprensión e interpretación, su relación con las fracciones y los números decimales y la resolución de problemas. Su complejidad no reside en su cálculo aritmético sino en su carácter multifacético complejo (Parker y Leinhardt, 1995), asociado a una red de significados interconectados cuya interpretación depende intrínsecamente del contexto de uso.

El objetivo de la investigación es identificar los significados del porcentaje presentes en la investigación en didáctica de la matemática, mediante una revisión sistemática que sirva de punto de partida para futuras investigaciones. Entenderemos significado en el sentido de Castro-Rodríguez et al. (2016), como un triángulo semántico que engloba la estructura conceptual, los sistemas de representación y los contextos y modos de uso. La revisión sigue las directrices PRISMA, con búsquedas en Web of Science, Scopus, ERIC y Google Scholar, usando los descriptores *percent, percentage, concept, notion, conceptualization, teaching* y *learning*, y sus equivalentes en español, combinados con operadores booleanos. De 1190 registros iniciales se obtuvieron 74 tras aplicar criterios de inclusión/exclusión (y eliminar duplicados): estudios centrados explícitamente en el concepto de porcentaje, con enfoque cognitivo, de Educación Primaria y Secundaria (excluyendo otras etapas), artículos revisados por pares (excluyendo otras contribuciones) a los que tenemos acceso, publicados desde 1990 en inglés o español. Una lectura minuciosa del resumen y marco teórico de los artículos permitió seleccionar un conjunto semilla de 9 artículos, sometidos a tres ciclos de la técnica de la bola de nieve (Wohlin, 2014) obteniéndose al final 49 artículos para el análisis.

La revisión muestra un volumen de producción científica reducido en relación con la relevancia curricular del porcentaje, lo que evidencia que no ha recibido la atención investigadora que su complejidad y su presencia en la vida cotidiana merecen. El análisis final de los 49 artículos permitió identificar siete significados del porcentaje: como fracción, entendida como partición de un todo definido como 100 unidades; como razón, esto es, relación proporcional entre dos cantidades distintas; como cantidad intensiva, índice que relaciona dos cantidades de diferente naturaleza; como punto de referencia, anclaje cognitivo para estimar y comparar cantidades, como operador multiplicativo, factor que transforma una cantidad en otra; como función compuesta, combinación de operadores en ajustes multietapa; y como número racional.

Referencias

Castro-Rodríguez, E., Pitta-Pantazi, D., Rico, L. y Gómez, P. (2016). Prospective teachers' understanding of the multiplicative part-whole relationship of fraction. *Educational Studies in Mathematics, 92*, 129-146. https://doi.org/10.1007/s10649-015-9673-4

Parker, M. y Leinhardt, G. (1995). Percent: A privileged proportion. *Review of Educational Research*, *65*(4), 421-481. https://doi.org/10.3102/00346543065004421

Wohlin, C. (2014). Guidelines for snowballing in systematic literature studies and a replication in software engineering. En *EASE'14: Proceedings of the 18th International Conference on Evaluation and Assessment in Software Engineering* (38, pp. 1-10). ACM. https://doi.org/10.1145/2601248.2601268

Arias, J. R. y Arce, M. (2026). Significados del porcentaje: una revisión sistemática de la literatura. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 625). SEIEM.

ANÁLISIS EXPLORATORIO DE LA DIFICULTAD DEL PORCENTAJE SEGÚN SUS SIGNIFICADOS

Exploratory analysis of percentage difficulty across its meanings

Arias, J. R., Sanz-Herranz, H., Arce, M. y Cuida, M. A.

Universidad de Valladolid

El porcentaje es un contenido central en educación matemática escolar por su presencia en contextos cotidianos, económicos, estadísticos y científicos. Sin embargo, su comprensión no se reduce a interpretarlo como una fracción de denominador 100, sino que exige coordinar distintos significados matemáticos. El porcentaje puede funcionar como relación parte-todo, razón, número racional, operador multiplicativo o cantidad intensiva (Parker y Leinhardt, 1995); pluralidad conceptual que explica que tareas aparentemente próximas requieran razonamientos muy diferentes. Asimismo, el dominio de las relaciones entre porcentajes, fracciones, decimales, proporciones y operadores multiplicativos favorecen la comprensión del concepto (Dole, 2000; Moss y Case, 1999).

El objetivo de este estudio es analizar empíricamente qué significados del porcentaje resultan más accesibles para el alumnado y cuáles generan mayores dificultades. Para ello se adoptó, a partir de la literatura (Arias y Arce, 2026), una categorización de los significados del porcentaje que sirvió como marco analítico para revisar *ex post facto* un conjunto de tareas sobre porcentajes disponibles en un entorno virtual de aprendizaje. Dado el carácter exploratorio del estudio, el análisis se centró en tres tareas de naturaleza comparable que podían vincularse de forma clara con tres de estos significados. La primera activaba el porcentaje como relación parte-todo a partir de una cuadrícula 10 por 10 parcialmente sombreada. La segunda lo activaba como número racional estableciendo su equivalencia con el porcentaje. La tercera como operador multiplicativo pidiendo calcular el porcentaje de una cantidad. La muestra estuvo formada por 13.863 estudiantes de entre 9 y 14 años, procedentes de diferentes países, con predominio de España. Las respuestas fueron recogidas a lo largo de 2025.

El análisis preliminar muestra diferencias relevantes entre las tres tareas analizadas. La tarea vinculada al porcentaje como relación parte-todo presentó la mayor tasa de efectividad, con un 94 % de respuestas correctas y una mediana del tiempo de respuesta de 5 segundos. La tarea asociada al porcentaje como número racional alcanzó una efectividad del 78,6 %, con una mediana de 7 segundos. Por último, la tarea en la que el porcentaje funcionaba como operador multiplicativo obtuvo una efectividad del 70,3 % y una mediana de respuesta de 20 segundos. Estos resultados sugieren que la complejidad de una tarea de porcentaje no depende únicamente de los números implicados, sino también del significado porcentual que se moviliza y de la representación utilizada.

Referencias

Arias, J. R. y Arce, M. (2026). Significados del porcentaje: una revisión sistemática de la literatura. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 625). SEIEM.

Dole, S. (2000). Promoting percent as a proportion in eighth-grade mathematics. *School Science and Mathematics, 100*(7), 380–389. https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2000.tb18180.x

Moss, J. y Case, R. (1999). Developing children's understanding of the rational numbers: A new model and an experimental curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(2), 122–147. https://doi.org/10.2307/749607

Parker, M. y Leinhardt, G. (1995). Percent: A privileged proportion. *Review of Educational Research, 65*(4), 421–481. https://doi.org/10.2307/1170703

Arias, J. R., Sanz-Herranz, H., Arce, M. y Cuida, M. A. (2026). Análisis exploratorio de la dificultad del porcentaje según sus significados. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 626). SEIEM.

MIRADA PROFESIONAL DE ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN ESPECIAL DURANTE UN CURSO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA PARA LA DIVERSIDAD

Teacher noticing of pre-service special education teachers during a course on mathematics education for diversity

Arriagada, V., Vargas, J. y Astudillo, S.

Universidad de Las Américas

La competencia docente mirada profesional -identificar, interpretar y decidir- se ha estudiado desde distintas perspectivas. Situaciones de enseñanza ocurridas en el aula que enfrentan docentes de matemática, pensamiento matemático de los estudiantes y video clubs son enfoques que se han fortalecido gracias al estudio de esta competencia. Sin embargo, la literatura internacional sobre la competencia mirada profesional se ha centrado en futuros docentes de matemática, en docentes de matemática en ejercicio, formadores de formadores y docentes en posición de liderazgo, pasando por alto a profesores de educación especial que en Chile tienen un rol de codocencia en las aulas de matemáticas de educación básica. Estos estudios han mostrado que, si bien para los docentes es más difícil interpretar, logran razonar sobre el pensamiento matemático de sus estudiantes (Jacobs et al., 2024). El presente estudio se realizó con enfoque formativo en una carrera Pedagogía en Educación Especial en Chile, con estudiantes de pedagogía de la cohorte de cuarto año (n=15) que cursaban el curso *Didáctica de las matemáticas para la atención a la diversidad*. En la mitad del curso, se les presentó un problema y el ejemplo de 6 respuestas reales de estudiantes escolares de un liceo público en Chile (7-8 años) al resolver dicho problema con el propósito de reflexionar sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para la inclusión de estudiantes con discapacidad. Los estudiantes de pedagogía respondieron las siguientes preguntas por escrito y después se realizó una plenaria donde todos compartieron y discutieron sus respuestas: 1. ¿Qué características del problema identificas que pueden favorecer u obstaculizar el aprendizaje de estudiantes con discapacidad? (identificar). 2. ¿Qué patrones, errores o estrategias puedes identificar en las respuestas de los estudiantes? (identificar) 3. ¿Qué inferencias puedes realizar sobre el nivel de comprensión matemática de los estudiantes a partir de sus respuestas? (interpretar) 4. Si usted fuera profesor/a de estos estudiantes y tuviera que implementar este problema en su clase, ¿qué decisiones tomaría para el trabajo con estudiantes con discapacidad? (decidir). Se realizó un análisis de contenido de las respuestas (Cohen, 2007). Los resultados muestran que estudiantes de pedagogía: a) identifican dificultades para que todos los estudiantes puedan resolver el problema tal como se encuentra presentado, b) si bien se dan cuenta que no todos los estudiantes resuelven correctamente el problema, no interpretan el razonamiento de los estudiantes, c) si bien identifican dificultades en la estrategias utilizadas, no realizan inferencias sobre el nivel de comprensión de los estudiantes, d) las decisiones se centran en la entrega del problema y cómo se podría adaptar considerando distintas discapacidades o dificultades de aprendizaje de los estudiantes. Los resultados muestran la importancia de que tanto profesor de matemáticas como profesor de educación especial fortalezcan sus oportunidades de colaboración para que todos los estudiantes puedan aprender de forma más accesible, humana y respetuosa porque un profesional ve lo que el otro no. El poster presentará el problema, las 6 respuestas de estudiantes escolares y ejemplos de respuestas de estudiantes de pedagogía.

Referencias

Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2007). *Research Methods in Education*. Routledge.

Jacobs, V. R., Empson, S. B., Jessup, N. A., Dunning, A., Pynes, D. A., Krause, G. y Franke, T. M. (2024). Profiles of teachers' expertise in professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal of Mathematics Teacher Education,* 27(3), 295-324. https://doi.org/10.1007/s10857-022-09558-z

Arriagada, V., Vargas, J. y Astudillo, S. (2026). Mirada profesional de estudiantes de educación especial durante un curso de didáctica de la matemática para la diversidad. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 627). SEIEM.

LA COMPETENCIA MATEMÁTICA EN PROYECTOS STEAM: UNA EXPERIENCIA EN EDUCACIÓN PRIMARIA

Mathematical competence in STEAM projects: an experience in primary education

Arrieta, N., Sagarduy, A., Zamalloa, T. y Villarroel, J. D.

Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea (UPV/EHU)

El enfoque STEAM se ha consolidado como estrategia innovadora para promover aprendizajes interdisciplinarios y contextualizados. La evidencia científica señala que, en muchas propuestas STEAM, la Competencia Matemática tiende a diluirse o reducirse a un uso procedimental (Rodrigues-Silva y Alsina, 2022). Diversos estudios destacan la importancia de metodologías activas, como el Aprendizaje Basado en Problemas y en Proyectos, la Gamificación, y el Aprendizaje Basado en Inteligencia Artificial, para favorecer la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en contextos STEAM (Ortiz-Laso et al., 2023). Sin embargo, aún existe escasa evidencia sobre su impacto en el desarrollo de la Competencia Matemática (Diego-Mantecon et al., 2021), lo que hace necesario profundizar en propuestas que la integren explícitamente. Este trabajo analiza una experiencia educativa del *Basque Center for Applied Mathematics* (BCAM) dentro del proyecto *ORE4Citizens (Horizon Europe MSCA),* orientado a acercar la ciencia a la ciudadanía mediante las energías renovables marinas (ORE) y la educación STEAM. La propuesta consistió en una visita educativa al BCAM, donde el alumnado participó en actividades de resolución de problemas contextualizados vinculados al funcionamiento de aerogeneradores. El estudio se enmarca en un análisis de caso en el que se examinaron las producciones (resoluciones de problemas, representaciones y registros escritos) de 24 estudiantes de tercer ciclo de Primaria y las observaciones sistemáticas realizadas durante la intervención. El análisis se estructuró mediante un sistema de categorías centrado en: (i) la coherencia con los principios del enfoque STEAM (reto contextualizado, indagación y/o resolución de problemas e integración disciplinar) y (ii) la alineación curricular con los contenidos (series numéricas, fracciones, ángulos y representación gráfica) y procesos (razonamiento, representación y conexión) de la Competencia Matemática. Los resultados muestran una alta implicación y motivación del alumnado hacia las matemáticas y las profesiones científico-tecnológicas. Aunque la experiencia fue coherente con los principios del enfoque STEAM y la alineación curricular, se identificaron dificultades en la comprensión del vocabulario técnico, evidenciando la necesidad de incorporar apoyos previos, adaptación del lenguaje y recursos visuales. Asimismo, se observaron niveles diferenciados en el desempeño de procesos matemáticos, con mayor desarrollo de la representación y la conexión que del razonamiento en la resolución de problemas contextualizados.

Referencias

Diego-Mantecon, J. M., Prodromou, T., Lavicza, Z., Blanco, T. F. y Ortiz-Laso, Z. (2021). An attempt to evaluate STEAM project based instruction from a school mathematics perspective. *ZDM Mathematics Education, 53*(5), 1137–1148. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01303-9

Ortiz-Laso, Z., Diego-Mantecón, J.M., Lavicza, Z. y Blanco, T. (2023). Teacher growth in exploiting mathematics competencies through STEAM projects. *ZDM—Mathematics Education*, *55*, 1283–1297 https://doi.org/10.1007/s11858-023-01528-w

Rodrigues-Silva J. y Alsina, Á. (2022). Las matemáticas desde el abordaje STEAM en la educación primaria: una revisión sistemática de la literatura. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 509-518). SEIEM.

Arrieta, N., Sagarduy, A., Zamalloa, T. y Villarroel, J. D. (2026). La Competencia Matemática en Proyectos STEAM: una experiencia en Educación Primaria En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 628). SEIEM.

PROCESOS MATEMÁTICOS EN UN PROYECTO STEAM: PERCEPCIÓN DEL PROFESORADO VS. REALIDAD

Mathematical processes in a STEAM project: teachers' perception vs. reality

Arrieta, I., Baro, I. e Izagirre, A.

Euskal Herriko Unibertsitatea/Universidad del País Vasco

La educación STEAM se considera un enfoque adecuado para hacer frente a los retos del siglo XXI, ya que integra las competencias técnicas y sociales que necesita el alumnado (Wahyuningsih et al., 2020). En el área de las matemáticas, el *National Council of Teachers of Mathematics* (2000) definió los siguientes cinco procesos de la práctica matemática: resolución de problemas, razonamiento y prueba, comunicación, conexiones y representación. Dichos procesos son considerados pertinentes para garantizar un proceso de enseñanza y aprendizaje de calidad, promoviendo una enseñanza que priorice el pensar y hacer ante memorizar y repetir (Alsina et al., 2022).

El objetivo de este trabajo es contrastar la percepción del profesorado de Educación Primaria sobre los procesos matemáticos trabajados en un proyecto STEAM titulado "Estudio del suelo" con los procesos que se trabajan realmente. El proyecto se implementa en cuatro aulas de 4º curso pertenecientes a un mismo centro educativo de Guipúzcoa.

Para ello, se emplea una metodología cualitativa con un enfoque interpretativo. Por un lado, la percepción del profesorado se analizó en un trabajo previo (Arrieta et al., 2024); por otro, las investigadoras examinan las actividades planteadas por el profesorado y los procesos matemáticos que emergen de su implementación. Finalmente, se contrastan ambos resultados.

Los análisis realizados indican que, aunque el profesorado identificó únicamente el proceso de resolución de problemas, mediante dicho proyecto también se trabajan otros procesos, como la comunicación, las conexiones y la representación. En consecuencia, el proceso de razonamiento y prueba es el único que no se aborda en el proyecto "Estudio del suelo".

Agradecimientos: Trabajo parcialmente financiado por el proyecto de investigación Hezkuntza25/05 y el grupo GIU21/031.

Referencias

Alsina, Á., Contreras, M. y Reyes, J. (2022). Matemáticas en contexto en Educación Primaria: conexiones con el entorno y la música. *UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 20,* 13-31. https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/250/387

Arrieta, I., Baro, I. e Izagirre, A. (2024). Percepción del profesorado sobre el uso de los procesos matemáticos en un proyecto STEAM. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 558). SEIEM

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. NCTM.

Wahyuningsih, S., Nurjanah, N. E., Rasmani, U. E. E., Hafidah, R., Pudyaningtyas, A. R. y Syamsuddin, M. M. (2020). STEAM learning in early childhood education: A literatura review, *International Journal of Pedagogy and Teacher Education, 4*(1), 33-44. https://doi.org/10.20961/ijpte.v4i1.39855

Arrieta, I., Baro, I. e Izagirre, A. (2026). Procesos matemáticos en un proyecto STEAM: percepción del profesorado vs. realidad. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 629). SEIEM.

INTEGRACIÓN DE LA COMPETENCIA MATEMÁTICA EN EL ENFOQUE STEAM: ANÁLISIS DE PROPUESTAS EN LA FORMACIÓN INICIAL DOCENTE

Integration of mathematical competence in the STEAM approach: analysis of proposals in initial teacher education

Arrieta, N., Sagarduy, A., Zamalloa, T. y Villarroel, J. D.

Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea (UPV/EHU)

En el marco legislativo educativo actual, la Competencia STEM en su dimensión curricular, vinculada a Matemáticas, Ciencia, Tecnología e Ingeniería, se incorpora como fundamental desde las primeras etapas educativas, considerando la matemática como una competencia clave integrada (Beltrán-Pellicer y Alsina, 2022). Aunque las matemáticas facilitan un lenguaje universal entre disciplinas, algunos autores advierten el riesgo de que pierdan visibilidad como área de conocimiento, de modo que sus objetivos de aprendizaje –tanto conceptuales como procedimentales– queden relegados bajo la suposición de que están inherentemente presentes en el enfoque pedagógico STEAM (que integra las artes en el marco STEM) (Rodrigues-Silva y Alsina, 2022). En este contexto, resulta fundamental promover una formación especializada en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas que favorezca una comprensión profunda de la disciplina, sus contenidos y procesos, entre el futuro profesorado (Ortiz-Laso et al., 2023). En este trabajo se presenta un análisis de proyectos STEAM diseñados para Educación Primaria, con el objetivo de identificar de qué manera contribuyen al desarrollo de la Competencia Matemática. El estudio se sitúa en el ámbito de la formación inicial del profesorado y se desarrolla en el contexto de la asignatura *Matemática y su Didáctica II* del Grado de Educación Primaria. El análisis se centra en un conjunto de 60 actividades diseñadas por estudiantes universitarios en el marco de un proyecto STEAM de la asignatura basado en metodologías activas. Para el marco de análisis se considera el tipo de tareas matemáticas implicadas, los procesos matemáticos promovidos y el grado de integración de las matemáticas dentro del enfoque STEAM. Concretamente, se analiza la alineación curricular de las propuestas con los descriptores operativos de la Competencia STEM, la integración de los estándares de procesos matemáticos –resolución de problemas, razonamiento y prueba, comunicación, conexiones y representación, así como, según el currículo actual, destrezas socioafectivas–, así como las metodologías de enseñanza empleadas. Los resultados identifican diferentes formas de integrar la Competencia Matemática en proyectos STEAM y evidencian las dificultades del futuro profesorado para incorporarla de manera explícita en el diseño de estas propuestas, destacando la necesidad de apoyo y formación especializada. Asimismo, aportan orientaciones para la formación inicial docente para el desarrollo significativo de la Competencia Matemática en contextos STEAM.

Referencias

Beltrán-Pellicer, P. y Alsina, Á. (2022). La Competencia Matemática en el currículo español de Educación Primaria. *Márgenes, 3*(2), 31-58. https://doi.org/10.24310/mgnmar.v3i2.14693

Ortiz-Laso, Z., Diego-Mantecón, J.M., Lavicza, Z. y Blanco, T. (2023). Teacher growth in exploiting mathematics competencies through STEAM projects. *ZDM Mathematics Education 55*, 1283–1297 https://doi.org/10.1007/s11858-023-01528-w

Rodrigues-Silva, J. y Alsina, Á. (2022). Las matemáticas desde el abordaje STEAM en la educación primaria: una revisión sistemática de la literatura. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 509-518). SEIEM.

Arrieta, N., Sagarduy, A., Zamalloa, T. y Villarroel, J. D. (2026). Integración de la competencia matemática en el enfoque STEAM: análisis de propuestas en la formación inicial docente. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 630). SEIEM.

EL *ESCAPE ROOM* DIGITAL COMO RECURSO PARA EL APRENDIZAJE DE LAS MEDIDAS DE CENTRALIZACIÓN EN DOCENTES EN FORMACIÓN DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Learning measures of central tendency through a digital escape room in pre-service primary education teachers

Arrieta, I.

Euskal Herriko Unibertsitatea/Universidad del País Vasco

Con frecuencia, la didáctica de las Matemáticas ha sido descrita como una de las áreas que mayores dificultades genera en el alumnado (Coronado-Hijón, 2016), observándose habitualmente una escasa motivación e interés hacia esta disciplina. En cuanto a las medidas de centralización, son varias las investigaciones que detallan las dificultades de estudiantes de educación primaria y secundaria (Batanero et al., 2003). En este contexto, durante los últimos años se ha producido un notable auge de metodologías innovadoras, entre las que destaca el Aprendizaje Basado en Juegos. Una de las estrategias más empleadas dentro de esta metodología es el uso del *escape room*, cuyos beneficios educativos han sido analizados en diversas investigaciones (García-Tudela et al., 2020).

El objetivo de este trabajo es analizar las percepciones de estudiantes del Grado en Educación Primaria sobre la implementación de un *escape room* digital para la enseñanza de las medidas de centralización (media, mediana y moda), atendiendo a su motivación, interés y percepción de transferencia didáctica. La muestra, seleccionada por conveniencia, estuvo compuesta por 69 estudiantes de tercer curso del Grado en Educación Primaria de la Facultad de Educación, Filosofía y Antropología de Donostia. Se adoptó un diseño cuantitativo descriptivo. La recogida de datos se realizó mediante un cuestionario de satisfacción de tipo Likert (1–5), a partir del cual se calcularon medias y porcentajes de respuesta.

Los resultados muestran valoraciones elevadas en la totalidad de los ítems, con medias comprendidas entre 3.9 y 4.8 y una media global aproximada de 4.48. Los ítems relacionados con motivación, interés y utilidad didáctica presentan especialmente altas puntuaciones. Los hallazgos sugieren que esta metodología favorece tanto el aprendizaje de contenidos matemáticos como el desarrollo profesional docente.

Referencias

Batanero, C., Arteaga, P. y Ruiz, B. (2009). Análisis de la complejidad semiótica de los gráficos producidos por futuros profesores de educación primaria en una tarea de comparación de dos variables estadísticas. *Enseñanza de las Ciencias, 28*(1), 141-154. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3627

Coronado-Hijón, A. (2016). Resiliencia académica ante las dificultades de aprendizaje de las matemáticas. En J. Gómez, E. López-Meneses eta L. Moida (Eds.), *Instructional strategies in teacher training* (pp. 202-209). UMET Press.

García-Tudela, P.A., Solano-Fernández, I.M. y Sánchez-Vera, M.M. (2020). Análisis de una Escape Room educativa en clase de matemáticas de educación primaria. *REDIMAT – Journal of Research in Mathematics Education, 9*(3), 273-297. https://doi.org/10.17583/redimat.2020.4437

Arrieta, I. (2026). El escape room digital como recurso para el aprendizaje de las medidas de centralización en docentes en formación de educación primaria. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 631). SEIEM.

ENSEÑANZA DE LA PROBABILIDAD DESDE UNA PERSPECTIVA ETNOMATEMÁTICA

Teaching probability from an ethnomathematics perspective

Barrientos, A., Benavides, J., Concha, R. y Pallauta, J. D.

Universidad de Los Lagos

La Etnomatemática reconoce diversas formas de hacer matemática vinculadas a tradiciones y conocimientos culturales. Desde esta perspectiva, el aprendizaje matemático favorece la valoración de la identidad cultural y el respeto por distintos saberes (D'Ambrosio, 2008). Además, integra conocimientos escolares y experiencias culturales de los estudiantes, otorgando significado contextualizado al aprendizaje. En consecuencia, la práctica escolar adquiere un sentido más inclusivo y significativo orientado en la comprensión sobre el entorno cultural (Albanese, 2024).

El estudio de la probabilidad permite analizar situaciones de incertidumbre en las que no se puede anticipar con certeza un resultado. En la sociedad actual basada en los datos, la probabilidad adquiere especial relevancia, por ello es considerado en la formación escolar. El estudio de la probabilidad implica un razonamiento probabilístico que abarca la comprensión de diversos conceptos junto con la toma de decisiones en contextos de incertidumbre, así como la capacidad de interpretar, argumentar y comunicar. Sin embargo, su enseñanza suele centrarse en procedimientos mecánicos y descontextualizados (Batanero y Borovcnik, 2016).

El objetivo de este trabajo es conectar la enseñanza de la probabilidad con la Etnomatemática en estudiantes chilenos de Educación Media. Participaron 48 estudiantes de 3° curso (16 a 17 años), quienes resolvieron de manera grupal una situación contextualizada, con preguntas abiertas, sobre probabilidad con una mirada Etnomatemática. Las respuestas fueron analizadas mediante un análisis de contenido (Cohen et al., 2018), utilizando las categorías de conocimiento cultural, conocimiento escolar y conocimiento personal basadas en los tipos de conocimientos propuestos por Blanco-Álvarez (2023). Los resultados indican que el estudiantado fundamenta, principalmente, sus decisiones en conocimientos culturales y experiencias personales, mientras que los conocimientos escolares aparecen con menor frecuencia. Esto evidencia que, frente a situaciones de incertidumbre cercanas a su realidad, los estudiantes recurren a experiencias previas, observaciones locales y creencias que consideran confiables. En conjunto, los resultados sugieren que trabajar la probabilidad de manera contextualizada favorece una comprensión coherente y más significativa de la probabilidad.

Agradecimientos: ANID - Proyecto de Fortalecimiento a los Programas de Doctorado n.° 86220016.

Referencias

Albanese, V. (2024). Una perspectiva etnomatemática de la contextualización de problemas matemáticos. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 97-104). SEIEM.

Batanero, C. y Borovcnik, M. (2016). *Statistics and probability in high school*. Sense Publishers. https://doi.org/10.1007/978-94-6300-624-8

Blanco-Álvarez, H. (2023). Clasificación de actividades matemáticas diseñadas desde la etnomatemática. En I-A. Londoño-Agudelo y H. Blanco-Álvarez (Eds.), *Reflexiones sobre Educación Matemática desde la Etnomatemática* (pp. 1-10). Editorial Universidad de los Llanos.

Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2018). *Research methods in education* (8va ed.). Routledge. https://doi.org/10.4324/9781315456539

D'Ambrosio, U. (2008). *Etnomatemática: Eslabón entre las tradiciones y la modernidad*. Limusa.

Barrientos, A., Benavides, J., Concha, R. y Pallauta, J.D. (2026). Enseñanza de la probabilidad desde una perspectiva Etnomatemática. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 632). SEIEM.

ANÁLISIS DE PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN ESTADÍSTICA EN FORMACIÓN INICIAL DE DOCENTES

Analysis of statistical research questions in pre-service teacher education

Bizet-Leyton, V. C.[a], Fraile-González, J.[a], Méndez-Coca, M.[a] y Cid-Cid, A. I.[b]

[a]Universidad Complutense de Madrid, [b]Universidad Rey Juan Carlos

El objetivo de la investigación es analizar las preguntas de investigación estadística que formulan los estudiantes de 3º curso del grado de Pedagogía General Básica de Chile en una sesión de formación. En educación estadística se recomienda utilizar el ciclo de investigación como elemento integrador para promover la alfabetización estadística evitando reducirla a un conjunto de técnicas aisladas y descontextualizadas (Batanero et al., 2011). El informe GAISE II (Bargagliotti et al., 2020) organiza el ciclo de resolución de problemas estadísticos en cuatro fases interrelacionadas: formular preguntas estadísticas, recoger datos, analizar los datos e interpretar los resultados. La formulación de la pregunta de investigación constituye una fase central de la investigación, condicionando la recogida, el análisis y la interpretación de los datos. No obstante, la formulación de preguntas tiende a quedar relegada en la práctica de aula, por lo que se ha señalado la importancia de abordar este proceso en la formación inicial docente (Ubilla, 2019). En este estudio se sigue una metodología cualitativa de estudio de caso con dos grupos –de 11 y 21 estudiantes– de Pedagogía General Básica de una universidad de Chile. Se realizó con cada grupo una sesión de 2 horas para trabajar la formulación de preguntas. Analizamos las preguntas formuladas clasificándolas, según su complejidad estadística, a partir de los tres niveles del GAISE (A, B, C).

Todas las preguntas recogidas se encuentran en un nivel A, con un foco principalmente descriptivo y una formulación próxima a la de una pregunta de recogida de datos (Leavy et al., 2022) "¿cuántos ml de agua consumen al día los estudiantes de esta clase?". Algunas de ellas evidenciaban la necesidad de recopilar y calcular medidas de centralización "¿cuántas horas en promedio duermen los estudiantes de este grupo?" y "¿cuál es deporte más practicado por los estudiantes de este grupo? Sin embargo, ninguna de las preguntas formuladas busca la comparación entre muestras ni cuestiones de carácter multivariable o inferencial (niveles B y C). Esta escasez de preguntas de investigación complejas puede deberse a una falta de abordaje suficientemente profunda en las etapas educativas básicas. Esta formación deficiente deriva en un conocimiento insuficiente para afrontar, además, su enseñanza. En este sentido, resulta necesario desarrollar propuestas que les permitan avanzar hacia niveles más complejos y a la vez desarrollar un conocimiento didáctico de este contenido.

Referencias

Bargagliotti, A., Franklin, C., Arnold, P., Gould, R., Johnson, R., Ketterlin-Geller, L., Scheaffer, R. y Witmer, J. (2020). Pre-K–12 Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education II (GAISE II): A framework for statistics and data science education. American Statistical Association.

Batanero, C. y Díaz, C. (2011). Estadística con proyectos. Universidad de Granada.

Leavy, A. y Frischemeier, D. (2022) Developing the statistical problem posing and problem refining skills of prospective teachers. Statistics Education Research Journal, 21(1), https://doi.org/10.52041/serj.v21i1.226

Ubilla, F. (2019). Componentes del sentido estadístico identificados en un ciclo de investigación estadística desarrollado por futuras maestras de primaria. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 583–592). Universidad de Valladolid y SEIEM.

Bizet-Leyton, V. C., Fraile-González, J., Méndez-Coca, M. y Cid-Cid, A. (2026). Análisis de preguntas de investigación estadística en formación inicial de docentes. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 633). SEIEM.

ANÁLISIS DIDÁCTICO DE MATERIALES TÁCTILES PARA GEOMETRÍA: ESTUDIO DE CASO

Didactic analysis of tactile materials for geometry: a case study

Blanco, T. F., Fernández-López, A., Lois-Prados, C. y Mariño-Fernández, S.

Universidade de Santiago de Compostela

Este trabajo presenta la evaluación de diversos materiales educativos táctiles para el aprendizaje de la geometría. Se trata de un estudio de caso en el que se analizan en profundidad las interacciones de dos estudiantes con distinto grado de discapacidad visual. El trabajo se enmarca en el proyecto Geo3DTouch, cuyo objetivo es mejorar la educación inclusiva del alumnado con discapacidad visual mediante recursos generados con modelado 3D que faciliten la comprensión de conceptos geométricos a través de la exploración táctil (Lois-Prados, 2025; Vázquez-Feijoo, 2026).

La recogida de datos se fundamenta en la Idoneidad Didáctica del Enfoque Ontosemiótico (EOS) como modelo que estructura el análisis del diseño y uso de los materiales (Godino, 2024). Esto se concreta mediante una entrevista semiestructurada y una guía de observación como instrumentos de recogida de datos. La entrevista aborda la idoneidad mediacional al centrarse en la adecuación física del material; la idoneidad epistémica y cognitiva al examinar la correspondencia entre las características del recurso y los conceptos que se pretenden construir; y la idoneidad afectiva al considerar su valor educativo y emocional desde la perspectiva del alumnado. La guía de observación recoge la interacción inicial, estrategias de exploración, dificultades, comprensión, uso del material y dimensión afectiva. Los materiales diseñados abordan tres contenidos: simetrías, figuras planas y conversiones entre representaciones (física, ortogonal e isométrica). Para simetrías, se utilizan piezas plegables con cortes asociados a ejes que permiten comprobar coincidencias. En figuras planas, para su reconocimiento en arte geométrica, se emplean láminas y ceras que comparten un código color-forma para facilitar su identificación y reproducción. Para las conversiones, se combinan acoples adaptados a policubos, piezas imantadas cuadradas y piezas encajables triangulares para una trama isométrica en relieve.

Los resultados evidencian una adecuada idoneidad mediacional, favoreciendo la exploración táctil y la interacción con los objetos. No obstante, se identifican mejoras orientadas a optimizar la accesibilidad perceptiva como incrementar la extrusión, añadir marcas laterales en configuraciones de simetría y perfeccionar el código de texturas en la representación de obras de arte. Respecto a la idoneidad cognitiva, se constata que la acción manipulativa facilita la comprensión, estableciendo una relación sólida entre la actividad práctica y la construcción de los conceptos por parte del alumnado. Desde la idoneidad afectiva, ambos estudiantes muestran emociones positivas y valoran su utilidad más allá de contextos de apoyo.

Referencias

Lois-Prados, C., Blanco, T.F., Fernández-López, A. y Gorgal-Romarís, A. (2025). Faceta cognitive de futuros maestros a través del modelado de maquetas 3D inclusivas. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), Investigación en Educación Matemática XXVIII (pp. 509). SEIEM.

Vázquez-Feijoo, V., Blanco, T.F., Fernández-López, A., Albella-Martínez, J. y Gorgal-Romarís A. (2026). Geometry with soul: promoting inclusion through art in elementary school. Proceedings of INTED2026, Article 0649. https://doi.org/10.21125/inted.2026.0649

Godino, J. D. (2024). Enfoque ontosemiótico en educación matemática: Fundamentos, herramientas y aplicaciones. McGraw Hill–Aula Magna. https://hdl.handle.net/10481/93596

Blanco, T. F., Fernández-López, A., Lois-Prados, C. y Mariño-Fernández, S. (2026). Análisis didáctico de materiales táctiles para geometría: estudio de caso. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 634). SEIEM.

REDISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UNA SITUACIÓN DE APRENDIZAJE CON MATATALAB EN EDUCACIÓN PRIMARIA

Redesign and implementation of a learning situation using Matatalab in primary education

Breda, A., Sala-Sebastià, G., Font, V., Seckel, M. J., Cortés, A., Verón, M. A. y Inglada, N.

Universitat de Barcelona

En el marco de los proyectos "Pensament Computacional i robòtica amb perspectiva de gènere a l'educació Infantil i Primària" (EDU145/23/000006) y "Criteris i recursos per al desenvolupament del Pensament Computacional amb robots educatius i per a la seva l'avaluació a l'Educació Infantil i Primària" (2024ARMIF00017) y con el objetivo general de desarrollar el Pensamiento Computacional (PC) y el interés por la tecnología desde la perspectiva de género en el futuro profesorado de Educación Primaria (EP), se celebró una jornada para plantear a 6 estudiantes voluntarios del Grado de EP de una universidad catalana en colaboración con dos maestros en activo el rediseño de una situación de aprendizaje (SA) para el desarrollo del PC con robots educativos (Matatalab) diseñada originalmente por los investigadores (Breda et al., 2025). Su rediseño se implementó posteriormente en dos escuelas participantes. El objetivo del estudio consiste en analizar la idoneidad didáctica del rediseño y de la implementación de la SA por parte de los futuros maestros. Las dos sesiones de implementación fueron grabadas en vídeo y supervisadas por las investigadoras. Se analizaron las grabaciones y las notas de campo, así como las producciones de 46 alumnos de 10-11 años. Para ello, se utilizó la herramienta Criterios de Idoneidad Didáctica (Breda et al., 2017). Los resultados indican que, aunque el rediseño de la SA sea rico en procesos matemáticos, se detecta cierta ambigüedad al hablar de "coordenadas" cuando, en realidad, se trabaja la orientación en cuadrícula. Se activan conocimientos previos mediante una lluvia de ideas y una exploración libre del robot, aunque inicialmente se aprecia una escasa participación oral del alumnado. La secuencia avanza desde acciones simples hasta la construcción de cuadrados, la búsqueda de rutas alternativas y el uso consciente del bloque bucle, culminando en el rediseño de la alfombra con aportaciones individuales y la creación de situaciones-problema para que otros grupos las resuelvan, lo que eleva la demanda cognitiva y fomenta la implicación manipulativa. Sin embargo, en esta última fase no siempre se asegura que el propio grupo haya comprobado previamente la viabilidad de su situación-problema, generándose algunas dificultades al resolverla. El intercambio del alumnado componente de los grupos evidencia adaptación a las necesidades educativas. Las interacciones entre iguales, los roles, las puestas en común y la evaluación formativa mediante rúbricas y reflexiones refuerzan la autonomía y la resolución compartida de dificultades. La robótica y la posibilidad de incorporar referentes personales en la alfombra incrementan la motivación, observándose además un mayor protagonismo de las chicas en la fase creativa y un equilibrio de género en las exposiciones orales. Finalmente, la SA conecta robótica, PC y perspectiva de género, que se revisan críticamente en la discusión final para valorar tanto los aprendizajes matemáticos y computacionales adquiridos como la participación equitativa real vivida en el aula.

Referencias

Breda, A., Sala-Sebastià, G., Font, V., Palou, B., Luna, E., Seckel-Santis, M. J., Giacomone, B., Sol, T., Cortés, A. y Abreu Silva, R. de. (2025). Desarrollo del pensamiento computacional a través de la resolución de problemas mediante el uso del robot Matatalab. *Revista CIDUI*, (7). https://doi.org/10.60940/ciduiv1n7id9900457

Breda, A., Pino-Fan, L. R. y Font, V. (2017). Meta didactic-mathematical knowledge of teachers: criteria for the reflection and assessment on teaching practice. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 13*(6), 1893−1918. https://doi.org/10.12973/eurasia.2017.01207a

Breda, A., Sala-Sebastià, G., Font, V., Seckel, M. J., Cortés, A., Verón, M. A. y Inglada, N. (2026). Rediseño e implementación de una situación de aprendizaje con Matatalab en educación primaria. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 635). SEIEM.

REVISIÓN SISTEMÁTICA ACERCA DEL PAPEL DE LAS REDES SOCIALES EN LA FORMACIÓN DEL PROFESORADODE MATEMÁTICAS

Systematic review about the role of social networks in mathematics teacher education

Calavia, I. G., Beltrán-Pellicer, P. y Martínez-Juste, S.

Universidad de Zaragoza

En el ámbito de la didáctica de las matemáticas, se observa una carencia significativa de formación continua para docentes en activo, así como una desconexión persistente entre la formación inicial, la formación permanente y su aplicación efectiva en el aula (Beltrán-Pellicer et al., 2023a). En este contexto, las redes sociales aparecen como espacios emergentes de formación no reglada del profesorado. Iniciativas como la *Math Twitter Blogosphere* (MTBoS), *iTeachMath* o grupos en plataformas de mensajería como Telegram, han demostrado su capacidad para fomentar el intercambio profesional, la reflexión pedagógica y la construcción colectiva del conocimiento (Beltrán-Pellicer et al., 2023b; Larsen y Parrish, 2019).

En el contexto de una línea de investigación más amplia acerca del uso de redes sociales para el desarrollo profesional del profesorado de matemáticas, surge como necesidad realizar una revisión de la literatura para conocer qué se ha investigado hasta el momento sobre este tema. Siguiendo el método PRISMA (Page et al., 2021) se seleccionaron un total de 63 artículos para realizar el análisis. Los artículos se clasifican en diferentes categorías dependiendo del tipo de uso que se le da a la plataforma digital en cuestión y el tipo de comunidad que se genera por ello.

De esta forma, los resultados sugieren que el profesorado en activo no dispone de una gran oferta de formación por parte de las instituciones oficiales. Esto favorece que los docentes busquen formación a través de otros canales como las redes sociales. Entre las plataformas utilizadas, se observa una variedad de entornos digitales con finalidades y dinámicas diferentes. La revisión evidencia que la participación en comunidades docentes constituye un recurso formativo de notable valor para sus integrantes. Asimismo, se revela una gran diversidad entre los perfiles docentes participantes.

Referencias

Beltrán-Pellicer, P., Martínez-Juste, S. y Muñoz-Escolano, J.M. (2023a). Exploring the gap between intended and enacted curriculum: Perceptions of future and in-service teacher. En C. Jiménez-Geltal, A. Magreña, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 97-112). SEIEM.

Beltrán-Pellicer, P., Martínez-Juste, S. y Muñoz-Escolano, J. M. (2023b). Twitter y desarrollo profesional del futuro profesorado de matemáticas: Percepciones de uso e intereses. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado. Continuación de la antigua Revista de Escuelas Normales*, *98*(37.2). https://doi.org/10.47553/rifop.v98i37.2.99326

Larsen, J. y Parrish, C.W. (2019). Community building in the MTBoS: Mathematics educators establishing value in resources exchanged in an online practitioner community. *Educational Media International*, *56*(4), 313-327. https://doi.org/10.1080/09523987.2019.1681105

Page, M.J., McKenzie, J. E., Bossuyt, P. M., Boutron, I., Hoffmann, T. C., Mulrow, C. D., Shamseer, L., Tetzlaff, J. M., Akl, E. A., Brennan, S. E., Chou, R., Glanville, J., Grimshaw, J. M., Hróbjartsson, A., Lalu, M. M., Li, T., Loder, E. W., Mayo-Wilson, E., McDonald, S., … Alonso-Fernández, S. (2021). Declaración PRISMA 2020: una guía actualizada para la publicación de revisiones sistemáticas. *Revista Española de Cardiología*, *74*(9), 790-799. https://doi.org/10.1016/j.recesp.2021.06.016

Calavia, I. G., Beltrán-Pellicer, P. y Martínez-Juste, S. (2026). Revisión sistemática acerca del papel de las redes sociales en la formación del profesorado de matemáticas. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 636). SEIEM.

EXPLORANDO LA RELACIÓN ENTRE EL DOMINIO AFECTIVO Y LAS PRÁCTICAS DE RETROALIMENTACIÓN EN MATEMÁTICAS

Exploring the relationship between the affective domain and feedback practices in mathematics

Calderón-Tena, P. y Beltrán-Pellicer, P.

Universidad de Zaragoza

Se presentan los primeros pasos dentro de una línea de investigación que tiene como objetivo explorar la relación entre el dominio afectivo (McLeod, 1989) y las prácticas de retroalimentación en matemáticas. En primer lugar, se describe un estudio exploratorio sobre el dominio afectivo del alumnado en una cultura de aula orientada al aprendizaje de las matemáticas a través de la resolución de problemas y la evaluación formativa (Wiliam, 2009). Este estudio adoptó un enfoque cualitativo mediante un estudio de caso en aulas de 2.º de ESO, con observación de aula, cuestionarios y entrevistas analizados mediante codificación deductiva. Los resultados señalan la retroalimentación como una estrategia clave por su vinculación con la dimensión afectiva del aprendizaje matemático, aunque algunas prácticas observadas parecían responder más a una lógica de calificación que de evaluación formativa, reduciendo su potencial al desplazar la atención del alumnado hacia la calificación (Butler, 1988). Los resultados obtenidos justifican la continuidad de la línea hacia la formación inicial del profesorado. De esta manera, se presenta, en segundo lugar, el diseño de una investigación donde se reformula el foco de investigación hacia las creencias y prácticas de retroalimentación del profesorado de matemáticas. Se trata de una investigación cualitativa que toma como referencia teórica el Enfoque Ontosemiótico (Godino, 2024) y se orienta a comprender cómo intervienen las creencias docentes en la interpretación de los significados institucionales y personales implicados en la producción de retroalimentación, así como a diseñar una experiencia formativa para futuros docentes.

Referencias

Butler, R. (1988). Enhancing and undermining intrinsic motivation; the effects of task-involving and ego-involving evaluation on interest and performance. *British Journal of Educational Psychology, 58, 1-14.* https://doi.org/10.1111/j.2044-8279.1988.tb00874.x

Godino, J.D. (2024). *Enfoque ontosemiótico en educación matemática. Fundamentos, herramientas y aplicaciones.* McGraw Hill – Aula Magna. https://hdl.handle.net/10481/93596

McLeod, D.B. (1989). Beliefs, attitudes and emotions: New view of affect in mathematics education. En McLeod, D.B. y Adams, V.M. (Eds.), *Affect and mathematical problem solving* (pp. 245-258). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-3614-6_17

Wiliam, D. (2009). Una síntesis integradora de la investigación e implicancias para una nueva teoría de la evaluación formativa. *Archivos de Ciencias de la Educación (4a. época), 3(*3), 15-44. http://www.fuentesmemoria.fahce.unlp.edu.ar/art_revistas/pr.4080/p

Calderón-Tena, P. y Beltrán-Pellicer, P. (2026). Explorando la relación entre el dominio afectivo y las prácticas de retroalimentación en matemáticas. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 637). SEIEM.

ERRORES Y CONSTRUCCIÓN DE SIGNIFICADO EN LA TRANSICIÓN AL PENSAMIENTO MATEMÁTICO AVANZADO

Errors and the construction of meaning in the transition to advanced mathematical thinking

Castillo-González, N. y Ruiz-Hidalgo, J. F.

Universidad de Granada

El aprendizaje del cálculo diferencial e integral en los primeros cursos universitarios constituye un desafío didáctico persistente, asociado a dificultades en la comprensión conceptual y a la necesidad de fortalecer el pensamiento matemático profundo (Castillo et al., 2025). En el marco de la transición de la Educación Secundaria a la Universidad, este estudio aborda las barreras cognitivas del Pensamiento Matemático Avanzado (Ableitinger y Dorner, 2025), la semiótica cognitiva y el análisis del discurso matemático (Toscano et al., 2024). El objetivo es caracterizar los errores cometidos por el alumnado universitario de nuevo ingreso al resolver tareas de análisis matemático, interpretando dichas producciones como indicadores de los procesos de construcción de significados y de las dificultades en la coordinación de registros de representación (Urhan y Zengin, 2025).

El estudio adopta un enfoque metodológico cualitativo y de carácter descriptivo-interpretativo. La muestra incluye 80 estudiantes de primer curso de Ingeniería Industrial. El instrumento consistió en una tarea que demandaba el estudio analítico y gráfico de funciones, involucrando conceptos de derivada e integral. Mediante un análisis de contenido, se analizaron pormenorizadamente las resoluciones y se desarrolló un sistema inductivo de categorías de error basado en la naturaleza del contenido matemático implicado. Los resultados evidencian un fuerte dominio algorítmico frente a severas carencias semánticas. Destacan errores derivados de una interpretación puramente algebraica de la derivada (concebida como técnica y no como herramienta analítica), así como la incapacidad generalizada para coordinar y realizar conversiones coherentes entre el registro de representación algebraico y el registro gráfico. Se concluye que las dificultades en la transición no derivan únicamente del incremento en la complejidad de formalización, sino de carencias previas en la flexibilidad semiótica. Por ello, se subraya la necesidad de utilizar el error como estrategia didáctica preuniversitaria, diseñando situaciones que prioricen la bidireccionalidad gráfica-analítica y la conexión argumentada de la derivación e integración, facilitando así el acceso al pensamiento matemático avanzado.

Referencias

Ableitinger, C. y Dorner, C. (2025). Revealing the nature of mathematical procedural knowledge by analysing students' deficiencies and errors. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. Avance de publicación en línea. https://doi.org/10.1080/0020739X.2024.2445666

Castillo, D., Carrión, J., Chamba, C., Jiménez-Gaona, Y., Rodríguez-Álvarez, M. J. y Lakshminarayanan, V. (2025). Didactic strategies for conceptual understanding and motivation in university mathematics: A systematic review. *Frontiers in Education*, 10, 1536470. https://doi.org/10.3389/feduc.2025.1536470

Toscano, R., Fernández-León, A., Gavilán-Izquierdo, J. M., González-Regaña, A. J. y Martín-Molina, V. (2024). Pre-service mathematics teachers' discourse: Differences between defining in task situations involving prototypical and non-prototypical solids. *Journal of Mathematical Behavior*, 75, 101170. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2024.101170

Urhan, S. y Zengin, Y. (2025) Students'proof construction through computer-supported collaborative learning: the perspectives of Habermas' theory of rationality and Duval's theory of registers of semiotic representation. *Science & Education*, 34, 3689-3725. https://doi.org/10.1007/s11191-024-00594-0

Castillo-González, N. y Ruiz-Hidalgo, J. F. (2026). Errores y construcción de significado en la transición al pensamiento matemático avanzado. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 638). SEIEM.

DIFICULTADES DE ESTUDIANTES DE LOS GRADOS EN EDUCACIÓN INFANTIL Y PRIMARIA EN LA RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA QUE REQUIERE EL USO DEL MÁXIMO COMÚN DIVISOR

Difficulties faced by pre-service early childhood and primary education teachers in solving a problem that requires the use of greatest common divisor

Cillero, B., Jiménez-Gestal, C., Magreñán, Á. A. y Orcos, L.

Universidad de La Rioja

En este trabajo, partiendo de las dificultades asociadas al uso de máximo común divisor (MCD) y mínimo común múltiplo (mcm), la resolución de problemas verbales o el uso de representaciones presentadas por López et al. (2013) o Ayabe et al. (2022), exploramos las dificultades que manifiestan los estudiantes de los grados en Educación Infantil y Educación Primaria de la Universidad de La Rioja al resolver un problema de enunciado verbal que implica el concepto de MCD.

Se planteó el problema a una muestra de 160 estudiantes: 131 del grado en Educación Infantil y 29 del grado en Educación Primaria. Los datos se recogieron mediante una tarea escrita realizada individualmente por cada participante, lo que permite analizar los procedimientos, representaciones y argumentos empleados en el proceso de resolución.

Los resultados muestran diferencias entre los dos grupos: en el grupo de Primaria 24 estudiantes resolvieron el problema de forma correcta y 5 lo hicieron erróneamente, lo que supone una tasa de éxito del 83%, en el grupo de Infantil llegaron a la solución correcta 95 estudiantes, 26 cometieron errores y 10 no intentaron resolverlo, es decir, una tasa de éxito del 73% y mayores dificultades en este grupo. Un hallazgo relevante es la ausencia total de representaciones gráficas o esquemáticas en los procesos de resolución. Ningún participante recurrió a ningún tipo de representación visual para organizar los datos, lo que sugiere que estos futuros docentes no incorporan espontáneamente estrategias de representación como herramienta de apoyo en la resolución de problemas.

La principal dificultad de quienes resolvieron el problema de forma incorrecta fue la confusión entre el MCD y el mcm. Esta confusión no parece deberse a un error de cálculo sino a una comprensión superficial del significado de ambos conceptos: los estudiantes no identifican cuál de los dos responde a la pregunta planteada en el enunciado porque no comprenden qué significa cada operación ni en qué tipo de situaciones se aplica. Este resultado es coherente con trabajos como el de López et al. (2013) que señalan dificultades con la comprensión de las relaciones de ser múltiplo o divisor.

Estos resultados apuntan a la necesidad de reforzar en la formación inicial de maestros tanto la comprensión conceptual de nociones de teoría de números como el desarrollo de estrategias de representación que favorezcan el análisis y la argumentación en la resolución de problemas.

Referencias

López, A., Castro, E. y Cañadas, M. C. (2013). Significados de las relaciones “ser múltiplo” y “ser divisor” mostradas por maestros de educación primaria en formación. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 355-365). SEIEM.

Ayabe, H., Manalo, E. y de Vries, E. (2022) Problem-appropriate diagram instruction for improving mathematical word problem solving. *Frontiers in Psychology*. *13*, 992625. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2022.992625

Cillero, B., Jiménez-Gestal, C., Magreñán, Á. A. y Orcos, L. (2026). Dificultades de estudiantes de los grados en educación infantil y primaria en la resolución de un problema que requiere el uso del máximo común divisor. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 639). SEIEM.

TRANSFORMACIÓN DE PROBLEMAS POR FUTUROS DOCENTES DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Transformation of problems by pre-service primary teachers

Collado-Soler, R. y Reyes-Escobar, M. E.

Universidad de Almería

La investigación sobre la enseñanza de la proposición de problemas ha mostrado su relevancia en educación matemática desde hace varias décadas, con la inclusión en el NCTM (2000). Proponer problemas implica una reflexión profunda de los contenidos matemáticos, así como un proceso reflexivo, creativo y metacognitivo esencial para el aprendizaje y la vida. Por eso nos planteamos como pregunta de investigación, ¿cuál es la manera en que los estudiantes de pregrado proponen problemas a través de la transformación de otros?

Desde la línea de la proposición e invención de problemas surgen diferentes marcos (Ayala-Altamirano et al., 2023); consideramos que todos son importantes y han servido de base para modelos posteriores como el metamodelo de Fernández Bravo (2010). Este metamodelo menciona que los problemas deben ser adecuados de acuerdo con la edad escolar, y se pueden clasificar de acuerdo con diferentes modelos que son: generativos, estructuración, enlaces, transformación, composición e interconexión.

Esta investigación se centra en las transformaciones de 41 porfolios de tres grupos de 3er curso del grado de Educación Primaria (A, B y C) y presenta un enfoque cualitativo, porque se realizan categorías emergentes de análisis extraídas de una fuente documental (Morgan, 2022) que corresponden a un porfolio realizado por los futuros docentes de primaria.

Este póster presenta los resultados del análisis de las transformaciones de problemas realizadas por los estudiantes: 1) se muestran 41 transformaciones con una representación equilibrada entre grupos; 2) la transformación más utilizada fue la de datos; 3) el resto de categorías presenta frecuencias notablemente inferiores; 4) en las diferencias intragrupo se destaca que en los tres hay un mayor porcentaje de transformación de datos con grandes diferencias con el resto de categorías; 5) la principal diferencia entre grupos es que en el grupo C transformaron los problemas hacia el cambio de situación mientras que los otros grupos lo abordaron mínimamente, y que los grupos A y C no tomaron en consideración el cambio en los tiempos verbales. Estos hallazgos reflejan que los estudiantes tienden a modificar primero sobre el enunciado verbal, concretamente en la formulación lingüística.

Referencias

Ayala-Altamirano, C., Pinto, E., Molina, M. y Cañadas, M. C. (2023). Invención de problemas y sentencias como medio para evidenciar el pensamiento algebraico en educación primaria. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo, E. y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 155-162). SEIEM.

Fernández Bravo, J. A. (2010). *La resolución de problemas matemáticos. Creatividad y razonamiento en la mente de los niños.* Grupo Mayéutica.

Morgan, H. (2022). Conducting a Qualitative Document Analysis. *The Qualitative Report, 27*(1). https://doi.org/10.46743/2160-3715/2022.5044

NCTM. (2000). *Principios y estándares para las matemáticas escolares*. Reston, VA: Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas.

Collado-Soler, R. y Reyes-Escobar, M. E. (2026). Transformación de problemas por futuros docentes de educación primaria. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 640). SEIEM.

LAS REFORMAS DE LOS ESTUDIOS DE MAGISTERIO EN 1931 Y 1967: LA FORMACIÓN MATEMÁTICA

Primary teacher training reforms in 1931 and 1967: The mathematical education

Colmena, S. y Sánchez-Jiménez, E.

Universidad de Murcia

La formación del magisterio ha sido una cuestión central en la historia del sistema educativo español. A lo largo del siglo XX, diversos planes de estudio intentaron redefinir el perfil profesional del maestro para adecuarlo a las transformaciones sociopolíticas y culturales del país. Esta investigación se centra en dos procesos de reforma: los denominados Plan Profesional (Decreto de 29 de septiembre de 1931) y Plan de 1967 (Orden de 1 de junio de 1967) para las Escuelas Normales, con el que se introduce la Matemática Moderna en la formación del magisterio (Oller, 2022). El objetivo principal es ver si las similitudes estructurales observadas entre ambos modelos suponen una concepción equivalente de la formación matemático-didáctica del profesorado.

Esta investigación se sitúa en el ámbito de la historia de la educación matemática (Maz-Machado, 2019) y adopta un enfoque basado en el método histórico-documental (González Astudillo, 2009). Para abordar el estudio, se ha llevado a cabo un análisis comparado de la *matemática para enseñar* prescrita en ambos planes. El corpus examinado abarca la legislación educativa de cada época, el discurso institucional subyacente y una selección de publicaciones de profesores normalistas.

Los resultados confirman convergencias (estructurales, en las condiciones de acceso y relativas a los objetivos de la asignatura), tras las que emergen diferencias derivadas, entre otras cosas, de sus respectivos contextos de gestación y de las motivaciones que impulsaron cada uno de los planes (Sánchez-Jiménez, 2023). Asimismo, encontramos distintas concepciones sobre el papel del maestro, la función social de la educación y el lugar de las matemáticas en la formación docente. El contraste entre ambos planes permite concluir que la formación matemático-didáctica no puede entenderse al margen de los contextos sociopolíticos y culturales en los que se concibe y desarrolla.

Referencias

Decreto, de 29 de septiembre de 1931, dictando normas relativas a la preparación del Magisterio primario. *Gaceta de Madrid*, *273*, de 30 de septiembre de 1931, 2091-2094.

González Astudillo, M. T. (2009). La investigación en historia de la educación matemática. *Educación y Ciencia, Cuarta Época, 1*(36), 37-58.

Maz-Machado, A. (2019). Un breve balance de la investigación en historia de las matemáticas y la educación matemática en España. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 91-94). SEIEM.

Oller, A. (2022). The Transition to Modern Mathematics in Spanish Primary Education: The 1965 Syllabus. En A. Karp (Ed.), *Advances In The History Of Mathematics Education* (pp. 171-194). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-95235-8

Orden, de 1 de junio de 1967, por la que se fija el Plan de Estudios en las Escuelas Normales. *Boletín Oficial del Estado*, *136*, de 8 de junio de 1967, 7955-7956.

Sánchez Jiménez, E. (2023). El currículum de matemáticas en las instituciones de formación de maestros en España (1907-1970). En M. Picado-Alfaro y Y. Morales-López (Eds.), *Memorias del VII Congresso Iberoamericano de História da Educaçao Matemática* (pp. 545-564). Universidad Nacional de Costa Rica.

Colmena, S. y Sánchez-Jiménez, E. (2026). Las reformas de los estudios de magisterio en 1931 y 1967: la formación matemática. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 641). SEIEM.

CONOCIMIENTO PREVIO Y CREATIVIDAD EN PROBLEMAS DE MEDIDA Y ESTIMACIÓN: DISEÑO METODOLÓGICO DE UN ESTUDIO

Prior knowledge and creativity in measurement and estimation problems: methodological design of a study

Contreras-Codorniú, D. A., Gallart, C. y Segura, C.

Universitat de València

El desarrollo de la creatividad es central en educación matemática, especialmente cuando la resolución de problemas exige explorar estrategias y producir respuestas no rutinarias (Leikin y Lev, 2013). Los problemas de medida y estimación pueden promover la exploración de múltiples estrategias que movilicen conocimientos sobre magnitudes, unidades y referentes (Castillo-Mateo et al., 2012), por lo que ofrecen un contexto para estudiar la creatividad. En esta línea, Segura et al. (2026) propusieron un cuestionario para evaluar conocimientos previos de medida y estimación en futuros maestros al resolver problemas de estimación del mundo real. Sin embargo, se conoce poco sobre cómo dichos conocimientos influyen en la creatividad del alumnado al resolver estas tareas.

En este póster se presentan el diseño metodológico y los instrumentos de un estudio cuyo objetivo es analizar si existen diferencias en la creatividad en función de los conocimientos previos y del grado de conexión con la realidad de los problemas de medida y estimación. El estudio adopta un enfoque mixto y se desarrolla con alumnado chileno de 7º básico, equivalente a 1º de ESO.

En primer lugar, se presenta la ampliación, adaptación y validación para alumnado de Secundaria del cuestionario de conocimientos previos en medida y estimación de Segura et al. (2026). En segundo lugar, se presenta la secuencia de problemas de medida y estimación con distintos grados de conexión con la realidad. En relación con el diseño metodológico del estudio, se describe cómo, a partir de la aplicación del cuestionario, se caracterizarán perfiles de conocimiento previo en medida y estimación del alumnado. También se describe cómo se analizará la creatividad en la resolución de la secuencia de problemas mediante la configuración de los espacios de soluciones (Leikin y Lev, 2013), considerando la fluidez, la flexibilidad y la originalidad. Esto permitirá estudiar si los perfiles de conocimiento previo tienen relación con la creatividad en la resolución de problemas de medida y estimación, así como analizar si esta influencia está modulada por el grado de conexión con la realidad de los problemas.

Referencias

Castillo-Mateo, J. J., Segovia, I., Castro, E. y Molina, M. (2012). Categorización de errores en la estimación de cantidades de longitud y superficie. En D. Arnau, J. L. Lupiáñez, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática* (pp. 63-74). SEIEM.

Leikin, R. y Lev, M. (2013). Mathematical creativity in generally gifted and mathematically excelling adolescents: what makes the difference? *ZDM Mathematics Education, 45*, 183-197. https://doi.org/10.1007/s11858-012-0460-8

Segura, C., Gallart, C. y Ferrando, I. (2026). Influence of pre-service primary school teachers' prior knowledge of measurement and measurement estimation in solving modelling problems. *Journal of Mathematics Teacher Education, 29*, 433-458. https://doi.org/10.1007/s10857-025-09685-3

Contreras-Codorniú, D. A., Gallart, C. y Segura, C. (2026). Conocimiento previo y creatividad en problemas de medida y estimación: diseño metodológico de un estudio. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 642). SEIEM.

FOTOGRAFÍAS DECROLYANAS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MAGNITUDES. UNA EXPERIENCIA CON DOCENTES DE EDUCACIÓN INFANTIL EN FORMACIÓN

Decrolyan photographs for the teaching of magnitudes. An experience in early years education teacher training

Dólera-Almaida, J. y Carrillo-Gallego, D.

Universidad de Murcia

En la formación del profesorado, el uso de fuentes históricas constituye una herramienta interesante para el desarrollo de los conocimientos profesionales de los futuros docentes (Muñoz-Escolano y Oller-Marcén, 2023). Este trabajo, de carácter exploratorio, pretende valorar la percepción de los estudiantes del Grado en Educación Infantil sobre el uso de recursos de Historia de Educación Matemática (HEM) en su formación. Para ello se diseñó una sesión, de 2 horas de duración, orientada al análisis de actividades de medida decrolyanas dirigidas a los primeros niveles educativos, en las que intervenían magnitudes continuas. Las tareas que fueron presentadas se localizan en la obra *El cálculo y la medida en el primer grado de la escuela Decroly* (Decroly y Hamaïde, 1934) y como, en más de una ocasión, la descripción de las mismas se limita a una fotografía de los escolares realizando dicha actividad (Carrillo, 2025), se utilizaron como recurso imágenes que ilustran la obra. Participaron 43 estudiantes de la asignatura Didáctica de la Matemática en la Educación Infantil II del Grado en Educación Infantil de la Universidad de Murcia. Los futuros maestros identificaron la magnitud implicada en cada una de las fotografías facilitadas, clasificaron el tipo de actividad propuesta, describieron el procedimiento de resolución que se mostraba y clasificaron la unidad de medida utilizada en la realización de la tarea. Estos aspectos están asociados a las tareas y a los procedimientos de resolución que se describen en el Modelo Epistemológico de Referencia (MER) sobre magnitudes para los primeros niveles educativos (Carrillo, 2025), basado en los trabajos de Brousseau (2002) y de Sierra (2006) sobre el aprendizaje de las magnitudes en la enseñanza primaria. Tras la actividad, los estudiantes elaboraron una narrativa individual sobre el valor de la utilización de fuentes de HEM en la formación del profesorado. El análisis cualitativo de las mismas refleja que los estudiantes valoran positivamente la inclusión de fuentes históricas en su formación, al considerar que les permite conocer recursos, metodologías y tareas escolares que se promovían en el pasado (17) y que estas pueden ser utilizadas, como referente, en el diseño de actividades de aula propias (19).

Referencias

Brousseau, G. (2002). Les grandeurs dans la scolarité obligatoire. En J.L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot y R. Floris (Eds.), *Actes de la 11ème École d'été de Didactique des Mathématiques* (pp. 331-348). La Pensée Sauvage.

Carrillo, D. (2025). Influencia de Decroly en la educación matemática: las magnitudes. *PNA*, *19*(5), 457-483.

Decroly, O. y Hamaïde, A. (1934). *El cálculo y la medida en el primer grado de la escuela Decroly*. Espasa.

Muñoz-Escolano, J.M. y Oller-Marcén, A.M. (2023). Researching the use of old professional journals as a tool for infant education prospective teachers training. En P. Drijvers, C. Csapodi, H. Palmér, K. Gosztonyi, y E. Kónya (Eds.), *Proceedings of the Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1945-1952). Alfréd Rényi Institute of Mathematics.

Sierra, T. A. (2006). *Lo matemático en el diseño y análisis de organizaciones didácticas: los sistemas de numeración y la medida de magnitudes* [Tesis doctoral]. Universidad Complutense de Madrid.

Dólera-Almaida, J. y Carrillo-Gallego, D. (2026). Fotografías decrolyanas para la enseñanza de las magnitudes. Una experiencia con docentes de educación infantil en formación. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 643). SEIEM.

REFLEXIÓN COGNITIVA, RAZONAMIENTO CONDICIONAL Y LENGUAJE LÓGICO-MATEMÁTICO EN ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS DE MATEMÁTICAS

Cognitive reflection, conditional reasoning, and logical-mathematical language in university mathematics students

Dolz, A.[a,b] y Gómez-Chacón, I. M.[a]

[a]Universidad Complutense de Madrid, CUNEF Universidad[b]

Diversos estudios han señalado que los estudiantes universitarios presentan dificultades en el razonamiento formal, la demostración, el lenguaje lógico-matemático y la interpretación de enunciados condicionales (Durand-Guerrier, 2003). Estas dificultades no solo tienen un origen en los conocimientos de lógica formal, sino que tienen a la base la utilización de modelos intuitivos de causalidad, temporalidad o equivalencia, donde otros aspectos cognitivos generales de los sujetos influyen, como la reflexión cognitiva (CR) y la inteligencia fluida (Gf) y son prescriptivas en el rendimiento matemático (Peng et al., 2019). La finalidad del estudio es explorar la interrelación entre la reflexión cognitiva, la inteligencia fluida, el lenguaje lógico-matemático y el razonamiento condicional, así como analizar su valor predictivo sobre el rendimiento académico en estudiantes universitarios de primer curso del grado en Matemáticas. El marco teórico combina aportaciones de la ciencia cognitiva y de la educación matemática, especialmente aquellas relacionadas con el razonamiento formal y el papel del lenguaje matemático (Gómez-Chacón, et al., 2014). La investigación se realizó con 107 estudiantes de primer curso de Matemáticas. Los instrumentos utilizados fueron el Cognitive Reflection Test (CRT), las matrices progresivas de Raven (Gf) y un cuestionario de problemas matemáticos sobre lenguaje lógico-matemático y razonamiento condicional. Los datos se analizaron mediante estadística descriptiva, regresión logística y regresión lineal múltiple. Los resultados muestran que las habilidades cognitivas generales y las matemáticas específicas predicen significativamente el rendimiento académico. La variable de interacción entre reflexión cognitiva e inteligencia fluida (CR_Gf) aparece como el predictor más relevante, mientras que el lenguaje lógico-matemático y el razonamiento condicional contribuyen de forma independiente a explicar el rendimiento matemático.

Agradecimientos: Parte de PID2022-138325OB-I00 financiada por MICIU/AEI /10.13039/501100011033 y por FEDER, UE, y de contenido de tesis dentro del Programa IMEIO de la UCM y UPM.

Referencias

Durand-Guerrier, V. (2003). Which notion of implication is the right one? From logical considerations to a didactic perspective. *Educational Studies in Mathematics, 53*(1), 5–34. https://doi.org/10.1023/A:1024661004375

Frederick, S. (2005). Cognitive reflection and decision making. *Journal of Economic Perspectives, 19*(4), 25–42. https://doi.org/10.1257/089533005775196732

Gómez-Chacón, I. M., García-Madruga, J. A., Vila, J. O., Elosúa, R. y Rodríguez, R. (2014). The dual processes hypothesis in mathematics performance: Beliefs, cognitive reflection, working memory and reasoning. *Learning and Individual Differences, 29*, 67–73. https://doi.org/10.1016/j.lindif.2013.10.001

Peng, P., Wang, T., Wang, C. y Lin, X. (2019). A meta-analysis on the relation between fluid intelligence and reading/mathematics: Effects of tasks, age, and social economic status. *Psychological Bulletin, 145*(2), 189–236. https://doi.org/10.1037/bul0000182

Dolz, A. y Gómez-Chacón, I. M. (2026). Reflexión cognitiva, razonamiento condicional y lenguaje lógico-matemático en estudiantes universitarios de matemáticas. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 644). SEIEM.

ANÁLISIS DE LOS CAMPOS DE PROBLEMAS DE PROBABILIDAD EN LIBROS DE TEXTO DE SECUNDARIA

Analysis of probability problem fields in secondary school textbooks

Elgueda-Ibarra, M., Batanero, C. y Gea, M. M.

Universidad de Granada

La resolución de problemas constituye el núcleo del aprendizaje probabilístico, siendo los campos de problemas la tipología de situaciones que permiten que emerjan objetos y prácticas matemáticas (Godino, 2024). El objetivo de este estudio fue analizar la presencia y distribución de los campos de problemas relacionados con la probabilidad. Para ello se analizaron 1435 tareas de probabilidad contenidas en libros de texto de Educación Secundaria Obligatoria (ESO) de las editoriales Anaya y Santillana, publicados bajo la actual normativa curricular en todos los cursos que conforman la etapa (1º a 4º curso, 12 a 15 años). Se empleó la metodología cualitativa de análisis de contenido, partiendo de las categorías consideradas por Ortiz (2002) y ampliándolas mediante un proceso cíclico de revisión. La fiabilidad de codificación se aseguró mediante la recodificación y cálculo del coeficiente de fiabilidad intercodificador.

Los resultados indican una distribución desigual de las tareas, con una fuerte concentración en el cálculo de probabilidades en experimentos simples y compuestos, estos últimos con mucha mayor presencia en Anaya, para cualquier curso; mientras que en Santillana es mayor la propuesta de tareas para determinar eventos o el espacio muestral y analizar la aleatoriedad. Se detectó una carencia crítica de problemas orientados a la estimación de la probabilidad a partir de la experimentación y la simulación, a pesar de que el currículo enfatiza este enfoque (MEFP, 2022). Se concluye que los libros de texto priorizan una visión procedimental, basada en el cálculo, por lo que se recomienda diversificar las situaciones propuestas para incluir mayor peso a la experimentación y simulación; razonamiento y determinación de la esperanza matemática considerando juegos equitativos o no, así como el análisis de decisiones bajo incertidumbre, así como creación de problemas por parte del estudiantado (Batanero, 2005).

Agradecimientos: Proyecto PID2022-139748NB-I00, Beca ANID (72220183) y Grupo FQM-126.

Referencias

Batanero, C. (2005). Ideas estocásticas fundamentales ¿Qué contenidos se debe enseñar en la clase de probabilidad? En J. A. Fernandes, M. V. Sousa y S. A. Ribeiro (Orgs.), *Ensino e aprendizagem de probabilidades e estatística – Actas do I Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola* (pp. 9-30). Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho.

Godino, J. D. (2024). *Enfoque ontosemiótico en educación matemática. Fundamentos, herramientas y aplicaciones*. Editorial Aula Magna. McGraw-Hill.

Ministerio de Educación y Formación Profesional, MEFP. (2022). *Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria*. Boletín Oficial del Estado.

Ortiz, J. J. (2002). *La probabilidad en los libros de texto*. Universidad de Granada.

Elgueda-Ibarra, M., Batanero, C. y Gea, M. M. (2026). Análisis de los Campos de Problemas de Probabilidad en Libros de Texto de Secundaria. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 645). SEIEM.

TABLAS Y GRÁFICAS PARA LA ENSEÑANZA DE LA PROBABILIDAD EN LIBROS DE TEXTO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA EN ESPAÑA Y PORTUGAL

Tables and graphs for teaching probability in secondary school textbooks in Spain and Portugal

Elgueda-Ibarra, M.[a], Nascimento, M. M.[b] y Gea, M. M.[a]

[a]Universidad de Granada, [b] Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro

Este estudio analiza las representaciones gráficas y tabulares en libros de texto de toda la etapa de secundaria de España (12-15 años) y su equivalente en Portugal para la enseñanza de la probabilidad. Se fundamenta en el papel del lenguaje matemático como sistema semiótico clave para representar y comprender fenómenos aleatorios (Godino, 2024). Como antecedentes y justificación, investigaciones previas han evidenciado una presencia limitada y poco diversa de representaciones en libros de texto, especialmente en niveles no universitarios (Ortiz, 2002; Gómez-Torres et al., 2013; Vásquez y Alsina, 2015).

Se adopta una metodología cualitativa, basada en el análisis de contenido (Zapico, 2007), en un total de 11 libros de texto pertenecientes a dos series de editoriales de España y una de Portugal, seleccionadas por su amplio uso. Las gráficas se categorizaron en: barras, sectores, líneas, puntos y cartogramas; las tablas, según Lahanier-Reuter (2003), en: datos, frecuencias y doble entrada, añadiendo la categoría "tabla de probabilidades" por su representatividad en el análisis. Destaca el predominio de las tablas frente a las gráficas, siendo estas más del 66,7% del total de ambas representaciones en cualquier texto. En general, prevalece la tabla de doble entrada, pero hay diferencias entre editoriales en cuanto a la progresión de su uso. La tabla de probabilidad solo se usa en los textos portugueses, con presencia superior al 35% en cualquier curso. Es escaso el uso de los gráficos, siendo solo el gráfico de barras empleado por todas las editoriales. Se recomienda reforzar la presencia y diversidad de estas representaciones en los libros de texto, para asegurar el desarrollo del pensamiento probabilístico y la comprensión de la incertidumbre en los estudiantes.

Agradecimientos: Proyecto PID2022-139748NB-I00, Beca ANID (72220183) y Grupo FQM-126.

Referencias

Godino, J. D. (2024). *Enfoque ontosemiótico en educación matemática. Fundamentos, herramientas y aplicaciones*. Editorial Aula Magna. McGraw-Hill. https://hdl.handle.net/10481/93596

Gómez-Torres, E., Ortiz, J. J., Batanero, C. y Contreras, J. M. (2013). El lenguaje de probabilidad en los libros de texto de educación primaria. *UNIÓN, 35*, 75-91.

Lahanier-Reuter, D. (2003). Différents types de tableaux dans l'enseignement des statistiques. *Spirale-Revue de recherches en éducation, 32*(32), 143-154. https://doi.org/10.3406/spira.2003.1386

Ortiz, J. J. (2002). *La probabilidad en los libros de texto*. Universidad de Granada.

Vásquez, C. y Alsina, A. (2015). Un modelo para el análisis de objetos matemáticos en libros de texto situaciones problemáticas, lenguaje y conceptos sobre probabilidad. *Profesorado, 19*(2), 441-462. http://hdl.handle.net/10481/37386

Zapico, M. (2007). Interrogantes acerca de análisis de contenido y del discurso en los textos escolares. En Ministerio de Educación (Ed.), *Primer Seminario Internacional de Textos Escolares* (pp. 149-155). MINEDUC.

Elgueda-Ibarra, M., Nascimento, M. M. y Gea, M. M. (2026). Tablas y gráficas para la enseñanza de la probabilidad en libros de texto de educación secundaria en españa y portugal. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 646). SEIEM.

GÉNESIS INSTRUMENTAL EN LA FORMULACIÓN DE PROBLEMAS SOBRE ÁREA Y PERÍMETRO ASISTIDA POR IA

Instrumental genesis in AI-problem-posing concerning area and perimeter

Embid, S.

Universidad de La Laguna

La integración de la inteligencia artificial generativa (IAG) en la formación inicial docente supone un cambio de paradigma. Este proceso exige una orquestación cognitiva que trasciende la competencia técnica, situando el diseño de tareas en el terreno de la reflexión didáctica profunda (Geraniou et al., 2025). Este estudio examina, mediante un diseño cualitativo de estudio de caso, cómo Adonay, un futuro docente de primaria, desarrolla su génesis instrumental (Trouche, 2004) al interactuar con Gemini 2.5-Flash y GPT-5-Mini para formular problemas sobre la relación área-perímetro. El marco teórico se articula en la dialéctica entre la instrumentalización, donde el usuario proyecta sus esquemas de uso sobre la IAG, y la instrumentación, donde las capacidades y limitaciones de la IAG condicionan los esquemas de acción del sujeto (Trouche, 2004). Metodológicamente, se realizó un análisis de contenido de los historiales de conversación, codificando el proceso mediante los mecanismos de elaboración y variación de Malaspina (2013). La instrumentalización se evaluó rastreando cómo las peticiones moldeaban la herramienta, mientras que la instrumentación se analizó observando cómo las respuestas del modelo reconfiguraban las decisiones del docente. Los resultados evidencian que la instrumentalización evolucionó desde instrucciones genéricas de elaboración hacia refinamientos sofisticados de variación. Un ejemplo fue la instrucción "No, dame el área para calcular el perímetro", con la que Adonay forzó intencionadamente la exploración de la relación entre ambas magnitudes. Simultáneamente, la instrumentación emergió de forma crítica tras generar cuatro variantes del problema; en ese punto, Adonay decidió cesar la interacción y ajustar manualmente el producto final. Este cese refleja una toma de conciencia sobre los límites funcionales de la herramienta y la necesidad de la intervención humana para consolidar los objetivos didácticos. En conclusión, la génesis instrumental de Adonay revela que el proceso no debe reducirse a un ensayo-error inducido por la tecnología. Es la interpretación crítica la que garantiza que el docente no sea condicionado inadvertidamente por el algoritmo, permitiendo que la herramienta se adapte a las demandas pedagógicas y no a la inversa.

Agradecimientos: Proyecto PID2022-139007NB-I00 y al contrato predoctoral PREP2022-000959 financiados por MCIN/AEI /10.13039/501100011033 /FEDER, UE y FSE+.

Referencias

Geraniou, E., Mavrikis, M., Jankvist, U. T. y Misfeldt, M. (2025). Generative AI in Mathematics Teaching: lessons from spreadsheets through the lens of double instrumental genesis. En M. Bosch, G. Bolondi, S. Carreira, C. Spagnolo, y M. Gaidoschik (Eds.), *Proceedings of the Fourteenth Congress of European Research in Mathematics Education (CERME14)*, (pp. 2448-2455). Free University of Bozen-Bolzano and ERME. https://hal.science/hal-05279702v1

Malaspina, U. (2013). Nuevos horizontes matemáticos mediante variaciones de un problema. *UNION, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 35*, 135 – 143.

Trouche, L. (2004). Managing the Complexity of Human/Machine Interactions in Computerized Learning Environments: Guiding Students' Command Process through Instrumental Orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 9*(3), 281-307. https://doi.org/10.1007/s10758-004-3468-5

Embid, S. (2026). Génesis instrumental en la formulación de problemas sobre área y perímetro asistida por IA. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 647). SEIEM.

FLUIDEZ EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS REALISTAS ASISTIDA POR INTELIGENCIA ARTIFICIAL GENERATIVA

Fluency in realistic problem-solving assisted by generative artificial intelligence

Embid, S.[a], Sánchez-Barbero, B.[b] y Cáceres-García, M. J.[b]

[a]Universidad de La Laguna, [b]Universidad de Salamanca

La formación de futuros maestros en resolución de problemas verbales realistas (PVR), constituye un ámbito de creciente interés, ya que este tipo de problemas requiere combinar el razonamiento matemático con un razonamiento situacional (Vicente y Orrantia, 2007). Estos autores distinguen cinco tipos de razonamiento en los PVR: (1) juntar o separar conjuntos con posibles elementos comunes; (2) considerar información relevante no explícita; (3) ajustar el resultado sumando o restando una unidad; (4) interpretar el resto en divisiones no exactas; y (5) determinar si procede aplicar proporcionalidad directa. Según Leikin y Lev (2013), los indicadores para analizar la creatividad matemática en la resolución de problemas son la fluidez, la flexibilidad y la originalidad. En particular, la fluidez se entiende como el número de soluciones diferentes generadas por cada resolutor para un problema particular. La irrupción de la inteligencia artificial generativa (IAG), especialmente de herramientas como ChatGPT, abre nuevas posibilidades para el trabajo con PVR, ya que estos sistemas pueden generar múltiples respuestas y favorecer la discusión sobre la validez y adecuación de las soluciones propuestas. En este contexto, se presenta un estudio preliminar cuyo objetivo fue analizar la fluidez en la resolución de PVR por parte de futuros docentes cuando emplean IAG. Para ello, se realizó un estudio descriptivo y exploratorio con 67 estudiantes del Grado en Maestro de Educación Primaria de la Universidad de Salamanca. La intervención tuvo lugar en su aula habitual en el marco de una práctica de resolución de los diez PVR propuestos en Verschaffel et al. (1994) asistida mediante el modelo GPT-4o integrado en ChatGPT. La consigna consistió en obtener el mayor número posible de soluciones diferentes y justificar posteriormente la más adecuada. Los resultados muestran que el tipo de razonamiento que exigen los PVR para su resolución no parece condicionar claramente los niveles de fluidez alcanzados. Las medias de resoluciones oscilaron entre 3,63 y 4,77 soluciones por problema según el tipo de razonamiento, con medianas próximas a cuatro respuestas en todos los casos. El razonamiento 5 presentó la media más alta (M = 4,77), aunque también la mayor dispersión (DT = 6,57), mientras que el razonamiento 3 obtuvo la media más baja (M = 3,63; DT = 1,83). En conjunto, los resultados sugieren niveles de fluidez relativamente homogéneos entre los distintos tipos de razonamiento. Futuras investigaciones profundizarán en la flexibilidad, la originalidad y el realismo de las soluciones generadas.

Agradecimientos: Trabajo realizado en el marco del Proyecto PIC2-2023-12 financiado por la USAL y respaldado por el GIRME (Grupo de Investigación Reconocido de Matemática Educativa, USAL).

Referencias

Leikin, R. y Lev, M. (2013). Mathematical creativity in generally gifted and mathematically excelling adolescents: what makes the difference? *ZDM, 45*(2), 183-197. https://doi.org/10.1007/S11858-012-0460-8

Verschaffel, L., De Corte, E. y Lassure, S. (1994). Realistic consideration in mathematical modelling of school word problems. *Learning and instruction, 4*(4), 273-294. https://doi.org/10.1016/0959-4752(94)90002-7

Vicente, S. y Orrantia, J. (2007). Resolución de problemas y comprensión situacional. *Cultura y Educación, 19*(1), 61-85.

Embid, S., Sánchez-Barbero, B. y Cáceres-García, M. J. (2026). Fluidez en la resolución de problemas realistas asistida por inteligencia artificial generativa. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 648). SEIEM.

GEOMETRÍA PATRIMONIAL EN EL AULA: LA TESELACIÓN COMO NEXO ENTRE LAS MATEMÁTICAS Y LA EXPRESIÓN ARTÍSTICA

Heritage geometry in the classroom: tessellation as a nexus between mathematics and artistic expression

Escudero-Domínguez, A.

Universidad de Sevilla

Este trabajo propone revalorizar la enseñanza de la geometría mediante el constructo de Geometría Patrimonial, un modelo pedagógico que integra el rigor matemático, la expresión plástica y la identidad cultural. El estudio parte de una crítica fundamentada a la algebrización de la geometría en el currículo, fenómeno que reduce la disciplina al cálculo algorítmico y margina el razonamiento espacial (Escudero, 2024). Para revertir esta situación, se utiliza la teselación y la azulejería —con especial énfasis en la herencia nazarí de la Alhambra y los Reales Alcázares— como un recurso didáctico que conecta conceptos abstractos de simetría e isometría con la experiencia sensible del estudiante (Barbosa y Vale, 2016).

El marco teórico se sustenta en la etnomatemática (Silva y Pinheiro, 2022) y en la progresión del sentido espacial (Jones y Tzekaki, 2016) a través de los niveles de Van Hiele (1986), aprovechando que el patrimonio andalusí sistematiza los 17 grupos cristalográficos planos. Bajo un diseño metodológico de carácter cualitativo y descriptivo, se presenta una propuesta para la formación inicial del profesorado de Educación Primaria basada en el Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP) y el enfoque STEAM.

La secuencia guía al alumnado desde la observación analítica de piezas icónicas (p.ej., el "hueso" o la "pajarita") hasta la síntesis creativa mediante geometría analógica y digital. En esta fase, el uso de GeoGebra actúa como andamiaje crítico para fomentar la exploración estética y la validación de propiedades geométricas (Bairral et al., 2017). Mediante el análisis de las producciones de los estudiantes y cuestionarios de percepción, se espera documentar no solo una mejora en la competencia visual-pictórica, sino también una reducción de la ansiedad matemática y el desarrollo de una conciencia ciudadana orientada a la preservación del patrimonio histórico.

Referencias

Bairral, M. A., Attie, J. P. y Panorkou, N. (2017). Where is geometry? Mobile devices and touchscreen manipulation. *International Journal for Technology in Mathematics Education*, *24*(3), 121-130.

Barbosa, A. y Vale, I. (2016). Paseos matemáticos: una oportunidad para ver y hacer matemática. *Épsilon - Revista de Educación Matemática*, *33*(2), 23-42.

Escudero, A. M. (2024). *Conocimiento especializado de un profesor de Educación Infantil para la enseñanza de cuerpos geométricos* [Tesis doctoral, Universidad de Huelva]. Repositorio Institucional Arias Montano. https://rabida.uhu.es/dspace/handle/10272/24164

Jones, K. y Tzekaki, M. (2016). Research on the teaching and learning of geometry. En Á. Gutiérrez, G. C. Leder y P. Boero (Eds.), *The second handbook of research on the psychology of mathematics education: The journey continues* (pp. 109-149). Sense Publishers. https://doi.org/10.1007/978-94-6300-561-6_4

Silva, C. y Pinheiro, P. (2022). A matemática dos desenhos geométricos presente na tecelagem artesanal de Resende Costa. *Zetetiké*, *30*, e022020. https://doi.org/10.20396/zetetike.v30i00.8666579

Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight: A theory of mathematics education*. Academic Press.

Escudero-Domínguez, A. (2026). Geometría patrimonial en el aula: la teselación como nexo entre las matemáticas y la expresión artística. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 649). SEIEM.

LA DISCALCULIA Y LA ANSIEDAD MATEMÁTICA EN LA LITERATURA CIENTÍFICA

Dyscalculia and math anxiety in the scientific literature

Espina, E., Marbán, J. M. y Maroto, A. I.

Universidad de Valladolid

Entre los factores que inciden de forma significativa en las dificultades asociadas al aprendizaje de las matemáticas se encuentran la discalculia y la ansiedad matemática. La primera es entendida como un trastorno específico del aprendizaje que afecta a la correcta adquisición de las habilidades aritméticas, sobre todo a las relacionadas con el sentido numérico, el conteo y el cálculo; la ansiedad matemática, por su parte, queda caracterizada por respuestas emocionales negativas ante tareas relacionadas con las matemáticas. Ambas, aunque conceptualmente diferenciadas, pueden coexistir, incrementando el impacto negativo sobre el aprendizaje y la trayectoria académica del alumnado (García-Planas y García-Camba, 2022). Ante esta situación, el objetivo de la presente investigación fue el de llevar a cabo una aproximación de carácter exploratorio a la producción científica existente sobre discalculia y ansiedad matemática. Para ello, se realizó una búsqueda bibliográfica en Web of Science junto con un mapeo de la literatura científica apoyado en el programa de análisis bibliométrico VOSviewer. Así, se creó un algoritmo de búsqueda con palabras clave y operadores booleanos que reflejaran la variedad de términos empleados en la literatura científica para dar cuenta tanto de la discalculia como de la ansiedad matemática, utilizando criterios de inclusión tanto lingüísticos (estudios en inglés y español) como temporales (publicados hasta abril de 2026). El proceso de búsqueda arrojó un total de 50 documentos, los cuales fueron volcados en el programa VOSviewer para efectuar un análisis de acoplamiento bibliográfico de países, de citación de fuentes y publicaciones y de coocurrencia de palabras. Los resultados muestran una reducida producción en torno a la temática analizada, aunque se observa un creciente interés de la comunidad científica en los últimos 8 años. La mayor concentración de estudios se encuentra, por orden descendente, en Inglaterra, Alemania, Italia y Estados Unidos. Las principales líneas de investigación identificadas son la relación entre discalculia y ansiedad matemática, el papel de los procesos cognitivos implicados -especialmente la memoria de trabajo y las funciones ejecutivas-, y el impacto en el rendimiento académico. Predominan las contribuciones centradas en esta última línea, entre las que destacan estudios como el de Devine et al. (2018), que muestran que el alumnado con discalculia presenta el doble de probabilidad de experimentar niveles elevados de ansiedad matemática en comparación con sus pares con rendimiento matemático típico. Estos resultados ponen de manifiesto la necesidad de continuar profundizando en la relación entre ansiedad matemática y discalculia. Conocer a fondo este tipo de relación permitirá avanzar en el diseño de intervenciones y prácticas docentes más inclusivas que lograrán reducir barreras en el aprendizaje del alumnado con discalculia.

Agradecimientos: El estudio es parte de la actuación PID2022-138325OB-I00 financiada por MICIU/AEI/10.13039/501100011033 y por FEDER, UE.

Referencias

García-Planas, M. I. y García-Camba, M. V. (2022). Anxiety disorder caused by learning difficulties in mathematics. *Clinical Reviews and Cases, 4*(3), 1-5. https://doi.org/10.33425/2689-1069.1043

Devine, A., Hill, F., Carey, E. y Szűcs, D. (2018). Cognitive and emotional math problems largely dissociate: Prevalence of developmental dyscalculia and mathematics anxiety. *Journal of Educational Psychology, 110*(3), 431-444. https://doi.org/10.1037/edu0000222

Espina, E., Marbán, J. M. y Maroto, A. I. (2026). La discalculia y la ansiedad matemática en la literatura científica. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 650). SEIEM.

LA CONVERGENCIA COMO BASE PARA FAVORECER LA COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE INTEGRAL

Convergence as a basis for promoting the understanding of the concept of the integral

Esteve-Blasco, M., González-Astudillo, M. T., Fuertes-Prieto, M. A., Chamoso Sánchez, J. M. y Rodríguez Sánchez, M. M.

Universidad de Salamanca

El concepto de convergencia y su articulación para la comprensión de otros conceptos matemáticos constituye una dificultad persistente para numerosos estudiantes (Cottrill et al., 1996; Fernández, 2004). Diversos estudios destacan que el desarrollo de una imagen conceptual sólida favorece una comprensión que trasciende los enfoques meramente procedimentales (Cory y Garofalo, 2011). En este marco, concebir la convergencia como un proceso infinito puede ser fundamental para una comprensión profunda del concepto de integral, al facilitar su interpretación como una suma infinita de áreas infinitamente pequeñas y que puede ser especialmente relevante en la formación del profesorado de Matemáticas.

En este póster se presenta la implementación de una tarea basada en la descomposición infinita en forma de "escalones" sobre una diagonal (Swinyard y Larsen, 2012) en el Máster de Formación del Profesorado de Educación Secundaria, especialidad de Matemáticas. El objetivo fue abordar la noción de longitud infinitesimal a través de la idea de convergencia para dotar de significado al concepto de integral.

La metodología empleada fue la ingeniería didáctica, estructurada en cuatro fases: preliminar, en la que se analizaron aspectos relevantes de la definición de la integral; análisis a priori, en el que se diseñó la tarea en concordancia con dicho análisis; experimentación, en la que se implementó la tarea; y análisis a posteriori, en el que se analizaron los datos y se extrajeron las conclusiones.

Los resultados evidenciaron la construcción de interpretaciones intuitivas del concepto de convergencia y de la noción de cantidad infinitesimal, a la vez que imágenes conceptuales robustas del significado de "acercarse infinitamente", es decir, de la convergencia en sentido $\varepsilon - N$, la base para entender el concepto de integral como suma infinita de áreas infinitesimales. A pesar de que sería necesario más investigación sobre ello, estos resultados son prometedores para favorecer la docencia y la investigación de estos contenidos fundamentales.

Referencias

Cory, B. y Garofalo, J. (2011). Using dynamic sketches to enhance preservice secondary mathematics teachers' understanding of limits of sequences. *Journal for Research in Mathematics Education, 42*(1), 65-93.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K. y Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process scheme. *Journal of Mathematical Behavior, 15*(2), 167-192. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(96)90015-2

Fernández, E. (2004). The students' understanding of the concept of limit in functions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 35*(3), 385-398.

Swinyard, C. y Larsen, S. (2012). Coming to understand the formal definition of limit: Insights gained from engaging students in reinvention. *Journal for Research in Mathematics Education, 43*(4), 465-493. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.43.4.0465

Esteve-Blasco, M., González-Astudillo, M. T., Fuertes-Prieto, M. A., Chamoso Sánchez, J. M. y Rodríguez Sánchez, M. M. (2026). La convergencia como base para favorecer la comprensión del concepto de integral. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 651). SEIEM.

CARACTERIZACIÓN DE LA COMPETENCIA INTEGRAL DE INDAGACIÓN Y MODELIZACIÓN MATEMÁTICA

Characterization of the integral inquiry and mathematical modelling competence

Falcó-Solsona, P. J., Sala-Sebastià, G. y Breda, A.

Universitat de Barcelona

Investigaciones recientes han propuesto un ciclo integral que describe los procesos seguidos por los estudiantes al afrontar problemas abiertos que requieren del uso de los procesos de indagación y de modelización matemática de forma conjunta (Falcó-Solsona, Ledezma, et al., 2024). El presente trabajo da un paso más en la caracterización del ciclo integral de indagación y de modelización matemática al describir por primera vez las competencias que deben desarrollar los estudiantes para abordar tareas consistentes en problemas abiertos, interdisciplinarios, en los que intervienen las matemáticas y que pueden ser resueltos llevando a cabo los procesos de indagación y de modelización matemática. La caracterización de esta competencia conjunta constituye una herramienta útil para la implementación y valoración de tareas interdisciplinares con las características mencionadas, ya que dota a los docentes de una descripción de los logros que deben alcanzar los estudiantes y les da, así, pautas de observación para evaluar su desempeño y desarrollo. Se han implementado dos situaciones de aprendizaje con tres grupos clase (90 estudiantes) de 1º de ESO; el lector puede encontrar la descripción de las situaciones de aprendizaje implementadas en Falcó-Solsona, Ledezma, et al. (2024) y Falcó-Solsona, Sala-Sebastià, et al. (2024). Se han recogido los trabajos del alumnado, sus diarios de trabajo y las observaciones de los investigadores, que se han analizado utilizando una adaptación del método de análisis temático de Braun y Clarke (2006). El análisis, basado en los ciclos de indagación (Sala Sebastià, 2016), modelización (Falcó-Solsona, Ledezma, et al., 2024) y competencias de modelización de Maaß (2006), muestra las relaciones entre las subcompetencias para buscar respuestas iniciales, formular hipótesis y planificar, propias de la indagación, y las competencias para comprender el problema, propias de la modelización; se identifica que la emergencia de las competencias para obtener un modelo real, matematizarlo, trabajar matemáticamente con el modelo obtenido e interpretar los resultados, propias de la modelización, se ha dado sólo al aparecer datos matematizables. Se obtiene como resultado una caracterización de la competencia conjunta de indagación y modelización matemática, vinculando cada subcompetencia a una fase del ciclo integral de Falcó-Solsona, Ledezma et al. (2024).

Referencias

Braun, V. y Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in Psychology, 3*(2), 77-101. https://doi.org/10.1191/1478088706qp063oa

Falcó-Solsona, P. J., Ledezma, C., Sala-Sebastià, G. y Font, V. (2024). Inquiry and Mathematical Modelling with Real-Archaeological Objects in Secondary Education. *Education Sciences, 14*(3), 304. https://doi.org/10.3390/educsci14030304

Falcó-Solsona, P. J., Sala-Sebastià, G., Breda, A. y Farsani, D. (2024). Inquiry and mathematical modelling to decode an ancient roman message in Secondary Education. *Caminhos de Educaçao Matemática Em Revista, 14*(3), 53-62.

Maaß, K. (2006). What are modelling competencies? *ZDM, 38*(2), 113-142. https://doi.org/10.1007/BF02655885

Sala Sebastià, G. (2016). *Competència d'Indagació matemàtica en contextos històrics a Primària i Secundària*. Tesis Doctoral. Universitat de Barcelona. https://hdl.handle.net/2445/100800

Falcó-Solsona, P. J., Sala-Sebastià, G. y Breda, A. (2026). Caracterización de la competencia integral de indagación y modelización matemática. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 652). SEIEM.

DESEMPEÑO Y SEGURIDAD DE ALUMNADO DE 1º DE EDUCACIÓN SECUNDARIA AL VALORAR LA RAZONABILIDAD NUMÉRICA

First-year secondary school students' performance and confidence when judging reasonableness

Fariña, M.[a] y Bruno, A.[b]

[a]Colegio La Milagrosa, [b]Universidad de La Laguna

La razonabilidad numérica se entiende como la capacidad del alumnado para verificar el resultado obtenido en una tarea numérica y reconocer si es adecuado al contexto. Esta habilidad es una de las componentes del sentido numérico menos desarrollada entre el alumnado (McIntosh et al., 1992; Yang y Sianturi, 2019).

El presente estudio analiza la relación entre el desempeño del alumnado de Educación Secundaria para valorar la razonabilidad en tareas numéricas y el grado de seguridad con el que emite sus juicios. Se adopta un enfoque descriptivo de carácter cuantitativo, basado en la aplicación de un cuestionario online estructurado en tres niveles: selección de respuesta, justificación y grado de seguridad (Yang y Sianturi, 2019). El cuestionario consta de ocho actividades relacionadas con la estimación de operaciones con números naturales y decimales, y con la estimación de medidas. La muestra está compuesta por 250 estudiantes de 1º de ESO de distintos centros educativos de Canarias. Los resultados muestran que la seguridad del alumnado no siempre se corresponde con una adecuada valoración de la razonabilidad en tareas numéricas. Se identifica un porcentaje elevado de alumnado que presenta bajo desempeño acompañado de alta seguridad (24,8%), lo que evidencia la presencia de ideas matemáticas erróneas, mientras que son muy pocos los estudiantes que combinan alto desempeño y alta seguridad (0,8%), demostrando un conocimiento matemático sólido. Asimismo, se observa que la seguridad tiende a mantenerse en niveles medios incluso cuando las respuestas no son razonables, lo que sugiere que el alumnado no siempre es consciente de sus errores. Este resultado se ve reforzado por estudios que muestran desajustes entre rendimiento y autopercepción, así como diferencias en la seguridad en función del alumnado (Foster, 2016). En conjunto, los resultados evidencian que la seguridad constituye una dimensión clave para comprender el razonamiento numérico del alumnado, ya que aporta información complementaria a la valoración de la razonabilidad en tareas numéricas. No obstante, dicha seguridad no puede interpretarse como un indicador directo de éxito, sino como un reflejo del grado de consolidación -o fragilidad- del conocimiento matemático.

Agradecimientos: Trabajo financiado por PID2022-139007NB-I00, MCIN/AEI.

Referencias

McIntosh, A., Reys, B. J. y Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. For the Learning of Mathematics, 12(3), 2-8.

Foster, C. (2016). Confidence and competence with mathematical procedures. *Educational Studies in Mathematics, 91*, 271-288. https://doi.org/10.1007/s10649-015-9660-9

Yang, D. C. y Sianturi, I. A. J. (2019a). Sixth-grade students' performance, misconceptions, and confidence when *judging* the reasonableness of calculator results. *International Journal of Science and Mathematics Education, 17*(8), 1519-1540. https://doi.org/10.1007/s10763-018-09941-4

Fariña, M. y Bruno, A. (2026). Desempeño y seguridad de alumnado de 1º de educación secundaria al valorar la razonabilidad numérica. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 653). SEIEM.

APROVECHAMIENTO DEL DISFRUTE Y LA AUTOCONFIANZA PARA REESTRUCTURAR LA ANSIEDAD MATEMÁTICA EN LA EDUCACIÓN SECUNDARIA: UNA PERSPECTIVA DE SISTEMAS

Leveraging enjoyment and self-confidence to restructure mathematics anxiety in secondary education: a systems perspective

Gallego-Juan, M.[a], Santágueda-Villanueva, M.[a] y Sanz, M. T.[b]

[a]Universitat Jaume I, Castellón, [b]Universitat de València

El compromiso de los estudiantes con las matemáticas está configurado por un sistema dinámico de actitudes, emociones y creencias (Martín-Colomo, et al., 2025). Bajo las premisas del sistema de afecto dinámico (Di Martino y Zan, 2015) y la teoría del valor-expectativa situada (Eccles y Wigfield, 2020), este estudio tiene como objetivo examinar las complejas interconexiones entre el contexto social, las dimensiones actitudinales y las diversas facetas de la ansiedad matemática en el marco de la educación secundaria española.

Se analizó la arquitectura afectiva de una muestra representativa de 1.080 estudiantes de Educación Secundaria Obligatoria (1.º a 4.º de ESO). Los análisis psicométricos confirmaron que el sistema se organiza en torno a una estructura de ocho dimensiones que determinan la disposición del alumnado hacia la materia. Las dimensiones identificadas se articulan en tres ejes fundamentales que definen el ecosistema de aprendizaje, cada una de las cuales con las dimensiones que se indica: (a) contexto social (familia e iguales), (b) actitudes (disfrute, utilidad y autoconfianza) y (c) ansiedad matemática (ante exámenes, tareas y ámbito social).

Los hallazgos muestran que el disfrute y la utilidad actúan como factores protectores frente al "clúster de amenaza" de la ansiedad. La autoconfianza destaca como el regulador sistémico clave por su fuerte asociación negativa con la ansiedad ante exámenes. En estudios con muestras de secundaria en España (Nortes-Martínez-Artero y Nortes-Checa, 2019), este enfoque facilita la detección de perfiles en riesgo: estudiantes que, aunque valoran la utilidad de la materia, carecen de la confianza necesaria para su éxito académico y bienestar.

Agradecimientos: Investigación financiada bajo el proyecto CIAICO/2022/154 y CIAICO/2026/153.

Referencias

Di Martino, P. y Zan, R. (2015). The construct of attitude in mathematics education. En B. Pepin y B. Roesken-Winter (Eds.). *From beliefs to dynamic affect systems in mathematics education* (pp. 51-72). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-06808-4_3

Eccles, J. S. y Wigfield, A. (2020). De la teoría de la expectativa-valor a la teoría de la expectativa-valor situada: Una perspectiva evolutiva, cognitiva social y sociocultural de la motivación. *Contemporary Educational Psychology, 61*, 101859. https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2020.101859

Martín-Colomo, I., Marbán, J. M. y Espina, E. (2025). Ansiedad matemática en la literatura científica: un análisis bibliométrico. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. 512). SEIEM.

Nortes-Martínez-Artero, R. y Nortes-Checa, A. (2019). ¿A mayor ansiedad menor rendimiento en matemáticas? En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 453-462). Valladolid: SEIEM.

Gallego-Juan, M., Santágueda-Villanueva, M. y Sanz, M. T. (2026). Aprovechamiento del disfrute y la autoconfianza para reestructurar la ansiedad matemática en la educación secundaria: una perspectiva de sistemas. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 654). SEIEM.

INFLUENCIA DEL TAMAÑO DEL GRUPO EN LA RESOLUCIÓN COLABORATIVA DE PROBLEMAS VERBALES EN CUARTO CURSO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Influence of group size on collaborative word problem solving in fourth grade of primary education

Garcia-Marques, M.[a], Arnau, D.[a], González-Calero, J. A.[b], Solera-Monforte, S.[a], Tibau-Flores, A.[a] y Arevalillo-Herráez, M.[a]

[a]Universitat de València, [b]Universidad de Castilla-La Mancha

Los sistemas tutoriales inteligentes (STI) con una interfaz en formato chat representan una oportunidad singular para el estudio de las interacciones del alumnado en situaciones de resolución colaborativa de problemas, debido a la capacidad de estos sistemas para realizar un registro minucioso de la actividad individual de cada sujeto. Sin embargo, esta potencialidad de los STI apenas ha sido utilizada en el campo de la didáctica de la matemática con la finalidad de valorar la influencia del tamaño del grupo en el aprendizaje del alumnado.

El presente trabajo analiza el efecto del tamaño del grupo (grupos de dos frente a grupos de cuatro) tanto en las interacciones durante la resolución como en la evolución en la competencia de los participantes cuando resuelven aritméticamente problemas verbales.

En el estudio participaron 47 estudiantes de cuarto curso de educación primaria (9-10 años) pertenecientes a dos grupos naturales. Ambos grupos resolvieron individualmente antes y después de la intervención un cuestionario formado por diez problemas verbales de varias etapas. Cada grupo natural se asignó aleatoriamente a una de las dos condiciones experimentales (trabajo en parejas o en cuartetos). Entre ambos cuestionarios, y a lo largo de tres sesiones, los participantes resolvieron de manera colaborativa una colección de 20 problemas verbales de varias etapas utilizando el sistema tutorial inteligente HINTS en una versión colaborativa (Arnau-Gonzalez et al., 2025). Este STI es capaz de supervisar a grupos de estudiantes mientras resuelven de manera colaborativa problemas verbales y registrar: (1) los intercambios de información escrita entre compañeros en un chat; y (2) las secuencias de operaciones que envían al STI. Presentamos el análisis de la evolución de los participantes al comparar pre y postest en ambos grupos, así como el análisis de los patrones de interacción, reparto de roles y dinámicas de ambos grupos.

Agradecimientos: Realizado al amparo de los proyectos PID2023-150960NB-I00, financiado por el Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades y la Unión Europea; CIAICO/2023/065, financiado por la Generalitat Valenciana; y UV-SFPIE_PIEC- 3898686 financiado por la Universitat de València

Referencias

Arnau-González, P., Solera-Monforte, S., Wu, Y. y Arevalillo-Herráez, M. (2025). A framework for adapting conversational intelligent tutoring systems to enable collaborative learning. *Expert Systems with Applications, 271*, 126663. https://doi.org/10.1016/j.eswa.2025.126663

Garcia-Marques, M., Arnau, D., González-Calero, J. A., Solera-Monforte, S., Tibau-Flores, A. y Arevalillo-Herráez, M. (2026). Influencia del tamaño del grupo en la resolución colaborativa de problemas verbales en cuarto curso de educación primaria. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 655). SEIEM.

EXPLORANDO LA RELACIÓN ENTRE EL PENSAMIENTO COMPUTACIONAL Y EL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Exploring the relationship between computational thinking and mathematical thinking

Garcia-Marques, M., Garcia-Bayona, I. y Campos-Gonzalez, C.

Universitat de València

El pensamiento computacional (PC) se concibe como un conjunto de procesos cognitivos (descomposición, reconocimiento de patrones, abstracción y diseño algorítmico) que no son exclusivos de la programación informática, sino que se manifiestan igualmente en la resolución de problemas matemáticos. Metaanálisis recientes han documentado efectos de transferencia positivos del aprendizaje de programación hacia las habilidades matemáticas, la metacognición y el razonamiento (Scherer et al., 2019), y revisiones sistemáticas han identificado procesos cognitivos compartidos entre ambas competencias (Wu y Yang, 2022). El objetivo principal del presente estudio es analizar la relación entre los resultados obtenidos en dos instrumentos que miden, respectivamente, la competencia en PC y la competencia matemática en alumnado de educación primaria. Para evaluar el PC se empleó el *Beginners Computational Thinking test* (BCTt) (Zapata-Cáceres et al., 2020), que evalúa las dimensiones nucleares del PC (direcciones y bucles, condicionales, funciones y variables) sin requerir conocimientos previos de programación. La competencia matemática se midió mediante un test construido a partir de ítems liberados del estudio internacional TIMSS 2011 (4.º grado), seleccionados para cubrir de forma equilibrada los tres dominios cognitivos (aplicar, razonar, conocer) y los tres dominios de contenido (números, geometría y medida, datos). El estudio adoptó un diseño no experimental de tipo correlacional. La muestra estuvo compuesta por 110 estudiantes, de entre 9 y 12 años, sin instrucción previa en PC. Los resultados confirman la existencia de una relación moderada-alta y estadísticamente significativa entre la competencia en PC y la competencia matemática en toda la muestra. Las correlaciones entre el PC y cada uno de los tres dominios cognitivos del test matemático son prácticamente idénticas entre sí, y lo mismo ocurre con los tres dominios de contenido, lo que sugiere que la relación entre PC y matemáticas es de carácter transversal y no está ligada a ningún proceso cognitivo específico ni a ningún dominio de contenido concreto. Lo que es consistente con la hipótesis de que ambas competencias comparten una base cognitiva general más que vínculos específicos de habilidad a habilidad.

Agradecimientos: Realizado al amparo de los proyectos PID2023-150960NB-I00, Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades y la Unión Europea; y UV-SFPIE_PIEC- 3898686, Universitat de València.

Referencias

Scherer, R., Siddiq, F. y Sánchez Viveros, B. (2019). The cognitive benefits of learning computer programming: A meta-analysis of transfer effects. *Journal of Educational Psychology*, *111*(5), 764–792. https://doi.org/10.1037/edu0000314

Wu, W.-R. y Yang, K.-L. (2022). The relationships between computational and mathematical thinking: A review study on tasks. *Cogent Education*, *9*(1), 2098929. https://doi.org/10.1080/2331186X.2022.2098929

Zapata-Cáceres, M., Martín-Barroso, E. y Román-González, M. (2020) Computational thinking test for beginners: Design and content validation. *En Proceedings of the 2020 IEEE Global Engineering Education Conference (EDUCON)*, Porto, Portugal, 27–30 April 2020; pp. 1905–1914. https://doi.org/10.1109/EDUCON45650.2020.9125368

Garcia-Marques, M., Garcia-Bayona, I. y Campos-Gonzalez, C. (2026). Explorando la relación entre el pensamiento computacional y el pensamiento matemático. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 656). SEIEM.

HOJA DE TRABAJO FÍSICA VS VIRTUAL EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ARITMÉTICOS EN ESTUDIANTES AUTISTAS

Physical vs virtual worksheet in arithmetic problem-solving in autistic students

García-Moya, M.[a] y Blanco, R.[b]

[a]Universidad Autónoma de Madrid, [b]Universidad de Castilla-La Mancha

La resolución de problemas es un reto cognitivo para el alumnado autista debido a las demandas en funciones ejecutivas y organización de la información (APA, 2022). Por ello, es importante analizar las estrategias y los apoyos necesarios para que este alumnado aprenda a resolver problemas (González-de Cos et al., 2024). El objetivo del estudio es comparar la eficacia de la versión física y virtual de una hoja de trabajo estructurada en cinco pasos: elegir el enunciado del problema, seleccionar el pictoenunciado acorde al enunciado, completar los datos, elegir las operaciones a realizar y ejecutarlas (Blanco et al., 2024). Se realizó un diseño cuasiexperimental con seis estudiantes autistas (9-13 años, CI 99-116), cuatro de ellos con diagnóstico comórbido de TDAH, quienes resolvieron de forma individual: 16 problemas aditivos y multiplicativos en la evaluación inicial y final y 6 problemas aditivos y multiplicativos con cambios entre unidades de medida en cada sesión de intervención. Se formaron tres parejas equitativas: un miembro recibió instrucción individualizada presencial con la versión física y el otro, instrucción en línea con la hoja virtual. En las evaluaciones se tuvo en cuenta el número de problemas resueltos correctamente y en la intervención el porcentaje de pasos que se realizó de forma correcta y autónoma. La intervención finalizó cuando el estudiante resolvió entre el 60%-100% de los pasos de forma correcta y autónoma. Los resultados indican que los estudiantes en la modalidad física lograron una mejora progresiva y mayor autonomía que los de la modalidad virtual. Estos hallazgos muestran la importancia de considerar el perfil cognitivo del alumnado autista en la resolución de problemas (Polo-Blanco et al., 2024) para aportarle una enseñanza adaptada a sus necesidades. Se concluye que la eficacia de los materiales estructurados depende del diseño visual, la mediación docente y el soporte físico.

Agradecimientos: PID2022-136246NB-I00 financiado por MCIN/AEI /10.13039/501100011033/FEDER, UE; SBPLY/24/180225/000103, financiado por la UE a través del FEDER y por la JCCM a través del INNOCAM; Grupo de investigación EMAT (UCLM); Grupo de investigación GIECMES (UAM).

Referencias

American Psychiatric Association (2022). *Diagnostic and Statistical Manual of Mental Disorders* (5th ed.), *DSM-V-TR.* American Psychiatric Association.

Blanco, R., García-Moya, M. y Gómez-Atienza, D. (2024). Design of a mathematical problem-solving application for students with autism spectrum disorder. *Educational Technology & Society*, *27*(2), 220-242. https://doi.org/10.30191/ETS.202404_27(2).RP09

González-de Cos, L., Goñi-Cervera, J., Van Vaerenbergh, S. y Polo-Blanco, I. (2024). Estrategias informales en la resolución de problemas de permutaciones sin repetición por estudiantes con autismo. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 305-312). SEIEM.

Polo-Blanco, I., Suárez-Pinilla, P., Goñi-Cervera, J., Suárez-Pinilla, M. y Payá, B. (2024). Comparison of mathematics problem-solving abilities in autistic and non-autistic children: the influence of cognitive profile. *Journal of Autism and Developmental Disorders*, *54*, 353-365. https://doi.org/10.1007/s10803-022-05802-w

García-Moya, M. y Blanco, R. (2026). Hoja de trabajo física vs virtual en la resolución de problemas aritméticos en estudiantes autistas. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 657). SEIEM.

DESARROLLO DE LA MIRADA PROFESIONAL EN FUTUROS MAESTROS

Developing a professional perspective in future teachers

García-Moya, M.[a], Montoro, A. B.[b] y Moreno, A.[b]

[a]Universidad Autónoma de Madrid, [b]Universidad de Granada

El desarrollo del pensamiento funcional en Educación Primaria constituye un eje fundamental del sentido algebraico, ya que permite al alumnado identificar regularidades, establecer relaciones de dependencia y generalizar patrones matemáticos (Cañadas et al., 2016). Para favorecer este aprendizaje, los futuros docentes deben desarrollar la capacidad de identificar elementos matemáticamente relevantes en las producciones de los estudiantes, interpretar su razonamiento y tomar decisiones pedagógicas fundamentadas (Callejo y Zapatera, 2017). Este estudio pretende analizar la evolución de la mirada profesional (Jacobs et al., 2010) en 26 futuros maestros tras una intervención formativa centrada en el análisis de respuestas escolares vinculadas al pensamiento funcional. Para ello, se llevó a cabo un estudio descriptivo-exploratorio en el contexto de la formación inicial docente, utilizando y adaptando una de las tareas propuestas en Pincheira y Alsina (2024). Los resultados muestran que, tras la intervención, los participantes mejoraron su capacidad para identificar e interpretar las respuestas de los escolares. Sin embargo, en la destreza de decidir seguían persistiendo respuestas genéricas que no atendían de manera específica a la demanda matemática de las tareas. Se concluye que la muestra estudiada permite avanzar en la necesidad de profundizar en la interpretación del alumnado durante su formación inicial y la toma de decisiones instruccionales, reforzando el vínculo entre el conocimiento especializado y la práctica de aula (Espinosa-González et al., 2023).

Financiación

PID 2020-113601 GB-I00, financiado por la Agencia Estatal de Investigación (AEI) de España. PID2024-157106NB-I00, financiado por MCIN/ AEI/10.13039/501100011033 y FEDER, UE.
El grupo de investigación GIECMES (Universidad Autónoma de Madrid).

Referencias

Cañadas, M. C., Brizuela, B. M. y Blanton, M. L. (2016). Second graders articulating ideas about linear functional relationships. *The Journal of Mathematical Behavior, 41*, 87-103. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.10.004

Callejo, M. L. y Zapatera, A. (2017). Prospective primary teachers' noticing of students' understanding of pattern generalization. *Journal of Mathematics Teacher Education, 20*(4), 309-335. https://doi.org/10.1007/s10857-016-9343-1

Espinoza-González, J., Buforn, À. y Llinares, S. (2023). Competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de estudiantes de un grupo de profesores en formación. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 227–234). SEIEM.

Jacobs, V. R., Lamb, L. L. y Philipp, R. A. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(3), 169-202. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.41.2.0169

Pincheira, N. y Alsina, Á. (2024). Assessing Knowledge to Teach Early Algebra from the Mathematical Knowledge for Teaching (MKT) Perspective: A Support Tool for Primary School Teachers. *Journal on Mathematics Education, 15*(2), 639-660. https://doi.org/10.22342/jme.v15i2.pp639-660

García-Moya, M., Montoro, A. B. y Moreno, A. (2026). Desarrollo de la mirada profesional en futuros maestros. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 658). SEIEM.

EVOLUCIÓN DE LAS IDEAS DE DESCOMPOSICIÓN NUMÉRICA: IDENTIFICACIÓN DE PERFILES REPRESENTACIONALES EN EDUCACIÓN INFANTIL

Evolution of number decomposition ideas: identifying representational profiles in early childhood education

García-Triana, B., Edo, M., Torregrosa, A. y Albarracín, L.

Universitat Autònoma de Barcelona

El desarrollo temprano del sentido numérico requiere que el alumnado establezca relaciones entre las cantidades y las formas en que estas pueden organizarse. Por ello, la descomposición numérica, entendida como la capacidad de descomponer un número en dos o más partes que lo constituyen, adquiere gran relevancia en la construcción inicial del pensamiento aritmético (Clements y Sarama, 2020). Este estudio tiene como objetivo elaborar perfiles evolutivos a partir de la caracterización de las representaciones matemáticas que produce el alumnado de Infantil de 5 años sobre la descomposición de los números 7, 8, 9 y 10, durante un ciclo escolar.

Mediante una metodología cualitativa de enfoque interpretativo, se examinaron 128 producciones gráficas elaboradas por 16 estudiantes de I5 en una escuela de Catalunya durante el curso 2023-2024, recogidas a través de la Página en Blanco (Edo et al., 2024), herramienta que invita al alumnado a representar libremente sobre papel lo trabajado en cada sesión de descomposición numérica. La codificación de los datos se llevó a cabo bajo las categorías establecidas por García-Triana et al. (2024). El análisis de los datos permitió identificar 3 perfiles que describen la variabilidad en el desarrollo representacional analizado. Estos perfiles son: *Irregular:* Comprende representaciones que presentan un patrón irregular, caracterizado por uno o más retornos a niveles previos de categorización. *Estable:* Comprende representaciones que mantienen un patrón consistente dentro de un conjunto delimitado de categorías. *Progresivo:* Comprende las representaciones que muestran un avance ascendente a través de los niveles de categorización. Estos hallazgos demuestran que la evolución de la representación de la descomposición numérica no sigue un camino único ni lineal y enfatizan la importancia de atender a la diversidad de ritmos con los que los niños y niñas construyen y comunican las ideas sobre la descomposición de los números.

Finalmente, la identificación de estos perfiles constituye una herramienta valiosa para el campo de la investigación y de la docencia ya que nos permite interpretar las representaciones de los alumnos no como productos unánimes y aislados, sino como parte de un proceso individual de construcción de conocimiento, orientando así una intervención pedagógica más ajustada y respetuosa con los ritmos de cada estudiante.

Referencias

Clements, D. H. y Sarama, J. (2020). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach (3rd ed.).* Routledge. https://doi.org/10.4324/9781003083528

Edo, M., Fábrega, J. y Puchades, L. (2024). Representación matemática en infantil: La página en blanco. En FESPM (Eds.), *Actas 21 JAEM* (pp. 46-58). Servicio Publicaciones FESPM.

García-Triana, B., Edo, M. y Albarracín, L. (2024). Representaciones matemáticas en papel de estudiantes de I5 sobre la descomposición del número 7. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 265-272). SEIEM.

García-Triana, B., Edo, M., Torregrosa, A. y Albarracín, L. (2026). Evolución de las ideas de descomposición numérica: identificación de perfiles representacionales en Educación Infantil. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 659). SEIEM.

CARACTERIZACIÓN DEL USO DE MEDIADORES VISUALES TECNOLÓGICOS EN GEOMETRÍA 3D

Characterization of the use of 3D geometry technological visual mediators

Gavilán-Izquierdo, J. M., Martín-Molina, V., Toscano, R. y Fernández-León, A.

Universidad de Sevilla

Este trabajo forma parte de un proyecto de investigación que tiene como objetivo el estudio de la práctica matemática de definir de estudiantes del máster para profesor de matemáticas de Educación Secundaria y Bachillerato (EPS). Se emplea la teoría de la comognición (Sfard, 2008) para estudiar el discurso matemático y, en particular en este póster, el uso que hacen los EPS de mediadores visuales tecnológicos (MVT). En concreto, el uso de tres cuerpos geométricos (cubo, prisma oblicuo convexo y prisma oblicuo cóncavo) construidos con el software de geometría dinámica GeoGebra.

Para la caracterización del uso de estos MVT, se articulan la dualidad opaco/transparente de los modos de representación (Lesh et al., 1987) y la propuesta sobre las diferentes representaciones gráficas de Ott (2020) para determinar distintas posiciones en un continuo que va desde un uso opaco de los MVT (que no permite hacer explícitas las relaciones entre objetos o sus elementos) hasta un uso transparente (que permite hacer explícitas las relaciones). Los participantes fueron 19 EPS organizados en 5 grupos de 3-4 estudiantes.

El instrumento de recogida de datos fue un cuestionario que incluía 15 preguntas sobre construcción y selección de definiciones de los cuerpos geométricos. Los 5 grupos de EPS disponían de un ordenador con un archivo de GeoGebra en el que aparecían construidos los cuerpos. Se grabaron en audio las discusiones en los grupos, en vídeo las manipulaciones de las figuras en GeoGebra y se recogieron las respuestas escritas al cuestionario.

Los resultados preliminares muestran que los EPS usaron los MVT de dos formas distintas: manipulando simultáneamente los cuerpos como conjunto (rotando la vista gráfica 3D) o manipulando un cuerpo independientemente (arrastrando puntos). En el caso de la manipulación de un cuerpo de forma independiente, algunos grupos usaron los MVT de forma casi opaca y otros de forma altamente transparente. Algunos EPS mostraron dificultades para interpretar la información que proporcionaban estos MVT sobre los cuerpos.

Este trabajo puede ayudar a identificar la manera en la que los MVT incrementan el potencial para la identificación de objetos matemáticos y las relaciones entre ellos y sus elementos.

Agradecimientos: Proyecto PID2022-139079NB-I00 financiado por MICIU/AEI/10.13039/501100011033 y por FEDER/UE.

Referencias

Lesh, R., Post, T. R. y Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. En C. Janvier (Ed.), *Problems of representations in the teaching and learning of mathematics* (pp. 33-40). Lawrence Erlbaum.

Ott, B. (2020). Learner-generated graphic representations for word problems: An intervention and evaluation study in grade 3. *Educational Studies in Mathematics, 105*(1), 91-113. https://doi.org/10.1007/s10649-020-09978-9

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating. Human development, the growth of discourse, and mathematizing*. Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9780511499944

Gavilán-Izquierdo, J. M., Martín-Molina, V., Toscano, R. y Fernández-León, A. (2026). Caracterización del uso de mediadores visuales tecnológicos en geometría 3D. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 660). SEIEM.

IMAGEN DE LA DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DE ROLLE Y ACCIONES EPISTÉMICAS EN LA TRANSICIÓN SECUNDARIO-TERCIARIA

Proof image of Rolle's Theorem and epistemic actions in the secondary–tertiary transition

Gómez-Chacón, I. M., Sánchez, G. y González de Rábago, M.

Universidad Complutense de Madrid

Investigaciones en la transición de secundaria a la universidad muestran dificultades de los estudiantes en conceptos matemáticos y con el desarrollo del razonamiento formal. En los contenidos de Cálculo, surgen dificultades por la desconexión entre el concepto imagen y el concepto definición, así como entre la manipulación simbólica y el razonamiento (Weber y Alcock, 2004). El estudio se centra en la caracterización cognitiva y epistémica en el uso de imágenes en las estrategias de demostración del *Teorema de Rolle*. El concepto "imagen de demostración" (*proof image*) fue introducido por Kidron y Dreyfus (2014) mediante el uso de la abstracción en el contexto (AiC). En este estudio se realiza un análisis de las acciones epistémicas y se considera las dimensiones cognitivas y afectivas en el uso de la imagen y el razonamiento formal. Las preguntas de investigación son: ¿Cuáles son las imágenes conceptuales creadas por los estudiantes al trabajar en el teorema de Rolle? ¿Qué acciones epistémica cognitivas y afectivas se explicitan al usar la imagen en sus estrategias "sintácticas"?

En el estudio participan 106 estudiantes de bachillerato procedentes de tres centros de secundaria. El diseño metodológico es cualitativo. Presentamos los resultados de un cuestionario, que consta de tres partes: (i) conceptos de funciones y derivadas. (ii) teorema de Rolle: imágenes mentales y comprensión intuitiva. (iii) evaluación de la comprensión sobre la relación entre continuidad y diferenciabilidad y factores metacognitivos y afectivos que pueden inhibir el uso efectivo de su conocimiento. Se utiliza la técnica de redes sistémicas (Bliss et al., 1983) que nos permiten observar simultáneamente todas las respuestas de los estudiantes, ofreciendo una visión global y las relaciones complejas entre los diferentes elementos representados: imagen conceptual y acciones epistémicas. Los resultados se refieren a: (1) la influencia de las imágenes conceptuales en el razonamiento deductivo en la prueba del teorema y (2) cómo los factores metacognitivos y afectivos pueden dificultar el uso adecuado de los conocimientos e intuiciones explicitadas en las imágenes.

Agradecimientos: La publicación es parte de la actuación PID2022-138325OB-I00 financiada por MICIU/AEI /10.13039/501100011033 y por FEDER, UE.

Referencias

Biehler, R., Durand-Guerrier, V. y Trigueros, M. (2024). New trends in didactic research in university mathematics education. *ZDM Mathematics Education, 56*, 1345–1360. https://doi.org/10.1007/s11858-024-01643-2

Bliss, J., Monk, M. y Ogborn, J., (1983). *Qualitative data analysis for educational research. A guide to users of systemic networks*. Croom, Helm.

Kidron, I. y Dreyfus, T. (2014). Proof image. *Educational Studies in Mathematics*, 87(3), 297–321. https://doi.org/10.1007/s10649-014-9566-y

Weber, K. y Alcock, L. (2004). Semantic and syntactic proof productions. *Educational Studies in Mathematics, 56*(2), 209–234. https://doi.org/10.1023/B:EDUC.0000040410.57253.a1

Gómez-Chacón, I. M., Sánchez, G. y González de Rábago, M. (2026). Imagen de la demostración del teorema de Rolle y acciones epistémicas en la transición secundario-terciaria. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 661). SEIEM.

RAZONAMIENTO PROBABILÍSTICO E INTELIGENCIA ARTIFICIAL GENERATIVA: UNA EXPERIENCIA FORMATIVA CON CARRERA A 20

Probabilistic reasoning and generative artificial intelligence: A formative experience with the Race to 20 game

Gómez-Rey, P.[a], Embid, S.[b], Parra, V.[c]

[a]Universidad de Sevilla, [b]Universidad de La Laguna, [c]NIEM-ISISTAN-CONICET, UNICEN

La Unión Europea aspira a que el 80% de la población alcance competencias digitales básicas en 2030 (Parlamento Europeo, 2025). Ante este reto, se diseñó una intervención formativa basada en el juego Carrera a 20 (Brousseau, 1997), en el contexto de formación inicial docente en Educación Primaria. La propuesta adapta Carrera a 20 para desarrollar conocimientos de probabilidad (Gómez-Torres et al., 2014) y contrastar dos modalidades de juego (desconectada y conectada). En la modalidad desconectada, los participantes compiten por parejas (A/B), sumando alternativamente 1 o 2 hasta alcanzar 20 sin más soporte que la hoja de papel. En cambio, en la modalidad conectada, los jugadores son un humano y una máquina, esta última creada con Inteligencia Artificial Generativa (IAG) disponible en html. La experiencia piloto se llevó a cabo en abril de 2026 con cuatro futuros docentes (P1, P2, P3 y P4). Durante la actividad, los participantes anticiparon si el juego dependía de la suerte o de la estrategia, valoraron posiciones ganadoras, registraron rondas y extrajeron conclusiones sobre la probabilidad de victoria en cada modalidad. Las tareas se estructuraron según las cuatro fases de la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD): acción, formulación, validación e institucionalización (Brousseau, 1997). Los resultados mostraron el tránsito desde interpretaciones intuitivas de la probabilidad basadas en la suerte o la incertidumbre hacia una comprensión más estratégica del juego. La interpretación frecuencial apareció en el registro de rondas; la clásica, de forma incipiente, al reconocer las dos opciones por turno (+1 o +2); y la subjetiva, en las creencias sobre la IAG como oponente rápido y estratégico. P2 alcanza la mayor precisión al identificar la secuencia ganadora y afirmar que, con estrategia, ganar es un "suceso seguro (100%)". P1 reconoce la ventaja de iniciar si se conoce la estrategia, mientras que P3 y P4 detectan regularidades por ensayo-error sin formalizar el conocimiento matemático. En relación con la TSD, el taller guio a los participantes por situaciones de acción, formulación y validación. Los participantes exploraron el juego, formularon conjeturas y las contrastaron con los resultados. Sin embargo, las producciones ofrecen distinto potencial para una posterior institucionalización docente. P2 vincula con mayor claridad la estrategia con la probabilidad y percibe la IAG como oponente no aleatorio: "la IA es pura matemática, sabe cómo jugar". En cambio, P1, P3 y P4 reconocen regularidades, pero no las formalizan. Como reto final, los participantes debían diseñar una tarea matemática mediada por IAG, aunque ninguno logró elaborarla. Esto evidencia que la IAG favorece la exploración y validación de estrategias, pero no garantiza conocimiento matemático sin mediación docente.

Referencias

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics. Didactique des mathématiques 1970-1990*. Kluwer Academic Publishers.

Gómez-Torres, E., Batanero, C. y Contreras, J. M. (2014). Procedimientos probabilísticos en libros de texto de matemáticas para Educación Primaria en España. *Épsilon, 31*(2), 25-42.

Parlamento Europeo (2025). *Growing focus on digital skills*.https://epthinktank.eu/2025/03/04/growing-focus-on-digital-skills/

Gómez-Rey, P., Embid, S. y Parra, V. (2026). Razonamiento probabilístico e Inteligencia Artificial Generativa: Una experiencia formativa con Carrera a 20. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 662). SEIEM.

REKENREK COMO FACILITADOR DE LA ADQUISICIÓN DE LA CARDINALIDAD EN UNA ADOLESCENTE CON AUTISMO

Rekenrek as a tool for facilitating the development of cardinality in a teenage girl with autism

Goñi-Cervera, J.[a], Polo-Blanco, I.[a] y Bruno, A.[b]

[a]Universidad de Cantabria, [b]Universidad de La Laguna

Las habilidades tempranas de sentido numérico, entendidas como aquellas que implican un conocimiento explícito de los números, son predictoras del rendimiento matemático futuro (Jordan y Levine, 2009). Si bien el perfil de rendimiento en matemáticas en personas con trastorno del espectro autista (TEA) es variable, numerosos estudios evidencian que los estudiantes con TEA presentan menor rendimiento que sus compañeros de desarrollo típico en habilidades matemáticas tempranas (Fernández-Cobos y Polo-Blanco, 2024). En este sentido, proporcionarles una base sólida en el conocimiento numérico inicial es imprescindible para tratar de prevenir o minimizar dificultades futuras. Estudios recientes muestran que, mediante una instrucción adaptada a sus necesidades, este alumnado puede desarrollar aprendizajes matemáticos significativos. Metodologías como la secuencia Concreta-Representacional-Abstracta (CRA) han mostrado ser efectivas para trabajar con alumnado con TEA matemática temprana. En esta línea, el presente trabajo tiene como objetivo describir cómo el uso del rekenrek en una secuencia CRA facilita la adquisición de la cardinalidad de conjuntos de hasta 20 elementos en una adolescente de 14 años con TEA y discapacidad intelectual, con una edad matemática equivalente de 5 años y 6 meses. Para ello, se emplea una metodología CRA integrada que combina el rekenrek físico y en plantilla con simbología en las fases C-A y R-A. Las tareas tratadas fueron relativas a: "¿cuántos hay?" y "dame n", con n hasta 20, en línea con trabajos previos sobre cardinalidad con alumnado TEA (Goñi-Cervera et al., 2024). Se llevaron a cabo cuatro sesiones de tareas de "¿cuántos hay?" y tres sesiones de tareas "dame n". En cada sesión se realizaron tres tareas en fase integrada C-A y tres tareas en fase integrada R-A. Los resultados evidenciaron una mejora progresiva en ambas tareas, alcanzando un alto nivel de logro. La participante mostró mayores dificultades en R-A en ambos tipos de tareas. Estas dificultades se abordaron enfatizando la correspondencia uno a uno en la plantilla del rekenrek, apoyándose en el 10 para la descomposición de números mayores de 10 y poniendo especial énfasis en la ejemplificación de las acciones. Los resultados tienen implicaciones para el aprendizaje matemático temprano de alumnado con TEA, ampliando la existente literatura sobre la eficacia de apoyos visuales y metodologías como CRA, y sugieren seguir profundizando en el uso de metodologías adaptadas.

Agradecimientos: PID2022-138325OB-I00 financiado por MICIU/AEI/10.13039/501100011033 y por FEDER, UE.

Referencias

Fernández-Cobos, R. y Polo-Blanco, I. (2024). Early math competence in students with autism. *Education and Training in Autism and Developmental Disabilities, 59*(2), 165-178.

Goñi-Cervera, J., Polo-Blanco, I., Tregón, N. y Bruno, A. (2026). The concrete-representational-abstract sequence for the acquisition of the cardinal principle in preschool children with autism. International Journal of Developmental Disabilities, 72(3), 473-483. https://doi.org/10.1080/20473869.2024.2341195

Jordan, N. C. y Levine, S. C. (2009). Socioeconomic variation, number competence, and mathematics learning difficulties in young children. *Developmental Disabilities Research Reviews, 15,* 60–68. https://doi.org/10.1002/ddrr.46

Goñi-Cervera, J., Polo-Blanco, I. y Bruno, A. (2026). Rekenrek como facilitador de la adquisición de la cardinalidad en una adolescente con autismo. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 663). SEIEM.

PERFILES DE CONCEPCIONES DE LA RECTA TANGENTE ENTRE ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS DE CIENCIAS: UN ANÁLISIS DE CLASES LATENTES

Profiles of tangent line conceptions among undergraduate science students: a latent class analysis

González-López, G. J., Marrero, I. y Camacho-Machín, M.

Universidad de La Laguna

El concepto de recta tangente a una curva constituye una noción central en el estudio del análisis matemático y desempeña un papel fundamental en la comprensión de los conceptos de derivabilidad y aproximación local. Sin embargo, diversos trabajos han mostrado que los estudiantes suelen mantener imágenes conceptuales de la tangencia fuertemente influidas por la geometría euclídea, incluso tras su paso a contextos analíticos más avanzados. Biza y Zachariades (2010) identificaron distintas perspectivas sobre la recta tangente —*Analytical Local, Intermediate Local y Geometrical Global*— a partir de un análisis de clases latentes (LCA) interpretado mediante factores influyentes relacionados con propiedades geométricas y analíticas de la tangencia, tales como el número de puntos comunes entre curva y recta, la existencia de tangente en puntos singulares o la formulación analítica de la recta tangente. En este trabajo se presenta parte de una investigación centrada en las concepciones de la recta tangente de estudiantes universitarios del primer curso de los grados de Ciencias Ambientales, Química e Ingeniería Química. Se trata de analizar las concepciones de tangencia de los estudiantes de titulaciones científico-técnicas y estudiar la posible relación entre dichas concepciones y las perspectivas descritas en investigaciones previas. A tal fin, se diseñó y administró un cuestionario a 100 estudiantes de la asignatura de matemáticas, adaptado parcialmente del utilizado por Biza y Zachariades (2010) y organizado atendiendo a dimensiones conceptuales inspiradas en los factores influyentes descritos por estos autores. Los datos obtenidos se analizaron mediante LCA, utilizando la librería StepMix en Python. El modelo identificó tres perfiles de estudiantes parcialmente compatibles con los de Biza y Zachariades (2010), con probabilidades medias de pertenencia superiores a 0.91 en todos los casos. Uno de ellos presenta un dominio relativamente sólido tanto de las propiedades conceptuales como de la formulación analítica de la recta tangente. Otro grupo muestra una concepción principalmente geométrica, con dificultades apreciables en formalización y cálculo. Finalmente, se evidencia un perfil intermedio en el que los estudiantes parecen reconocer adecuadamente determinadas propiedades de la tangencia, aunque su dominio operativo de la fórmula de la recta tangente es limitado. En conjunto, los resultados sugieren la persistencia de imágenes conceptuales de carácter geométrico incluso en estudiantes universitarios de titulaciones científicas, y ponen de manifiesto la necesidad de diseñar secuencias de enseñanza que articulen explícitamente las distintas concepciones de tangencia y favorezcan procesos de reconstrucción conceptual.

Agradecimientos: Investigación financiada por MCIN/AEI (PID2022-139007NBI00).

Referencias

Biza, I. y Zachariades, T. (2010). First year mathematics undergraduates' settled images of tangent line. *Journal of Mathematical Behavior*, *29*(4), 218–229. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2010.11.001

Orts, A., Llinares, S. y Boigues, F. (2016). Aprendizaje del concepto recta tangente en alumnos de Bachillerato. En J.A. Macías, A. Jiménez, J.L. González, M.T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F.J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 157–165). SEIEM.

González-López, G. J., Marrero, I. y Camacho-Machín, M. (2026). Perfiles de concepciones de la recta tangente entre estudiantes universitarios de ciencias: un análisis de clases latentes. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 664). SEIEM.

LA REPRESENTACIÓN DE LA FRACCIÓN COMO OPERADOR MÁS ALLÁ DE LA RESOLUCIÓN ARITMÉTICA

Representing fraction as operator beyond arithmetic resolution

Herreros-Torres, D., Sanz, M. T. y Gómez-Ferragud, C. B.

Universitat de València–Estudi General (UVEG)

La fracción como operador constituye uno de los significados más complejos de la fracción en Educación Primaria debido a las relaciones multiplicativas y proporcionales que implica. Desde enfoques socioculturales y semióticos de la Educación Matemática, las representaciones externas permiten analizar aspectos de la comprensión matemática que no siempre son visibles a través de la resolución aritmética (Rico, 2012). En este sentido, resolver correctamente un problema no garantiza necesariamente una comprensión conceptual suficientemente desarrollada. En este marco, el presente estudio exploratorio tiene como objetivo identificar y analizar las representaciones gráficas empleadas por alumnado de Educación Primaria y profesorado en formación en la resolución de problemas aritméticos verbales asociados al significado operador de la fracción, considerando únicamente los casos con resolución aritmética correcta.

La muestra estuvo formada por 750 estudiantes de 4.º, 5.º y 6.º de Educación Primaria y 263 docentes en formación de 3.º y 4.º curso del Grado en Maestro de Educación Primaria. El instrumento incluyó tres problemas correspondientes a distintas variantes del significado operador: fracción de un número en contexto continuo, fracción de una fracción y fracción de un número en contexto discreto. El estudio combinó análisis cuantitativos y cualitativos. En una primera fase se identificaron los sujetos con resolución aritmética correcta y, posteriormente, se analizaron sus representaciones gráficas mediante un sistema de categorías elaborado de forma deductiva e inductiva.

Los resultados preliminares muestran diferencias relevantes entre la resolución aritmética y la representación gráfica: en el alumnado de Educación Primaria se observa que numerosos estudiantes resuelven correctamente el cálculo, pero presentan dificultades para representar gráficamente el significado operador de la fracción, especialmente en contextos continuos y en tareas de fracción de fracción. Por ejemplo, de 58 estudiantes de 4.º que resolvieron correctamente el problema de fracción de un natural en contexto continuo, únicamente 8 realizaron una representación gráfica conceptualmente adecuada. Asimismo, aunque los docentes en formación obtienen mejores resultados, también evidencian dificultades en la coordinación entre cálculo y representación del significado operador.

Estos hallazgos sugieren la necesidad de promover en la enseñanza de las fracciones experiencias que favorezcan la coordinación entre cálculo, significado y representación, así como de incorporar en la formación inicial del profesorado tareas orientadas al desarrollo de una comprensión más profunda del significado operador de la fracción y de sus distintas formas de representación (Alqahtani et al., 2022).

Agradecimientos: Investigación financiada bajo el proyecto CIAICO/2022/154 y CIAICO/2026/153.

Referencias

Alqahtani, M., Powell, A., Webster, V. y Tirnovan, D. (2022). How a Measuring Perspective Influences Pre-service Teachers' Reasoning about Fractions with Discrete and Continuous Models. *International Electronic Journal of Elementary Education, 14*(3), 441–458. https://doi.org/10.26822/iejee.2022.255

Rico, L. (2012). Aproximación a la investigación en Didáctica de la matemática. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 1*(1), 39–63. https://doi.org/10.35763/aiem.v1i1.4

Herreros-Torres, D., Sanz, M. T. y Gómez-Ferragud, C. B. (2026). La representación de la fracción como operador más allá de la resolución aritmética. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 665). SEIEM.

IDENTIFICANDO CONFLICTOS SEMIÓTICOS EN RESOLUCIONES DE UN PROBLEMA SOBRE INTEGRAL IMPROPIA

Identifying semiotic conflicts in solutions to an improper integral problem

Igolnikov, N.[a] y Rivas, M.[b]

[a]Universidad de Buenos Aires, [b]Universidad de Granada

Una actividad enriquecedora tanto para la investigación en Educación Matemática como para la práctica del profesorado es la identificación de disparidades potenciales entre los significados atribuidos por distintos sujetos frente a un determinado objeto o práctica matemática (Godino et al., 2016). Desde la perspectiva del enfoque ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos (Godino, 2024), marco teórico que sustenta este escrito, se realizan análisis ontosemióticos de las resoluciones de problemas matemáticos. En estos análisis son identificados objetos y procesos puestos en juego en las prácticas elementales, involucradas en tales resoluciones. En el caso de la integral impropia, se han hecho algunas aportaciones, proporcionadas por este tipo de análisis, a la labor docente (Igolnikov y Rivas, 2025). En el presente trabajo se profundiza en esas aportaciones al formularse como objetivo: identificar conflictos semióticos potenciales a partir del estudio de un análisis ontosemiótico, aplicado a cuatro posibles resoluciones de un problema sobre integral impropia. Desde el EOS se han realizado precisiones sobre una clasificación de los conflictos semióticos (Godino, 2024) que permiten identificar situaciones que pueden manifestarse cuando alumnos hipotéticos resuelven el problema en referencia. Para el logro del objetivo formulado se desarrolla una metodología de investigación de índole teórica-hermenéutica, por medio de la realización de un análisis de contenido (Krippendorff, 2019), aplicado a los análisis ontosemióticos realizados a las cuatro resoluciones referidas. A modo de ejemplo, los análisis realizados han permitido identificar el uso de la proposición P1: $\int_{-\infty}^{+\infty}(x^4+2x^2)dx = \lim_{t\to+\infty}\int_{-t}^{t}(x^4+2x^2)dx$. El uso de esta proposición puede deberse a una extensión de la práctica involucrada en el cálculo de integrales impropias Tipo I. La cual puede interpretarse como el reemplazo del símbolo $+\infty$ en $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ por la expresión compuesta $\lim_{t\to+\infty}\int_{-\infty}^{t}(x^4+2x^2)dx$, y, análogamente en el caso de $-\infty$. Al hacer unitario ambos reemplazos, se manifiesta la proposición P1. Esta identificación muestra la manifestación de conflictos semióticos que no necesariamente conducen a errores matemáticos.

Referencias

Godino, J. D. (2024). *Enfoque ontosemiótico en educación matemática. Fundamentos, herramientas y aplicaciones*. McGraw Hill-Aula Magna. https://digibug.ugr.es/handle/10481/93738

Godino, J.D., Wilhelmi, M.R., Blanco, T.F., Contreras, Á. y Giacomone, M. (2016). Análisis de la actividad matemática mediante dos herramientas teóricas: Registros de representación semiótica y configuración ontosemiótica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 10, 91-110. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i10.144

Igolnikov, N. y Rivas, M. (2025) Aportaciones de la configuración epistémica al estudio de la integral impropia. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp.212-219). SEIEM. https://www.seiem.es/wp-content/uploads/2025/10/Com13-IgolnikovRivas.pdf

Krippendorff, K. (2019). *Content analysis: An introduction to its methodology*. Sage Publications.

Igolnikov, N. y Rivas, M. (2026). Identificando conflictos semióticos en resoluciones de un problema sobre integral impropia. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 666). SEIEM.

ANÁLISIS DE LOS GRÁFICOS DE LÍNEAS CONSTRUIDOS POR EL FUTURO PROFESORADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA EN UN PROYECTO STEM

Analysis of the line graphs produced by pre-service primary education teachers in a STEM project

Izagirre, A., Caño, L. y Zabaleta, A.

Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea (UPV/EHU)

Actualmente la sociedad se enfrenta a diversas problemáticas, lo que ha obligado a diferentes organismos a aportar soluciones (Silva-Hormazábal y Alsina, 2023). En este sentido, la UNESCO ha situado a los enfoques educativos integrados STEM como medio para abordar los problemas medioambientales y sociales, ya que permiten integrar diferentes perspectivas para buscar soluciones. Partiendo de estas directrices, este estudio se basa en un proyecto STEM que tiene como eje central una charca situada en la universidad y que permite trabajar de forma conjunta las competencias matemática y científica. Se invita al alumnado a analizar datos reales y a llevar a cabo las fases del ciclo de investigación establecido por Wild y Pfannkuch (1999). En este proceso de transnumeración, el alumnado ha construido gráficos de líneas para identificar relaciones entre las variables. El objetivo de esta investigación es analizar la complejidad semiótica y el nivel de lectura de dichos gráficos, siguiendo las directrices de Batanero et al. (2010) y Curcio (1989), respectivamente. Esta investigación se ha llevado a cabo desde un paradigma interpretativo y se enmarca dentro de las investigaciones de corte mixto, con una predominancia cualitativa y carácter exploratorio. En ella se han clasificado tanto los gráficos estadísticos construidos por el alumnado como las interpretaciones aportadas mediante la técnica de triangulación entre las tres autoras. La muestra está compuesta por 116 estudiantes de tercer curso del Grado de Educación Primaria de la Universidad del País Vasco distribuidos en 30 grupos de entre 3 y 4 personas para la realización de dicho trabajo interdisciplinar. En cuanto a la complejidad semiótica, el 73,33 % de los grupos ha logrado el nivel más alto representando la lista de datos de dos o más variables conjuntamente, mientras que el resto ha construido gráficos individuales para cada variable. Respecto a lectura de gráficos, la mayoría de los grupos ha realizado una lectura yendo más allá de los datos (76,67 %), mientras que hay una minoría que no lee el gráfico (6,67 %), que solo lee los datos (6,67 %) o que lee entre los datos (10 %).

Agradecimientos: Trabajo parcialmente financiado por el proyecto de investigación Hezkuntza25/05 y el grupo GIU21/031.

Referencias

Batanero, C., Arteaga, P. y Ruiz, B. (2010). Statistical graphs produced by prospective teachers in comparing two distributions. En V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne y F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 368-377). ERME. www.inrp.fr/editions/cerme6

Curcio, F.R. (1989). *Developing graph comprehension*. NCTM.

Silva-Hormazábal, M. y Alsina, Á. (2023). STEAM for sustainability: integrating statistics and science education in a rural context. *Revista Innovaciones Educativas, 25*(39), 188-204. https://doi.org/10.22458/ie.v25i39.4728

Wild, C. y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review, 67*(3), 223-265.

Izagirre, A., Caño, L. y Zabaleta, A. (2026). Análisis de los gráficos de líneas construidos por el futuro profesorado de educación primaria en un proyecto STEM. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 667). SEIEM.

DIFICULTADES CONCEPTUALES EN EL RAZONAMIENTO ESTADÍSTICO DE FUTUROS MAESTROS DE PRIMARIA

Conceptual difficulties in statistical reasoning among future primary school teachers

Jiménez-Fanjul, N., León-Mantero, C. y Casas-Rosal, J. C.

Universidad de Córdoba

La enseñanza de la estadística en la formación inicial del profesorado de Primaria sigue, en muchas ocasiones, anteponiendo lo procedimental a lo conceptual (Bargagliotti y Eubanks-Turner, 2025), lo que limita el desarrollo del razonamiento estadístico (SR, de *Statistical Reasoning*). En el contexto actual, basado en la permanente presencia de los datos, un adecuado SR como parte esencial del Pensamiento Crítico Estadístico (SCT de *Statistical Critical Thinking*) es necesario para afrontar la información con garantías. Este trabajo analiza dificultades conceptuales en futuros maestros mediante una adaptación de idioma, currículo y contexto del instrumento desarrollado por Allen (2006), con el objetivo de identificar concepciones erróneas persistentes y patrones de razonamiento inadecuado que deben ser abordados para la mejora de la formación de los futuros docentes. El estudio se ha realizado con una muestra de 902 estudiantes del Grado de Educación Primaria de la Universidad de Córdoba. Se ha seguido un diseño descriptivo-interpretativo mediante el análisis de respuestas a los ítems del test, identificando tipologías de dificultades conceptuales recurrentes. Los resultados muestran que una parte significativa del alumnado presenta dificultades en aspectos como conocer en profundidad la influencia de la variabilidad en las medidas descriptivas y la definición frecuentista de probabilidad, en la que se detecta una tendencia a la *sobreequiprobabilización* de los experimentos, inducida por el excesivo uso de la regla de Laplace. Esto se traduce en tasas de acierto similares o incluso, en ocasiones, inferiores a las esperadas por azar. Los resultados son coherentes con investigaciones previas que evidencian la persistencia de concepciones erróneas en el razonamiento estadístico en la formación inicial del profesorado (Ruz et al., 2020; Muñoz-Ñungo, 2024; Gibeau y Cousineau, 2025). Desde una perspectiva didáctica, estos hallazgos refuerzan la necesidad de diseñar experiencias de aprendizaje centradas en la confrontación de errores conceptuales y en el desarrollo progresivo del razonamiento estadístico, como base para el desarrollo del SCT.

Referencias

Allen, K. (2006). *The statistics concept inventory: Development and analysis of a cognitive assessment instrument in statistics* [Tesis doctoral, University of Oklahoma]. SSRN Electronic Journal. https://bit.ly/3N3luZh

Bargagliotti, A. y Eubanks-Turner, C. (2025). Teacher Preparation in Statistics: Focusing on Variability Through Attending to Precision. Journal of Statistics and Data Science Education, 33(2), 189–198. https://doi.org/10.1080/26939169.2024.2350935

Gibeau, R. M. y Cousineau, D. (2025). Uncovering key statistical concepts from an investigation of four standardized tests. *Teaching Statistics, 47*(3), 219–234. https://doi.org/10.1111/test.12410

Muñoz-Ñungo, O. (2024). *Razonamiento estadístico de los estudiantes de Educación Básica Secundaria* [Tesis doctoral, Universidad de Córdoba]. Helvia. Repositorio Institucional de la Universidad de Córdoba. https://helvia.uco.es/handle/10396/28798

Ruz, F., Molina-Portillo, E. y Contreras, J. M. (2020). Evaluación de conocimientos sobre el contenido de estadística descriptiva de futuros profesores de matemáticas. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, (18), 55–71. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i18.268

Jiménez-Fanjul, N., León-Mantero, C. y Casas-Rosal, J. C. (2026). Dificultades conceptuales en el razonamiento estadístico de futuros maestros de Primaria. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 668). SEIEM.

GENERALIZACIÓN A PARTIR DE LA REPRESENTACIÓN GRÁFICA. EXPERIENCIA DE AULA EN EDUCACIÓN PRIMARIA

Generalisation based on graphical representation. Classroom experience in primary education

Jiménez-Fernández, A. I., Torres, M. D. y Castro-Rodríguez, E.

Universidad de Granada

El pensamiento funcional en educación primaria propone cuatro prácticas algebraicas en el aula: (a) generalizar, (b) representar, (c) razonar y (d) justificar (Blanton et al., 2011). Investigaciones previas analizan la generalización en este nivel (e. g., Torres et al., 2022) o la construcción de gráficos en cursos superiores (e. g., Cañadas et al., 2024). Sin embargo, en este trabajo el objetivo es describir el proceso de generalización que evidencian estos estudiantes de segundo de Educación Primaria (7-8 años) al abordar tareas de generalización con representación gráfica como un medio para la identificación de relaciones funcionales. Para ello, diseñamos y aplicamos dos sesiones de grupo-clase, que fueron videograbadas, con 25 estudiantes de un colegio público de Granada sin experiencia previa en el tema. Las sesiones se estructuraron en tres partes: la introducción de un contexto narrativo sobre la trayectoria de un barco; el trabajo en gran grupo mediante un panel manipulativo; y la resolución individual de una hoja de trabajo. Las tareas se centraron en las funciones lineales y=x+1; y=x+3 e y=x-1. Las producciones escritas se analizaron mediante un análisis de contenido inductivo, a partir de las siguientes categorías: la traducción tabla-gráfico; la extensión de los ejes y de la cuadrícula para representar casos no dados explícitamente; y la representación de la continuidad mediante líneas o sucesiones de puntos en el caso general.

Los resultados muestran que el alumnado identifica regularidades funcionales, es decir, relaciones constantes entre dos variables que cambian conjuntamente, mediante la correspondencia tabla-gráfico y la reproducción de patrones espaciales, y extiende casos particulares cercanos hacia casos lejanos a través de la representación gráfica. En los casos particulares, traduce la tabla al gráfico; en los casos lejanos, prolonga ejes y cuadrícula para conservar la correspondencia entre variables; y en el caso general, utiliza líneas o sucesiones de puntos para expresar la continuidad de la trayectoria. Concluimos que la generalización se apoya en patrones visuales y espaciales, aunque todavía presenta dificultades para explicitar la relación funcional entre las variables.

Agradecimientos: Este estudio se ha realizado con el apoyo del proyecto PID2024-157106NB-I00 financiado por fondos FEDER y en el seno del grupo FQM193. Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico.

Referencias

Blanton, M., Levi, L., Crites, T. y Dougherty, B. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in Grades 3-5.* National Council of Teachers of Mathematics, NCTM.

Cañadas, M. C., Moreno, A. y Torres, M. D. (2024). First encounter with constructing graphs in the functional thinking approach to school algebra in 3rd and 4th grades. *ZDM Mathematics Education*, *56*, 1059-1078. https://doi.org/10.1007/s11858-024-01627-2

Torres, M. D., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (2022). Pensamiento funcional de estudiantes de 2º de primaria: estructuras y representaciones. *PNA, 16*(3), 215- 236. https://doi.org/10.30827/pna.v16i3.23637

Jiménez-Fernández, A. I., Torres, M. D. y Castro-Rodríguez, E. (2026). Generalización a partir de la representación gráfica. Experiencia de aula en educación primaria. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 669). SEIEM.

IDENTIFICACIÓN DE ANSIEDAD Y OTRAS EMOCIONES EN RELACIÓN CON LAS MATEMÁTICAS DE LOS MAESTROS EN FORMACIÓN CON UN SISTEMA AUTOMÁTICO BASADO EN INTELIGENCIA ARTIFICIAL

Identifying anxiety and other mathematics-related emotions in future teachers using an automated system based on artificial intelligence

Labajos, L. y Fuertes, M. A.

Universidad de Salamanca

Las emociones de los docentes, y en especial la ansiedad matemática, tienen consecuencias relevantes para su labor profesional, siendo especialmente trascendente cuando se manifiesta en los futuros maestros de Educación Primaria (Sánchez et al, 2022). Por ello, es importante conocer y analizar las emociones que sienten los futuros maestros al realizar tareas de diversas disciplinas académicas. Frente a las metodologías más tradicionales, como los informes de autopercepción o la observación por investigadores entrenados, el avance de la Inteligencia Artificial ha permitido el desarrollo de nuevas herramientas orientadas al análisis de las emociones inferidas a partir de la expresión facial. Un ejemplo de ellas es iMotions®, diseñada y entrenada para detectar patrones específicos en los rasgos faciales y asociarlos a emociones básicas universales (Ezquerra et al., 2022).

Con el doble objetivo de conocer las emociones de los futuros maestros y poder establecer hasta qué punto los sistemas automáticos de análisis de emociones son coherentes con metodologías más tradicionales, como encuestas y entrevistas, se ha diseñado y puesto en práctica una intervención consistente en una entrevista semiestructurada complementada por un test en el que los futuros maestros tienen que responder cuestiones relacionadas con contenidos curriculares de áreas de Primaria y responder un test validado encaminado a conocer su nivel de ansiedad matemática (Núñez-Peña y Guilera, 2021). Sus emociones se han analizado mediante la observación de las entrevistas grabadas, los resultados del test y el análisis automático de los vídeos con la herramienta iMotions®.

Tras el análisis de los vídeos de 4 de los 36 participantes, todos ellos estudiantes del Grado en Maestro en Educación Primaria, los resultados preliminares muestran que las asignaturas percibidas como más difíciles o menos dominadas generan mayores emociones negativas. En relación con el uso de iMotions, se puede concluir que se trata de una herramienta útil para detectar cambios emocionales sutiles y pequeños momentos de activación emocional que podrían pasar desapercibidos mediante la observación tradicional. Sin embargo, en ocasiones, el sistema detecta niveles altos de emociones como alegría y compromiso mientras los participantes verbalizan nerviosismo, inseguridad o duda, pudiendo estar sus expresiones más relacionadas con sonrisas nerviosas, mecanismos de autorregulación emocional o expresiones ambiguas que con una emoción positiva real.

Referencias

Ezquerra, A., Agen, F., Rodríguez-Arteche, I. y Ezquerra-Romano, I. (2022). Integrating Artificial Intelligence into Research on Emotions and Behaviors in Science Education. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *18*(4), em2099. https://doi.org/10.29333/ejmste/11927

Núñez-Peña, M. I. y Guilera, G. (2021). BMAS: Un cuestionario para medir ansiedad matemática en contextos educativos. *CIVINEDU 2021*, 729.

Sánchez Mendías, J., Segovia Alex, I. y Miñán Espigares, A. (2022). Ansiedad matemática, rendimiento y formación de acceso en futuros maestros. *PNA*, *16*(2), 115-140. https://doi.org/10.30827/pna.v16i2.21703

Labajos, L. y Fuertes, M. A. (2026). Identificación de ansiedad y otras emociones en relación con las matemáticas de los maestros en formación con un sistema automático basado en inteligencia artificial. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 670). SEIEM.

ADAPTACIÓN DE UNA ESCALA DE ANSIEDAD MATEMÁTICA PARA ALUMNADO CON TRASTORNO DEL ESPECTRO AUTISTA

Adaptation of a mathematical anxiety scale for students with autism spectrum disorder

Laborda-Sánchez, F.[a], Polo-Blanco, I.[a], Marbán, J. M[b]. y Fernández-Sánchez, B. I.[c]

[a]Universidad de Cantabria, [b]Universidad de Valladolid, [c]Consejería de Educación de Cantabria

El estudio de la ansiedad matemática en estudiantes con trastorno del espectro autista (TEA) resulta especialmente pertinente, dada la elevada prevalencia de sintomatología ansiosa en esta población y el impacto que esta tiene sobre los procesos de aprendizaje (Vasa et al., 2020). Hasta la fecha no se han desarrollado instrumentos específicos para evaluar la ansiedad matemática en estudiantes con TEA.

Este estudio tiene como objetivo adaptar la escala «¿Cómo me siento en clase de matemáticas?» (Marbán et al., 2025), centrada en medir manifestaciones fisiológicas de ansiedad matemática, para alumnado con TEA, con vistas a su validación posterior.

Se emplea un diseño de adaptación del instrumento original (Marbán et al., 2025) de 20 ítems, en cinco fases: (1) revisión y modificación de ítems por los autores según criterios de accesibilidad lingüística y cognitiva; (2) juicio de expertos (n = 12) para valorar la claridad, pertinencia y relevancia; (3) análisis cuantitativo y cualitativo de resultados; (4) aplicación piloto con alumnado con TEA; y (5) revisión de accesibilidad con Adaptación de Textos en Castellano (ATECA).

La versión final, en la cual se han incluido manifestaciones específicas de ansiedad en personas con TEA, consta de 14 ítems, con lenguaje accesible, referencias corporales y apoyos pictográficos. Los resultados evidencian alta validez de contenido y diferencias significativas entre ítems.

La escala proporciona una herramienta útil para la detección de la ansiedad matemática en estudiantes con TEA dentro de contextos educativos, con implicaciones para intervenciones en matemáticas adaptadas a sus necesidades.

Agradecimientos: La publicación es parte de las actuaciones PID2022-136246NB-I00 y PID2022-138325OB-I00 financiadas por MICIU/AEI/10.13039/501100011033 y por FEDER, UE.

Referencias

Marbán, J. M., Fernández-Cézar, R., Martín-Colomo, I. (2025). Ansiedad matemática en alumnado de primaria y su relación con autopercepción y gusto por las matemáticas: Una aproximación fisiológica. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán, I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. 301-308). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Vasa, R. A., Keefer, A., McDonald, R. G., Hunsche, M. C., Kerns, C. M. (2020). A scoping review of anxiety in young children with autism spectrum disorder. *Autism Research, 13*(12), 2038-2057. https://doi.org/10.1002/aur.2395

Laborda-Sánchez, F., Polo-Blanco, I., Marbán, J. M. y Fernández-Sánchez, B. I. (2026). Adaptación de una escala de ansiedad matemática para alumnado con trastorno del espectro autista. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 671). SEIEM.

SENTIDO ESTOCÁSTICO EN UN PROYECTO STEAM EN EDUCACIÓN SECUNDARIA: UN ESTUDIO DE CASO

Stochastic thinking in a STEAM project: a case study

Landa, J., Berciano, A. y Anasagasti, J.

Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea

Investigaciones recientes destacan el valor de la educación STEAM en el desarrollo del aprendizaje en la Educación Secundaria por promover metodologías activas orientadas a aplicar conocimientos para abordar problemas contextualizados en situaciones reales, que requieren análisis crítico y toma de decisiones (Martín-Cudero et al., 2024). Este enfoque se alinea con los estándares de procesos matemáticos del NCTM (2000): el razonamiento, la representación, la conexión, la comunicación y la resolución de problemas. Asimismo, el desarrollo del sentido estocástico constituye uno de los saberes básicos y eje clave de la competencia matemática, ya que permite al alumnado organizar, representar y analizar información basada en datos (Alsina y Bosch, 2024).

El presente estudio aborda, desde un enfoque cualitativo y mediante un estudio de caso, el análisis de la integración matemática en el diseño teórico de un proyecto STEAM denominado "Microbiologia eta guk", implementado en un centro público del País Vasco con alumnado de Educación Secundaria. El proyecto articula relaciones entre la microbiología, los hábitos de higiene y la salud, con el fin de comprender y trabajar de forma interdisciplinar diversos contenidos curriculares de carácter histórico, químico, biológico y matemático. En este contexto, el objetivo de esta investigación es analizar los estándares de procesos matemáticos que emergen al trabajar el sentido estocástico en un contexto STEAM. Los resultados preliminares muestran que, con respecto al sentido estocástico, se trabajan la conexión (intermatemática) y la resolución de problemas por medio de actividades en las se examinan datos empíricos de corte histórico sobre la relación entre las prácticas de higiene en el ámbito médico y la incidencia de infecciones en pacientes. A partir de esta situación contextualizada, el alumnado desarrolla una investigación basada en una encuesta sobre los hábitos de higiene del grupo, considerando variables como el número de veces que al día se lavan las manos o se cepillan los dientes, o si se lavan las manos al salir del baño y antes de comer; la conexión (intramatemática) se pone de manifiesto en la organización de los datos recabados a través del cálculo de frecuencias y su clasificación en categorías; la representación mediante diferentes gráficos según el tipo de variable (cualitativa o cuantitativa); y la comunicación con presentaciones en las que el alumnado expone las conclusiones derivadas del estudio de los habitos de higiene, así como sus posibles implicaciones para la salud. Estos hallazgos abren una línea futura de investigación orientada al análisis de la implementación en el aula, con el fin de evaluar el desarrollo de la competencia matemática y la alfabetización estadística en este proyecto STEAM.

Agradecimientos: Trabajo parcialmente financiado por el proyecto de investigación HEZKUNTZA25/05.

Referencias

Alsina, C. y Bosch, E. (2024). Situaciones de aprendizaje para desarrollar el sentido estocástico: contribuyendo a formar una ciudadanía crítica desde la educación matemática. *Números, 118*, 191-213.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston Virginia: NCTM.

Martín-Cudero, D., Cid-Cid, A. I. y Guede-Cid, R. (2024). Analysis of mathematics education from a STEAM approach at secondary and pre-universitary educational levels: A systematic review. *Journal of Technology and Science Education, 14*(2), 507. https://doi.org/10.3926/jotse.2349

Landa, J., Berciano, A. y Anasagasti, J. (2026). Sentido estocástico en un proyecto STEAM en educación secundaria: un estudio de caso. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 672). SEIEM.

COMPETENCIA MATEMÁTICA DEL PROFESORADO DE PRIMARIA EN FORMACIÓN INICIAL EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS EN CONTEXTOS DE APRENDIZAJE COOPERATIVO

Mathematical competence of primary school teachers in initial training when solving mathematical problems in cooperative learning contexts

Landa, J.[a], Berciano, A.[a] y Marbán, J. M. [b]

[a]Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea, [b]Universidad de Valladolid

La resolución de problemas matemáticos se considera un elemento nuclear en el aprendizaje de las matemáticas, siendo uno de los procesos matemáticos clave identificados por el National Council of Teachers of Mathematics -NCTM- junto con los de razonar y argumentar, comunicar, conectar y representar (NCTM, 2000). Por otro lado, el aprendizaje cooperativo se considera un método sólido y eficaz para la enseñanza de las matemáticas en cualquier etapa escolar (Herrada y Baños, 2018). El objetivo del presente estudio es evaluar, tanto el grado de resolución y de corrección como las estrategias empleadas en la resolución de problemas matemáticos, por el profesorado de primaria en formación inicial en un contexto de aprendizaje cooperativo. Para dar respuesta a este objetivo, se adopta un paradigma cualitativo, centrado en el análisis de las producciones escritas del alumnado. En la investigación participaron 63 estudiantes del Grado en Educación Primaria de la Universidad del País Vasco (UPV/EHU), organizados en equipos de 4 o 5 estudiantes donde cada integrante asumió un rol específico que fue rotando periódicamente a lo largo de la propuesta. La implementación se desarrolla durante 4 semanas y los problemas matemáticos, con contenidos básicos de todas las áreas de las matemáticas escolares, se organizan en tres fichas con una progresión de demanda cognitiva: la primera incluye preguntas guiadas atendiendo a las fases de Polya (1945) y una posterior retroalimentación; en la segunda se reduce el andamiaje mientras se enseñan nuevas estrategias; y en la tercera se promueve una mayor autonomía en la resolución de los problemas. El alumnado realiza el 82 % de los problemas matemáticos propuestos en la primera ficha, el 85 % en la segunda y el 80 % en la tercera. No obstante, al considerar únicamente la corrección de las respuestas, los porcentajes se sitúan en el 50 %, 56 % y 66 %, respectivamente, observándose una evolución positiva en la proporción de resoluciones correctas a lo largo de la intervención. Asimismo, las estrategias de resolución empleadas por el alumnado se identifican y categorizan a partir de las representaciones y procedimientos reflejados en sus respuestas escritas. Inicialmente, predomina el uso de representaciones pictóricas como soporte para la resolución. Sin embargo, a medida que avanzan las sesiones, se hace más presente el uso de una notación matemática precisa. Los resultados evidencian una mejora moderada en el desempeño matemático y en los procesos más formales asociados al razonamiento matemático. En consecuencia, se considera necesario seguir explorando nuevos ciclos de implementación de la propuesta que permitan un mayor progreso.

Referencias

Herrada, R. I. y Baños, R. (2018). Experiencias de Aprendizaje Cooperativo en Matemáticas/Cooperative Learning Experiences in Mathematics. *ESPIRAL. CUADERNOS DEL PROFESORADO, 11*(23), 99-108. https://doi.org/10.25115/ecp.v11i23.2131

National Council of Teacher of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Polya, G. (1945). *How to Solve It; A New Aspect of Mathematical Method.* Princeton University Press.

Landa, J., Berciano, A. y Marbán, J. M. (2026). Competencia matemática del profesorado de primaria en formación inicial en la resolución de problemas matemáticos en contextos de aprendizaje cooperativo. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 673). SEIEM.

TAREAS DE MODELIZACIÓN DISEÑADAS POR FUTUROS MAESTROS DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Modelling tasks designed by prospective primary school teachers

Ledezma, C., Sánchez, A. y Font, V.

Universidad de Barcelona

En este trabajo se reporta un estudio de caso sobre la caracterización y clasificación de tareas de modelización diseñadas por futuros maestros de educación primaria. El estudio se guía por tres elementos: los atributos de un problema de modelización (sintetizados por Borromeo Ferri, 2018), el esquema de clasificación de tareas de modelización (propuesto por Maaß, 2010), y el ciclo semiótico-cognitivo (propuesto por Ledezma, 2024) para reinterpretar las resoluciones ideales de las tareas. El objetivo es caracterizar y clasificar tareas de modelización diseñadas por futuros maestros y analizar el tipo de resolución de modelización que estas tareas promueven.

El contexto de investigación fue una asignatura de razonamiento y actividad matemática impartida en el grado en Maestro de Educación Primaria de una universidad española, donde se implementó un ciclo formativo para la enseñanza de la modelización. El diseño es cualitativo y se desarrolló en cuatro etapas: (1) revisión de los productos grupales (presentación oral e informe escrito) de 10 equipos de futuros maestros y selección de 3 equipos para el estudio de caso, justificada por la claridad y el nivel de detalles de sus productos; (2) caracterización de seis tareas diseñadas por los sujetos de estudio, considerando los atributos de un problema de modelización; (3) clasificación de las tareas mediante el esquema de Maaß (2010); y (4) reinterpretación de las resoluciones ideales de estas tareas según las fases del ciclo de modelización semiótico-cognitivo.

A partir de los resultados, se destacan tres hallazgos: (a) los sujetos de estudio plantearon contextos reales y cercanos al entorno del alumnado (p. ej., aniversario escolar, viaje de final de curso, compra en el mercado); (b) priorizaron la formulación de preguntas abiertas y de enunciados con pocos datos, aunque ello no resultó suficiente para caracterizar las tareas analizadas como totalmente abiertas o complejas; y (c) cuatro de las seis tareas se caracterizaron como solucionables mediante un ciclo de modelización, pero las resoluciones ideales presentaron un margen limitado y, en cierto modo, lineal.

A partir de estos resultados, se enfatiza la necesidad de incorporar ciclos formativos para el diseño y la resolución de tareas escolares de modelización en la formación inicial de docentes de educación primaria, alineadas tanto con las directrices curriculares vigentes como con los principios que orientan la modelización como proceso relevante de la actividad matemática (Ledezma et al., 2022).

Referencias

Borromeo Ferri, R. (2018). *Learning How to Teach Mathematical Modeling in School and Teacher Education*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68072-9

Ledezma, C. (2024). Mathematical modelling from a semiotic-cognitive approach. *REDIMAT - Revista de Didáctica de las Matemáticas, 13*(3), 268-292. https://doi.org/10.17583/redimat.15066

Ledezma, C., Font, V., Sala-Sebastià, G. y Breda, A. (2022). Principios de la modelización matemática desde la perspectiva de la idoneidad didáctica. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 345-354). SEIEM.

Maaß, K. (2010). Classification scheme for modelling tasks. *Journal für Mathematik-Didaktik, 31*(2), 285-311. https://doi.org/10.1007/s13138-010-0010-2

Ledezma, C., Sánchez, A. y Font, V. (2026). Tareas de modelización diseñadas por futuros maestros de educación primaria. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 674). SEIEM.

ESTUDIANTES PARA MAESTRO DE EDUCACIÓN PRIMARIA RESOLVIENDO UNA TAREA PROFESIONAL SOBRE PENSAMIENTO ALGEBRAICO

Preservice primary school teachers solving a professional task on algebraic thinking

López-Iglesias, G., García-Honrado, I. y Muñiz-Rodríguez, L.

Universidad de Oviedo

El objeto de este trabajo es mostrar posibles relaciones del Conocimiento Común del Contenido (CCK) (Ball et al., 2008) que muestran los estudiantes para maestros de Educación Primaria, con sus destrezas para resolver una tarea profesional (Brow et al., 2020) vinculada a la generalización de patrones.

Para ello, se diseñó e implementó una tarea asociada a una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA) en el último curso de Educación Primaria y se seleccionaron tres producciones de alumnos para el diseño de una tarea profesional (García-Honrado et al., 2019). Se pidió a 112 estudiantes para maestro de Educación Primaria de la Universidad de Oviedo que, en primer lugar, resolvieran la tarea asociada a la THA, lo que permitiría evidenciar su CCK y, posteriormente, llevaran a cabo la tarea profesional que consta de dos fases: en primer lugar, identificar las estrategias e interpretar la comprensión de los alumnos seleccionados y, en segundo lugar, decidir cómo retroalimentar a los alumnos de acuerdo a la comprensión que mostraron.

Tras un análisis cualitativo de todas las producciones realizadas por los futuros maestros, se obtuvo que, aunque el 75% de los estudiantes para maestro alcanzan los niveles más altos en la resolución de la tarea asociada a la THA, solo el 25% identifica adecuadamente las estrategias e interpreta la comprensión de los estudiantes. Además, cruzando esta variable con el CCK mostrado por los futuros maestros, observamos que no hay relación entre el nivel que alcanzan al resolver la tarea asociada a la THA y la identificación de las estrategias e interpretación de la comprensión. En relación con las decisiones sobre cómo ayudar a los alumnos, se obtiene que alrededor del 85% de los estudiantes para maestro proponen una retroalimentación poco clara, no ajustada al contexto o inexistente. En este caso, tampoco se observó una relación del CCK mostrado por los futuros maestros.

Se concluye que no se observa relación entre el CCK que muestran los futuros docentes y las destrezas para resolver una tarea profesional sobre pensamiento algebraico.

Agrdecimientos

El trabajo se ha realizado bajo los proyectos PID2023-149580NB-I00 y PID2024-155358NB-I00.

Referencias

Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teaching Education*, *59*(5), 389-407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Brown, L., Fernández, C., Helliwell, T. y Llinares, S. (2019). Prospective mathematics teachers as learners in university and school contexts: From university-based activities to classroom practice. In *International Handbook of Mathematics Teacher Education: Volume 3* (pp. 343-366). Brill Sense. https://doi.org/10.1163/9789004419230_014

García-Honrado, l., Alonso-Castaño, M., Lorenzo, E. y Muñiz-Rodríguez, L. (2019). Propuesta de una tarea profesional para maestros de Educación Primaria. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y A. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (p. 617). SEIEM.

López-Iglesias, G., García-Honrado, I. y Muñiz-Rodríguez, L. (2026). Estudiantes para maestro de Educación Primaria resolviendo una tarea profesional sobre pensamiento algebraico. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 675). SEIEM.

APRENDIZAJES DEL ALUMNADO SOBRE LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS TRAS UNA EXPERIENCIA DIDÁCTICA CON ENFOQUE HISTÓRICO

Students' learning about the history of mathematics following a history-based teaching experience

Madrid-Martín, M. J.[a], Ruiz-Catalán, J.[b] y Maz-Machado, A.[b]

[a]Universidad Pontificia de Salamanca, [b]Universidad de Córdoba

La introducción de elementos de la historia de las matemáticas en la enseñanza de esta disciplina ha sido defendida desde la segunda mitad del siglo XIX por diversos autores (Chorlay, et al., 2002). Sin embargo, estas ideas no siempre se reflejan en los conocimientos y valoraciones del alumnado, que, en muchos, casos desconoce, por ejemplo, los acontecimientos históricos vinculados a personajes asociados con contenidos matemáticos abordados en el currículo y presentes en su formación académica durante distintos cursos (Santágueda-Villanueva y Lorenzo-Valentín, 2019).

En este contexto, se ha llevado a cabo un estudio que pretende conocer los aprendizajes relacionados con la historia de las matemáticas que adquieren los estudiantes tras participar en una experiencia didáctica basada en un enfoque histórico de la resolución de ecuaciones, concretamente en la evolución del método Newton-Raphson. Como parte de una propuesta de docencia e investigación integrada en el currículo de Matemáticas de 1.º de bachillerato de un instituto español durante el curso 2025-2026 y con una muestra de 24 estudiantes, se llevó a cabo un estudio exploratorio y descriptivo. Los datos se recopilaron mediante un cuestionario diseñado específicamente para esta investigación, basándose tanto en la bibliografía pertinente como en el objetivo del estudio. Este diseño permitió analizar los aprendizajes del alumnado sobre la historia de las matemáticas tras esta experiencia.

Los resultados obtenidos del análisis de las respuestas del alumnado muestran una variedad de ideas ante la pregunta: ¿qué has aprendido sobre la historia de las matemáticas tras realizar esta propuesta? Las respuestas se han categorizado en cuatro grupos principales. Por un lado, varios estudiantes señalaron haber comprendido cómo se produjeron determinados descubrimientos matemáticos y cómo evolucionaron en el tiempo. Otros centraron sus respuestas en el papel de los matemáticos, y cómo estos desarrollaban y difundían sus investigaciones, valorando aspectos relacionados con la autoría de las ideas. Otros destacaron el papel de Newton, manifestando haber ampliado sus conocimientos sobre el autor y su obra. También se identificaron respuestas que valoraban la influencia de la situación socioeconómica de la época y cómo esto se refleja en los estudios realizados. Finalmente, solo un estudiante afirmó no haber obtenido ningún aprendizaje sobre la historia de las matemáticas. En definitiva, los resultados evidencian cómo en su mayoría incorporar en el aula propuestas didácticas que involucren la historia de las matemáticas contribuye a ampliar la visión del alumnado sobre esta disciplina y sobre los personajes que han participado en su desarrollo.

Referencias

Chorlay, R., Clark, K.M. y Tzanakis, C. (2022). History of mathematics in mathematics education: Recent developments in the field. *ZDM Mathematics Education, 54*, 1407–1420. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01442-7

Santágueda Villanueva, M. y Lorenzo-Valentín, G. (2019). Historia de las matemáticas para la formación inicial de maestros. *Matemáticas, educación Y Sociedad*, *2*(2), 19–32. https://journals.uco.es/mes/article/view/12842

Madrid-Martín, M. J., Ruiz-Catalán, J. y Maz-Machado, A. (2026). Aprendizajes del alumnado sobre la historia de las matemáticas tras una experiencia didáctica con enfoque histórico. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 676). SEIEM.

CARENCIAS EN CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL AL ACCEDER AL MÁSTER DE FORMACIÓN DE PROFESORADO DE SECUNDARIA

Deficiencies in differential and integral calculus among students entering the master's degree in secondary teacher education

Mallart-Solaz, A. y Deulofeu, J.

Universidad Autónoma de Barcelona

La formación del profesorado no puede limitarse al dominio académico de la disciplina, sino que requiere un conocimiento matemático funcional, profundo y orientado a la enseñanza de contenidos escolares concretos (Ball et al., 2008; Carrillo et al., 2018).

En este marco, el objetivo principal de la investigación es aportar evidencia empírica de que una proporción relevante del alumnado que inicia el máster de formación de profesorado de secundaria no dispone del conocimiento matemático esperado para el nivel de secundaria y bachillerato, lo cual compromete la eficacia de la formación didáctica posterior. De manera específica, el estudio se fija en el cálculo diferencial e integral y busca identificar carencias conceptuales y procedimentales en contenidos clave del currículo de Bachillerato, con la finalidad de fundamentar propuestas de mejora en la formación inicial del profesorado de matemáticas.

Para ello, se adopta un diseño metodológico de carácter exploratorio y diagnóstico con una muestra de 48 estudiantes del Máster interuniversitario de Formación del Profesorado (UAB, UB y UPC). Al inicio del curso 2025/26 se administra una prueba escrita formada por cuatro problemas representativos del nivel de 2º de Bachillerato redactados por docentes de las 3 universidades participantes, correspondientes a los ámbitos de geometría y optimización, cálculo diferencial e integral, álgebra matricial y programación lineal. La corrección se realiza mediante rúbricas detalladas por indicadores consensuados.

Los resultados muestran rendimiento global bajo (P1 sobre 13 (M=4.68; DE=4.19), P2 sobre 13 (M=5.08; DE=4.91), P3 sobre 9 (M=2.56; DE=2.46), P4 sobre 11 (M=5.66; DE=4.24), con dificultades acusadas en cálculo diferencial e integral (P1 y P2). El análisis cualitativo revela que aparecen deficiencias persistentes en procedimientos como la derivación, el manejo de funciones irracionales y la interpretación de extremos, aspectos centrales en la enseñanza de las matemáticas de secundaria. No son errores técnicos, sino que evidencian debilidades conceptuales profundas en el conocimiento matemático común y especializado, lo que limita el desarrollo del conocimiento pedagógico del contenido. Se pone de manifiesto la necesidad de introducir mecanismos de diagnóstico sistemático, módulos de refuerzo disciplinar integrados con la didáctica y una revisión del diseño global del modelo de formación inicial español.

Agradecimientos: Este estudio se ha desarrollado en el marco del proyecto PID2023-149580NB-I00 (MICINN).

Referencias

Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389–407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C. y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). Determining specialised knowledge for mathematics teaching. *Proceedings of the 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2*, 365–372.

Mallart-Solaz, A. y Deulofeu, J. (2026). Carencias en cálculo diferencial e integral al acceder al Máster de Formación de Profesorado de Secundaria. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 677). SEIEM.

LA IDENTIDAD PROFESIONAL DOCENTE MATEMÁTICA: ANÁLISIS BIBLIOMÉTRICO

The professional identity of mathematics teachers: a bibliometric analysis

María-Bartolomé, Á., Espina, E. y Maroto, A. I.

Universidad de Valladolid

La enseñanza de las matemáticas en Educación Primaria no depende solo del dominio de contenidos o de estrategias didácticas, sino también de cómo el profesorado se percibe, se posiciona y se siente capaz de enseñar esta área. En el caso de los maestros generalistas, esta relación suele estar influida por experiencias escolares, creencias de competencia, emociones hacia las matemáticas y expectativas de aprendizaje. La identidad docente es clave para entender cómo se configura la práctica matemática en el aula. Esta se entiende como la interpretación dinámica del rol que el profesorado construye al integrar formación, saberes, experiencias, valores y creencias en relación con sus contextos educativos. (Lamote y Engels, 2010). Desde este marco, el trabajo presenta una revisión bibliométrica exploratoria sobre la producción científica en identidad docente en matemáticas en Educación Primaria, con el propósito de ofrecer una panorámica del estado de la investigación, identificar tendencias y núcleos temáticos y detectar posibles vacíos de estudio. La revisión empleó una estrategia de búsqueda con términos y operadores booleanos sobre identidad docente, matemáticas y Educación Primaria, realizada en Web of Science y Scopus, con criterios lingüísticos (inglés y español) y temporales incluyendo trabajos hasta abril de 2026. Tras la depuración de registros, la eliminación de duplicados y la aplicación de los criterios establecidos, el corpus final quedó conformado por 53 documentos. El análisis con VOSviewer examinó patrones bibliométricos y conceptuales a partir de las conexiones por países, la citación de fuentes y publicaciones, y la coocurrencia de palabras clave. Estados Unidos, Finlandia, Sudáfrica y Suecia concentran la mayor cantidad de estudios. Los resultados evidencian una producción científica limitada, aunque en crecimiento en los últimos seis años y un campo en proceso de consolidación. La investigación se organiza en núcleos parcialmente conectados: formación inicial, experiencias escolares, creencias y emociones hacia las matemáticas y autoeficacia docente. En consonancia con Lutovac y Kaasila (2018), esta dispersión sugiere la necesidad de articular enfoques que integren lo individual, lo social, lo afectivo y lo cognitivo en el estudio de la identidad docente matemática. Marschall (2022) resulta especialmente relevante en esta línea al vincular la autoeficacia con los significados atribuidos al rol profesional y con la percepción de la propia capacidad para enseñar. De este modo, la revisión no solo permite mapear la literatura existente, también señala una cuestión formativa central: ayudar a los futuros maestros a reconocer cómo sus experiencias, emociones y creencias sobre las matemáticas influyen en la construcción de una identidad profesional más segura, reflexiva e inclusiva.

Agradecimientos: Estudio financiado por el Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades. Contrato FPU24/04140

Referencias

Lamote, C. y Engels, N. (2010). The development of student teachers' professional identity. *European Journal of Teacher Education, 33*(1), 3-18. https://doi.org/10.1080/02619760903457735

Lutovac, S. y Kaasila, R. (2018). Future directions in research on mathematics-related teacher identity. *International Journal of Science and Mathematics Education, 16*(4), 759-776. https://doi.org/10.1007/s10763-017-9796-4

Marschall, G. (2022). The role of teacher identity in teacher self-efficacy development: the case of Katie. *Journal of Mathematics Teacher Education, 25*, 725-747. https://doi.org/10.1007/s10857-021-09515-2

María-Bartolomé, Á., Espina, E. y Maroto, A. I. (2026). La identidad profesional docente matemática: análisis bibliométrico. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 678). SEIEM.

AVANCES HACIA LA TRIANGULACIÓN DE ANSIEDAD MATEMÁTICA: UN ENFOQUE NEUROFISIOLÓGICO

Advances towards the triangulation of mathematical anxiety: a neurophysiological approach

Martín-Colomo, I., Marbán, J. M. y García-Monge, A.

Universidad de Valladolid

Las decisiones que el profesorado toma durante el desarrollo y la planificación de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas vienen determinadas en parte por elementos de carácter afectivo, como las creencias y las emociones (Gómez-Chacón, 2017). En este contexto, cobra especial relevancia el estudio de la ansiedad matemática del profesorado por su relación negativa con el rendimiento del alumnado (Schaeffer et al., 2021). La medida de este constructo se ha llevado a cabo principalmente mediante cuestionarios y escalas que, aunque se han mostrado fiables, tienen limitaciones al apoyarse en percepciones y ser instrumentos evocativos. Por este motivo, en los últimos años han surgido investigaciones que han tratado de estudiar la ansiedad matemática mediante el análisis de variables fisiológicas, como las señales corticales (Dowker et al., 2016). Apoyados en estos resultados y en el marco teórico facilitado por el modelo TMA (Zan y Di Martino, 2007) este estudio triangula la ansiedad matemática en profesorado de Educación Primaria en formación inicial con el objetivo último de desarrollar un dispositivo que pueda identificarla en tiempo real mediante el análisis de señales de electroencefalografía (EEG). Para ello, se establece un diseño secuencial exploratorio que permite cruzar datos de diferente naturaleza, partiendo de una recogida de datos inicial a través de escalas afectivas y listas de cotejo de síntomas fisiológicos de ansiedad matemática y complementando esta con una fase experimental en la que se registran datos con EEG. Los primeros resultados muestran una correlación positiva fuertemente significativa entre los datos reportados en la lista de cotejo y los reflejados en las escalas. Además, un análisis preliminar de los valores neurofisiológicos sugiere que las respuestas afectivas ante estímulos matemáticos tienen una firma cerebral propia que difiere de aquellas provocadas por estímulos genéricos, hallazgo que marca la dirección de futuros análisis.

Agradecimientos: La publicación es parte de la actuación PID2022-138325OB-I00 financiada por MICIU/AEI /10.13039/501100011033 y por FEDER, UE. Iván Martín Colomo está cofinanciado con cargo a la convocatoria de ayudas destinadas a financiar la contratación predoctoral de personal investigador, cofinanciadas por la Consejería de Educación y el Fondo Social Europeo Plus (FSE+).

Referencias

Dowker, A., Sarkar, A. y Looi, C. Y. (2016). Mathematics Anxiety: What Have We Learned in 60 Years? *Frontiers in Psychology*, *7,* 1-16. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2016.00508

Gómez-Chacón, I. M.ª. (2017). Epistemología personal y conocimiento matemático del profesor. En J. Carrillo y L.C. Contreras (Eds.), *Avances, utilidades y retos del modelo MTSK. Actas de las III Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva.* (pp.48-67).

Schaeffer, M. W., Rozek, C. S., Maloney, E. A., Berkowitz, T., Levine, S. C. y Beilock, S. L. (2021). Elementary school teachers' math anxiety and students' math learning: A large-scale replication. *Developmental science*, *24*(4), e13080. https://doi.org/10.1111/desc.13080

Zan, R. y Di Martino, P. (2007). Attitude toward Mathematics: Overcoming the Positive/Negative Dichotomy. *The Montana Mathematics Enthusiast*, *Monograph 3*, 157-168.

Martín-Colomo, I., Marbán, J. M. y García-Monge, A. (2026). Avances hacia la triangulación de ansiedad matemática: un enfoque neurofisiológico. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 679). SEIEM.

JUICIOS DIAGNÓSTICOS DE FUTUROS DOCENTES SOBRE LA INFORMACIÓN EN LOS PROBLEMAS MATEMÁTICOS Y SUS IMPLICACIONES MOTIVACIONALES

Pre-service teachers' diagnostic judgments about information in mathematical problems and its motivational implications

Martínez-Marcos, M., Pla-Castells, M. y Segura, C.

Universitat de València

Desde una perspectiva centrada en la tarea, la competencia diagnóstica se concibe como la capacidad de interpretar las características de los enunciados de problemas matemáticos y de anticipar sus implicaciones didácticas, en particular en lo relativo a su influencia sobre los aspectos cognitivos y motivacionales del alumnado (Leuders et al., 2018). Böswald y Schukajlow (2023) han analizado la influencia de la conexión con la realidad de los problemas en los juicios diagnósticos del futuro profesorado sobre dos factores motivacionales clave como la autoeficacia y el valor de tarea (tanto propios como de los potenciales estudiantes).

El presente estudio analiza la competencia diagnóstica de futuros maestros/as para juzgar la autoeficacia y el valor de los problemas con diferente cantidad de datos mediante una perspectiva mixta que permite obtener las razones de los juicios en las tres fases del *noticing* (Fernández et al., 2018). Para ello, se presentaron a 20 parejas de futuros maestros doce problemas aritméticos multiplicativos de una etapa, resolubles en tercer ciclo de educación primaria, subdivididos en cuatro tipos: S-problemas, donde todos los datos están explícitos; P-problemas, donde no se proporciona explícitamente toda la información y es necesario inferir datos; O-problemas, que carecen explícitamente de algún dato necesario; y ED-problemas, que tienen datos superfluos o irrelevantes. Para cada problema, se propusieron tres preguntas correspondientes a la fase de percepción (identificación de las características del enunciado), dos a la fase de interpretación (evaluación, a partir de dichas características, de la autoeficacia y del valor desde la propia perspectiva) y otras dos a la fase de decisión (evaluación de la autoeficacia y del valor para el alumnado).

Los resultados muestran que las características de los P-problemas son las menos identificadas por los futuros docentes. Por el contrario, los O-problemas son los más reconocidos, pese a que su autoeficacia es menor en este tipo de problemas. También la autoeficacia es menor para los ED-problemas. Además, los juicios desde su propia perspectiva son significativamente más altos que los juicios que deciden para el alumnado. En conjunto, estos resultados evidencian la necesidad de fortalecer la formación en competencia diagnóstica del futuro profesorado.

Referencias

Böswald, V. y Schukajlow, S. (2023). I value the problem, but I don't think my students will: Preservice teachers' judgments of task value and self-efficacy for modelling, word, and intramathematical problems. *ZDM – Mathematics Education, 55*(2), 331-344. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01412-z

Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G., Valls, J. y Callejo, M. L. (2018). Mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes: caracterización, desarrollo y contextos. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 13*, 39–61. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i13.229

Leuders, T., Leuders, J. y Philipp, K. (2018). *Diagnostic competence of mathematics teachers: Unpacking a complex construct in teacher education and teacher practice* (Vol. 11). Springer.

Martínez-Marcos, M., Pla-Castells, M. y Segura, C. (2026). Juicios diagnósticos de futuros docentes sobre la información en los problemas matemáticos y sus implicaciones motivacionales. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 680). SEIEM.

DIFERENCIAS DE GÉNERO Y ACTITUD HACIA LAS MATEMÁTICAS EN TAREAS GAMIFICADAS

Gender differences and attitudes towards mathematics in gamified tasks

Martínez-Ocaña, I.[a], Gutiérrez-Dorta, L.[a] y García-Alonso, I.[b]

[a]Fundación General de la Universidad de La Laguna, [b]Universidad de La Laguna

La actitud hacia las matemáticas es un constructo del dominio afectivo (McLeod, 1992) y ampliamente investigado. Los estudios en torno a las diferencias de género señalan que la actitud que se muestra es diferente en niños y niñas, generalmente con una menor confianza las niñas ante las tareas matemáticas (Asante, 2012). Este autor señala que estos estudios son relevantes por la conexión entre la actitud hacia las matemáticas y la profesión elegida por las niñas. En cuanto a la metodología del aula, hay una tendencia a incluir en clase de matemáticas la gamificación, pues se ha comprobado un aumento de la motivación y mayor compromiso en el aprendizaje, que se traducen en mejores logros académicos (Pan et al., 2022).

Presentamos una propuesta didáctica gamificada junto con los resultados de la actitud hacia las matemáticas mostrada por 304 estudiantes de 1º y 2º de Educación Secundaria Obligatoria (12-14 años). Esta propuesta se implementó en centros de la isla de Tenerife. En este estudio se analizan las diferencias de género y su análisis longitudinal a lo largo de la implementación.

La propuesta didáctica gamificada consiste en dos itinerarios con cinco retos cada uno. Los retos plantean un problema matemático "productivo" (Calvo-Pesce, 2024), es decir, ejercitación de procedimientos matemáticos en un contexto de resolución de problemas cercano a la actividad matemática. Al inicio del itinerario, los estudiantes responden cómo se sienten y si se consideran preparados para afrontar el reto matemático, valorándolo como bajo, medio o alto. Y, tras cada reto, responderán cómo se sienten dando tres respuestas posibles: tranquilo/a, nervioso/a o frustrado/a.

Los resultados evidencian que niños y niñas muestran una actitud muy positiva hacia las matemáticas desde el comienzo de la actividad y en cada reto planteado. Sin embargo, se han detectado diferencias de género en cuanto a cómo se enfrentan a los retos, pues un 29% de las niñas frente a un 50% de los niños señalan poseer una preparación alta para abordar el reto. En cuanto a cómo se sienten una vez concluyen el reto, tanto los niños como las niñas indican mayoritariamente estar tranquilos, en más de un 70% de las respuestas, aunque con una ligera diferencia a favor de los niños. En general, se observa que, incluso en situaciones gamificadas, las niñas presentan ciertas reservas ante tareas matemáticas.

Agradecimientos: Al Excmo. Cabildo Insular de Tenerife y la Fundación General de la Universidad de La Laguna a través del proyecto de innovación educativa *ProyectaMates*.

Referencias

Asante, K. O. (2012). Secondary students' attitudes towards mathematics. *IFE PsychologIA, 20*(1), 121-133.

Calvo-Pesce, C. (2024). De la práctica reproductiva a la productiva. *Números. Revista de Didáctica de la Matemática, 118,* 17-30.

McLeod, D. B. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning. A project of the National Council of Teachers of Mathematics, 23*, 575-598. McMillan.

Pan, Y., Ke, F. y Xu, X (2022). A systematic review of the role of learning games in fostering mathematics education in K-12 settings. *Educational Research Review, 36*, 100448. https://doi.org/10.1016/j.edurev.2022.100448

Martínez-Ocaña, I., Gutiérrez-Dorta, L. y García-Alonso, I. (2026). Diferencias de género y actitud hacia las matemáticas en tareas gamificadas. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 681). SEIEM.

RESOLUCIÓN Y FORMULACIÓN DE PROBLEMAS CON IA

Problem-solving and problem-posing with IA

Martín-Ferraz, A., Hernández, A. y Camacho-Machín, M.

Universidad de La Laguna

La tecnología amplía las formas de representar, explorar y resolver problemas matemáticos, favoreciendo distintos modos de razonamiento (Santos-Trigo y Camacho-Machín, 2013). Actualmente, la IA generativa plantea una necesidad para la formación matemática: comprender cómo el profesorado en formación recurre a estas herramientas durante la resolución y formulación de problemas, y cómo interpreta, valida o cuestiona sus respuestas. Este uso moviliza conocimiento didáctico-matemático para formular instrucciones, analizar respuestas y valorar su adecuación (Burgos y Tizón-Escamilla, 2026)

Se presenta un estudio exploratorio con 28 estudiantes del Grado en Matemáticas, en una asignatura de educación matemática. La tarea combinó trabajo en pareja con una fase individual, centrándose en la resolución y formulación de problemas. En primer lugar, el equipo de investigación diseñó las tareas para identificar momentos y finalidades en los que podía recurrirse a IA generativa. A partir de este análisis se elaboró un sistema de categorías. En segundo lugar, se analizaron las conversaciones con ChatGPT o Gemini, así como los informes individuales elaborados por el profesorado en formación. El análisis se centró en las interacciones con los chatbots y en las producciones escritas, para caracterizar las formas de uso de la IA durante el desarrollo de la tarea.

Los resultados muestran que la interacción con chatbots se inició en dos situaciones: cuando la tarea lo solicitaba y por iniciativa propia. Esta distinción diferencia entre un uso inducido por el diseño de la tarea y un uso espontáneo, asociado a necesidades durante la resolución o formulación de problemas. Se identifican dos momentos de interacción con la IA: antes de iniciar la conversación y después de haberla iniciado. En el primer caso, el profesorado en formación recurre al chatbot ante bloqueos, para comprobar una idea o resultado, o para ampliar información. En el segundo, las interacciones permiten revisar el proceso, contrastar respuestas y cuestionar la información proporcionada por la IA. Así, la IA no opera solo como fuente de respuestas, sino también como recurso que puede desencadenar procesos de validación, comparación y toma de decisiones.

Estos resultados sugieren que el valor formativo de la IA generativa no reside únicamente en su capacidad para producir soluciones o enunciados, sino en las oportunidades que ofrece para analizar cómo el profesorado en formación formula preguntas, interpreta respuestas y decide si acepta, modifica o rechaza la información recibida. Como implicación, el diseño de tareas con IA puede contribuir a promover un uso crítico de estas herramientas en la formación inicial del profesorado de Matemáticas, especialmente si se orienta a hacer explícitos los criterios matemáticos y didácticos empleados para valorar sus respuestas.

Agradecimientos: Esta investigación ha sido subvencionada por el proyecto de referencia PID2022-139007NBI00.

Referencias

Burgos, M. y Tizón-Escamilla, N. (2026). ChatGPT as a tool for posing of mathematical problems by prospective teachers. *LUMAT: International Journal on Math, Science and Technology Education*, 14(1), 3. https://doi.org/10.31129/LUMAT.14.1.2942

Santos-Trigo, M. y Camacho-Machín, M. (2013). Framing the use of technology in problem solving approaches. *The Mathematics Enthusiast*, 10(1-2), 279-302. https://doi.org/10.54870/1551-3440.1268

Martín-Ferraz, A., Hernández, A. y Camacho-Machín, M. (2026). Resolución y Formulación de Problemas con IA. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 682). SEIEM.

DESARROLLO DE LA FLEXIBILIDAD MATEMÁTICA EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ARITMÉTICO-VERBALES: UN EXPERIMENTO DE ENSEÑANZA EN 4.º DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Development of mathematical flexibility in solving arithmetic word problems: a teaching experiment in 4th grade primary education

Martín-Portugués, S. G., Joglar-Prieto, N. y Belmonte J. M.

Universidad Complutense de Madrid

Frente a la rigidez de enfoques rutinarios en la resolución de problemas aritmético-verbales (PAV) en Educación Primaria, fomentar el desarrollo de la flexibilidad matemática en esas sesiones es clave para promover un pensamiento matemático funcional. Entendemos la flexibilidad matemática como la capacidad para usar diferentes estrategias, compararlas y seleccionar la más adecuada para resolver un problema dado (Rittle-Johnson et al., 2020). Diversas investigaciones relacionan esta capacidad con una mayor competencia matemática y mejores resultados (Hästö et al., 2019).

Con el objetivo de analizar el desarrollo de la flexibilidad matemática en alumnado de 4.º de Primaria durante la resolución de PAV, este trabajo presenta los resultados de un experimento de enseñanza basado en la rutina *Comparar y Discutir Múltiples Estrategias* (CDMS) propuesta por Star et al. (2021). Diseñada originalmente para Educación Secundaria y para el cálculo algebraico, esta rutina se estructura en dos fases: la comparación en paralelo de dos estrategias diferentes para abordar un mismo problema y la discusión de su eficacia y de las ideas matemáticas subyacentes. Su adaptación al contexto de Educación Primaria se realizó mediante la incorporación de situaciones narrativas realistas, diversos registros de representación y PAV de varias etapas con estructuras multiplicativas, cuyos procedimientos de resolución se fundamentaban en la propiedad distributiva. La propuesta se implementó en tres sesiones de 45 minutos con seis estudiantes de 4.º de Primaria.

El análisis de los datos se realizó mediante descriptores de flexibilidad elaborados *ad hoc* a partir de las dimensiones de flexibilidad identificadas en las investigaciones previamente citadas, y de los constructos relativos a la resolución de PAV en Educación Primaria (Chamorro, 2003). Los resultados muestran que la flexibilidad emerge únicamente cuando el alumnado reconoce la estructura del problema y dispone de, al menos, un procedimiento correcto. Asimismo, se evidenció el potencial del intercambio de estrategias para favorecer la comprensión de propiedades matemáticas, como la propiedad distributiva, y para superar las limitaciones impuestas por el contrato didáctico tradicional.

Referencias

Chamorro, M. C. (2003). *Didáctica de las matemáticas para Primaria*. Pearson.

Hästö, P., Palkki, R., Tuomela, D. y Star, J. R. (2019). Relationship between mathematical flexibility and success in national examinations. *European Journal of Science and Mathematics Education*, *7*(1), 1-13. https://doi.org/10.30935/scimath/9530

Rittle-Johnson, B., Star, J. R. y Durkin, K. (2020). How Can Cognitive-Science Research Help Improve Education? The Case of Comparing Multiple Strategies to Improve Mathematics Learning and Teaching. *Current Directions in Psychological Science*, *29*(6), 599–609. https://doi.org/10.1177/0963721420969365

Star, J. R., Jeon, S., Comeford, R., Clark, P., Rittle-Johnson, B. y Durkin, K. (2021). Compare and Discuss Multiple Strategies. *Mathematics Teacher: Learning and Teaching PK-12*, *114*(11), 853–859. https://doi.org/10.5951/MTLT.2021.0051

Gutiérrez Martín-Portugués, S., Joglar Prieto, N. y Belmonte, J. M. (2026). Desarrollo de la flexibilidad matemática en la resolución de problemas aritmético-verbales: un experimento de enseñanza en 4.º de Educación Primaria. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 683). SEIEM.

ANÁLISIS Y REFORMULACIÓN DE PROBLEMAS DEL CAMPO ADITIVO CON INTELIGENCIA ARTIFICIAL GENERATIVA EN LA FORMACIÓN INICIAL DOCENTE

Analysis and reformulation of additive problems using generative artificial intelligence in initial teacher education

Martín-Reyes, G. M., Sánchez-Cruzado, C. y Sánchez-Compaña, M. T.

Universidad de Málaga

El campo aditivo es un eje fundamental en la educación matemática. Desde distintas teorías, como la de Vergnaud (1990), las situaciones del campo aditivo pueden organizarse en diferentes categorías semánticas (cambio, combinación, comparación, igualación), cuya comprensión no depende solo de los números, sino también de la estructura del problema y de la posición de la incógnita. En la formación inicial del profesorado, la formulación de problemas (problem posing) es una estrategia especialmente relevante para trabajar estas ideas (Embid et al., 2025). Sin embargo, en la práctica es frecuente recurrir a colecciones previamente elaboradas, sin tener en cuenta las estructuras semánticas subyacentes ni contextos de interés para el alumnado. Se ha llevado a cabo una experiencia en la asignatura Didáctica de la Aritmética del Grado en Educación Primaria de la Universidad de Málaga, con 72 estudiantes. La actividad, de carácter grupal, propone trabajar las estructuras del campo aditivo con números naturales y temáticas originales y/o contextos cercanos, utilizando ChatGPT. En lugar de limitarse a resolver, enunciar o clasificar problemas, el alumnado debe diseñar prompts para generar enunciados de una categoría concreta, analizar los resultados obtenidos y modificarlos cuando sea necesario. Esto obliga al alumnado a tomar decisiones, justificar cambios y revisar si los enunciados realmente responden a la estructura que se pretende abordar. Estudios recientes muestran el potencial de la inteligencia artificial generativa, pero también sus limitaciones cuando no hay mediación crítica (Embid y Perdomo-Díaz, 2024). Como evidencia para el análisis de la experiencia, se recopilaron los prompts, los problemas generados y las reformulaciones realizadas por los grupos. Los resultados muestran que, en general, ChatGPT genera correctamente enunciados de las distintas categorías semánticas, aunque requiere ajustes para contextualizarlos. Así, ante el prompt “Dame 3 ejemplos de problemas aditivos del tipo cambio para alumnado de Primaria con un tema actual”, el alumnado reformuló las propuestas incorporando contextos más relevantes y actuales, como el uso del punto limpio. La puesta en común final reflejó una valoración positiva de la actividad y de su utilidad para la futura práctica docente. Como trabajos futuros, se plantea ampliar la experiencia a otros tipos de problemas, y al campo multiplicativo, así como profundizar en el tipo de análisis realizado.

Referencias

Embid, S. y Perdomo-Díaz, J. (2024). Evaluación del potencial de distintos chatbots para la formulación de problemas matemáticos. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática, 16*, 41-58.

Embid, S., Perdomo-Díaz, J. y Giaconi, V. (2025). Formulación de problemas y uso de IA: Creencias motivacionales en futuros docentes de primaria. *AIEM - Avances de investigación en educación matemática, 28*, 143-163. https://doi.org/10.35763/aiem28.7546

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *10*(2–3), 133-170.

Martín-Reyes, G. M., Sánchez-Cruzado, C. y Sánchez-Compaña, M. T. (2026). Análisis y reformulación de problemas del campo aditivo con inteligencia artificial generativa en la formación inicial docente. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 684). SEIEM.

MAPEANDO LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA EUROPEA: TENDENCIAS, TÓPICOS Y CONEXIONES

Mapping European mathematics education: trends, topics, and connections

Maz-Machado, A.[a], Rodriguez-Baiget, D.[b], Gutiérrez-Rubio, D.[a], Rodríguez-Baiget, M. J.[a] y Villarraga-Rico, M. E.[c]

[a]Universidad de Córdoba, [b]UNED, [c]Universidad de Salamanca

Este estudio analiza la estructura temática de la investigación en educación matemática en la Unión Europea mediante un enfoque bibliométrico basado en el análisis de descriptores. El marco teórico se fundamenta en la tradición del análisis de copalabras y en los estudios bibliométricos orientados a la cartografía del conocimiento científico, los cuales consideran las palabras clave como marcadores conceptuales capaces de revelar la organización y evolución de un campo de investigación (Callon et al., 1983; Julius et al., 2021). Desde esta perspectiva, los descriptores permiten identificar núcleos temáticos, relaciones conceptuales y líneas emergentes en educación matemática.

El objetivo principal consiste en identificar y caracterizar los temas centrales, transversales y emergentes de la investigación europea en educación matemática durante el periodo 2000–2024. Para ello, se construyó un corpus de 3154 artículos indexados en Scopus con al menos una filiación institucional europea. Los descriptores fueron sometidos a procesos de limpieza y normalización terminológica y posteriormente analizados mediante redes de coocurrencia, ponderación TF-IDF, agrupamiento K-means y modelado de tópicos LDA.

Los resultados muestran tres grandes polos temáticos. En primer lugar, los temas motores corresponden a estadística y probabilidad/alfabetización de datos y álgebra y pensamiento funcional, caracterizados por alta centralidad y densidad temática. En segundo lugar, currículo, políticas y estándares y modelización matemática aparecen como temas transversales con fuerte capacidad articuladora, aunque con menor cohesión interna. Finalmente, geometría y razonamiento espacial se configura como un nicho especializado con elevada densidad, pero menor conectividad con otras áreas. Asimismo, se identifican líneas emergentes relacionadas con afecto, discurso y equidad.

Como acción de transferencia, el estudio proporciona una cartografía temática replicable que puede orientar agendas de investigación, decisiones curriculares y programas de formación docente en educación matemática, facilitando además la identificación de áreas prioritarias para futuras investigaciones.

Referencias

Callon, M., Courtial, J. P., Turner, W. A. y Bauin, S. (1983). From translations to problematic networks: An introduction to co-word analysis. *Social Science Information*, *22*(2), 191-235. https://doi.org/10.1177/053901883022002003

Julius, R., Halim, M. S. A., Hadi, N. A., Alias, A. N., Khalid, M. H. M., Mahfodz, Z. y Ramli, F. F. (2021). Bibliometric analysis of research in mathematics education using Scopus database. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *17*(12). https://doi.org/10.29333/ejmste/11329

Maz-Machado, A., Rodríguez-Baiget, D., Gutiérrez-Rubio, D., Rodríguez-Baiget, M. J. y Villarraga-Rico, M. E. (2026). mapeando la educación matemática europea: tendencias, tópicos y conexiones. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 685). SEIEM.

CARACTERIZACIÓN DE LOS MOVIMIENTOS DE HABLA QUE PROMUEVEN LA ACTIVIDAD MATEMÁTICA SOBRE DIVISIBILIDAD EN UN AULA TRILINGÜE

Characterization of talk moves promoting mathematical activity on divisibility in a trilingual classroom

Morell, M.

Universitat Autònoma de Barcelona

A pesar de los avances en la investigación sobre la enseñanza matemática en contextos de diversidad lingüística, sigue siendo necesario profundizar en cómo los movimientos de habla del profesor y el *translanguaging* favorecen la comprensión conceptual y el razonamiento matemático en aulas trilingües. Este estudio da continuidad al trabajo de Morell y Planas (2026), en el que se identificaron movimientos de habla y prácticas de translanguaging en un aula trilingüe de secundaria (castellano, catalán e inglés) para apoyar la discusión sobre divisibilidad. Mientras dicho estudio se centró en examinar los movimientos de habla y los desafíos matemático-lingüísticos implicados en la enseñanza de la divisibilidad, la presente investigación amplía esa caracterización mediante un análisis contextualizado de los movimientos de habla del profesor que fomentan la actividad matemática y su función comunicativa en el contexto interactivo del aula. Desde una perspectiva sociolingüística, basada en Michaels et al. (2008), se examinan seis tipos de movimientos de habla —*eliciting* (obtener), *funneling* (filtrar), *focusing* (centrar), *adding on* (añadir), *recapping* (recapitular), *revoicing* (reexpresar)— junto con la función transversal del *switching language* (cambiar de lengua). Esto se realiza a partir del análisis de 42 episodios (más de un tercio de 122) extraídos de los datos videograbados y transcritos durante la implementación de una unidad de enseñanza sobre divisibilidad en un grupo de primer curso de secundaria. Con un enfoque cualitativo interpretativo y mediante una metodología en dos fases, deductiva e inductiva, se caracterizan estos movimientos según su función comunicativa y su articulación en las interacciones del aula. Los resultados muestran que los movimientos de habla, combinados con el cambio de lengua, permiten ajustar la enseñanza a las necesidades lingüísticas del aula trilingüe y favorecen distintos tipos de razonamiento matemático. En particular, *eliciting* y *revoicing* fueron los movimientos más frecuentes y funcionalmente diversos, especialmente relevantes para la actividad matemática cuando se articularon con el cambio de lengua, que facilitó la clarificación conceptual y la conexión entre las lenguas del aula, promoviendo la comprensión y el razonamiento matemático del alumnado. Aunque *adding on* y *recapping* fueron menos frecuentes, su contribución fue significativa, pues enriquecieron el razonamiento y reforzaron el conocimiento colectivo al propiciar una reflexión profunda sobre los conceptos y razonamientos previamente discutidos. Se aporta evidencia empírica sobre la enseñanza matemática en contextos trilingües y contribuye al desarrollo de estrategias discursivas más inclusivas y efectivas para la mediación de contenidos matemáticos en aulas lingüísticamente diversas.

Referencias

Michaels, S., O'Connor, C. y Resnick, L. B. (2008). Deliberative discourse idealized and realized: Accountable talk in the classroom and in civic life. *Studies in Philosophy and Education, 27*(4), 283-297. https://doi.org/10.1007/s11217-007-9071-1

Morell, M. y Planas, N. (2026). Teaching talk moves to support the discussion of divisibility content in a trilingual classroom. *The Mathematics Enthusiast*, *23*(1-2), 99-118. https://doi.org/10.54870/1551-3440.1682

Morell, M. (2026). Caracterización de los movimientos de habla que promueven la actividad matemática sobre divisibilidad en un aula trilingüe. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 686). SEIEM.

PENSAMIENTO COMPUTACIONAL EN LA VALIDACIÓN, EJECUCIÓN Y GENERACIÓN DE REGLAS MEDIANTE UNA TAREA DESCONECTADA

Computational thinking for validation, execution, and generalisation of rules in an unplugged task

Moreno, N., Silva, A. y Gea, M. M.

Universidad de Granada

El pensamiento computacional (PC) se incorpora al sentido algebraico en la Educación Secundaria Obligatoria (ESO) como aprendizaje transversal vinculado a la interpretación, modificación, generalización y creación de algoritmos. Considerando que el PC puede desarrollarse sin programación ni dispositivos digitales, mediante tareas desconectadas (Chen et al., 2023; Ruano-Cano, 2024), este estudio describe las producciones escritas de ocho estudiantes de 3.º y 4.º de ESO ante una tarea desconectada: *VillaBot*. Consta de tres retos: validar, ejecutar y generar (o inferir) reglas, al construir torres de energía con baterías de colores. Nuestro objetivo es identificar diferencias en el desempeño de los estudiantes ante los retos planteados. Para ello, aplicamos la metodología de análisis de contenido a sus respuestas, combinando el marco de Kallia et al. (2021), centrado en resolución de problemas, procesos cognitivos y transposición de procedimientos, con el modelo de Palop et al. (2025), que organiza el PC en los dominios de problemas, algoritmos y datos.

Los resultados muestran respuestas parcialmente correctas en validación, errores de coordinación entre regla y recursos en ejecución y reglas incompletas o superficiales en generalización. La transposición fue limitada: seis reglas ambiguas, una parcialmente ejecutable y solo una regla clara y validable. Las dificultades observadas se relacionan con la iteración, la gestión de restricciones, la depuración y la generalización de procedimientos. Los resultados sitúan *VillaBot* como una tarea útil para observar y promover el PC, así como para orientar al profesorado para el diseño de tareas desde el sentido algebraico, al mostrar cómo el alumnado valida, ejecuta y formula o generaliza reglas en una situación matemática desconectada.

Referencias

Chen, P., Yang, D., Saleh Metwally, A. H., Lavonen, J. y Wang, X. (2023). Fostering computational thinking through unplugged activities: A systematic literature review and meta-analysis. *International Journal of STEM Education*, *10*(47), 1-25. https://doi.org/10.1186/s40594-023-00434-7

Kallia, M., van Borkulo, S. P., Drijvers, P., Barendsen, E. y Tolboom, J. (2021). Characterising computational thinking in mathematics education: a literature-informed Delphi study. *Research in Mathematics Education*, *23*(2), 159-187. https://doi.org/10.1080/14794802.2020.1852104

Palop, B., Díaz, I., Rodríguez-Muñiz, L. J. y Santaengracia, J. J. (2025). Redefining computational thinking: A holistic framework and its implications for K-12 education. *Education and Information Technologies*, *30*, 13385-13410. https://doi.org/10.1007/s10639-024-13297-4

Ruano-Cano, A., Sánchez-Cruzado, C., Moral-Sánchez, S. N., Sánchez-Compaña, T. y Raya-Fernández, A. (2024). Explorando el pensamiento computacional en matemáticas: experiencias desconectadas en educación primaria. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 627). SEIEM.

Moreno, N., Silva, A. y Gea, M. M. (2026). Pensamiento computacional en la validación, ejecución y generación de reglas mediante una tarea desconectada. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 687). SEIEM.

DISCURSO MATEMÁTICO EN UNA CLASE SOBRE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES MEDIADA POR GEOGEBRA

Mathematical discourse in a GeoGebra-mediated lesson on linear equation systems

Múnera-Escobar, N.[a] y Rave-Agudelo, J. G.[b]

[a] Universidad de Zaragoza (España), [b] Universidad de Salamanca (España)

La lengua constituye un recurso relevante en la comunicación de significados matemáticos en el aula (Planas, 2021). Este recurso coexiste con recursos materiales-tecnológicos, como ordenadores y software educativos, que han adquirido una presencia creciente en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (Adler, 2000). Sin embargo, en la enseñanza de contenidos algebraicos, el uso de estos recursos se ha centrado principalmente en la coordinación de representaciones algebraicas y geométricas, sin profundizar en el conocimiento conceptual que puede construirse mediante la interacción entre lengua y tecnología (Turgut y Drijvers, 2021). En este estudio se analiza lingüísticamente el discurso de un profesor y de 40 alumnos de noveno grado durante una clase de álgebra orientada a la resolución y graficación de sistemas de ecuaciones lineales usando GeoGebra. Fundamentado en la Gramática Sistémico-Funcional (Halliday, 1985), el análisis retoma las funciones ideacional e interpersonal de la lengua para comprender, respectivamente, cómo se comunican significados matemáticos y cómo se configuran las relaciones entre los interlocutores en el aula. La comunicación de significados matemáticos se caracteriza mediante prácticas de nombrar conceptos y procedimientos, transitando entre el registro cotidiano y el registro matemático, así como mediante la representación de procesos a través de verbos materiales, mentales, verbales, relacionales y existenciales. Por su parte, las relaciones entre los interlocutores se analizan a partir de los modos declarativo, interrogativo e imperativo. Mediante métodos de análisis temático inductivo y deductivo, se analizó el discurso en una clase de matemáticas sobre sistemas de ecuaciones lineales con el propósito de caracterizar estas funciones de la lengua. Los resultados muestran cómo la lengua del profesor se configura en relación con el recurso material-tecnológico y con la representación del contenido matemático en dicho recurso. Esto se expresa mediante: (i) significados ideacionales comunicados a través de vocabulario propio del registro matemático, que desarrolla procesos materiales asociados al software y procesos relacionales asociados al contenido; y (ii) significados interpersonales que evidencian un predominio del modo declarativo por parte del profesor al tratar el contenido, pero un modo imperativo al referirse al recurso material-tecnológico. Finalmente, se concluye que la integración de recursos materiales-tecnológicos transforma las elecciones lingüísticas en la enseñanza y el aprendizaje de contenidos algebraicos, favoreciendo la comunicación de significados matemáticos.

Referencias

Adler, J. (2000). Conceptualising resources as a theme for teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education, 3*(3), 205-224. https://doi.org/10.1023/A:1009903206236

Halliday, M. A. K. (1985). *An introduction to functional grammar*. Edward Arnold.

Planas, N. (2021). How specific can language as resource become for the teaching of algebraic concepts? *ZDM Mathematics Education, 53*(2), 277-288. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01190-6

Turgut, M. y Drijvers, P. (2021). Instrumentation schemes for solving systems of linear equations with dynamic geometry software. *International Journal for Technology in Mathematics Education, 28*(2), 65-80. https://doi.org/10.1564/tme_v28.2.01

Múnera-Escobar, N. y Rave-Agudelo, J. G. (2026). Discurso matemático en una clase sobre sistemas de ecuaciones lineales mediada por GeoGebra. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 688). SEIEM.

INFLUENCIA DE LA OBSERVACIÓN GUIADA EN LA PRÁCTICA DOCENTE Y LAS ACTITUDES DEL PROFESORADO

Influence of guided observation on teachers' classroom practice and attitudes

Muñoz Sirera, M. J. y Ferrando, I.

Universidad de Valencia

La observación de la práctica docente mediante vídeo constituye una estrategia útil para el desarrollo profesional del profesorado, al favorecer procesos de análisis de la enseñanza y del aprendizaje matemático (Climent et al., 2016). Sin embargo, sigue siendo limitada la investigación sobre cómo distintas formas de guiar esa observación —mediante instrumentos de carácter general o específico de matemáticas, y a partir de vídeos propios o externos— se relacionan con la evolución de la práctica y de las actitudes del profesorado de matemáticas. En este marco se sitúa este estudio.

La investigación adopta un diseño cuasi experimental exploratorio con ocho participantes de Educación Primaria y Secundaria organizados en cuatro parejas. Se cruzan dos variables: el instrumento de observación, foco principal del diseño, y el origen del vídeo analizado, incluido para explorar posibles diferencias en los cambios en la práctica y las actitudes. El instrumento genérico es el *Framework for Teaching Evaluation Instrument* (FFT) (Danielson, 2013), y el específico es el *Instructional Quality Assessment* (IQA) (Boston y Wolf, 2006); los vídeos son propios o externos.

El estudio consta de tres fases: cuestionario inicial de actitudes basado en Coppola et al. (2012), alternancia de tres grabaciones de aula con tres sesiones de observación guiada, de acuerdo con la condición asignada, y cuestionario final ocho meses después del inicio del estudio. Los datos proceden de los cuestionarios, los instrumentos de observación cumplimentados al analizar los vídeos y la evaluación externa de las lecciones grabadas. La triangulación cualitativa compara estas fuentes para identificar convergencias y discrepancias entre las actitudes declaradas, el foco de la observación y la actuación en el aula (Schoenfeld, 2013). Los resultados apuntan a que el uso del IQA se asocia con una mayor evolución en la práctica y en algunas dimensiones actitudinales, mientras que el origen del vídeo parece tener un papel menos marcado. El estudio aporta evidencias sobre el papel de la observación guiada en la reflexión sobre la práctica y en el desarrollo profesional del profesorado, contribuyendo al diseño de procesos de observación orientados a la mejora de la enseñanza.

Referencias

Boston, M. y Wolf, M. K. (2006). Assessing Academic Rigor in Mathematics Instruction: The Development of the Instructional Quality Assessment Toolkit. CSE Technical Report 672. *National Center for Research on Evaluation, Standards, and Student Testing (CRESST)*. https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED492868.pdf

Climent, N., Montes, M. Á., Contreras, L. C., Carrillo, J., Liñán, M. M., Muñoz-Catalán, M. C., Barrera, V. J. y León, F. (2016). Construcción de conocimiento sobre características de aprendizaje de las Matemáticas a través del análisis de vídeos. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 9,* 85–103. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i9.108

Coppola, C., Di Martino, P., Pacelli, T. y Sabena, C. (2012). Primary teachers' affect: a crucial variable in the teaching of mathematics. *NOMAD Nordic Studies in Mathematics Education, 17*(3-4), 107–123. https://doi.org/10.7146/nomad.v17i3-4.148477

Danielson, C. (2013). The framework for teaching: Evaluation instrument. Danielson Group.

Schoenfeld, A. H. (2013). Classroom observations in theory and practice. *ZDM Mathematics Education, 45*(4), 607–621. https://doi.org/10.1007/s11858-012-0483-1

Muñoz Sirera, M. J. y Ferrando, I. (2026). Influencia de la observación guiada en la práctica docente y las actitudes del profesorado. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 689). SEIEM.

CAPACITACIÓN DOCENTE PARA LA INTEGRACIÓN DEL PENSAMIENTO COMPUTACIONAL EN LAS PRIMERAS EDADES

Teacher training for integrating computational thinking in early years

Navarro-Clemente, I., González-Calero, J. A. y del Olmo-Muñoz, J.

Universidad de Castilla-La Mancha

La implementación del pensamiento computacional (PC) en Educación Infantil presenta importantes desafíos, entre los que destaca la limitada formación específica del profesorado. Una parte significativa del profesorado presenta carencias en el conocimiento pedagógico del contenido (PCK) y en su autoeficacia necesarios para integrar el PC en el aula de forma intencional y sistemática (Piedade y Dorotea, 2020).

La literatura científica muestra un desarrollo desigual en este ámbito, como evidencia la presente revisión de alcance de 69 estudios publicados entre 2016 y 2025, que indica que la investigación sobre formación en PC se ha centrado principalmente en futuros docentes de Educación Primaria, lo que evidencia un claro sesgo hacia estas poblaciones. En contraste, los estudios con docentes en activo en Educación Infantil, así como aquellos que combinan profesorado en formación y en ejercicio, son todavía escasos. Esta brecha dificulta identificar sus necesidades formativas y, por tanto, diseñar modelos adaptados a las particularidades de esta etapa educativa.

En el marco de esta tesis doctoral, y con el fin de superar dichas limitaciones, se desarrolla una investigación basada en el diseño articulada mediante una capacitación docente. La evidencia sugiere que este enfoque, caracterizado por ciclos iterativos de diseño, implementación y mejora en contextos reales, favorece la autoeficacia docente y el sentido de autoría sobre los materiales, contribuyendo a la sostenibilidad de las innovaciones educativas (Killen et al., 2023; Lehtimäki et al., 2022). Se plantea superar las intervenciones de corta duración identificadas en la revisión mediante procesos de codiseño que promuevan una integración curricular profunda y transversal del PC. La participación de docentes en formación y en ejercicio permitirá analizar tanto los cambios en actitudes y autoeficacia como la transformación de la práctica docente. Asimismo, se examinará su impacto en el aprendizaje del alumnado.

Agradecimientos: Financiado por UCLM/FEDER (2025-GRIN-38341), proyecto SBPLY/24/180225/000153 (UE-FEDER/JCCM-INNOCAM) y ayuda FPU24/00187 (MICIU)

Referencias

Killen, H., Coenraad, M., Byrne, V., Cabrera, L., Mills, K., Ketelhut, D. J. y Plane, J. D. (2023). Teacher Education to Integrate Computational Thinking into Elementary Science: A Design-Based Research Study. *ACM Transactions on Computing Education*, *23*(4).

Lehtimäki, T. M., Monahan, R., Mooney, A., Casey, K. y Naughton, T. J. (2022). Bebras-inspired Computational Thinking Primary School Resources Co-created by Computer Science Academics and Teachers. *ITiCSE 2022*.

Piedade, J. y Dorotea, N. (2020). A robótica educacional como recurso pedagógico para aprender programação e desenvolver competências de pensamento computacional. En *Formação no contexto do pensamento computacional, da robótica e da inteligência artificial na educação* (pp. 89-111).

Navarro-Clemente, I., González-Calero, J. A. y del Olmo-Muñoz, J. (2026). Capacitación docente para la integración del pensamiento computacional en las primeras edades. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 690). SEIEM.

VALIDACIÓN DE UN DIAGNÓSTICO MTSK PARA EL DISEÑO DE TAREAS FORMATIVAS SOBRE DIVISIÓN CON NÚMEROS DECIMALES

Validation of an MTSK-based diagnostic instrument for the design of tasks for teacher education on decimal division

Novoa-Andrades, M.[a], Ramos-Rodríguez, E.[a], Fernández-Ahumada, E.[b], Adamuz-Povedano, N.[b]

[a]Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, [b]Universidad de Córdoba, España.

Existen dificultades persistentes en la comprensión de problemas multiplicativos con números racionales, afectando la interpretación de resultados y del cociente en contextos matemáticos (e. g., Zorrilla et al., 2023). En contraparte, la literatura basada en el modelo Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK; Carrillo et al., 2014) ha destacado el potencial de las tareas formativas para movilizar conocimiento especializado mediante prácticas matemáticas como interpretar, argumentar y analizar resultados (Climent et al., 2024).

En este contexto, la presente investigación tuvo como objetivo validar un diagnóstico fundamentado en el MTSK, para identificar el conocimiento especializado de docentes en formación sobre división con números decimales. Desde un enfoque cualitativo interpretativo, el instrumento fue diseñado a partir del constructo de tareas formativas (e. g., Climent et al., 2024), articulando subdominios del MTSK, prácticas matemáticas y dimensiones formativas. El diagnóstico incluyó una fase individual orientada a interpretar y validar resultados, comparar estrategias, analizar errores, interpretar respuestas estudiantiles y tomar decisiones didácticas; además de dos fases complementarias orientadas a la discusión grupal de resultados y a la reflexión individual sobre la propia práctica.

La validación de contenido se realizó mediante juicio de expertos con experiencia en didáctica de la matemática, formación inicial docente, MTSK y/o enseñanza de números decimales. Los ítems fueron evaluados según criterios de claridad, pertinencia, relevancia y suficiencia, permitiendo robustecer el diagnóstico mediante ajustes en las consignas, coherencia teórica y adecuación de los contextos propuestos.

Se concluye que el diagnóstico, ajustado a partir de la validación experta, constituye un instrumento adecuado para identificar el conocimiento especializado manifestado por docentes en formación sobre la división de números decimales en contexto, considerando prácticas vinculadas con la interpretación de resultados, el análisis didáctico, la toma de decisiones pedagógicas, el diseño y adaptación de tareas, el contraste de respuestas y la reflexión sobre la propia práctica. Como continuidad del estudio, se contempla el pilotaje del instrumento, el análisis cualitativo de las respuestas y el diseño posterior de una tarea formativa fundamentada en los resultados diagnósticos.

Referencias

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L., Montes, M., Escudero, D. y Flores, E. (2014). *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas*. Universidad de Huelva Publicaciones. https://doi.org/10.13140/2.1.3107.4246

Climent, N., Contreras, L. C., Montes, M. y Ribeiro, M. (2024). The MTSK model as a tool for designing tasks for teacher education. *ZDM Mathematics Education, 56*, 1123-1135. https://doi.org/10.1007/s11858-024-01605-8

Zorrilla, C., Fernández, C. e Ivars, P. (2023). Cambios en los procedimientos de los estudiantes de sexto curso en problemas de estructura multiplicativa. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 547–554). SEIEM.

Novoa-Andrades, M., Ramos-Rodríguez, E., Fernández-Ahumada, E. y Adamuz-Povedano, N. (2026). Validación de un diagnóstico MTSK para el diseño de tareas formativas sobre división con números decimales. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 691). SEIEM.

IDEAS ESTOCÁSTICAS EN EL RECURSO VIRTUAL DE EDUCACIÓN SECUNDARIA PARA ADULTOS EN ANDALUCÍA

Stochastic ideas in the secondary education virtual module for adults in Andalusia

Ortiz-Flores, D., Gea, M. M. y Garzón-Guerrero, J. A.

Universidad de Granada

El currículo de la Educación Secundaria para personas Adultas (ESA) en Andalucía establece el sentido estocástico en torno a la organización y análisis de datos e incertidumbre (CDEFP, 2025, p. 6245/33). Este trabajo describe la presencia de ideas estocásticas en la actividad matemática que promueve el recurso de enseñanza virtual que la Junta de Andalucía ofrece como apoyo para desarrollar el sentido estocástico en el ámbito científico-tecnológico de Nivel II (Bloques 7 y 8). Adoptamos la metodología de análisis de contenido, considerando como unidad de análisis toda situación (ejercicio, ejemplo, etc.) que implicase actividad en sentido estocástico en el recurso (Junta de Andalucía (2025), empleando la caracterización de Burrill y Biehler (2011), según se pidiera identificar datos y qué información aportan, las representaciones de los datos, la variabilidad, la distribución de los datos, la asociación y correlación, la probabilidad o el muestreo e inferencia. Nuestros resultados informan que la mayoría de las situaciones se plantean sobre representaciones de los datos (32,7%), sobre todo gráficos en los que se pide leer o calcular, sin pedir lecturas críticas de estos. Le siguen en importancia situaciones de cálculo de estadísticos (moda y media: 22,4% y dispersión: 19%) y la identificación de datos (19%). En conclusión, detectamos limitaciones en cuanto a interpretar la distribución de los datos, y sobre todo en la probabilidad, mientras que se plantean un 6,8% de situaciones sobre muestreo e inferencia, aunque el currículo no establece explícitamente estos saberes básicos. Considerando la limitada investigación en educación matemática sobre la ESA (Gal, 2024), ofrecemos información valiosa para gestionar diseños curriculares de esta enseñanza tanto en Andalucía como en otras comunidades autónomas, siendo pertinente avanzar en esta línea de investigación (Gal, 2024); en particular, por el reconocimiento que posee la estadística cívica en la sociedad (Ridgway, 2022).

Agradecimientos: Esta publicación es parte del proyecto PID2022-139748NB-I00, financiado por MICIU/AEI/10.13039/501100011033 y por FEDER, UE.

Referencias

Burrill, G. y Biehler, R. (2011). Fundamental Statistical Ideas in the School Curriculum and in Training Teachers. En C. Batanero, G. Burrill y C., Reading (Eds.), *Teaching Statistics in School Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education. A Joint ICMI/IASE Study* (pp. 57-69). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-1131-0_10

Consejería de Desarrollo Educativo y Formación Profesional (CDEFP). (2025). Orden de 30 de abril de 2025, por la que se regulan las enseñanzas de la etapa de Educación Secundaria Obligatoria para personas adultas en la Comunidad Autónoma de Andalucía, *Boletín Oficial de la Junta de Andalucía*, 6245/1-117.

Gal, I. (2024). Adult education in mathematics and numeracy: a scoping review of recent research. *ZDM-Mathematics Education*, *56*, 293-305. https://doi.org/10.1007/s11858-024-01549-z

Junta de Andalucía (2025). *Contenidos y recursos educativos de Andalucía*. https://www.juntadeandalucia.es/educacion/permanente/materiales/index.php?etapa=2&materia=6&unidad=2

Ridgway, J. (Ed.) (2022). *Statistics for Empowerment and Social Engagement*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-20748-8_3

Ortiz-Flores, D., Gea, M. M. y Garzón-Guerrero, J. A. (2026). Ideas estocásticas en el recurso virtual de Educación Secundaria para Adultos en Andalucía. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 692). SEIEM.

EXPLORANDO LA ESPERANZA MATEMÁTICA EN JUEGOS EQUITATIVOS CON JUGADORES NO EQUIPROBABLES

Exploring the expected value in fair games with non-equiprobable players

Oval, Z. y García-Alonso, I.

Universidad de La Laguna

La calidad en la toma de decisiones bajo incertidumbre se articula mediante la noción de esperanza matemática, entendida como la relación multiplicativa y compensatoria entre la probabilidad de un suceso y su recompensa (Schlottmann, 2001). Los juegos de azar constituyen un entorno idóneo para el estudio de estos conceptos; sin embargo, aún existe un vacío en el conocimiento sobre las intuiciones del alumnado respecto a la noción de juego equitativo (Hernández-Solís et al., 2021) y acerca de su comprensión sobre estrategias basadas en la proporcionalidad para analizar dichos escenarios (Batista et al., 2022). Además, estas autoras señalan una tendencia a asociar la equidad del juego con la equiprobabilidad. En este trabajo se presenta una actividad que aborda el estudio de la esperanza matemática de forma manipulativa, en un juego compuesto por dos jugadores con cantidades de fichas no equiprobables.

Se presenta un estudio de carácter exploratorio que analiza la respuesta de 14 parejas de estudiantes de Bachillerato, que participaron en un taller de matemáticas en la Universidad de La Laguna. En él se muestra y aplica una estrategia basada en el razonamiento proporcional para analizar juegos equitativos cuyos jugadores no son equiprobables. La intervención se estructuró en dos fases: una primera fase de aprendizaje, donde de forma guiada el alumnado aprende a obtener la esperanza matemática de juegos para dos jugadores que extraen, con reemplazamiento, una ficha numerada entre -10 y 10; y una segunda fase de aplicación de la estrategia anterior, que consiste en comprobar si es un juego equitativo.

Los resultados obtenidos sugieren que la mayoría de los estudiantes resolvió correctamente la tarea (9 de 14). Tres parejas representaron la estrategia de equilibrio, mientras que seis parejas sólo mostraron los cálculos de la suma de las puntuaciones de las fichas y comprobaron que se podían compensar para indicar que el juego es equitativo. Se observó que una pareja trató de equilibrar el juego añadiendo fichas, con lo que mostraron la asociación entre equidad y equiprobabilidad.

En conclusión, la implementación de esta actividad ha permitido mostrar una estrategia que las parejas han sabido aplicar para abordar el estudio de la equitatividad del juego. Asimismo, el alumnado demostró capacidad para realizar el análisis, incluso ante un juego no evidente, caracterizado por presentar una cantidad de fichas diferente y no proporcional entre sí. Este estudio exploratorio ha permitido obtener buenos resultados, aunque somos conscientes de que es necesario seguir ampliando la muestra para conocer el alcance de esta estrategia de cara a abordar el estudio de la esperanza matemática y de los juegos equitativos en el aula de matemáticas.

Referencias

Batista, R., Borba, R. y Henriques, A. (2022). Fairness in games: A study on children's and adults' understanding of probability. *Statistics Education Research Journal, 21*(1), Article 13. https://doi.org/10.52041/serj.v21i1.79

Hernández-Solís, L. A., Batanero, C., Gea, M. M. y Álvarez-Arroyo, R. (2021). Comparación de probabilidades en urnas: Un estudio con estudiantes de Educación Primaria. *Uniciencia 35*(2), 1-18.

Schlottmann, A. (2001). Children's Probability Intuitions: Understanding the Expected Value of Complex Gambles. *Child Development 72*, no. 1: 103–122. https://doi.org/10.1111/1467-8624.00268

Oval, Z. y García-Alonso, I. (2026). Explorando la esperanza matemática en juegos equitativos con jugadores no equiprobables. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 693). SEIEM.

INVESTIGACIONES EN EL CONTEXTO EDUCATIVO COMO ESTRATEGIA PARA DESARROLLAR LA ALFABETIZACIÓN ESTADÍSTICA EN FUTUROS MAESTROS DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Research in the educational context as a strategy for developing statistical literacy among future elementary school teachers

Pallauta, J. D., Barbero, I. y Ricart, M.

Universidad de Lleida

La alfabetización estadística comprende la capacidad de interpretar y evaluar críticamente información estadística en contexto, así como argumentar y comunicar información basada en datos. Su desarrollo incluye la organización de datos y la construcción de distintas representaciones estadísticas (Gal, 2002). Por ello, es necesario que el profesorado cuente con una alfabetización estadística para favorecer su desarrollo en el estudiantado. En la línea de Wild y Pfannkuch (1999) proponen un modelo para la enseñanza de la estadística denominado ciclo PPDAC (problema, plan, datos, análisis y conclusión) que puede contribuir al desarrollo de la alfabetización estadística. En el contexto educativo, variados organismos destacan la relevancia del estudio de la estadística a partir de las primeras edades (De la Fuente y Garrido-Martos, 2024). Las directrices GAISE II (Bargagliotti et al., 2020) promueven una enseñanza de la estadística centrada en el análisis y comprensión de los datos, destacando la importancia de la formulación de investigaciones basadas en datos reales.

El objetivo de este trabajo es analizar la implementación del modelo PPDAC en 60 futuros docentes de Educación Primaria, a partir de sus proyectos sobre el contexto educativo. El análisis de contenido de los pósteres mostró el predominio de una metodología mixta, un uso prioritario de gráficos de barras y sectores, y temáticas centradas en hábitos alimenticios o el uso de redes sociales y de inteligencia artificial en el ámbito universitario. Asimismo, los futuros maestros destacaron la relevancia de aplicar los conocimientos de estadística en el desarrollo de sus propuestas. Se concluye que este tipo de experiencias puede contribuir al fortalecimiento de la enseñanza de la estadística en una sociedad con una alta presencia de datos.

Agradecimientos: Proyecto PID2022-139748NB-100 financiado por MICIU/AEI/10.13039/501100011033/ y por FEDER, UE.

Referencias

Bargagliotti, A., Franklin, C., Arnold, P., Gould, R., Johnson, S., Perez, L. y Spangler, D. (2020). *Pre-K-12 guidelines for assessment and instruction in statistics education II (GAISE II) a framework for statistics and data science education.* Statistical Association and National Council of Teachers of Mathematics. https://doi.org/10.1162/99608f92.246107bb

De la Fuente, A. y Garrido-Martos, R. (2024). El Sentido Estocástico en los simposios de la SEIEM (2010-2023). En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 185-192). SEIEM.

Gal, I. (2002). Adults' statistical literacy: Meanings, components, responsibilities. *International statistical review, 70*(1), 1-25. https://doi.org/10.1111/j.1751-5823.2002.tb00336.x

Wild, C. J. y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical inquiry. *International Statistical Review, 67*(3), 223–265. https://doi.org/10.1111/j.1751-5823.1999.tb00442.x

Pallauta, J. D., Barbero, I. y Ricart, M. (2026). Investigaciones en el contexto educativo como estrategia para desarrollar la alfabetización estadística en futuros maestros de educación primaria. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 694). SEIEM.

PAUTA INTERACCIONAL PARA ACTIVIDADES CON ROBÓTICA EN EDUCACIÓN PRIMARIA

Interactional guideline for robotics-based activities in primary education

Pérez-Arias, D., Lois-Prados, C. y Sequeiros, P. G.

Universidade de Santiago de Compostela

La revisión sistemática realizada por Zhong y Xia (2018) sobre la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas con robótica muestra que, aunque su uso en educación cuenta con una trayectoria superior a los cincuenta años, muchas de las propuestas se han centrado en la dimensión técnica de construcción y programación, relegando a un segundo plano sus beneficios para la comprensión de contenidos matemáticos, el desarrollo de habilidades metacognitivas o de resolución de problemas, o la adquisición de actitudes positivas hacia las matemáticas. En particular, se pone de manifiesto la necesidad de analizar con mayor profundidad las condiciones organizativas y didácticas que favorecen su implementación eficaz en las aulas.

La línea de investigación en la que se enmarca este póster pretende contribuir a la integración curricular de la robótica educativa para la promoción de la competencia matemática, a través de una investigación de diseño en torno a propuestas didácticas para Educación Primaria y programas orientados a la formación del profesorado. Los criterios para el diseño, la gestión y la evaluación de las actividades se analizan a la luz del modelo curricular vigente y de la Teoría de la Idoneidad Didáctica (Godino et al., 2023), que evalúa el grado de adecuación de un proceso educativo a través de sus diferentes facetas (epistémica, cognitiva, mediacional, interaccional, ecológica y afectiva).

Como parte de la primera fase de la investigación, en este póster se presenta una pauta preliminar para la faceta interaccional coherente con los criterios de Godino et al. (2023). La pauta considera las fases del modelo para la resolución creativa y computacional de problemas de Chevalier et al. (2020) – comprensión del problema, generación de ideas, modelado, programación y evaluación y toma de decisiones – con el objetivo de evitar el predominio del ciclo de prueba-error, e incorpora mecanismos de andamiaje propuestos por Alimisis (2018). Como ejemplo, dicha pauta se concreta a través de una tarea que requiere programar un robot para que realice un recorrido circular.

Agradecimientos: Proyecto PID2021-122326OB-I00 financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033 y proyecto ED431C 2025/48 financiado por la Consellería de Educación, Ciencia, Universidades y Formación Profesional – Xunta de Galicia.

Referencias

Alimisis, D. (2019). Teacher Training in Educational Robotics: The ROBOESL Project Paradigm. *Technology, Knowledge and Learning*, *24*, 279-290. https://doi.org/10.1007/s10758-018-9357-0

Chevalier, M., Giang, C., Piatti, A. y Mondada, F. (2020). Fostering computational thinking through educational robotics: a model for creative computational problem solving. *International Journal of STEAM Education*, *7*(39). https://doi.org/10.1186/s40594-020-00238-z

Godino, J. D., Batanero, C. y Burgos, M. (2023). Theory of didactical suitability: An enlarged view of the quality of mathematics instruction. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *19*(6), em2270. https://doi.org/10.29333/ejmste/13187

Zhong, B. y Xia, L. (2018). A systematic review on exploring the potential of educational robotics in mathematics education. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *18*, 79-101. https://doi.org/10.1007/s10763-018-09939-y

Pérez-Arias, D., Lois-Prados, C. y Sequeiros, P. G. (2026). Pauta interaccional para actividades con robótica en Educación Primaria. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 695). SEIEM.

JUSTIFICACIÓN, REPRESENTACIÓN Y PROCESO DE GENERALIZACIÓN EN 3º, 4º, 5º Y 6º DE PRIMARIA

Justification, representation, and generalisation process in 3rd, 4th, 5th, and 6th grade

Pérez-Martos, M. C., Moreno, A. y Torres, M. D.

Universidad de Granada

Esta investigación aborda el estudio de las justificaciones que ofrecen estudiantes de los dos últimos ciclos de educación primaria durante el proceso de generalización, y las representaciones que dan cuenta de ellas. La mayoría de los estudios previos en el campo del *early algebra* y el pensamiento algebraico se han centrado en la práctica de generalizar (Blanton et al., 2011). En el presente estudio nos centramos en la práctica de justificar y su representación. En línea con Balacheff (2000), destacamos de la justificación su intención de explicar, defender, validar y/o refutar una idea. Así, ponemos el foco en la justificación por ser esta una práctica que permite al alumnado explicar, a sí mismo o a otros, sus ideas algebraicas. Torres et al. (2021) propusieron un modelo del proceso de generalización que comprende tres etapas (abducción, inducción y generalización), que nos ayuda a categorizar las justificaciones. Nuestro objetivo queda definido a través de dos objetivos específicos: (a) describir las justificaciones del estudiantado de primaria cuando trabajan tareas de funciones a través de representaciones de funciones: pictórica, simbólica, tabular y gráfica, y (b) comparar los procesos de justificación del estudiantado de los cuatro últimos cursos de educación primaria.

Realizamos 24 entrevistas individuales y semiestructuradas (6 estudiantes de cada curso). Llevamos a cabo tres estudios de caso. El primero colectivo y centrado en los 6 estudiantes de 5º; el segundo instrumental y centrado en Q3 de 5º; y el último, colectivo y centrado en los 24 estudiantes de 3º, 4º, 5º y 6º. Estos tres estudios dan respuesta a los objetivos planteados, que corresponden a la Tesis de la primera autora. Analizamos las transcripciones de los vídeos, y las producciones. Empleamos el análisis de contenido como técnica de codificación cualitativa. Seleccionamos la unidad de análisis y categorizamos, con la fiabilidad de la triangulación de expertos.

Obtuvimos una tipología de justificaciones con 5º, que evidencia justificaciones a lo largo del todo el proceso de generalización. Q3 evidenció el avance hacia la generalización mediante el gráfico cartesiano. La comparación reveló que pertenecer a cursos superiores no conlleva la capacidad de ofrecer en mayor medida justificaciones a través de casos generales. Otro hallazgo fue encontrar el gráfico cartesiano entre las representaciones más frecuentes entre las justificaciones de los cuatro cursos.

Agradecimientos: Este estudio se ha realizado con el apoyo de los proyectos PID2020-113601GB-I00 y PID2024-157106NB-I00 y la ayuda PRE2021-097391 financiados por MCIN/AEI/10.13039/501100011033 y Fondos FEDER.

Referencias

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas* (P. Gómez, Trad.). Una Empresa Docente. (Trabajo original publicado en 1988).

Blanton, M., Levi, L., Crites, T. y Dougherty, B. (2011). *Developing Essential Understanding of Algebraic Thinking for Teaching Mathematics in Grades 3–5*. NCTM.

Torres, M. D., Moreno, A. y Cañadas, M. C. (2021). Generalization process by Second Grade students. *Mathematics, 9*(10), 1109. https://doi.org/10.3390/math9101109

Pérez-Martos, M. C., Moreno, A. y Torres, M. D. (2026). Justificación, representación y proceso de generalización en 3º, 4º, 5º y 6º de primaria. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 696). SEIEM.

MIRAR PROFESIONALMENTE EL PENSAMIENTO FUNCIONAL EN EDUCACIÓN INFANTIL: UNA EXPERIENCIA CON FUTUROS MAESTROS

Professional noticing of functional thinking in early childhood education: an experience with pre-service teachers

Pincheira, N.[a], Montoro, A.[b], Acosta, Y.[a] y Alsina, Á.[a]

[a]Universidad de Girona, [b]Universidad de Granada

Analizar e interpretar el pensamiento matemático es una práctica profesional docente especializada, esencial para la toma de decisiones fundamentada sobre qué y cómo enseñar (Llinares, 2019). Según Jacobs et al. (2010), la competencia mirar profesionalmente se compone de tres destrezas interrelacionadas: identificar los aspectos matemáticos que emergen en los procedimientos que utilizan los estudiantes; interpretar la comprensión del alumnado, aplicando conocimiento teórico para dar sentido a los detalles que se evidencian en sus producciones; y decidir cómo responder en función de dicha comprensión. Aquí nos centramos en el pensamiento funcional, un tipo de pensamiento algebraico focalizado en las relaciones existentes entre cantidades que varían de manera simultánea, del que emergen los modos de pensamiento recursivo, covariacional y de correspondencia (Pittalis et al., 2020) que juegan un papel clave a la hora de mirar profesionalmente la comprensión del estudiante. Nuestro objetivo es explorar cómo los futuros maestros de ed. infantil interpretan el pensamiento de los estudiantes a partir de sus intervenciones durante la realización de una tarea de pensamiento funcional. Se adopta un enfoque cualitativo para analizar las producciones escritas de 107 futuros maestros de una universidad española, elaboradas a partir de tres preguntas profesionales en el marco de una tarea formativa centrada en el análisis de una situación de aula, donde se muestran interacciones entre niños de infantil y su maestra al trabajar con una máquina de cambios, y un documento teórico con resultados de investigaciones sobre el desarrollo del pensamiento funcional. Los resultados revelan que los futuros maestros identifican la relación funcional involucrada, sin embargo, presentan limitaciones para interpretar el pensamiento funcional de los estudiantes y las decisiones que plantean, en su mayoría, se basan principalmente en aspectos generales de la enseñanza, sin tener en cuenta la interpretación realizada. Los resultados coinciden Callejo et al. (2022), que afirman que apropiarse del conocimiento producido por la investigación en didáctica de la matemática es un proceso complejo. Estos datos son un punto de partida para diseñar experiencias formativas orientadas a fortalecer la competencia de la mirada profesional en el aula de infantil.

Referencias

Callejo, M.L., Pérez-Tyteca, P., Moreno, M. y Sánchez-Matamoros, G. (2022). The use of a length and measurement HLT by pre-service kindergarten teachers to notice children's mathematical thinking. *International Journal of Science and Mathematics Education, 22*, 597-617. https://doi.org/10.1007/s10763-021-10163-4

Jacobs, V. R., Lamb, L. C. y Philipp, R. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(2), 169-202. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.41.2.0169

Llinares, S. (2019). Enseñar matemáticas como una profesión. Características de las competencias docentes. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática, 14*(18), 30-43.

Pittalis, M., Pitta-Pantazi, D. y Christou, C. (2020). Young students' functional thinking modes: the relation between recursive patterning, covariational thinking, and correspondence relations. *Journal for Research in Mathematics Education, 51*(5), 631-674. https://doi.org/10.5951/jresematheduc-2020-0164

Pincheira, N., Montoro, A., Acosta, Y. y Alsina, Á. (2026). Mirar profesionalmente el pensamiento funcional en educación infantil: una experiencia con futuros maestros. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 697). SEIEM.

CONOCIMIENTO E IDENTIDAD PROFESIONAL EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA: HACIA UN MODELO INTERDEPENDIENTE PARA LA FORMACIÓN DEL PROFESORADO

Professional identity and knowledge in mathematics education: towards an interdependent model for teacher training

Piñero Charlo, J. C.

Universidad de Cádiz

La formación inicial del profesorado de matemáticas requiere marcos que permitan comprender no solo qué conocimiento profesional desarrollan los futuros docentes, sino también cómo dicho conocimiento se articula con la construcción de su identidad profesional. En la investigación en educación matemática, los modelos sobre conocimiento del profesor han permitido caracterizar con notable precisión los dominios del saber matemático y didáctico necesarios para enseñar (modelos que pueden quedar parcialmente desconectados de la actuación del futuro profesor de matemáticas). De forma complementaria, los estudios sobre identidad profesional han mostrado que aprender a enseñar implica también reconstruir experiencias escolares previas, creencias, expectativas y formas de participación en comunidades educativas, pero no siempre explicitan su relación con el conocimiento didáctico-matemático.

Este trabajo presenta una síntesis teórica integradora orientada a articular ambas dimensiones mediante el modelo PIK (Piñero Charlo y Canto López, 2026), que propone que conocimiento e identidad no deben entenderse como dimensiones paralelas, sino como componentes interdependientes del desarrollo profesional. El modelo se construye a partir de una revisión estructurada de literatura sobre conocimiento profesional (Carrillo-Yañez et al., 2018), identidad docente (Chávez y Llinares, 2012) y procesos de formación del profesorado de matemáticas. En este enfoque, la mirada profesional actúa como un constructo puente: exige conocimiento especializado para interpretar las producciones del alumnado, pero también expresa una determinada forma de concebir el papel del profesor, el error, la participación matemática y la responsabilidad docente. Desde esta perspectiva, el modelo permite analizar tensiones formativas habituales y ofrece una herramienta conceptual para orientar diagnósticos formativos y estudiar trayectorias de desarrollo profesional más coherentes con la complejidad de la enseñanza de las matemáticas.

Referencias

Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, Á., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236-253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Chávez, Y. y Llinares, S. (2012). La identidad como producto del aprendizaje en la práctica de la enseñanza de las matemáticas en profesores de primaria. En A. Estepa Castro, Á. Contreras de la Fuente, J. Deulofeu Piquet, C. Penalva Martínez, F. J. García García y L. Ordóñez Cañada (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 187-196). SEIEM.

Piñero Charlo, J. C. y Canto López, M. del C. (2026). Teacher knowledge and teacher identity in mathematics education: An interdependent model. *Open Research Europe, 5*, 246. https://doi.org/10.12688/openreseurope.21108

Piñero Charlo, J. C. (2026). Conocimiento e identidad profesional en educación matemática: hacia un modelo interdependiente para la formación del profesorado. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 698). SEIEM.

APRENDIENDO A PROYECTAR FIGURAS: UN ESTUDIO DE CASO VEHICULADO MEDIANTE NEOTRIE VR

Learning to project figures: a case study conveyed through Neotrie VR

Piñero Charlo, J. C., Costado Dios, M. T. y Alegre Salguero, M. P.

Universidad de Cádiz

La comprensión de conceptos geométricos en Educación Primaria exige coordinar percepción, lenguaje y razonamiento, así como establecer relaciones entre distintas representaciones de un mismo objeto. Desde esta perspectiva, el aprendizaje geométrico no puede reducirse a la identificación visual de formas, sino que requiere procesos de análisis, conversión entre registros y anticipación espacial. En este marco, el presente trabajo analiza el papel que puede desempeñar la realidad virtual en la comprensión de proyecciones ortogonales y en el desarrollo de habilidades visoespaciales en alumnado de tercer curso de Educación Primaria. El estudio se apoya, principalmente, en el modelo de Van Hiele (1986), en la teoría de los registros semióticos de Duval (2006) y en antecedentes recientes sobre el uso de NeoTrie RV en educación geométrica (Cangas et al., 2019; Rodríguez et al., 2023). Se plantea un estudio de caso de carácter exploratorio desarrollado en un aula de 3º de Primaria de un centro de Cádiz. Aunque la intervención se llevó a cabo con el grupo-clase completo, el análisis se centró en una muestra focal de ocho estudiantes seleccionados mediante muestreo intencional de máxima variación. La secuencia incluyó trabajo inicial con manipulativos físicos, una prueba diagnóstica en papel, una breve entrevista, una fase de familiarización con el entorno inmersivo, una tarea de manipulación de figuras invisibles en NeoTrie RV y una fase final de transferencia a tareas equivalentes en formato lápiz-papel. El análisis se organizó en torno a tres categorías: comprensión de vistas, coordinación entre representaciones 2D-3D y visualización espacial. Los resultados muestran una evolución desde respuestas iniciales más perceptivas e inestables hacia formas de resolución más analíticas. Se observaron avances en la interpretación de vistas, en la inferencia de partes ocultas a partir de proyecciones y en la anticipación de cambios de orientación. La mejora fue más clara en el alumnado de rendimiento medio, mientras que en algunos perfiles de rendimiento bajo persistieron dificultades en figuras complejas y en la explicitación verbal del razonamiento. En conjunto, los hallazgos sugieren que la realidad virtual puede constituir una mediación didáctica relevante para favorecer el tránsito desde una lectura perceptiva de las figuras hacia formas iniciales de razonamiento geométrico más relacionales y espacialmente fundadas.

Referencias

Cangas, D., Morga, G. y Rodríguez, J. L. (2019). Geometry teaching experience in virtual reality with NeoTrie VR. *Psychology, Society & Education, 11*(3), 355-366. https://doi.org/10.25115/psye.v10i1.2270

Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. Educational Studies in Mathematics, 61(1–2), 103-131. https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z

Rodríguez, J. L., Martínez-Sevilla, A. y Alonso, S. (2023). Virtual reality to study geometrical aspects of architectural heritage. *Proceedings of the 28th Asian Technology Conference in Mathematics*, 380-389.

Van Hiele, P. (1986). *Structure and insight: a theory of mathematics education*. Academic Press, INC.

Piñero Charlo, J. C., Costado Dios, M. T. y Alegre Salguero, M. P. (2026). Aprendiendo a proyectar figuras: un estudio de caso vehiculado mediante NeoTrie VR. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 699). SEIEM.

ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS PARA TODOS: PERSPECTIVAS DESDE LA EDUCACIÓN ESPECIAL

Teaching mathematics for all: perspectives from special education

Pinto, E.[a] y Piñeiro, J. L.[b]

[a] Universidad de O'Higgins, [b]Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación

En muchas escuelas es habitual que en una misma clase participen dos docentes: uno corresponde al profesor de la asignatura y el otro a un profesor de educación especial. A esta modalidad de trabajo se le denomina codocencia y constituye una de las principales estrategias para promover la inclusión educativa en general, y en el aula de matemáticas en particular. En este contexto, surge una pregunta que continúa siendo poco explorada y que buscamos responder en este póster: ¿Qué perspectivas tienen docentes de educación primaria y de educación especial sobre los conocimientos que requieren los educadores especiales para enseñar matemáticas? Aunque la investigación ha destacado la relevancia del conocimiento del profesorado para el aprendizaje de los estudiantes (Carrillo et al., 2022), todavía existe escasa evidencia sobre los conocimientos matemáticos y didácticos que necesita este profesorado en contextos de codocencia (Allsopp y Haley, 2015).

La investigación adoptó un enfoque cualitativo y exploratorio basado en un análisis de contenido. Participaron doce docentes chilenos con experiencia en codocencia: seis docentes de educación especial y seis docentes de educación primaria. La información fue recogida mediante dos grupos focales y un grupo de discusión mixto orientados a explorar experiencias y percepciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en aulas inclusivas. Los resultados muestran que los participantes reconocen limitaciones en la formación matemática inicial del profesorado de educación especial, lo que genera inseguridad frente a la enseñanza y promueve procesos de autoformación. Asimismo, se destaca la importancia de comprender cómo aprenden los estudiantes y de implementar estrategias diversificadas de enseñanza. Mientras el profesorado de educación primaria enfatiza la contextualización de las tareas matemáticas, el grupo de docentes de educación especial priorizan el uso de materiales concretos, múltiples representaciones y adaptaciones metodológicas.

Los hallazgos evidencian que las aulas requieren un conocimiento especializado que articule comprensión matemática y estrategias pedagógicas sensibles a la diversidad. Sin embargo, los discursos docentes tienden a separar el conocimiento matemático del conocimiento didáctico, otorgando mayor relevancia a las estrategias de enseñanza que a la comprensión profunda de la disciplina. Además, emergen tensiones asociadas a la distribución de roles y al reconocimiento de los aportes profesionales en la codocencia. Concluimos que es necesario fortalecer el diálogo entre la formación inicial y continua del profesorado en educación matemática y educación especial, con el propósito de construir una preparación más sólida para enseñar matemáticas a todos los estudiantes.

Agradecimientos: Financiado por ANID mediante Fondecyt Regular 1261710.

Referencias

Allsopp, D. H. y Haley, K. C. (2015). A synthesis of research on teacher education, mathematics, and students with learning disabilities. *Learning Disabilities: A Contemporary Journal*, *13*(2), 177-206.

Carrillo, J., Montes, M. y Climent, N. (2022). *Investigación sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK). 10 años de camino*. Dykinson.

Pinto, E. y Piñeiro, J. L. (2026). Enseñanza de las matemáticas para todos: perspectivas desde la educación especial. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 700). SEIEM.

LA COMPRENSIÓN LECTORA EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Reading comprehension in problem solving

Polo-Blanco, I., Villalón, R. y Goñi-Cervera, J.

Universidad de Cantabria

Los procesos de comprensión lectora y la resolución de problemas matemáticos constituyen competencias clave en educación primaria, si bien habitualmente se abordan de manera independiente tanto en la investigación como en el aula (Vilenius-Tuohimaa et al., 2008). El presente estudio tiene como objetivo analizar el papel de la comprensión lectora (en términos de inferencia y consistencia del lenguaje), y de la complejidad (según la tipología del problema y del número de operaciones), durante la resolución de problemas aritméticos verbales. Se ha elaborado una prueba compuesta por 15 problemas aritméticos verbales de estructura aditiva y multiplicativa. Los problemas incluyen situaciones de cambio, comparación (tanto aditiva como multiplicativa) y de razón, con una o varias operaciones. Además, en el diseño de los problemas se ha considerado que presenten o no lenguaje inconsistente (cuando la acción descrita es contraria a la operación necesaria en el contexto del problema, como "ganar" puede implicar restar) e inferencia (cuando es necesario deducir información que no aparece explícitamente en el enunciado). El instrumento se ha aplicado en una evaluación piloto con alumnado de 3.º de Educación Primaria (n = 9). En relación con la comprensión lectora, los resultados muestran una mayor presencia de errores asociados a la inconsistencia del lenguaje (12%), seguidos por errores de inferencia (10%). El tipo de estructura de los problemas (aditiva o multiplicativa) no parece desempeñar un papel relevante en el éxito en la resolución, pero sí la complejidad asociada al número de operaciones: los de más de una operación presentan un porcentaje de acierto significativamente menor (27%) en comparación con los de una sola operación (79%). Además, los resultados apuntan a que la inferencia tiene mayor peso en la resolución de problemas de más de una operación, mientras que las dificultades asociadas a la inconsistencia del lenguaje aparecen principalmente en situaciones de comparación multiplicativa, independientemente del número de operaciones. Estos resultados sugieren la conveniencia de trabajar la comprensión lectora en la resolución de problemas (Hegarty et al., 1995), atendiendo al número de operaciones y a las características lingüísticas en el diseño de los enunciados.

Agradecimientos: La publicación es parte del proyecto PID2022-138325OB-I00 financiado por MICIU/AEI/10.13039/501100011033 y por FEDER, UE.

Referencias

Hegarty, M., Mayer, R. E. y Monk, C. A. (1995). Comprehension of arithmetic word problems: A comparison of successful and unsuccessful problem solvers. *Journal of Educational Psychology, 87*(1), 18–32. https://doi.org/10.1037/0022-0663.87.1.18

Vilenius-Tuohimaa, P. M., Aunola, K. y Nurmi, J. E. (2008). The association between mathematical word problems and reading comprehension. *Educational Psychology, 28*(4), 409–426. https://doi.org/10.1080/01443410701708228

Polo-Blanco, I., Villalón, R. y Goñi-Cervera, J. (2026). La comprensión lectora en la resolución de problemas. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 701). SEIEM.

EVALUACIÓN DEL SENTIDO NUMÉRICO EN ESTUDIANTES DE AGRONOMÍA DE UNA UNIVERSIDAD CHILENA

Assessment of number sense in agronomy students at a Chilean university

Quezada-Aguayo, R. A.[a] y Bruno, A.[b]

[a]Universidad de Concepción, [b]Universidad de La Laguna

El sentido numérico es la capacidad para comprender, relacionar y utilizar los números y las operaciones, mediante una red conceptual bien organizada, la cual permite interpretar información cuantitativa y resolver problemas de manera flexible y creativa en diversos contextos (McIntosh et al., 1992 y Sowder, 1992). Con el fin de hacerlo operativo, McIntosh et al. (1992, p. 213) desglosaron las habilidades asociadas al sentido numérico en tres tipos de componentes (números, operaciones y herramientas) y, a su vez, en once subcomponentes. Entre estas: i) usar puntos de referencia; ii) identificar el efecto de las operaciones; iii) hacer uso de propiedades; iv) estimar resultados; y v) juzgar lo razonable de los resultados. En contextos universitarios, los estudios sobre sentido numérico son escasos (e. g., Almeida et al., 2016), a pesar de que estas habilidades numéricas son esenciales para el desempeño profesional en carreras de carácter científico y tecnológico, como Agronomía.

El objetivo de este estudio es analizar el éxito y las estrategias asociadas al sentido numérico que muestran los estudiantes de Agronomía en diversas tareas que involucran el uso de distintas subcomponentes. El estudio surge a partir de los bajos niveles de logro en ítems vinculados a los sistemas numéricos observados en los diagnósticos institucionales, junto con tasas de reprobación superiores al 50% en los últimos cuatro años.

Se presentan los resultados de seis preguntas que evalúan las subcomponentes citadas, respondidas por 40 estudiantes de un curso inicial de Matemática de la carrera de Agronomía en una universidad chilena. Se adoptó un enfoque descriptivo de carácter mixto cualitativo/cuantitativo, basado en la aplicación de un cuestionario sobre números naturales y racionales, de respuesta múltiple en la que se solicitaba la justificación de la misma. Las preguntas abordaron la estimación de un número a partir de un porcentaje conocido, la identificación del mayor de varios productos, el reconocimiento del efecto de dividir por un número decimal menor que uno, la estimación de la suma de dos fracciones menores que un medio y la estimación de una gran cantidad de objetos distribuidos en un rectángulo.

Los resultados globales de las seis preguntas muestran que un 46,7% de los estudiantes escogió una alternativa correcta y proporcionó algún tipo de justificación. No obstante, únicamente el 32,6% de estas justificaciones fue con argumentos matemáticamente válidos. Además, solo uno de cada nueve estudiantes utilizó correctamente estrategias basadas en sentido numérico, evidenciando una dependencia crítica de los algoritmos y una limitada flexibilidad en su razonamiento. Estas carencias ponen de manifiesto la necesidad de fortalecer el desarrollo de habilidades cuantitativas vinculadas al sentido numérico, fundamentales para la adquisición de otras competencias profesionales.

Agradecimientos: Beca de movilidad AUIP. Financiado por PID2022-139007NB-I00, MCIN/AEI.

Referencias

Almeida, R., Bruno, A. y Perdomo-Díaz, J. (2016). Strategies of number sense in pre-service secondary mathematics teachers. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *14*, 959-978. https://doi.org/10.1007/s10763-014-9601-6

McIntosh, A., Reys, B.J. y Reys, R.E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the learning of mathematics, 12*(3), 2-8.

Sowder, J. (1992). Estimation and number sense. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 245-275). MacMillan.

Quezada-Aguayo, R. A. y Bruno, A. (2026). Evaluación del sentido numérico en estudiantes de Agronomía de una universidad chilena. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 702). SEIEM.

USO CRÍTICO DE LA INTELIGENCIA ARTIFICIAL EN LA FORMACIÓN INICIAL DEL PROFESORADO PARA EL DISEÑO Y ANÁLISIS DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS

Critical use of artificial intelligence in initial teacher education for the design and analysis of mathematical problems

Rabelo Procópio, M. V. y Soto-Varela, R.

Universidad de Valladolid

Este póster expone una experiencia desarrollada en el proyecto RAI-Mat, enfocada en analizar el uso de la inteligencia artificial (IA) de manera responsable como apoyo a la formación inicial del profesorado centrada en su uso responsable con la idea de analizar y revisar problemas matemáticos en Educación Primaria (EP). El objetivo fue explorar qué puede aportar la Inteligencia Artificial (IA) al análisis didáctico de los problemas. En particular, interesaba observar cómo la claridad del enunciado, la coherencia matemática, la adecuación al curso y la forma de plantear la situación influyen en la comprensión del alumnado. Desde esta perspectiva, resolver problemas no consiste solo en aplicar procedimientos, sino también en interpretar, argumentar y validar las respuestas obtenidas (Polya, 1945; Schoenfeld, 1985).

Participaron 120 estudiantes del grado de E.P., divididos en 26 grupos, organizada en dos bloques: P1, con apoyo de IA, y P2 sin IA. Ambos siguieron una secuencia de 8 fases centradas desde la creación, resolución y revisión de problemas matemáticos. Los datos fueron recogidos a partir del análisis de las producciones escritas, revisiones, reflexiones y observaciones durante las sesiones. La motivación se evaluó a partir de las valoraciones, comentarios y su grado de implicación en las tareas. La capacidad de análisis de problemas se examinó mediante las modificaciones, detección de errores, ambigüedades y la calidad de los enunciados.

Los resultados presentaron diferencias entre ambos grupos. El P1, que trabajó con la IA, tuvo una participación más activa y realizó un mayor número de revisiones de los enunciados. Además, sus integrantes apuntaron que la IA facilitaba la generación de ideas, pero identificaron errores de redacción, ambigüedades y soluciones incorrectas en propuestas generadas automáticamente. Ambos los grupos lograron detectar inconsistencias en los problemas elaborados, demostrando que la resolución de problemas estaba vinculadas a la claridad, formulación de los enunciados más que el contenido matemático. Cuando comparadas las producciones humanas y de la IA, el alumnado destacó que había profundas diferencias en el razonamiento, la adaptación al contexto y la capacidad para justificar los procedimientos utilizados por parte de la IA.

En conclusión, estos resultados demuestran que la IA es una herramienta de apoyo en el proceso de elaboración de problemas, no obstante, el juicio docente continúa dictando de manera fundamental para garantir la calidad y pertenencia de las propuestas matemáticas. Por lo tanto, hay que preparar los futuros docentes para se ven capaces de comprenderla, gestionarla para que puedan promover un aprendizaje matemático profundo y significativo.

Referencias

Polya, G. (2021). *Cómo plantear y resolver problemas.* México: Trillas.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Academic Press. https://www.sciencedirect.com/book/9780126288704/mathematical-problem-solving

Selwyn, N. (2022). *Education and technology: Key issues and debates* (3rd ed.). Bloomsbury Academic. https://www.bloomsbury.com/uk/education-and-technology-9781350145559/

Rabelo Procópio, M. V. y Soto-Varela, R. (2026). Uso crítico de la inteligencia artificial en la formación inicial del profesorado para el diseño y análisis de problemas matemáticos. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 703). SEIEM.

PRÁCTICAS DISCURSIVAS DE PROFESORES DE SECUNDARIA EN UN TALLER SOBRE EL DISCURSO MATEMÁTICO EN LA ENSEÑANZA DEL CONCEPTO DE ÁNGULO

Discourse practices of secondary-school teachers in a workshop on mathematical discourse in the teaching of the concept of angle

Rave-Agudelo, J. G.[a, b] y Rojas, F.[a]

[a]Universitat Autónoma de Barcelona, [b]Universidad de Salamanca

La participación de profesores de matemáticas en contextos de formación inicial y continua favorece el desarrollo de competencias profesionales como la mirada profesional. Sin embargo, comprender esta competencia requiere caracterizar el discurso que los profesores utilizan al atender y dar sentido a fenómenos específicos de la profesión (Goodwin, 1994). Asumiendo que cada profesión posee formas particulares de comunicar aquello que se mira profesionalmente (van Es et al., 2024), este estudio tiene como objetivo caracterizar las prácticas discursivas de profesores de matemáticas de secundaria en el contexto de un taller formativo sobre aspectos del discurso matemático en la enseñanza del concepto de ángulo. Para ello, se diseñó e implementó un taller de dos horas y 20 minutos de duración que incluía la resolución y discusión conjunta de dos tareas profesionales orientadas a identificar, interpretar y decidir sobre vocabulario matemático, explicaciones matemáticas y ejemplos gráficos utilizados en la enseñanza que tienen el potencial para reducir retos comunes en el aprendizaje del concepto de ángulo. Mediante un método híbrido que combinó análisis temático inductivo y deductivo con técnicas de visualización de información, se caracterizaron las prácticas discursivas de cinco profesores desde la perspectiva de la Teoría de Actos de Habla (Bach y Harnish, 1979), y se analizaron los cambios producidos en dichas prácticas a lo largo del taller. Los resultados muestran una tendencia hacia el uso de un discurso constatativo de carácter asertivo (afirmar e indicar), sugestivo (sugerir), descriptivo (describir y categorizar) y retrodictivo (reportar) en contextos de desarrollo profesional. Asimismo, los hallazgos evidencian el potencial del taller para promover prácticas metacomunicativas (Coles y Helliwell, 2025) orientadas a reflexionar sobre la relevancia del discurso matemático en la enseñanza del concepto de ángulo, así como el papel de la discusión conjunta y de la interacción comunicativa en el desarrollo de la mirada profesional en este tipo de contextos (van Es et al., 2024).

Agradecimientos: Proyectos PID2019-104964GB-I00 y PID2023-149580NB-I00, y Contrato Predoctoral PRE2020-094574 (Agencia Estatal de Investigación, MICINN, España).

Referencias

Bach, K. y Harnish, R. (1979). *Linguistic communication and speech acts*. MIT Press.

Coles, A. y Helliwell, T. (2025). Re-conceptualising mathematics teacher noticing through critical events from an enactivist perspective. *Journal of Mathematics Teacher Education, 28*(5), 1033-1055. https://doi.org/10.1007/s10857-024-09676-w

Goodwin, C. (1994). Professional vision. *American Anthropologist, 96*(3), 606-633. https://doi.org/10.1525/aa.1994.96.3.02a00100

van Es, E. A., Luna, M. y Tekkumru-Kisa, M. (2024). An exploration of noticing discourse as a mechanism of teacher learning. En R. Stahnke y A. Gegenfurtner. (Eds.), *Teacher professional vision: Empirical perspectives* (pp. 13-30). Routledge. https://doi.org/10.4324/9781003370604-3

Rave-Agudelo, J. G. y Rojas, F. (2026). Prácticas discursivas de profesores de secundaria en un taller sobre el discurso matemático en la enseñanza del concepto de ángulo. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 704). SEIEM.

EVALUACIÓN EN COMPETENCIAS DE FORMULACIÓN DE PROBLEMAS DE ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA

Assessment of problem-posing competencies in compulsory secondary education students

Roca, P.[a], Climent, N.[a], Chico, M. J.[b], Montes, M. A.[a] y Álvarez, E.[a]

[a]Universidad de Huelva, [b]IES Mapi Valle

Aunque podemos considerar que la formulación de una pregunta es, a menudo, más relevante que la propia respuesta, la investigación sobre la formulación de problemas se ha consolidado recientemente (Ölmez et al., 2026). En este póster presentamos un estudio de caso de un grupo-clase de dieciséis estudiantes de segundo curso de educación secundaria obligatoria (ESO) con el objetivo de evaluar sus competencias en formulación de problemas, sin instrucción previa. Para ello, se plantea una tarea de formulación de problemas (Cai y Hwang, 2023) donde la *situación* viene dada por un mercado cercano al centro educativo y la *consigna* es formular un problema sobre números enteros, divisibilidad, fracciones, decimales, potencias y raíces, o álgebra y geometría. Además, se pide evaluar el problema de otra persona del grupo mediante una rúbrica dada y, finalmente, reformularlo. La tarea es diseñada en el marco de un Proyecto de Investigación Colaborativa (PIC), integrado por profesorado de distintos niveles educativos, personal investigador y futuro personal docente. Recogemos la información mediante las producciones individuales del alumnado y analizamos los problemas formulados mediante la rúbrica de evaluación de competencias en formulación de problemas de Özgen et al. (2019) (por las dimensiones lenguaje matemático, reglas gramaticales, adecuación de la información, resolubilidad y originalidad). Tras el análisis concluimos que la mayoría de los problemas muestran buen uso del lenguaje matemático, corrección gramatical y adecuación de la información. Cinco de los dieciséis problemas no eran resolubles y, en general, la originalidad fue baja, pues muchos se parecían a problemas de libro de texto. Se destaca cómo la resolubilidad de los problemas se relaciona con el contenido. Así, la mayoría de los problemas formulados, cuyo contenido matemático se centraba en las fracciones, no eran resolubles por incoherencias en el uso de las fracciones (principalmente, inconsistencias con la unidad de referencia), mientras que los problemas de números enteros y decimales (los otros dos contenidos elegidos en menor medida) eran todos resolubles. Esto podría ser un indicio de los distintos grados de dificultad en la formulación de problemas en base al contenido matemático que se aborda.

Agradecimientos: Proyectos PIV-036/25, Junta de Andalucía, y PID2024-158877NB-I00 financiado por MICIU/ AEI / 10.13039/501100011033/ FEDER, UE.

Referencias

J. Cai, y S. Hwang (2023). Making mathematics challenging through problem posing in the classroom. En R. Leikin (Ed.), *Mathematical Challenges for All.* Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-031-18868-8_7

Ölmez, İ. B., Hwang, S., Han, J. y Cai, J. (2026). Reviewing the Current State of Knowledge in Mathematical Problem-Posing Research. En J. Cai Y R. Leikin (Eds.), *Research in Mathematical Problem Posing: New Advances and Directions* (pp. 127-150). Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-032-05493-7_8

Özgen, K., Aydın, M., Geçici, M. E. y Bayram, B. (2019). An investigation of eighth grade students' skills in problem posing. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, *20*(1), 106-130. https://doi.org/10.4256/ijmtl.v20i1.192

Roca, P., Climent, N., Chico, M. J., Montes, M. A. y Álvarez, E. (2026). Evaluación en competencias de formulación de problemas de estudiantes de educación secundaria obligatoria. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 705). SEIEM.

DESIGNACIÓN ESPONTÁNEA DE INVARIANTES TOPOLÓGICOS EN EDUCACIÓN INFANTIL Y PRIMARIA

Spontaneous designation of topological invariants in early childhood and primary education

Rodríguez, M., Monteagudo, C., Reja, S. y Codes, M.

Universidad de Huelva

Los dominós topológicos son un recurso apropiado para construir conocimiento geométrico a partir de invariantes topológicos (Vecino, 2005). En un diseño propio se empleó la *conexión* como invariante para crear un dominó que se ha llevado a aulas de diferentes niveles educativos. En colaboración con las maestras que siguieron un enfoque didáctico de exploración guiada, se pidió al alumnado que encontrara y describiera cómo emparejar las fichas. Estas contenían, en cada una de las partes, dos figuras geométricas planas sencillas no conectadas, o conectadas de tres posibles formas diferentes: coincidiendo solo en una parte de la frontera, en una parte de la frontera y del interior, o una contenida en la otra. La dinámica de aula, acorde con la propuesta de Canals (1997) sobre cómo construir conocimiento geométrico en etapas iniciales: explorar, comparar y expresar verbalmente. La grabación en vídeo de las implementaciones en un aula de Educación Infantil (5 años) y de quinto curso de Educación Primaria, junto con la observación no participante, nos ha permitido descubrir cómo es el protolenguaje matemático vinculado al invariante topológico de conexión. A pesar de la diferencia de edad y de la peculiaridad de que uno de los grupos era de Educación Infantil, no se observaron grandes diferencias en el uso de términos y expresiones empleadas para referirse a los invariantes topológicos: (i) para el caso de la no conexión, en ambos grupos se empleó la palabra *separadas*; (ii) en el caso de la conexión en el que una figura está contenida en otra, se emplearon expresiones muy similares: *tiene algo en el centro*, en el caso del aula de cinco años, y *dentro una de otra* en el caso de 5º de Primaria; (iii) cuando las figuras coincidían solo en parte de la frontera, en ambos cursos emplearon la palabra *pegadas*; (iv) e igualmente coincidieron en el caso de la intersección sin contenido en el que se emplearon las expresiones *un poco metido* en el aula de Educación Infantil y *casi metidas* en el de Primaria.

En ambos grupos se emplearon términos y expresiones del lenguaje natural que, si bien no son los utilizados en lenguaje matemático formal y, por tanto, no se pueden considerar como expresiones matemáticas en el sentido de Alcalá (2002), captan con precisión las cualidades que designan.

Agradecimientos: Proyecto PID2024-158877NB-I00 del Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades del Gobierno de España; centro de investigación COIDESO de la Universidad de Huelva; grupo de investigación DESYM (HUM-168); proyectos de innovación educativa del 2020 al 2024 del Vicerrectorado de Innovación y empleabilidad de la Universidad de Huelva.

Referencias

Alcalá, M. (2002). *La construcción del lenguaje matemático*. Graó.

Canals, M. A. (1997). La Geometría en las primeras edades escolares. *Suma, 25*, 31–44.

Vecino, F. (2005). El espacio como modelo teórico para el desarrollo de las geometrías. Situaciones de introducción a las mismas. En M. C. Chamorro (Coord.). *Didáctica de la Matemática para Educación Infantil* (pp. 279–314). Pearson Educación.

Rodríguez, M., Monteagudo, C., Reja, S. y Codes, M. (2026). Designación espontánea de invariantes topológicos en educación infantil y primaria. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 706). SEIEM.

EVALUACIÓN DE LA COMPETENCIA MATEMÁTICA: CONCEPCIONES Y PRÁCTICA DOCENTE EN COLOMBIA

Assessment of mathematical competence: teachers' conceptions and classroom practice in Colombia

Rodríguez-Baiget, D.[a], Mirquez, C. A.[b], Maz-Machado, A.[c], Villarraga-Rico, M. E.[d] y Rodríguez-Baiget, M. J.[c]

[a]UNIR, [b]Universidad del Tolima, [c]Universidad de Córdoba, [d]Universidad de Salamanca

La evaluación de la competencia matemática constituye un eje central en los sistemas educativos actuales, especialmente en el marco de enfoques curriculares orientados al desarrollo de competencias. Sin embargo, la investigación en educación matemática ha evidenciado tensiones entre los planteamientos teóricos de la evaluación competencial y las prácticas docentes, frecuentemente vinculadas a modelos centrados en contenidos. Este estudio integra el desarrollo de competencias matemáticas con el conocimiento profesional del profesorado, considerando el papel de los criterios de evaluación, los estándares de aprendizaje y el uso de evidencias como elementos clave en la valoración del aprendizaje (Niss y Højgaard, 2019; Rico Romero, 2011; Godino et al., 2007). El objetivo de esta investigación es analizar las concepciones y dificultades de maestros de educación primaria en Colombia sobre la evaluación de la competencia matemática, prestando especial atención a la coherencia entre los elementos curriculares y las prácticas evaluativas.

Se adopta un diseño metodológico cuantitativo, basado en la aplicación de un cuestionario tipo Likert a una muestra de docentes de educación primaria (N≈156). El instrumento, compuesto por diez ítems (de 1 a 5), explora concepciones sobre la evaluación, diseño de instrumentos, uso de tecnologías y dificultades percibidas. Los resultados muestran que los docentes reconocen el papel de los criterios de evaluación (M=3.73) y de los mapas de desempeño (M=3.76). No obstante, se observa una tendencia a identificar los estándares de aprendizaje con los contenidos (M=2.78), lo que evidencia una comprensión parcial del enfoque competencial. En la práctica evaluativa, los docentes muestran una percepción positiva sobre su capacidad para diseñar pruebas (M=3.57) y elaborar rúbricas (M≈3.09), aunque persisten dificultades en la evaluación a partir de evidencias de tareas (M=2.52) y en el diseño de instrumentos de registro (M≈2.51). El uso de tecnologías presenta niveles moderados, mientras que la consideración de la evaluación como calificación obtiene valores bajos (M≈2.09), lo que sugiere cierta apertura hacia enfoques formativos. Estos resultados evidencian la coexistencia de modelos evaluativos y tensiones entre el discurso competencial y la práctica docente. Se identifican necesidades formativas en la articulación curricular, el diseño de instrumentos y el uso de evidencias. Como implicación, el estudio aporta orientaciones para la formación docente orientada a mejorar la evaluación de la competencia matemática en educación primaria y contribuye con evidencia empírica en el contexto colombiano.

Referencias

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). El conocimiento del profesor de matemáticas y la formación del profesorado. En M. Camacho, P. Flores y P. Bolea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XI* (pp. 1–25). SEIEM

Niss, M. y Højgaard, T. (2019). Mathematical competencies revisited. *Educational Studies in Mathematics*, *102*(1), 9–28. https://doi.org/10.1007/s10649-019-09903-9

Rico Romero, L. (2011). El estudio PISA y la evaluación de la competencia matemática. *Matematicalia, 7*(1), 1–12.

Rodríguez-Baiget, D., Mirquez, C. A., Maz-Machado, A., Villarraga-Rico, M. E. y Rodríguez-Baiget, M. J. (2026). Evaluación de la competencia matemática: concepciones y práctica docente en Colombia. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 707). SEIEM.

EXPERIMENTANDO CON ENFOQUE CPA: UNA PROPUESTA DE TRAYECTORIA PARA DESARROLLAR LOS SIGNIFICADOS DE LA PROBABILIDAD EN 1º ESO

Experimenting through the CPA approach: a learning trajectory proposal to develop the meanings of probability in 1st ESO

Rodríguez-Miravalles, J.[a], De la Fuente, A.[b], Santaengracia, J. J.[c] y Garrido Martos, R.[b]

[a]Universidad Autónoma de Madrid e IES San Fernando, [b] Universidad Autónoma de Madrid, [c]Universidad de Oviedo

El aprendizaje de la probabilidad en Educación Secundaria suele verse condicionado por intuiciones erróneas y sesgos cognitivos relacionados con el azar, como el sesgo de equiprobabilidad o las dificultades para comprender la independencia de sucesos (Batanero y Álvarez-Arroyo, 2024). Esta investigación, desarrollada mediante la metodología DBR (por sus siglas en inglés, *Design-Based Research*), presenta una trayectoria de aprendizaje orientada al desarrollo del sentido estocástico en alumnado de 1º ESO desde un enfoque CPA (concreto–pictórico–abstracto), promoviendo la manipulación, la experimentación y la representación figurativa como herramientas para favorecer la comprensión probabilística y estadística (De la Fuente et al., 2025; Santaengracia et al., 2023).

La trayectoria comienza con situaciones vinculadas a la probabilidad subjetiva, evoluciona hacia el significado frecuencial mediante el trabajo con sucesos equiprobables y no equiprobables y busca aproximar al alumnado al significado teórico o laplaciano de la probabilidad, incorporando el juego y la experimentación como elementos clave en la construcción de significados probabilísticos (Suárez-González et al., 2025).

Se presenta la propuesta de la trayectoria y el análisis del primer ciclo DBR a través de un pilotaje realizado con una muestra por conveniencia compuesta por 4 chicos y 4 chicas de 1º ESO. El análisis cualitativo de las producciones y argumentaciones del alumnado permitió identificar fortalezas y aspectos de mejora en la secuencia diseñada. Los resultados preliminares muestran que la manipulación y la experimentación favorecen la confrontación de intuiciones erróneas y promueven interpretaciones probabilísticas más fundamentadas. El pilotaje permite dar una primera versión sustentada, orientar futuras mejoras antes de su implementación en grupos completos y prever con mayor precisión los posibles caminos de mejora de la secuencia.

Referencias

De la Fuente Silva, A., Suárez-González, C., Garrido-Martos, R. y Santaengracia, J. J. (2025). Del experimento a la tabla: Explorando representaciones bajo el enfoque frecuencial con material equiprobable y no equiprobable. *Revista De Educación Estadística*, *4*, 1–32. https://doi.org/10.29035/redes.4.1.13

Batanero, C. y Álvarez-Arroyo, R. (2024). *Teaching and learning of probability*. ZDM, 56, 5–17. https://doi.org/10.1007/s11858-023-01511-5

Santaengracia, J.J., Rodríguez-Muñiz, L.J. y Palop, B. (2023). Una situación de aprendizaje para el desarrollo del sentido estocástico en Educación Primaria. *Números, 113*, 63–80.

Suárez-González, C., de la Fuente, A., Aguilar-González, Á. y Rodríguez-Muñiz, L. J. (2025). Significados de la probabilidad a través del juego: Una mirada desde los estudiantes para maestro/a. En M. Burgos et al. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII*, (pp. 437–444). SEIEM.

Rodríguez-Miravalles, J., De la Fuente, A., Santaengracia, J. J. y Garrido Martos, R. (2026). experimentando con enfoque CPA: una propuesta de trayectoria para desarrollar los significados de la probabilidad en 1º ESO. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 708). SEIEM.

ANSIEDAD MATEMÁTICA EN LA FORMACIÓN INICIAL DEL PROFESORADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA: DIFERENCIAS SEGÚN CURSO Y GÉNERO

Math anxiety in primary teacher education: differences by academic year and gender

Sagarduy, A., Arrieta, N. y Soto, I.

Universidad del País Vasco/ Euskal Herriko Unibertsitatea (UPV/EHU)

La ansiedad matemática constituye un factor afectivo con impacto directo en el rendimiento, la autoeficacia y la futura enseñanza de las matemáticas, especialmente relevante en la formación inicial del profesorado. En el caso de los futuros docentes de Educación Primaria, su presencia puede condicionar no solo el aprendizaje universitario, sino también las creencias, expectativas y prácticas que posteriormente trasladarán al aula (Schaeffer et al., 2021). En este contexto, el objetivo de este trabajo fue analizar los niveles de ansiedad matemática en estudiantes del Grado en Educación Primaria, atendiendo a posibles diferencias según el curso académico y el género.

Se desarrolló un estudio cuantitativo, no experimental y de corte transversal con una muestra de 95 estudiantes de la Universidad del País Vasco (EHU), distribuidos entre 1.º y 4.º curso del grado. Como instrumento de recogida de datos se utilizó una adaptación de la escala de ansiedad hacia las matemáticas de Fennema y Sherman (1976), compuesta por 12 ítems con respuesta tipo Likert de 5 puntos. El análisis contempló una puntuación global y tres dimensiones específicas: ansiedad global ante las matemáticas, ansiedad ante la resolución de problemas y ansiedad ante los exámenes.

Los resultados mostraron niveles moderados-altos de ansiedad matemática en el alumnado participante. Se identificó una tendencia hacia niveles más elevados en el alumnado de 1.º y 2.º curso en las dimensiones de ansiedad global ante las matemáticas y ante la resolución de problemas. Por su parte, la ansiedad ante los exámenes presentó los niveles más elevados, especialmente en el alumnado de último curso. Asimismo, las mujeres mostraron niveles superiores de ansiedad matemática respecto a los hombres, en línea con investigaciones previas (Devine et al., 2012).

Estos hallazgos refuerzan la necesidad de atender la dimensión afectiva en la formación inicial docente, favoreciendo tanto el bienestar emocional del futuro profesorado como el desarrollo de prácticas de enseñanza de las matemáticas más positivas y eficaces en Educación Primaria.

Referencias

Devine, A., Fawcett, K., Szűcs, D. y Dowker, A. (2012). Gender differences in mathematics anxiety and the relation to mathematics performance while controlling for test anxiety. *Behavioral and brain functions, 8*(1), 33. https://doi.org/10.1186/1744-9081-8-33

Fennema, E. y Sherman, J. A. (1976). Fennema-Sherman Mathematics Attitudes Scales: Instruments Designed to Measure Attitudes toward the Learning of Mathematics by Females and Males. *Journal for Research in Mathematics Education, 7*(5), 324–326. https://doi.org/10.2307/748467

Schaeffer, M. W., Rozek, C. S., Maloney, E. A., Berkowitz, T., Levine, S. C. y Beilock, S. L. (2021). Elementary school teachers' math anxiety and students' math learning: A large-scale replication. *Developmental science, 24*(4), e13080. https://doi.org/10.1111/desc.13080

Sagarduy Crespo, A., Arrieta Irazabal, N. y Soto Mesa, I. (2026). Ansiedad matemática en la formación inicial del profesorado de Educación Primaria: diferencias según curso y género. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 709). SEIEM.

IMPACTO DE LA GAMIFICACIÓN EN EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS EN EDUCACIÓN PRIMARIA: UN ESTUDIO MEDIANTE ESCAPE ROOM

Impact of gamification on mathematics learning in primary education: a study through an educational escape room

Sagarduy, A., Arrieta, N. y Doukkare, F. Z.

Universidad del País Vasco/ Euskal Herriko Unibertsitatea (UPV/EHU)

La gamificación se ha consolidado como una estrategia metodológica con potencial para favorecer la motivación del alumnado. En Educación Matemática, se ha señalado la necesidad de incorporar propuestas innovadoras para superar la desmotivación hacia las matemáticas (Delgado et al., 2023). Asimismo, se ha destacado el potencial educativo de los escape room para favorecer la implicación activa y el trabajo cooperativo (García-Tudela et al., 2020). En este contexto, el objetivo de este estudio fue analizar el impacto de un escape room educativo sobre la motivación, el rendimiento académico y la cooperación del alumnado de Educación Primaria en el aprendizaje de la probabilidad.

En este estudio participaron 23 estudiantes de 6.º de Educación Primaria de un centro educativo de Bizkaia, distribuidos en un grupo experimental y un grupo control. La propuesta consistió en un escape room ambientado en "Star Wars", diseñado a partir de contenidos curriculares relacionados con la probabilidad. Para la recogida de datos se emplearon el cuestionario GAMEX (Eppmann et al., 2018), pruebas pretest y postest y una rúbrica de observación centrada en la cooperación.

Los resultados evidenciaron mayores niveles de motivación en el grupo que participó en la experiencia gamificada respecto al grupo que siguió la metodología tradicional. Asimismo, el grupo experimental mostró una mejora más elevada en el rendimiento académico tras la intervención. Del mismo modo, se observaron niveles superiores de participación, comunicación y cooperación durante la resolución de los retos planteados. Además, cuando el grupo de control participó posteriormente en la experiencia gamificada, también se registró una mejora en las variables analizadas.

Estos hallazgos ponen de manifiesto el potencial de las metodologías gamificadas para favorecer experiencias matemáticas más motivadoras, activas y significativas en Educación Primaria, contribuyendo tanto al aprendizaje matemático como al desarrollo de competencias sociales.

Referencias

Delgado, J., Espinoza, M., Vivanco, C., Medina, N. y Ayala, M. (2023). La gamificación como eje motivador para el aprendizaje de la matemática. *LATAM Revista Latinoamericana de Ciencias Sociales y Humanidades, 4*(1), 3928–3949. https://doi.org/10.56712/latam.v4i1.538

Eppmann, R., Bekk, M. y Klein, K. (2018). Gameful Experience in Gamification: Construction and validation of a gameful experience scale (GAMEX). *Journal of Interactive Marketing, 43*, 98-115. https://doi.org/10.1016/j.intmar.2018.03.002

García-Tudela, P. A., Solano-Fernández, I. M. y Sánchez-Vera, M. D. M. (2020). Análisis de una Escape Room educativa en clase de matemáticas de educación primaria. *Journal of Research in Mathematics Education*, *9*(3), 273-297. https://doi.org/10.17583/redimat.2020.4437

Sagarduy Crespo, A., Arrieta Irazabal, N. y Doukkare Abousoliman, F. Z. (2026). Impacto de la gamificación en el aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria: un estudio mediante escape room. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 710). SEIEM.

REDISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UNA SITUACIÓN DE APRENDIZAJE CON BLUE-BOTS EN EDUCACIÓN INFANTIL

Redesign and implementation of a learning situation using Blue-Bots in ECE

Sala-Sebastià, G.[a], Breda, A.[a], Seckel, M. J.[a], Cortés, A.[a], Falcó-Solsona, P.[a], Vanegas, Y.[a] y Esteve, S.[b]

[a]Universitat de Barcelona, [b]Universitat de Vic

Con el objetivo general de desarrollar el Pensamiento Computacional (PC) con robots educativos (Bluebots) y el interés por la tecnología en el futuro profesorado de Educación Infantil (EI), se celebró una jornada para plantear a 6 estudiantes voluntarias del Grado de EI de una universidad catalana, en colaboración con dos maestras en activo, el rediseño de una situación de aprendizaje (SA) diseñada originalmente por las investigadoras (Sala-Sebastià et al., 2023). Su rediseño se implementó posteriormente en una de las escuelas participantes. El objetivo del estudio consiste en analizar la idoneidad didáctica del rediseño de la situación de aprendizaje y de su implementación por parte de las futuras maestras. La sesión fue grabada en vídeo y supervisada por las investigadoras. Se analizaron las grabaciones y las notas de campo, así como las producciones de los 50 alumnos de 5 años. Para ello, se utilizó la herramienta Criterios de Idoneidad Didáctica (Breda et al., 2017).

Los resultados indican que el rediseño incorpora una nueva tarea de activación de conocimientos previos basada en PC desenchufado que, al centrarse en el cumplimiento de órdenes con el propio cuerpo, resultó significativa para introducir la tarea posterior con robots. El rediseño introdujo un elemento que el diseño original evitó, ya que reduce y limita el espacio en el que los robots deben moverse: el uso de una alfombra como espacio de acción del robot, lo que permitió la inclusión de elementos contextualizadores cercanos al alumnado. El alumnado tuvo dificultades para introducir las tarjetas del itinerario en los bolsillos de la alfombra y, cuando el robot tenía que avanzar por su superficie, se encallaba. Las futuras maestras tomaron una decisión didáctica no idónea, al utilizar los símbolos de la secuencia de programación para señalar en la alfombra el recorrido que debía hacer el robot, ya que eso implicó errores como falta de órdenes en la programación y errores en el uso de los símbolos y, además, se perdió la oportunidad de enseñanza y aprendizaje de la noción de secuencia de programación como lenguaje lógico para comunicarse con el robot. Las futuras maestras gestionaron la participación del alumnado, incentivando a los más tímidos, pero no cuidaron el uso de vocabulario matemático. La puesta en común no facilitó la institucionalización del aprendizaje.

Se concluye que el rediseño aportó contexto y participación, pero evidenció carencias en la coherencia didáctica, como la falta de una lista de preguntas guía acorde con los objetivos de la SA implementada para evaluar los aprendizajes, y en el uso del lenguaje matemático.

Agradecimientos: Proyectos EDU145/23/000006 y 2024ARMIF00017, financiados por Departament d'Educació y AGAUR.

Referencias

Breda, A., Pino-Fan, L. R. y Font, V. (2017). Meta didactic-mathematical knowledge of teachers: criteria for the reflection and assessment on teaching practice. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 13*(6), 1893−1918. https://doi.org/10.12973/eurasia.2017.01207a

Sala-Sebastià, G., Breda, A., Seckel, M.J., Farsani, D. y Alsina, À. (2023) Didactic–Mathematical–Computational Knowledge of Future Teachers When Solving and Designing Robotics Problems. *Axioms, 12,* 119. https://doi.org/ 10.3390/axioms12020119

Sala-Sebastià, G., Breda, A., Seckel, M. J., Cortés, A., Falcó-Solsona, P., Vanegas, Y. y Esteve, S. (2026). Rediseño e implementación de una situación de aprendizaje con bluebots en educación infantil. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 711). SEIEM.

LESSON STUDY EN LA INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Lesson Study in mathematics education research

Saló, M.[a], Chico, J.[b], López-Serentill, P.[c] y Badillo, E.[a]

[a] Universitat Autònoma de Barcelona, [b] Universitat de les Illes Balears, [c] Universitat de Girona.

Lesson Study (LS) es un modelo de desarrollo profesional docente que consiste en estudiar, diseñar, implementar y revisar una única sesión de clase (p.e. Lewis, 2016). Acabadas las cuatro fases, se puede iniciar un nuevo ciclo dando lugar a un diseño mejorado de la sesión de clase inicial. En todo el proceso los docentes participantes de LS colaboran activamente en el desarrollo de la sesión, estos pueden ser guiados por un experto, que puede ser un docente con experiencia o un externo al grupo (p.e. Isoda et al., 2012). El uso frecuente de LS por parte de los docentes ayuda a su propia formación continua, y por tanto al desarrollo profesional docente.

El objetivo de esta investigación es analizar las publicaciones que emplean la metodología LS, con el fin de identificar y caracterizar sus distintos usos en contextos de formación docente y desarrollo profesional. Se distinguen los estudios que utilizan LS como marco metodológico para investigar aspectos educativos, no necesariamente vinculados al propio modelo, de aquellos centrados en analizar algunos de sus componentes específicos. El análisis se fundamenta en el protocolo PRISMA (Page et al., 2021) y toma como base de datos *Scopus* y *Web of Science* (WOS). De los de 461 registros identificados, se seleccionaron 246 artículos a partir de unos criterios de inclusión y exclusión definidos (artículos comprendidos entre el 2016 y 2026 publicados en inglés o español). El análisis se ha realizado diferenciando los diferentes niveles educativos (educación infantil, primaria y secundaria), para identificar tendencias o características en cada etapa educativa.

Los resultados muestran que el 39,2% de las publicaciones utilizan LS como metodología de investigación, mientras que el 60,8% la abordan como objeto de estudio. En cuanto a las etapas educativas, la producción se concentra principalmente en educación secundaria, que representa el 48,1% de los estudios, seguida de educación primaria con un 43,2%, mientras que educación infantil tiene una presencia claramente minoritaria, con solo un 1,8%. Estos datos sugieren un interés creciente por analizar LS tanto como enfoque metodológico como en sí misma, aunque con una distribución desigual según la etapa educativa.

Agradecimientos: Estudio financiado por PID2023-149580NB-I00 y PID2023-150962OB-I00 (MICIU-AEI) y realizado en el marco del Programa de Doctorado en Educación de la UAB.

Referencias

Isoda, M., Arcavi, A. y Lorca, A. M. (2007b). *El estudio de clases japonés en matemáticas: su importancia para el mejoramiento de los aprendizajes en el escenario global*. Ediciones Universitarias de Valparaíso de la Universidad Católica de Valparaíso.

Lewis, C. (2016). How does lesson study improve mathematics instruction? *ZDM*, *48*(4), 571–580. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0792-x

Page M. J., McKenzie J. E., Bossuyt P. M., Boutron I., Hoffmann T. C., Mulrow C. D., Shamseer L., Tetzlaff J. M., Akl E. A., Brennan S. E., Chou R., Glanville J., Grimshaw J. M., Hrobjartsson A., Lalu M. M., Li T., Loder E. W., Mayo-Wilson E., McDonald S., (…) Moher D. (2021). The PRISMA 2020 statement: An updated guideline for reporting systematic reviews. *BMJ*, *372*(71). https://doi.org/10.1136/bmj.n71

Saló, M., Chico, J., López-Serentill, P. y Badillo, E. (2026). Lesson Study en la investigación en Educación Matemática. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 712). SEIEM.

INTERACCIÓN Y METACOGNICIÓN EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS REALISTAS CON ALUMNADO DEL PROGRAMA DE DIVERSIDAD CURRICULAR

Interaction and metacognition in realistic problem solving with students from the curricular diversity program

Sánchez-Barbero, B.[a], Cáceres-García, M. J.[a] y Antequera-Barroso, J. A.[b]

[a]Universidad de Salamanca, [b]Universidad de Extremadura

Las oportunidades de aprendizaje de los alumnos dependen de las tareas matemáticas que se resuelven en las aulas y de la interacción que se genera en dicha resolución. Este trabajo se centra en la resolución conjunta de Problemas Verbales Realistas (PVR) que reproducen situaciones reales cuya resolución exige la comprensión matemática y la comprensión situacional. Se han identificado 5 razonamientos para la resolución de PVR (R1, R2, R3, R4 y R5 (Verschaffel et al., 1994). Estudios previos muestran que cuando la tarea son problemas realistas aumenta el razonamiento tanto en aulas Ordinarias (Ord; Sánchez-Barbero et al., 2020), como en aulas del Programa de Diversidad Curricular (PDC; Sánchez-Barbero et al., 2025), aunque en estas últimas poco se sabe de lo que ocurre con la metacognición. Se analizó la interacción en la resolución conjunta de PVR, según el razonamiento que exigen, con alumnos PDC de ESO. Para ello, se seleccionaron dos grupos de matemáticas (Ord y PDC) de 3º ESO con un mismo profesor, que aceptó ser grabado en audio mientras resolvían 10 PVR (Verschaffel et al., 1994), clasificados según los cinco tipos de razonamientos. Transcritas las interacciones, se organizaron en ciclos y se categorizaron atendiendo a los *Procesos Metacognitivos* (*Generalización* -aspectos más generales que los considerados en el problema- y *Regulación* -aspectos relacionados con la planificación, el seguimiento y la evaluación) promovidos en la interacción (Sánchez-Barbero et al., 2020). Los resultados mostraron que ambos grupos promovieron en mayor medida la *Regulación* (PDC: 69.50%; Ord: 81.33%). Según el tipo de razonamiento que exigía cada PVR, se observó cómo en ambos grupos se promovió más *Regulación* que *Generalización,* excepto en R3, donde en el grupo de alumnos PDC se promovió un 100% de *Generalización* frente a un 0% en el grupo de alumnos Ord. Estos resultados parecen indicar que, si se trabajase en las aulas de PDC con este tipo de problemas, la promoción de *Procesos Metacognitivos* podría ser similar a la de los alumnos de las aulas Ord y la adquisición de competencias matemáticas en la resolución de problemas sería parecida (Sánchez-Barbero et al., 2025) con *Procesos Cognitivos*, lo que anima a profundizar en el nivel de participación en la promoción de razonamiento.

Agradecimiento: Este trabajo se ha realizado en el marco del Proyecto PIC2-2023-12 financiado por la Universidad de Salamanca y respaldado por el GIRME (Grupo de Investigación Reconocido de Matemática Educativa, USAL)

Referencias

Sánchez-Barbero, B., Cáceres-García, M. J., Ramos, M. y Antequera-Barroso, J. A. (2025). Análisis de la interacción en la resolución de problemas realistas con alumnos del programa de diversidad curricular. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. 523). SEIEM.

Sánchez-Barbero, B., Chamoso, J.M., Vicente, S. y Rosales, J. (2020). Analysis of teacher-student interaction in the joint solving of non-routine problems in Primary Education Classrooms. *Sustainability*, *12*(24), 10428. https://doi.org/10.3390/su122410428

Verschaffel, L., De Corte, E. y Lassure, S. (1994). Realistic consideration in mathematical modelling of school word problems. *Learning and instruction, 4*(4), 273-294. https://doi.org/10.1016/0959-4752(94)90002-7

Sánchez-Barbero, B., Cáceres, M. J. y Antequera-Barroso, J. A. (2026). Interacción y metacognición en la resolución de problemas realistas con alumnado del programa de diversidad curricular. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 713). SEIEM.

VALIDACIÓN DEL TEST SAB-IA: MEDICIÓN DE LA COMPRENSIÓN DE LAS IDEAS FUNDAMENTALES DE LA IA EN EL CONTEXTO DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Validation of the SAB-IA test: measuring the understanding of fundamental AI ideas in the context of mathematics education

Seckel, M. J.[a], Chandía, E.[b], Breda, A.[a], Sala-Sebastià[a], G, Font, V.[a], Verón, A.[a] y De Abreu Silva, R.[c]

[a]Universitat de Barcelona, [b]Universidad Católica de la Santísima Concepción, [c]Instituto Federal do Rio Grande do Sul

El estudio se fundamenta en las cinco ideas clave para la alfabetización en inteligencia artificial (IA) propuesta por la iniciativa AI4K12: percepción, representación y razonamiento, aprendizaje, interacción natural e impacto social (Touretzky y Gardner-Mccune, 2022). Estas ideas orientaron el diseño del test SAB-IA, cuyo propósito es evaluar la comprensión que estudiantes entre 8 y 10 años desarrollan sobre la IA en el contexto de las clases de matemáticas. Asimismo, dado que la investigación se desarrolla en el contexto chileno, en el diseño del instrumento se consideró también el análisis curricular realizado por Seckel et al. (2025), en el cual se identificaron oportunidades diferenciadas de integración de las cinco ideas fundamentales en la asignatura de matemáticas. El objetivo principal del estudio consistió en diseñar y validar un instrumento que permitiera medir dicha comprensión conceptual. Para ello, se elaboraron 15 ítems dicotómicos, una estructura similar a la utilizada en otros instrumentos dirigidos a niños y niñas de edades comparables (Su, 2024). La validación psicométrica incluyó análisis de confiabilidad (KR-20 = .739; ω = .853), análisis factorial exploratorio y la estimación de un modelo confirmatorio unidimensional con excelente ajuste, lo que respalda la validez interna del instrumento. Los resultados muestran que el test SAB-IA constituye un instrumento pertinente para medir la comprensión de los conceptos fundamentales de IA en estudiantes de educación básica (entre 8 y 10 años). En términos de transferencia, se destaca que el test puede orientar el diseño de trayectorias de enseñanza y aprendizaje orientadas a la integración de la IA en el aula, así como servir de base para evaluar el impacto de futuras propuestas formativas.

Agradecimientos: Proyecto de investigación titulado Trayectoria de enseñanza y aprendizaje para la alfabetización digital en la asignatura de matemática de educación básica: un estudio longitudinal en las regiones del Maule, Biobío y La Araucanía (Fondecyt n.º 1251801).

Referencias

Touretzky, D. y Gardner-McCune, C. (2022). Artificial Intelligence Thinking in K-12. En S.-C. Kong y H. Abelson (Eds.), C*omputational thinking education in K-12: Artificial intelligence literacy and physical computing* (pp.153-180). The MIT Press. https://doi.org/10.7551/mitpress/13375.001.0001

Seckel, M.J., Vásquez, C., Salcedo, P., Chandía, E. y Badilla-Quintana, M.G. (2025). Oportunidades para integrar la comprensión de la inteligencia artificial en las clases de matemática de primaria: el caso de Chile. *Interciencia*, *50*(11), 588-593.

Su, J. (2024). Development and validation of an artificial intelligence literacy assessment for kindergarten children. *Education and Information Technologies*, *29*, 21811-21831. https://doi.org/10.1007/s10639-024-12611-4

Seckel, M. J., Chandía, E., Breda, A., Sala-Sebastià, G., Font, V., Verón, A. y De Abreu Silva, R. (2026). Validación del test SAB-IA: medición de la comprensión de las ideas fundamentales de la IA en el contexto de la educación matemática. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 714). SEIEM.

PENSAMIENTO COMPUTACIONAL EN PRIMARIA: DISEÑO DE UN ESTUDIO COMPARATIVO ENTRE ACTIVIDADES DESCONECTADAS Y ROBÓTICA

Computational thinking in primary education: design of a comparative study of unplugged activities and robotics

Solís-Ortega, R.[a] y Rotger-García, L.[b]

[a]Instituto Tecnológico de Costa Rica, [b]Universitat de les Illes Balears

El pensamiento computacional (PC) se ha incorporado a la educación matemática como una forma de abordar la resolución de problemas mediante procesos como la descomposición, el reconocimiento de patrones, la abstracción, la secuenciación, la depuración y la generalización (Wing, 2006). En primaria, estos procesos pueden trabajarse mediante actividades desconectadas, software y robótica. Las tareas desconectadas han mostrado potencial para desarrollar organización de datos, creación de algoritmos, testeo, depuración y generalización en primaria (Ayala-Altamirano et al., 2024). Sin embargo, todavía son necesarios estudios comparativos sobre el alcance de cada enfoque en contextos escolares reales. Esta investigación, situada en la educación primaria pública costarricense, pretende analizar los efectos de intervenciones basadas en actividades desconectadas y robótica en el desarrollo del pensamiento computacional. Su objetivo es comparar dicho desarrollo mediante materiales manipulativos no digitales y robótica educativa. La investigación se encuentra en fase de diseño metodológico y se plantea desde un enfoque mixto, mediante un diseño cuasiexperimental pretest-postest con grupos no equivalentes. Se prevé trabajar con tres condiciones: actividades desconectadas, robótica educativa y un grupo control que seguirá las clases ordinarias de tecnología conforme al currículo nacional vigente. La recogida de datos combinará un instrumento de evaluación del pensamiento computacional adaptado al contexto costarricense, observaciones de aula y entrevistas semiestructuradas. El diseño toma como referencia estudios previos sobre pensamiento computacional en primaria que han empleado medidas pretest-postest y grupo de comparación, especialmente en propuestas con robótica educativa (Caballero-González y García-Valcárcel, 2020). Como aportación de esta fase de diseño, se presenta una matriz de equivalencia didáctica que permite asegurar que las intervenciones basadas en actividades desconectadas y robótica educativa trabajen dimensiones comunes del PC, como la secuenciación, el reconocimiento de patrones, la descomposición, la depuración, la generalización y la representación de procedimientos. Se espera que este diseño facilite futuras comparaciones entre enfoques y contribuya a generar evidencias para la integración del pensamiento computacional en contextos escolares latinoamericanos.

Referencias

Ayala-Altamirano, C., Arjona-Aranda, G., Moral-Sánchez, S. N. y Sánchez-Cruzado, C. (2024). Iniciación al pensamiento computacional a través de tareas desconectadas sobre patrones. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 121–128). SEIEM.

Caballero-González, Y. A. y García-Valcárcel, A. (2020). ¿Aprender con robótica en Educación Primaria? Un medio de estimular el pensamiento computacional. *Education in the Knowledge Society, 21*, Artículo 15. https://doi.org/10.14201/eks.22957

Wing, J. M. (2006). Computational thinking. *Communications of the ACM, 49*(3), 33–35. https://doi.org/10.1145/1118178.1118215

Solís-Ortega, R. y Rotger-García, L. (2026). Pensamiento computacional en primaria: diseño de un estudio comparativo entre actividades desconectadas y robótica. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 715). SEIEM.

CARACTERÍSTICAS DE LA REFORMULACIÓN DE PROBLEMAS DE ÁREAS POR FUTUROS DOCENTES

Characteristics of area problem reformulation by prospective teachers

Sosa-Martín, D., Bruno, A. y García-Alonso, I.

Universidad de La Laguna

La formulación de problemas matemáticos consiste en crear o modificar un problema o tarea matemática (Cai y Hwang, 2020). Esta actividad consta de dos partes (Cai et al., 2022): la *situación*, o contexto inicial, y el *requerimiento*, o acción específica a desarrollar solicitada en la formulación. Además, la formulación de problemas se puede realizar previa, durante o después de la resolución de problemas (Baumanns, 2022). Este último caso se conoce como reformulación de problemas y Grunmeier (2015) caracteriza las estrategias más habituales para llevarla a cabo.

Se presenta un estudio con 73 estudiantes de tercer curso del Grado en Maestro en Educación Primaria de la Universidad de La Laguna (España) de carácter descriptivo. Se les propuso una tarea de reformulación cuya *situación* inicial consistía en un problema de cálculo y comparación del área de dos figuras compuestas. El *requerimiento* exigía resolverlo y, a partir de él, formular dos nuevos problemas (reformular). Se analiza la resolución del problema y se categoriza la reformulación de los problemas según la plausibilidad y las estrategias de reformulación utilizadas (Grundmeier, 2015). En total se obtuvieron 73 resoluciones y 145 reformulaciones del problema inicial.

Los resultados muestran que menos de la mitad de los estudiantes (41.1%) resolvieron correctamente el problema de áreas planteado. Los errores en la resolución se concentraron en no deducir correctamente las medidas (25.6%) o en confundir área-perímetro (21%), principalmente. En cuanto a la reformulación, fueron capaces de formular problemas plausibles (68.3%) y la estrategia más utilizada fue modificar lo solicitado (29.3%), modificar los datos (10.6%) o una combinación de las anteriores (17.8%). Otras estrategias se utilizaron con menor frecuencia.

En conclusión, los futuros docentes muestran habilidad para formular problemas plausibles de áreas aunque tienen dificultades para resolverlos. Será necesario fomentar la reformulación de problemas y la profundización en el concepto de áreas y su medida en la formación de los docentes.

Agradecimientos: Trabajo financiado por PID2022-139007NB-I00, MCIN/AEI.

Referencias

Baumanns, L. (2022). *Mathematical problem posing: Conceptual Considerations and empirical Investigations for understanding the process of problem posing*. Springer Spektrum.

Cai, J. y Hwang, S. (2020). Learning to teach mathematics through problem posing: Theoretical considerations, methodology, and directions for future research. *International Journal of Educational Research, 102*, 1-8. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2019.01.001

Cai, J., Koichu, B., Rott, B., Zazkis, R. y Jiang, C. (2022). Mathematical problem posing: Task variables, processes and products. En C. Fernández, S. Llinares, A. Gutiérrez y N. Planas (Eds.). *Proceedings of the 45th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 1, pp. 119-145. https://doi.org/10.1007/s10763-022-10334-x

Grundmeier, T. A. (2015). Developing the problem-posing abilities of prospective elementary and middle school teachers. En F. M. Singer, N. Ellerton y J. Cai (Eds.), *Mathematical problem posing. From research to effective practice* (pp. 411-431). Springer.

Sosa-Martín, D., Bruno, A. y García-Alonso, I. (2026). Características de la reformulación de problemas de áreas por futuros docentes. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 716). SEIEM.

EXPLORANDO LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA A TRAVÉS DE FUENTES HISTÓRICAS

Exploring the teaching of geometry through historical sources

Suárez-Ruiz, F., Martínez-Juste, S. y Oller-Marcén, A. M.

Universidad de Zaragoza

La historia de las matemáticas como recurso en la formación de profesorado permite que los futuros docentes aborden la enseñanza de la disciplina de un modo más consciente (Furinghetti, 2007). En este trabajo se explora la utilidad de la historia de la educación matemática en la formación de profesorado de primaria. Para ello se presenta el diseño y los primeros resultados del análisis de un taller realizado con estudiantes de 3º curso de Magisterio de Educación Primaria de la Universidad de Zaragoza en el contexto de la asignatura Didáctica de la Geometría. El objetivo del taller, basado en la lectura de fuentes originales, fue generar oportunidades para que los futuros maestros exploraran las metodologías usadas en el pasado, movilizaran elementos de su conocimiento especializado y reflexionaran acerca de la evolución histórica de estas metodologías. El taller se organizó en torno a la lectura crítica de ocho fragmentos sobre didáctica de la geometría tomados de tratados pedagógicos del siglo XIX, dirigidos tanto a maestros como a maestras. Los estudiantes trabajaron en grupos utilizando pizarras verticales según la metodología *Thinking Classroom* (Liljedahl, 2020), analizando el fragmento asignado a través de un esquema basado en el modelo MTSK (Carrillo-Yáñez et al., 2018). Finalmente, se llevó a cabo una puesta en común de los análisis realizados por cada grupo. Se recopilaron para su análisis posterior las producciones escritas de los grupos, fotografías de las pizarras, grabaciones de la puesta en común, observaciones del equipo investigador y las respuestas a una encuesta final. Entre los resultados cabe mencionar que los estudiantes participantes, a través de la realización de esquemas conceptuales, fueron capaces de interactuar de forma rica con los fragmentos, identificando los aspectos más relevantes del conocimiento especializado del profesor de matemáticas presentes en el texto. Por otro lado, el debate posterior permitió la discusión en torno a aspectos como las diferencias de género y la evolución histórica de la didáctica de la geometría. Además, el uso de la metodología *Thinking Classroom* potenció la participación y la colaboración entre los participantes, permitiendo mostrar diferentes interpretaciones de los fragmentos. En conclusión, la interacción entre aspectos históricos de la enseñanza de la geometría y un enfoque actual generó una reflexión sobre el significado de enseñar geometría hoy en día. La experiencia permitió comprobar el potencial formativo del uso de fuentes históricas de la educación matemática en la formación inicial del profesorado de primaria (Muñoz-Escolano y Oller-Marcén, 2023).

Referencias

Carrillo-Yáñez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D. y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, *20*(3), 236-253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Furinghetti, F. (2007). Teacher education through the history of mathematics. *Educational Studies in mathematics*, *66*(2), 131-143. https://doi.org/10.1007/s10649-006-9070-0

Liljedahl, P. (2020). *Building thinking classrooms in mathematics, grades K-12:14 teaching practices for enhancing learning*. Corwin Press.

Muñoz-Escolano, J. M. y Oller-Marcén, A. M. (2023). Researching the use of old professional journals as a tool for infant education prospective teachers training. En P. Drijvers, C. Csapodi, H. Palmér, K. Gosztonyi y E. Kónya, (Eds.). *Proceedings of the Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1945-1952). Alfréd Rényi Institute of Mathematics and ERME.

Suárez-Ruiz, F., Martínez-Juste, S. y Oller-Marcén, A. (2026). Explorando la enseñanza de la geometría a través de fuentes históricas. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 717). SEIEM.

PLANTEAMIENTO DE PROBLEMAS EN EDUCACIÓN PRIMARIA: DISEÑO DE UNA INVESTIGACIÓN DOCTORAL

Problem posing in primary education: design of a doctoral research project

Tévar-López, B., Ferrando, I. y Pla-Castells, M.

Universitat de València

El planteamiento de problemas matemáticos se relaciona estrechamente con la resolución de problemas, ya que ambas actividades implican interpretar una situación, organizar la información y dotarla de estructura matemática (Fernandes et al., 2025; Silver y Cai, 1996). El análisis de los problemas formulados por el alumnado permite examinar la selección y organización de la información, la coherencia del enunciado y la resolubilidad. La literatura reciente subraya la necesidad de desarrollar instrumentos para apoyar y medir esta actividad en Educación Primaria (Zhang et al., 2025).

En este póster se presentan avances en el diseño de una investigación doctoral centrada en el planteamiento de problemas por el alumnado de 5.º y 6.º de Primaria. El objetivo es identificar y caracterizar dificultades en sus producciones, analizar distintos aspectos de los problemas formulados y explorar su relación con el desempeño en tareas de resolución. A partir de este objetivo, se plantean tres preguntas de investigación: ¿qué dificultades aparecen cuando el alumnado inventa o reformula problemas?, ¿en qué aspectos de los problemas formulados se manifiestan? y ¿qué relación hay entre la capacidad para resolver y para plantear problemas?

El estudio se desarrollará con una muestra de 150 estudiantes. Se ha concretado la organización de la recogida de datos y un esquema inicial de codificación y análisis de las producciones. La fase de diseño metodológico ya ha permitido delimitar una batería inicial de tareas de resolución, invención y reformulación de problemas, así como los criterios para su selección y adaptación: tipo de actividad, contexto, contenido matemático e información disponible. Asimismo, se ha elaborado una primera propuesta de categorías de análisis para estudiar los problemas formulados por el alumnado, centrada en la claridad del enunciado, la coherencia matemática, la adecuación de los datos y la resolubilidad. La batería de tareas y las categorías de análisis constituyen los primeros resultados de la fase de diseño y permiten formular hipótesis de partida: se espera que las dificultades en resolución se reflejen en problemas con menor coherencia matemática o con condiciones insuficientes de resolubilidad, y que el tipo de tarea condicione la complejidad y estructura de los problemas propuestos. El análisis combinará procedimientos cualitativos, para identificar y caracterizar dificultades recurrentes en las producciones, y cuantitativos, para explorar relaciones entre el desempeño en tareas de resolución y de planteamiento, así como diferencias según el tipo de tarea y el contexto.

Referencias

Fernandes, H., Jacinto, H. y Oliveira, H. (2025). Conectando resolución y formulación de problemas: Estudiantes de tercer grado aprendiendo a plantear problemas en Geometría y Medición. AIEM - Avances de Investigación en Educación Matemática, 28, 31-53. https://doi.org/10.35763/aiem28.7553

Silver, E. A. y Cai, J. (1996). An Analysis of Arithmetic Problem Posing by Middle School Students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(5), 521-539. https://doi.org/10.2307/749846

Zhang, L., Stylianides, A. J. y Stylianides, G. J. (2025). Approaches to supporting and measuring mathematical problem posing: A systematic review of interventions in mathematics education. *International Journal of Science and Mathematics Education, 23*(7), 2225-2254. https://doi.org/10.1007/s10763-025-10542-1

Tévar-López, B., Ferrando, I. y Pla-Castells, M. (2026). Planteamiento de Problemas en Educación Primaria: Diseño de una Investigación Doctoral. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 718). SEIEM.

SENTIDO SOCIOAFECTIVO EN PRIMARIA: PERCEPCIONES DOCENTES ANTE LA AUSENCIA DE MARCOS PRESCRIPTIVOS

Socio-emotional sense in primary education: teachers' perceptions in the absence of normative guidelines

Toledo, N.[a], Pincheira, N.[b] y Alsina, Á.[b]

[a]Universidad Católica de Temuco, [b]Universidad de Girona

En las últimas décadas, la investigación en educación matemática ha evidenciado la necesidad de reconocer la relevancia del dominio afectivo, entendido como la integración de creencias, actitudes y emociones que influyen en el aprendizaje (McLeod, 1992). Diversos estudios han destacado la importancia de esta dimensión (Gómez-Chacón, 2000; Marbán et al., 2020), razón por la cual el sentido socioafectivo se ha integrado paulatinamente en el currículo de matemáticas de algunos países. En Chile, sin embargo, la presencia de este sentido es todavía muy incipiente (Toledo et al., en prensa), por lo que nuestro objetivo es analizar las percepciones del profesorado chileno en activo de educación primaria (6 a 12 años) acerca del papel del sentido socioafectivo en la educación matemática, considerando la ausencia de un marco prescriptivo claro. El estudio ha adoptado un enfoque metodológico mixto de carácter descriptivo, en el que han participado 28 docentes en activo de educación primaria de la región de La Araucanía (Chile). Para la recogida de datos, se ha aplicado un cuestionario previamente validado con 13 ítems, ocho de ellos con formato escala tipo Likert (1=nada; 2=poco; 3=algo; 4=bastante; y 5=mucho), tres preguntas dicotómicas y dos preguntas abiertas. El instrumento explora cinco dimensiones: a) importancia de lo socioafectivo en el aula; b) formación del profesorado sobre sentido socioafectivo; c) apoyo que suponen las orientaciones del currículo chileno de educación primaria; d) estrategias que se utilizan para fortalecer el sentido socioafectivo en el aula; e) sentido socioafectivo en la educación matemática. Los resultados evidencian que, si bien el profesorado valora la relevancia del sentido socioafectivo, reconoce carencias en su formación inicial y continua y un limitado respaldo curricular. No obstante, los docentes señalan que en sus prácticas promueven aspectos que favorecen el desarrollo del sentido socioafectivo en el aula, haciendo explícita la utilidad de las matemáticas en contextos reales. A partir de estos datos iniciales, se concluye que en Chile es necesario implementar programas de formación inicial y continua que contribuyan al fortalecimiento del sentido socioafectivo del profesorado de educación primaria, favoreciendo una educación matemática que integre el diálogo entre cognición y afecto en los procesos de aprendizaje, tal como plantea Gómez-Chacón (2009).

Referencias

Gómez-Chacón, I.M. (2000). *Matemática emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático*. Narcea.

Gómez-Chacón, I.M. (2009). Actitudes matemáticas: Propuestas para la transición del bachillerato a la universidad. *Educación matemática, 21*(3), 5-32.

Toledo, N., Pincheira, N. y Alsina, Á. (en prensa). La competencia socioafectiva en la educación matemática: contrastando los currículos de primaria de Chile y España. *Márgenes.*

Marbán, J.M., Palacios, A. y Maroto, A. (2020). Desarrollo del dominio afectivo matemático en la formación inicial de maestros de primaria. *AIEM - Avances de Investigación en Educación Matemática, 18*, 73-86. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i18.286

Mcleod, D. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. En Douglas A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on mathematics Teaching and Learning* (pp. 575-598). Macmillan.

Toledo, N., Pincheira, N. y Alsina, A. (2026). Sentido socioafectivo en primaria: percepciones docentes ante la ausencia de marcos prescriptivos. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 719). SEIEM.

HACIA UNA INVESTIGACIÓN BASADA EN EL DISEÑO PARA LA ENSEÑANZA DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES: EL PUNTO DE VISTA DEL PROFESORADO

Towards a design-based research for teaching linear equations systems: the teacher's point of view

Torrejón-Ramírez, K. y Montejo-Gámez, J.

Universidad de Granada

Este trabajo investiga el punto de vista del profesorado sobre el aprendizaje de los sistemas de ecuaciones lineales en la educación secundaria. El estudio se sitúa en el marco de una investigación más amplia que busca obtener conocimiento sobre el proceso de aprendizaje del alumnado en un contexto educativo singular. La Investigación Basada en Diseño es una aproximación metodológica útil para este fin, ya que combina la evidencia y el fundamento teórico con una visión constructivista del aprendizaje (Bakker, 2018). Su funcionamiento incluye un proceso iterativo de diseño, evaluación y rediseño que evoluciona a partir de la interrelación existente entre lo que sabe el profesor y las decisiones que toma. Esta dinámica es coherente con el funcionamiento del Ciclo de Enseñanza de las Matemáticas (Simon, 1995), que se articula a través de trayectorias hipotéticas de aprendizaje. Estas permiten al profesorado e investigadores predecir el camino que podría seguir el aprendizaje de los estudiantes a partir de tres elementos fundamentales: objetivos de aprendizaje, hipótesis sobre el aprendizaje y tareas. Por consiguiente, este trabajo tiene el objetivo de conocer la visión de tres profesores chilenos sobre cómo aprenden los sistemas de ecuaciones lineales sus estudiantes de 14-15 años. Esto permitirá iniciar una trayectoria hipotética de aprendizaje para futuros estudiantes a partir de la experiencia de enseñanza previa de este profesorado. El estudio desarrolla el análisis de contenido de una entrevista semiestructurada grupal realizada a tres docentes con más de diez años de experiencia en un centro de Educación Municipal en Chile. La unidad de análisis corresponde a segmentos del discurso relacionados con tres categorías a priori derivadas de las trayectorias hipotéticas de aprendizaje: (a) objetivos didácticos, (b) hipótesis sobre el aprendizaje y (c) tareas propuestas. Los resultados revelaron que, de acuerdo con la visión del profesorado, los objetivos didácticos y las tareas útiles para el aprendizaje involucran plantear un sistema de ecuaciones de un problema contextualizado, interpretar su solución y representarla gráficamente. Por otro lado, también manifestaron sus hipótesis sobre el aprendizaje y creencias sobre la enseñanza en el contexto educativo del estudio. Por ejemplo, expresaron que ellos trabajaban los problemas contextualizados al final del contenido para evitar la frustración y desmotivación de los estudiantes al enfrentarse a situaciones que no manejan. Estos resultados son consistentes con los de Martín et al. (2024), que observaron dificultades en la comprensión y tendencia a procedimientos mecánicos con los sistemas. Se reafirma así la importancia del punto de vista del profesorado en el diseño de una secuencia de tareas que inicie una trayectoria hipotética de aprendizaje en este contexto.

Referencias

Bakker, A. (2018). *Design Research in Education: A Practical Guide for Early Career Researchers*. Routledge

Martín, J. C., Maz-Machado, A., Madrid, M. J. y Rodríguez-Baiget, M. J. (2024). Comprehension of linear systems with two unknowns in secondary education. *International Journal of Evaluation and Research in Education (IJERE)*, *13*(6), 3914–3922. https://doi.org/10.11591/ijere.v13i6.28206

Simon, M. A. (1995). Reconstructing Mathematics Pedagogy from a Constructivist Perspective. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*(2), 114–145. https://doi.org/10.2307/749205

Torrejón-Ramírez, K. y Montejo-Gámez, J. (2026). Hacia una investigación basada en el diseño para la enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales: el punto de vista del profesorado. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 720). SEIEM.

ORIGAMI Y PENSAMIENTO COMPUTACIONAL EN LA FORMACIÓN INICIAL DOCENTE: ANÁLISIS MEDIANTE CRITERIOS DE IDONEIDAD DIDÁCTICA

Origami and computational thinking in initial teacher education: an analysis using didactical suitability criteria

Tramuns, E.[a] y Hummes, V.[b]

[a]Universitat de Barcelona, [b]Universidade Federal de Santa Catarina

La incorporación del Pensamiento Computacional (PC) en la formación inicial docente sigue siendo un desafío en educación matemática. Aunque diversas investigaciones destacan el potencial de actividades unplugged para promover habilidades de PC, aún se requieren herramientas que permitan analizar críticamente su calidad didáctica. Este estudio integra el modelo de PC de la International Society for Technology in Education (ISTE, 2018), centrado en el reconocimiento de patrones, la descomposición, la abstracción y el diseño de algoritmos, con la teoría de la Idoneidad Didáctica del Enfoque Ontosemiótico (Godino, 2024). En este contexto, los objetivos del estudio son diseñar e implementar una actividad de origami orientada a abordar las habilidades de PC en futuros maestros de Educación Primaria; evaluar la capacidad de identificar dichas habilidades en otros contextos (Bebras, s.f.); y analizar la propuesta didáctica mediante los Criterios de Idoneidad Didáctica (CID).

La experiencia se desarrolló con los 36 estudiantes de segundo curso del Grado de Maestro de Educación Primaria de una universidad pública española. La actividad consistía en dividir papeles cuadrados en 2, 4 y 8 partes de igual área mediante plegado; identificar patrones numéricos y geométricos; generalizar el procedimiento algorítmico para el caso 2^n, $n \geq 1$; e identificar las habilidades de PC usadas. La propuesta fue implementada y analizada a partir de registros audiovisuales, observaciones de aula y producciones escritas de los alumnos. Los resultados muestran que la actividad favoreció el reconocimiento de habilidades de PC en el problema planteado, y movilizó competencias matemáticas específicas. Las respuestas a las tareas tipo Bebras mostraron la capacidad de identificar habilidades de PC en otros contextos de resolución de problemas, siendo la abstracción la habilidad menos identificada. El análisis mediante los CID reveló una tensión entre competencia procedimental y comprensión conceptual. También se observaron limitaciones relacionadas con procesos metacognitivos, la desigualdad en la participación y el tiempo disponible. El estudio sugiere que los CID constituyen una herramienta válida para analizar y orientar la mejora de propuestas que integran el PC en la educación matemática. Los resultados evidencian la necesidad de articular práctica, reflexión conceptual y metacognición, así como de favorecer la identificación de procesos de abstracción.

Referencias

Bebras. (s.f.). *International challenge on informatics and computational thinking.* https://www.bebras.org/

ISTE. 2018. *ISTE standards for students: Computational thinking competencies*. ISTE. https://www.iste.org/standards/computational-thinking-competencies.

Godino, J. D. (2024). Teoría de la idoneidad didáctica basada en el EOS. En J. D. Godino (Ed.), *Enfoque ontosemiótico en educación matemática. Fundamentos, herramientas y aplicaciones* (Capítulo 5, pp. 269-326). McGraw-Hill - Aula Magna. https://hdl.handle.net/10481/93596

Tramuns, E. y Hummes, V. (2026). Origami y pensamiento computacional en la formación inicial docente: Análisis mediante criterios de idoneidad didáctica. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 721). SEIEM.

CÍRCULOS REFLEXIVOS DE MATEMÁTICAS EN LA FORMACIÓN DE FUTUROS PROFESORES

Reflective mathematics circles in the training of future teachers

Uicab-Campos, Y. y Díez-Palomar, J.

Universidad de Barcelona

Presentamos los Círculos Reflexivos de Matemáticas (CRM), una propuesta orientada al desarrollo de competencias en futuros profesores de matemáticas. Se basa en trabajos previos, que incluyen las tertulias dialógicas, los círculos literarios, los círculos de aprendizaje, las comunidades de práctica, las redes docentes y los círculos de profesores de matemáticas (Uicab-Campos y Díez-Palomar, 2025; Le Cornu, 2004; White et al., 2013).

Los CRM se centran en la lectura de un libro, artículo o contribución matemática ampliamente aceptado como obra de referencia y en la reflexión que surge en torno a ella. El profesor propone varias lecturas y los participantes eligen una; cada uno lee de manera autónoma las páginas que se haya decidido en el tiempo marcado y acuerdan un día para reunirse (puede ser una actividad para realizar en clase o fuera de ella). El día pactado, los participantes y el moderador se reúnen y se sientan en círculo. La persona que modera inicia el CRM preguntando quién quiere compartir un párrafo del texto leído. Apunta los nombres y comienza a dar turnos de palabra. Cada persona comparte su fragmento y explica el motivo de su selección (le ha llamado la atención, no lo ha entendido, le ha parecido relevante, lo conecta con una experiencia de vida, etc.). Entonces, se abre un turno de intervenciones en el que se prioriza a quien no ha hablado antes. Cuando el tema suscitado por el fragmento compartido se considera que ya no da más de sí, se pasa a la siguiente persona de la lista. El procedimiento se repite igual, hasta llegar al final del tiempo estipulado para la duración del CRM. El objetivo es que los futuros profesores argumenten, sean críticos y compartan una reflexión crítica en torno a aspectos de las matemáticas y de su enseñanza (didáctica), promoviendo el desarrollo de competencias profesionales docentes a través de estos diálogos compartidos. Se implementaron tres sesiones de CRM con 20 estudiantes del último año del grado de Educación de una universidad mexicana, algunos de los cuales ya tenían experiencia docente, otros se encontraban en ese momento en sus prácticas profesionales y otros no contaban con experiencia alguna en el aula. Se analizaron las interacciones de la primera sesión utilizando el modelo de Conocimiento y Competencias del profesor de Matemáticas (CCDM), a fin de visualizar las competencias en análisis e intervención didáctica que emergen al implementarlo. Mediante este estudio de caso se presentan los resultados de la primera sesión, en los que se observa principalmente la competencia de análisis de la actividad matemática y se identifican posibles mejoras para futuras implementaciones.

Referencias

Le Cornu, R. (2004). Learning circles: Providing spaces for renewal of both teachers and teacher educators. En S. McLeod (Ed.), *Making spaces: Regenerating the profession, Proceedings of the 2004 Australian Teacher Education National Conference* (pp. 141-150). ATEA.

White, D., Donaldson, B., Hodge, A. y Ruff, A. (2013). Impact of math teachers' circles on teachers' mathematical knowledge for teaching. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*.

Uicab-Campos, Y. y Díez-Palomar, J. (2025). Tertulias matemáticas dialógicas: Alcances y desafíos. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. 528). SEIEM.

Uicab-Campos, Y. y Díez-Palomar, J. (2026). Círculos reflexivos de matemáticas en la formación de futuros profesores. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 722). SEIEM.

BRECHAS DE GÉNERO EN EL DOMINIO AFECTIVO HACIA LAS MATEMÁTICAS EN LA FORMACIÓN DOCENTE INICIAL: UN ESTUDIO EXPLORATORIO

Gender gaps in the affective domain toward mathematics in initial teacher education: an exploratory study

Usó-Abella, N.[a], Santágueda-Villanueva, M.[a], Sanz, M.T.[b], López-Iñesta, E.[b] y Grimaldo, F.[b]

[a]Universitat Jaume I, Castellón, [b]Universitat de València

Las emociones forman parte del dominio afectivo (McLeod, 1989), que integra creencias, actitudes y emociones, y resulta clave en la configuración del perfil profesional docente y en la calidad de la enseñanza de las matemáticas (Marbán et al., 2020). Este marco permite comprender cómo los factores emocionales influyen en la futura práctica docente. En particular, la ansiedad matemática se ha identificado como un factor crítico en la formación del profesorado. El objetivo de este estudio es analizar las diferencias de género en el dominio afectivo hacia las matemáticas en futuros docentes de Educación Primaria.

Se llevó a cabo un estudio exploratorio durante el curso 2025-2026 con 133 estudiantes del Grado de Educación Primaria de la Universitat Jaume I (63,9 % mujeres), mediante un cuestionario ad hoc basado en Marbán et al. (2020). El instrumento evaluó dimensiones relacionadas con la ansiedad, autoconfianza, interés y percepción de utilidad de las matemáticas.

Los resultados evidencian un patrón diferenciado: las mujeres presentan niveles significativamente más altos de ansiedad matemática (miedo, nerviosismo, bloqueos e inseguridad), mientras que los hombres muestran mayor autoconfianza, interés y percepción de utilidad en la materia. Estos hallazgos coinciden con investigaciones previas y sugieren que la formación docente actual no reduce estas desigualdades afectivas, pudiendo incluso reforzarlas.

Como transferencia, se propone la incorporación de intervenciones específicas en la formación inicial del profesorado orientadas a reducir la ansiedad matemática y promover la competencia emocional y didáctica. Estas acciones contribuirán a mejorar la calidad educativa y a avanzar hacia una mayor equidad de género en la enseñanza de las matemáticas.

Agradecimientos: Investigación financiada bajo el proyecto CIAICO/2022/154, CIAICO/2026/153 y UJI-55076/25.

Referencias

Marbán, J. M., Palacios, A. y Maroto, A. (2020). Desarrollo del dominio afectivo matemático en la formación inicial de maestros de primaria. *Avances de Investigación en Educación Matemática, (18),* 73-86. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i18.286

McLeod, D. (1989). Beliefs, attitudes, and emotions: New view of affect in mathematics education. En D. McLeod y V. Adams (Eds.), *Affect and mathematical problem solving: A new perspective* (pp. 245-258). Springer-Verlag.

Santágueda-Villanueva, M., Lluch-Peris, A., Lorenzo-Valentín, G. y Roig-Albiol, A. (2023). Relación entre la ansiedad sobre la enseñanza de las matemáticas y la realización del prácticum en docentes de Educación Primaria en formación. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (p. 598). SEIEM.

Usó-Abella, N., Santágueda-Villanueva, M., Sanz, M. T., López-Iñesta, E. y Grimaldo, F. (2026). Brechas de género en el dominio afectivo hacia las matemáticas en la formación docente inicial: un estudio exploratorio. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 723). SEIEM.

DE “SE PARECEN” A “TIENEN TRES LADOS”: EVOLUCIÓN DEL LENGUAJE GEOMÉTRICO EN TAREAS DE CLASIFICACIÓN ENTRE LOS 5 Y 7 AÑOS

From “they look alike” to “they have three sides”: evolution of geometric language in classification tasks between ages 5 and 7

Velázquez-Ortigas, I.[a] y Ribera-Puchades, J. M.[b]

[a]Universidad de Zaragoza, [b]Universitat de les Illes Balears

La clasificación constituye una práctica lógico-matemática fundacional en las primeras edades y un antecedente del pensamiento algebraico temprano (Alsina, 2019). Desde una perspectiva que entiende el lenguaje como mediador entre conceptos cotidianos y conceptos matemáticos (Farrugia, 2021), este trabajo analiza cómo evoluciona el lenguaje geométrico del alumnado al resolver tareas *Which One Doesn't Belong* —WODB—, un tipo de tarea que favorece la comparación, la argumentación y la explicitación de criterios en Educación Infantil (Joglar-Prieto et al., 2024). Su originalidad radica en poner el foco no solo en qué criterio de clasificación se activa, sino en cómo dicho criterio se verbaliza, se justifica y se transforma progresivamente en lenguaje geométrico.

El objetivo es caracterizar los atributos y argumentos que emplea alumnado de 5 a 7 años en tareas WODB, describir la precisión de sus verbalizaciones geométricas y explorar, de forma descriptiva, posibles diferencias por etapa educativa y contexto escolar. Se presenta un subestudio exploratorio con diseño mixto realizado con 72 estudiantes de último curso de Educación Infantil y primer curso de Educación Primaria de España y Finlandia. Se diseñaron cuatro tareas WODB con objetos cotidianos y figuras geométricas. Los datos proceden de registros audiovisuales, anotaciones de aula y transcripciones, y se analizaron combinando un tratamiento descriptivo del desempeño con un análisis cualitativo de las verbalizaciones atendiendo a atributos mencionados —color, forma, tamaño, lados, puntas, esquinas, curvatura o cierre— y al tipo de justificación producida.

Los resultados preliminares muestran diferencias descriptivas entre niveles educativos. En Infantil predominan descripciones perceptivas y vocabulario general —“es más pequeño”—, mientras que en Primaria se observan justificaciones y comparaciones más precisas, con referencias geométricas —“esta figura no tiene lados”—. Por contexto, el grupo español de Infantil muestra algunas referencias geométricas iniciales —“tiene tres esquinas”—, mientras que en el grupo finlandés predominan formulaciones más generales. Estas diferencias se interpretan de forma exploratoria, atendiendo al carácter descriptivo del estudio. Como transferencia, permite diseñar secuencias WODB que favorezcan la explicitación de propiedades geométricas y la continuidad entre Infantil y Primaria.

Referencias

Alsina, A. (2019). Del razonamiento lógico-matemático al álgebra temprana en Educación Infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 8*(1), 1-19. https://doi.org/10.24197/edmain.1.2019.1-19

Farrugia, M. T. (2021). De los conceptos cotidianos a los científicos (matemáticos): Una interpretación vygotskiana del habla de un niño. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 19*, 86-99. https://aiem.es/article/view/3899

Joglar-Prieto, N., Domínguez, E., Murcia, J. A., Méndez, M., Ramírez-García, M. y Cid, A. I. (2024). *Which one doesn't belong?*: desarrollando competencias profesionales del futuro profesorado de infantil. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 595). SEIEM.

Velázquez-Ortigas, I. y Ribera-Puchades, J. M. (2026). De “se parecen” a “tienen tres lados”: evolución del lenguaje geométrico en tareas de clasificación entre los 5 y 7 años. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 724). SEIEM.

REPRESENTACIONES DE PROBLEMAS ARITMÉTICOS VERBALES EN 6º DE PRIMARIA

Representations of arithmetic word problems in year 6

Zayas-De la Fuente, G. y Conejo, L.

Universidad de Valladolid

La resolución de problemas aritméticos verbales (PAV) constituye uno de los focos fundamentales de la enseñanza de las matemáticas en Educación Primaria. Sin embargo, con frecuencia se observan dificultades en el alumnado al acometer esta tarea, incluso cuando estos son competentes realizando los cálculos matemáticos que se requieren en la resolución (Boonen et al., 2014). Esto mismo hemos observado en estudiantes de 6º de Primaria al enfrentarse a PAV de varias etapas, sobre todo cuando involucran fracciones, números decimales, porcentajes y/o relaciones de proporcionalidad. Este póster se enmarca en un estudio que busca mejorar la capacidad de este alumnado de resolver este tipo de problemas mediante la instrucción en el uso de representaciones visuales y, en concreto, el modelo de barras (Ng y Lee, 2009). Nuestra hipótesis es que el dotar al alumnado de herramientas de representación de PAV, como el modelo de barras, les facilitará la resolución de dichos PAV a partir de dichas representaciones.

En este póster se describen los resultados de la valoración inicial sobre el uso y comprensión de representaciones de PAV de 44 estudiantes de 6º de Primaria que se realizó antes de acometer la instrucción sobre el modelo de barras. Para el análisis, se utilizó como marco analítico la clasificación utilizada por Boonen et al. (2014), que distingue entre imágenes pictóricas, representaciones visuales-esquemáticas (RVE) precisas, y RVE imprecisas. Para ello, se aplicó un cuestionario de dos fases. En la primera, el alumnado debía vincular PAV de una etapa con modelos de barras ya elaborados; los resultados revelaron que el 45% de la muestra relacionaron correctamente los problemas aditivos, el 18% identificó los multiplicativos, y ninguno de ellos relacionó correctamente todos los enunciados con su representación. En la segunda, se plantearon tres PAV de varias etapas, solicitando su resolución y una representación visual de los mismos. En el primer problema, el más sencillo (31 respuestas correctas y 18 representaciones), predominaron las representaciones pictóricas, aún en estudiantes que resolvieron correctamente el problema, lo que sugiere que, en contextos de baja carga cognitiva, la representación suele usarse de forma decorativa y no como soporte real del razonamiento. En el segundo problema (27 respuestas correctas y 10 representaciones), los estudiantes que realizaron RVE precisas o imprecisas tuvieron un mayor éxito en la resolución que los que las hicieron pictóricas. En el tercer problema, de estructura inversa con reducciones porcentuales y fracciones (2 respuestas correctas y 5 representaciones), muchos de los estudiantes ni siquiera intentaron el problema (25 respuestas en blanco), y de los que lo intentaron, solo plantean el problema correctamente 7 estudiantes, de los cuales, 3 habían planteado RVE. Esto refuerza nuestra idea sobre la necesidad de proveer a los estudiantes con herramientas de representación, como el modelo de barras, que les ayuden a mejorar su capacidad de resolución de problemas.

Referencias

Boonen, A. J. H., van Wesel, F., Jolles, J. y van der Schoot, M. (2014). The role of visual representation type, spatial ability, and reading comprehension in word problem solving: An item-level analysis in elementary school children. *International Journal of Educational Research*, 68, 15–26. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2014.08.001

Ng, S. F. y Lee, K. (2009). The model method: Singapore children's tool for representing and solving algebraic word problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, 40(3), 282–313.

Zayas-De la Fuente, G. y Conejo, L. (2026). Representaciones de problemas aritméticos verbales en 6º de Primaria. En B. Barquero, C. de Castro, A. Gómezescobar, A. M. Oller-Marcén y M. D. Torres (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIX* (p. 725). SEIEM.