

CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DE FUTURAS MAESTRAS AL ANALIZAR LA DEFINICIÓN DE PROPORCIONALIDAD DIRECTA

Specialised knowledge of prospective teachers in analysing the definition of direct proportionality

Flores-Medrano, E., Martín-Portugués, S. G., Duro-Caballero, I. y Escudero-Ávila, D.

Universidad Complutense de Madrid

Resumen

En esta investigación analizamos el impacto de una tarea formativa sobre proporcionalidad directa, en el conocimiento especializado de un grupo de 42 futuras maestras de educación primaria. Los datos obtenidos durante la implementación de la tarea fueron analizados mediante el marco MTSK. Los principales resultados indican que el trabajo sobre una comprensión profunda de la definición de proporcionalidad directa, junto con la necesidad de adaptar este contenido a las aulas de primaria, favorece el desarrollo de conocimientos matemáticos y didáctico-matemáticos. Estos conocimientos permiten una comprensión fenomenológica del contenido y lo alejan de un tratamiento meramente procedimental.

Palabras clave: *proporcionalidad directa, MTSK, profesorado en formación, tarea formativa*

Abstract

In this study, we analyse the impact of a teacher education task designed around the mathematical and didactical unpacking of the notion of proportionality on a group of prospective primary teachers' specialised knowledge. The main findings suggest that engaging prospective teachers in developing a deep understanding of the definition of direct proportionality, together with the need to adapt this content to primary classrooms, fosters the development of mathematical and didactical-mathematical knowledge. This knowledge supports a phenomenological understanding of the content and moves it away from a merely procedural approach.

Keywords: *direct proportionality, MTSK, prospective teachers, teacher education task*

INTRODUCCIÓN Y ANTECEDENTES

Revisiones sistemáticas recientes, como la de Elias et al. (2025), muestran un claro interés por estudiar la proporcionalidad como un contenido de la matemática escolar que es importante comprender de manera significativa, las características que tiene su enseñanza, el papel de los artefactos y el análisis del propio contenido; no obstante, se observa un mayor énfasis en la relación entre el estudiantado y los contenidos de proporcionalidad. Pese al volumen de investigaciones y propuestas, continúa reportándose una persistente sensación de dificultad en la enseñanza y el aprendizaje de estos contenidos (Obando et al., 2014).

En este trabajo nos centramos en el análisis del conocimiento del profesorado en formación inicial sobre la proporcionalidad directa, en un entorno formativo orientado tanto al desarrollo de conocimientos matemáticos y didácticos del contenido como a competencias vinculadas al diseño de problemas. En particular, caracterizamos la proporcionalidad directa a partir de la covariación de magnitudes y la invariancia de la razón entre cantidades, de modo que el razonamiento proporcional implica establecer relaciones multiplicativas (razones) y utilizarlas para producir o justificar relaciones equivalentes (Valverde y Castro, 2009).

La literatura muestra que el profesorado en formación suele manifestar un conocimiento sobre razón, proporción y proporcionalidad predominantemente procedimental y débilmente conectado con sus significados (Bufo et al., 2018). Esta limitación se expresa, con frecuencia, en la identificación de la proporcionalidad directa con algoritmos de resolución mecánica, como la regla de tres (Burgos y Godino, 2021), y en errores asociados al uso de estrategias aditivas en situaciones que requieren comparaciones multiplicativas (Bufo, 2017). Asimismo, estas dificultades inciden en aspectos didácticos, como la interpretación y justificación de las respuestas del estudiantado bajo criterios principalmente operacionales y procedimentales (Burgos y Chaverri, 2023).

En respuesta a este problema, se han desarrollado tareas formativas en los Grados de Educación Primaria orientadas a comprender y promover el conocimiento del futuro profesorado sobre proporcionalidad. Por ejemplo, Castillo y Burgos (2023) emplearon el análisis de lecciones de libros de texto para potenciar la competencia reflexiva, mostrando que los participantes reconocen indicadores generales, pero presentan limitaciones al examinar aspectos matemáticos específicos, como la priorización de la regla de tres. En una línea complementaria, Burgos y Chaverri (2023) evidencian que, aunque los estudiantes de magisterio pueden proponer variaciones de problemas existentes, encuentran dificultades para diseñar tareas que distingan adecuadamente entre situaciones proporcionales y aditivas.

Estas investigaciones confirman el predominio de enfoques procedimentales. Sin embargo, son escasos los estudios que sitúan la construcción y explicitación de la propia definición de proporcionalidad directa como eje del proceso formativo, pues el problema también puede interpretarse como una brecha entre la imagen conceptual y la definición formal (Vinner, 2002) del constructo central. En esta línea, esta investigación se propone analizar el conocimiento especializado que moviliza un grupo de futuras maestras al enfrentarse a una tarea formativa con énfasis en la construcción de una definición operativa de la proporcionalidad directa, sustentada en un tratamiento fenomenológico del concepto.

MARCO TEÓRICO

Para describir y analizar el conocimiento matemático y didáctico matemático específico que ponen en juego las futuras maestras al abordar una tarea formativa, hemos utilizado el modelo *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* (MTSK), diferenciándolo tanto del conocimiento matemático disciplinar general como del conocimiento pedagógico general (Carrillo-Yañez et al., 2018). El MTSK organiza dicho conocimiento en dos grandes dominios: el conocimiento matemático y el conocimiento didáctico del contenido, divididos, con fines analíticos, en tres subdominios cada uno (Carrillo et al., 2022).

Dentro del conocimiento matemático se considera el Conocimiento de los Temas (KoT, de aquí adelante, las siglas se corresponden con la traducción del subdominio al inglés), que se refiere al conocimiento profundo del contenido matemático específico que se enseña, incluyendo significados, definiciones, propiedades, condiciones de aplicación y variedad de representaciones asociadas al tema (Carrillo-Yañez et al., 2018). El Conocimiento de la Estructura de las Matemáticas (KSM) se vincula con conexiones y articulaciones interconceptuales y temporales (Carrillo et al., 2022). Por su parte, el Conocimiento de la Práctica Matemática (KPM) alude al conocimiento sobre las formas de proceder y producir en matemáticas y considera prácticas tales como definir, demostrar, usar heurísticos (Carrillo et al., 2022).

En el dominio del Conocimiento Didáctico del Contenido, el MTSK contempla los subdominios: Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT), relativo al conocimiento sobre estrategias, recursos, tareas y formas de gestión didáctica vinculadas a un contenido; Conocimiento de las Características de Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM), asociado a expectativas, dificultades, errores y formas de pensamiento del estudiantado al aprender un tópico; y el Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (KMLS), referido a expectativas curriculares,

progresiones y referencias normativas sobre qué se espera que el alumnado aprenda en un nivel escolar dado (Carrillo-Yañez et al., 2018).

En este estudio los subdominios y categorías del MTSK nos han servido para analizar el conocimiento que las futuras maestras van movilizando a lo largo de la tarea formativa, sobre todo por el potencial que tiene para establecer relaciones entre los conocimientos y las prácticas matemáticas, destacando en esta tarea, el papel matemático y didáctico de la definición de proporcionalidad directa como eje articulador de la tarea. Cabe señalar que de acuerdo con Carrillo-Yañez et al. (2018), el modelo MTSK no es constituye una herramienta con carácter evaluativo, sino descriptivo, por lo que a lo largo del análisis pueden aparecer evidencias de conocimientos que pueden considerarse erróneos, pero que, a través de la tarea formativa, buscamos analizar cómo se reconfiguran para hacerlos asimilables a la definición del concepto.

METODOLOGÍA

Esta es una investigación cualitativa e interpretativa, en tanto que busca comprender los significados que emergen de las producciones de las participantes y analizar los conocimientos que se ponen en juego en una situación formativa específica (Willis, 2007). El análisis se desarrolla mediante un estudio de caso instrumental: el conocimiento especializado que ponen de manifiesto futuras maestras de educación primaria al abordar una tarea formativa sobre proporcionalidad directa (Stake, 1995).

En el estudio participó un grupo de 42 futuras maestras de educación primaria que, al momento de la recogida de datos, cursaban el tercer año de la titulación. A partir de la implementación de una secuencia de actividades, se exploró cómo las participantes movilizaban diversos conocimientos matemáticos y didáctico-matemáticos vinculados con la proporcionalidad directa en una situación de aula no asociada a evaluación, con el fin de favorecer respuestas centradas en la comprensión del contenido y no en su rendimiento académico.

Las participantes fueron informadas del propósito de la investigación, del uso académico de los datos y del carácter no punitivo de sus respuestas. Asimismo, se garantizó la confidencialidad de la información recogida y el análisis se realizó sobre sus producciones escritas generadas durante el desarrollo de la secuencia.

El análisis se realizó a partir del modelo MTSK, que permitió identificar y organizar los conocimientos evidenciados tanto en sus producciones escritas, como, sobre todo, en las participaciones y discusiones grupales (Carrillo-Yañez et al., 2018). Las unidades de análisis fueron fragmentos de producciones e intervenciones, codificadas según las categorías de cada subdominio. Dicha codificación fue revisada y discutida entre los autores.

Diseño y gestión de la tarea formativa

La tarea formativa se organizó en seis actividades, implementadas a lo largo de cuatro sesiones de dos horas. Su diseño pretendía que las participantes transitaran desde una definición inicial, frecuentemente apoyada en rasgos de monotonía, hacia una caracterización más robusta de la proporcionalidad directa, sustentada en invariantes (razón constante) y en el análisis de casos límite (incluida la constante negativa) y contraejemplos, así como en la construcción de una definición operativa para el trabajo en la educación básica. A continuación, se describen las actividades y la intención formativa asociada a cada una.

Primera actividad: Exploración y consenso de una definición inicial. Se solicitó a las participantes que explicitaran qué entendían por proporcionalidad directa. La dinámica se realizó mediante Wooclap, con respuestas individuales que posteriormente se discutieron de forma colectiva. La puesta en común permitió identificar regularidades en las definiciones aportadas y acordar una formulación de referencia para el trabajo posterior, atendiendo a criterios básicos de explicitación de condiciones definitorias (Escudero et al., 2014).

Segunda actividad: Contraste de fenómenos lineales con y sin término independiente. Con el fin de problematizar definiciones apoyadas únicamente en argumentos del tipo “si una magnitud aumenta, la otra también”, se propusieron situaciones contextualizadas cuya relación entre variables se modeliza mediante funciones de la forma $f(x)=mx$ y $f(x)=mx+b$. Las participantes resolvieron los problemas en parejas y, a continuación, contrastaron los procedimientos empleados y la validez de las respuestas con la definición adoptada en la primera actividad. La intención fue generar la necesidad de refinar la definición inicial a partir del análisis de casos que comparten monotonía, pero no cumplen proporcionalidad directa.

Tercera actividad: Búsqueda en fuentes formales y revisión de la definición a partir de invariantes. Se propuso revisar definiciones de proporcionalidad directa en textos de referencia y contrastarlas con los fenómenos trabajados en la actividad anterior. La discusión se orientó a identificar condiciones necesarias y suficientes, especialmente la invariancia de la razón. El objetivo fue reconstruir colectivamente una definición que permitiera discriminar de manera explícita entre los modelos $f(x)=mx$ y $f(x)=mx+b$.

Cuarta actividad: Puesta a prueba de la nueva definición mediante contraejemplos. Una vez incorporada la condición de correspondencia del cero como posible condición definitoria, se presentaron nuevas situaciones en las que los datos cumplen dicha correspondencia, pero la relación no es proporcional directa (p. ej. relaciones no lineales). La intención fue evidenciar que pasar por el origen aunado a la monotonía sigue sin ser suficiente y reforzar el papel de la razón constante como invariante definitoria.

Quinta actividad: Inclusión de la constante de proporcionalidad negativa. Se trabajaron problemas en los que la constante de proporcionalidad es negativa, de modo que la covariación entre magnitudes no responde al patrón aumenta-aumenta. Esta parte se diseñó para ampliar el repertorio fenomenológico asociado a la proporcionalidad directa y para discutir la diferencia entre el signo de la constante y el tipo de proporcionalidad, evitando interpretaciones que desplazan estos casos hacia la proporcionalidad inversa.

Sexta actividad: Exploración de regularidades en tablas y articulación con propiedades multiplicativas. Las participantes construyeron tablas de valores para distintos tipos de constantes de proporcionalidad (enteras positivas, fraccionarias positivas y enteras negativas) y analizaron regularidades numéricas asociadas a partir de cuestionamientos guiados. La discusión se orientó a explicitar propiedades multiplicativas y relaciones invariantes, retomando los productos internos y externos descritos por Block et al. (2010). El propósito fue construir una definición basada en una generalidad y vincularla con criterios operativos de identificación y validación en representaciones tabulares o fenomenológicas.

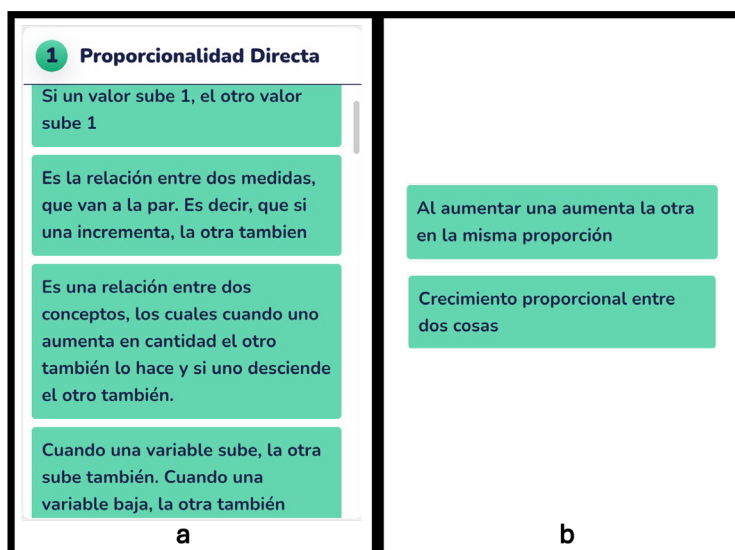
RESULTADOS

En este apartado se presentan los principales conocimientos movilizados durante el trabajo con la tarea formativa. Dado que se trata de un grupo, no se pretende afirmar que estos conocimientos sean representativos de todas las participantes ni diferenciarlos por estudiante.

En la primera actividad, las participantes pusieron de manifiesto lo que sabían sobre la definición de proporcionalidad directa (KoT). Aunque algunas de ellas dijeron no saber definirla o emplearon ambigüedades (p. ej. “Relación entre dos magnitudes”), la definición que identificaban estaba mayoritariamente sustentada de manera específica en la monotonía (creciente o decreciente) de la relación entre magnitudes (Figura 1a), y se generó también un debate sobre la característica de no recursividad en la definición (KPM) (Figura 1b).

Figura 2

Ejemplos de definiciones de proporcionalidad directa de futuras maestras



Con una definición provisional basada en la monotonía, por haber aparecido en la mayoría de las propuestas, en la segunda actividad se movilizaron conocimientos procedimentales (KoT), sustentados en el uso frecuente de la regla de tres para resolver problemas que se modelizan con $f(x)=mx$, en consonancia con lo reportado por Burgos y Godino (2021). En los problemas modelizados con $f(x)=mx+b$ las resoluciones solían ser correctas, pero, al cuestionar si se trataba de proporcionalidad directa, una futura maestra comentó que “los niños pueden usar la regla de tres y estarían sumando de más”, aludiendo a la multiplicación indebida del término b . Este comentario evidencia el conocimiento sobre efectos del trabajo exclusivamente procedimental en la relación del estudiantado con el contenido (KFLM), al anticipar errores derivados de la aplicación mecánica de un mismo algoritmo.

En la tercera actividad se exploró la movilización de conocimientos a partir del contraste entre la imagen conceptual grupal compuesta parcialmente por su definición y los problemas anteriores y una definición basada en la razón constante entre valores correspondientes de dos magnitudes. En este tramo se evidenciaron formas de concebir la relación entre imagen y definición del concepto, ya sea como equivalentes o jerárquicas (KPM), como sugiere el siguiente diálogo entre una futura maestra (M1) y el formador (F):

- M1: Como se están dividiendo, si tú cambias el valor de este [numerador] y quieres que [el cociente] siga siendo el mismo número, debes cambiar también el valor de este [denominador]... si este es más grande, este también
- F: ¿Entonces ambas definiciones son equivalentes?
- M1: Yo diría que sí, pero me lía pensarlo al revés.
- F: Que yo sé que cuando una [magnitud] crece la otra [magnitud] crece, pero no sé cómo llegar a que se forman fracciones equivalentes y si eso es así o no siempre se forman.

Aunque la maestra no nombra explícitamente las nociones de equivalencia o jerarquía, sus intentos de transformación entre ambas proposiciones se corresponden con rasgos descritos por Escudero et al. (2014). Además, en su explicación se establece una conexión entre proporcionalidad directa y fracciones equivalentes (KSM), empleada como vía para dotar de sentido al proceso de verificación.

Al verificar el cumplimiento de la definición reconstruida en la tercera actividad en los problemas trabajados en la segunda, una parte del grupo asumió inicialmente que se cumplía, al centrar el análisis

en los datos previos al valor inicial. Cuando algunas participantes propusieron considerar el fenómeno completo, el grupo acordó que, para tratarse de proporcionalidad directa, los problemas no debían incluir un valor inicial distinto de cero. En este punto se movilizó conocimiento relativo a la degeneración de la definición (Escudero et al., 2014) (KPM) y se adoptó una formulación breve del tipo “cuando ambas crecen o decrecen y pasan por el cero”.

En la cuarta actividad las futuras maestras resolvieron problemas que se modelizan con funciones que pasan por el origen y son monótonas crecientes, pero no lineales, como calcular el cambio en el área de un rectángulo en función del cambio en la medida de sus lados manteniendo las proporciones. Esto las llevó a movilizar conocimientos vinculados con los contenidos de los problemas, en ocasiones con errores en el proceso de resolución (KoT). A partir de esas dificultades, se discutió la pertinencia de este tipo de tareas en relación con el currículo vigente (KMLS). Asimismo, se movilizó conocimiento sobre el papel de la necesidad y la suficiencia en las definiciones (KPM), al concluir que el paso por el origen y la monotonía no garantizaban la proporcionalidad directa y que era necesario explicitar la forma en que ambas magnitudes covarían.

La quinta actividad desplazó el debate hacia la exploración de un fenómeno lineal de crecimiento-decrecimiento. En esta actividad las futuras maestras confrontaron el fenómeno (balance en tarjeta de crédito en función de una cantidad de gastos idénticos) con su imagen conceptual de proporcionalidad inversa (KoT), y el foco del análisis pasó de la insuficiencia de la condición de monotonía a su posible no necesidad. Algunas participantes propusieron modificar el enunciado del problema para hablar de deuda en lugar de balance, con el fin de mantener el patrón aumenta-aumenta, y argumentaron que los números negativos no son un contenido de primaria (KMLS) y que su inclusión llevaría a errores en el estudiantado. Ante ello se produjo el siguiente diálogo entre el formador y una futura maestra (M2), que respondió en lugar de quien había planteado inicialmente el razonamiento:

- F: Ahora mismo no estamos pensando en los estudiantes, sino en la definición, pero si quisiéramos evitar errores, ¿qué tal nos está yendo con la definición actual?
- M2: Yo creo que el problema no es si metemos negativos o no en primaria, sino que todo lo hacemos mecánico y que vemos que ambas [magnitudes] crecen y lo llevamos a [resolverlo con] regla de 3 y hasta nosotros nos equivocamos.
- F: Vale, la mecanización al resolver problemas nos hace equivocarnos, pero ¿qué dirías sobre la mecanización que ahora mismo tenemos con la definición?
- M2: Pues lo mismo. Tú ahora nos dices que está mal que digamos “cuando una crece la otra crece”, o bueno, el problema es lo que nos dice, pero yo lo que veo es que quizá debamos fijarnos en otra cosa y no es si ambas crecen o una sí y la otra no.

En este intercambio, además del reconocimiento de la mecanización como fuente de errores (KFLM), la futura maestra moviliza conocimiento sobre alternativas para definir, al desplazar el foco desde la covariación cualitativa hacia otros elementos a caracterizar (KPM).

En la sexta actividad, al solicitarse que se expresara la proporcionalidad directa en formato tabular, las futuras maestras movilizaron conocimiento sobre este registro de representación (KoT). También reforzaron el significado de fracción como cociente para construir tablas asociadas a constantes de proporcionalidad fraccionarias utilizando únicamente datos enteros, ya que el interés de la actividad era explorar regularidades de modo que la construcción de las tablas se restringió a procedimientos coherentes con la condición de razón constante. En este tramo se movilizó conocimiento relativo a la invariancia de la definición ante cambios de registro (KPM).

Los cuestionamientos para el análisis de regularidades incluyeron procesos aditivos y multiplicativos, y en este registro no aparecieron estrategias aditivas erróneas como las reportadas por Buform (2017). Las futuras maestras dedujeron que, al sumar o restar dos parejas de datos de una tabla, los resultados

también quedaban emparejados (cuando los nuevos pares no estaban en la tabla, verificaban si el cociente se mantenía constante para incorporarlos). Asimismo, dedujeron que esta forma de proceder para la multiplicación y división no era válida en general, salvo cuando la constante era 1 (KPM). También identificaron que, para constantes distintas de 1, sumar o restar el mismo valor a datos emparejados no preservaba el emparejamiento, mientras que multiplicar o dividir por el mismo factor sí lo preservaba (KoT).

En todos los casos se solicitó una justificación fenomenológica de las deducciones, siendo el contexto de compraventa el más empleado. Tras ello, las futuras maestras exploraron las ideas centrales de Block et al. (2010) y, mediante una revisión retrospectiva apoyada en las tablas y en los problemas previos, verificaron el cumplimiento de la definición “al doble le toca el doble”. Finalmente, vincularon dicha definición con las propiedades exploradas y la conectaron con la discusión final: cuando se multiplica o divide por un valor a una magnitud, la otra magnitud se multiplica o divide por el mismo valor.

Como cierre, las futuras maestras analizaron si la nueva definición era completa o si requería incorporar explícitamente el paso por el origen de ambas magnitudes (KPM). Concluyeron que, siempre que la definición se cumple, obliga al paso por el origen y que, si dos magnitudes no pasan por el origen, la definición no se cumple.

CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos permiten matizar el diagnóstico recurrente en la literatura sobre el predominio de aproximaciones procedimentales en el futuro profesorado al abordar la proporcionalidad directa (e. g. Buform et al., 2018). Al inicio de la experiencia formativa reaparecen rasgos bien documentados: una definición sustentada en monotonía, la identificación de la proporcionalidad con la regla de tres y una tendencia a justificar la validez en términos operacionales. Cuando la tarea desplaza el foco hacia el contraste de la relación entre imagen conceptual y definición, emerge un espacio de trabajo en el que las participantes deben decidir, con criterios explícitos, qué condiciones son necesarias suficientes para identificar la proporcionalidad directa.

En ese sentido, el estudio aporta evidencia de que una tarea centrada en definición puede activar de manera particularmente nítida componentes del conocimiento especializado que suelen quedar ocultos cuando la actividad formativa se organiza alrededor de la resolución rutinaria. La discusión sobre el alcance de formulaciones no recursivas, la necesidad de incorporar invariantes y la revisión de la definición ante contraejemplos operan como disparadores de KPM en interacción con KoT, y permiten observar conexiones estructurales, por ejemplo, con fracciones equivalentes, como soporte para la verificación (KSM). Además, en consonancia con trabajos que señalan limitaciones del futuro profesorado para sostener análisis finos del contenido y para diseñar o evaluar tareas más allá de indicadores generales (Castillo y Burgos, 2023; Burgos y Chaverri, 2023), se identifican momentos en los que las participantes desplazan el debate hacia consideraciones curriculares o de potenciales errores del estudiantado. Este desplazamiento aparece como una consecuencia de la profundización en el acto de definir: una definición débil no solo genera clasificaciones erróneas, también compromete la interpretación didáctica de lo que el alumnado hace cuando aplica procedimientos de manera mecánica.

A la luz de lo anterior, el principal resultado de esta comunicación es la caracterización del tipo de conocimiento que se moviliza cuando el trabajo formativo se organiza alrededor de la tensión imagen-definición, además de construir una mejor definición escolar de proporcionalidad directa. No obstante, es importante acotar el alcance de la tarea presentada, en tanto que esta no fue diseñada para cubrir de manera exhaustiva la noción de proporcionalidad directa en la formación inicial, ni para atender todas sus dimensiones de enseñanza y aprendizaje. Su propósito fue explorar el conocimiento especializado que se moviliza cuando el eje se sitúa en un análisis profundo de la imagen conceptual y la definición del concepto, mediante contrastes sistemáticos entre casos y contraejemplos. En esa

medida, el valor de la propuesta reside en su capacidad para generar evidencias sobre cómo el futuro profesorado negocia criterios definitorios, reorganiza significados y articula prácticas matemáticas relevantes para comprender la enseñanza de la proporcionalidad con rigor y sentido.

Agradecimientos

Este trabajo fue realizado al amparo del proyecto PID2024-158877NB-I00, financiado por el Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades. Forma parte de la producción de la Red MTSK, auspiciada por AUIP.

Referencias

- Block, D., Mendoza, T. y Ramírez, M. (2010). *¿Al doble le toca el doble? La enseñanza de la proporcionalidad en la educación básica*. Ediciones SM.
- Bufo, À. (2017). *Características de la competencia docente mirar profesionalmente de los estudiantes para maestro en relación al razonamiento proporcional* [Tesis doctoral, Universidad de Alicante]. Repositorio Institucional de la Universidad de Alicante (RUA)
- Bufo, À., Llinares, S. y Fernández, C. (2018). Características del conocimiento de los estudiantes para maestro españoles en relación con la fracción, razón y proporción. *RMIE*, 23(76), 229-251.
- Burgos, M. y Godino, J. D. (2021). Conocimiento didáctico-matemático de la proporcionalidad en futuros maestros de Educación Primaria. *Profesorado, Revista de Currículum y Formación del Profesorado*, 25(2), 281-306. <https://doi.org/10.30827/profesorado.v25i2.8725>
- Burgos, M. y Chaverri, J. (2023). Explorando la percepción de futuros maestros de primaria sobre el pensamiento matemático de los alumnos en un problema de proporcionalidad. *Aula Abierta*, 52(1), 43-52. <https://doi.org/10.17811/rifie.52.1.2023.43-52>
- Carrillo, J., Montes, M. y Climent, N. (Eds.) (2022). *Investigaciones sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): 10 años de camino*. Dykinson.
- Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, Á., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 20(3), 236-253. <https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981>
- Castillo, M. J. y Burgos, M. (2023). Idoneidad didáctica de lecciones de proporcionalidad de libros de texto: una experiencia de análisis con maestros en formación. *PNA. Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, 17(2), 173-204. <https://doi.org/10.30827/pna.v17i2.24089>
- Elias, H. R., Powell, A. B., Haydar, H. N. y Ribeiro, A. J. (2025). A Systematic Literature Review on Proportionality. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 39(1), e2402011. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v39a2402011>
- Escudero, I. M., Gavilán, J. M. y Sánchez-Matamoros, G. (2014). Una aproximación a los cambios en el discurso matemático generados en el proceso de definir. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 17(1), 7-32. <https://doi.org/10.12802/relime.13.1711>
- Obando, G., Vasco, C. E. y Arboleda, L. C. (2014). Enseñanza y aprendizaje de la razón, la proporción y la proporcionalidad: un estado del arte. *Relime*, 17(1), 59-81. <https://doi.org/10.12802/relime.13.1713>
- Stake, R. E. (1995). *The art of case study research*. SAGE Publications.
- Valverde, A. G. y Castro, E. (2009). Actuaciones de maestros en formación en la resolución de problemas de proporcionalidad directa. En M.J. González, M.T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 523-531). SEIEM.
- Vinner, S. (2002). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. En D. Tall (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 65-81). Springer. https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1_5
- Willis, J. W. (2007). *Foundations of Qualitative Research: Interpretative and Critical Approaches*. SAGE Publications.