

EL CONOCIMIENTO SOBRE PROBLEMAS ARITMÉTICOS MULTIPLICATIVOS EN LA PLANIFICACIÓN ASISTIDA POR INTELIGENCIA ARTIFICIAL GENERATIVA: UN ESTUDIO DE CASO CON FUTUROS MAESTROS DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Knowledge about multiplicative arithmetic problems in GenAI-assisted lesson planning: a case study with pre-service primary school teachers

J. J. Aguilar^a y J. L. Lupiáñez^b

^a The University of Texas Rio Grande Valley, ^bUniversidad de Granada

Resumen

Se examina el conocimiento didáctico-matemático que once futuros maestros de Primaria evidencian al planificar una secuencia de enseñanza sobre problemas aritméticos en tres condiciones sucesivas: planificación manual, planificación asistida por inteligencia artificial generativa (IAG) con un prompt estandarizado y planificación asistida con un prompt de diseño libre. A partir de un estudio de caso colectivo y una rúbrica analítica de doce criterios basada en el modelo instruccional 5E, el análisis evidencia una mejora generalizada en la calidad formal de las planificaciones. Pero ninguna de las condiciones corrige de forma sistemática dos déficits persistentes: la ausencia de la clasificación semántica de los problemas aritméticos y la falta de integración operativa de las fases de resolución de Pólya. Los resultados sugieren que la IAG amplifica el conocimiento pedagógico del contenido que los sujetos ya poseen, pero no lo genera ni lo transforma de forma autónoma.

Palabras clave: conocimiento didáctico-matemático, problemas multiplicativos, resolución de problemas, formación inicial de maestros, inteligencia artificial generativa.

Abstract

This study examines the didactic-mathematical knowledge that eleven Elementary Pre-Service Teachers (EPSTs) evidence when planning a teaching sequence on multiplicative arithmetic problems under three successive conditions: manual planning, generative AI-assisted planning (GenAI) with a standardised prompt, and GenAI-assisted planning with a freely designed prompt. Drawing on a collective case study design and a twelve-criterion analytical rubric structured around the 5E instructional model, the analysis reveals a generalised improvement in the formal quality of lesson plans. However, none of the conditions corrects systematically two persistent deficits: the absence of the semantic classification of multiplicative problems and the lack of operative integration of Pólya's problem-solving phases. The findings suggest that GenAI amplifies the pedagogical content knowledge the EPSTs already possess but does not generate or transform it autonomously.

Keywords: didactic-mathematical knowledge, multiplicative problems, problem solving, pre-service teacher education, generative artificial intelligence.

INTRODUCCIÓN Y MARCO TEÓRICO

La planificación didáctica (Lesson plans, de aquí en adelante) constituye uno de los escenarios más reveladores del conocimiento profesional del maestro, pues exige movilizar de forma integrada el conocimiento del contenido matemático, el conocimiento sobre cómo aprenden los alumnos y el conocimiento sobre cómo organizar la enseñanza para que ese aprendizaje sea posible. La importancia de esta faceta del conocimiento profesional está más que consolidada en la literatura

(Cevikbas et al., 2024; Lupiáñez y Rico, 2006). Según Ball et al. (2008), planificar activa simultáneamente tres dimensiones del conocimiento docente: el conocimiento del contenido y los estudiantes, el conocimiento del contenido y la enseñanza, y el conocimiento curricular. Esta complejidad se intensifica cuando el contenido a planificar son los problemas aritméticos multiplicativos, cuya riqueza semántica, ampliamente documentada desde los trabajos fundacionales de Vergnaud (1983) y Greer (1992), exige un conocimiento que trasciende la comprensión procedimental de la multiplicación y la división para abarcar las distintas estructuras de situación que estas operaciones representan.

La investigación sobre el conocimiento matemático para la enseñanza (MKT, por sus siglas en inglés; Ball et al., 2008) ha puesto de manifiesto de forma consistente que los EPSTs (Maestros de primaria en formación, por sus siglas en inglés) tienden a concentrar su enseñanza de la multiplicación y la división en la categoría semántica de grupos iguales (por ejemplo, cuatro bolsas con tres manzanas representan doce manzanas en total $4 \times 3 = 12$) la más simple y la más frecuente en los libros de texto, sin trabajar con la diversidad de estructuras semánticas que el pensamiento multiplicativo requiere: comparación multiplicativa, proporcionalidad, producto cartesiano y producto de medidas (Greer, 1992; Vergnaud, 1983). Esta concentración semántica refleja una comprensión limitada de lo que significa enseñar la multiplicación y la división como estructuras de razonamiento. En paralelo, la investigación sobre la resolución de problemas ha señalado que el marco clásico de Pólya (1945), articulado en cuatro fases: comprender el problema, concebir un plan, ejecutar el plan y examinar la solución—, raramente se integra de forma operativa en la planificación de los EPSTs, a pesar de ser un referente central en los programas de formación inicial (Schoenfeld, 1985) y de mantener plena vigencia en la investigación contemporánea (Jahudin y Siew, 2024).

Este estudio forma parte de un proyecto de investigación de diseño mixto más amplio, aún en curso. En el ámbito cualitativo, el proyecto comprende el análisis de las planificaciones didácticas que aquí se reporta. Por su parte, el componente cuantitativo se integra a través de encuestas aplicadas antes y después de la implementación del estudio, orientadas a evaluar el conocimiento didáctico-matemático de los EPSTs. El proyecto incluye, además, entrevistas semiestructuradas con los propios EPSTs, dirigidas a explorar los procesos de toma de decisiones durante la planificación y la percepción sobre el uso de la inteligencia artificial generativa (IAG) como herramienta de apoyo profesional. Esta comunicación se concentra específicamente en el componente cualitativo relacionado al análisis de las planificaciones didácticas únicamente, cuyo propósito es caracterizar qué conocimiento sobre los problemas aritméticos multiplicativos y sobre la pedagogía de la resolución de problemas evidencian los EPSTs en sus planificaciones, y en qué medida ese conocimiento se transforma —o no— cuando la planificación es asistida por IAG.

El uso de herramientas de IAG como instrumentos de apoyo a la planificación docente plantea preguntas de investigación de creciente relevancia para la formación de profesores (Gurl et al., 2025). Si el conocimiento pedagógico del contenido (PCK; Shulman, 1986) es la condición de posibilidad de una buena planificación, ¿qué ocurre cuando un EPST delega parte de ese proceso a una herramienta de IAG? ¿La IAG compensa las lagunas de conocimiento de los EPSTs, o las reproduce y amplifica? ¿Puede la IAG integrar marcos teóricos disciplinares específicos como la clasificación semántica de los problemas multiplicativos o las fases de Pólya, sin que los EPSTs los soliciten explícitamente? La investigación disponible sobre el uso de IAG en la formación docente, aunque aún escasa, apunta a que la calidad de las respuestas generadas por estos sistemas depende en gran medida del nivel de conocimiento del usuario (Kasneci et al., 2023; Mollick y Mollick, 2023), lo que convierte la planificación asistida por IAG en un espejo particularmente transparente del conocimiento profesional de partida de los EPSTs. A partir de estas preguntas, el objetivo general de este estudio es analizar qué conocimiento didáctico-matemático sobre los problemas multiplicativos y sobre la resolución de problemas evidencian los EPSTs en sus planificaciones, y cómo evoluciona

ese conocimiento en función del tipo de apoyo, planificación manual, IAG con prompt estandarizado o IAG con prompt libre, utilizado en cada condición.

METODOLOGÍA

Diseño del estudio y participantes

Tal y como se ha señalado, esta comunicación presenta el componente cualitativo de un proyecto de investigación de diseño mixto más amplio. El componente que aquí se reporta adopta un diseño de estudio de caso colectivo (Stake, 2006) con carácter longitudinal y comparativo. Las unidades de análisis son los lesson plans como artefacto de conocimiento profesional (Grossman et al., 2009). No se analiza la práctica de aula de los EPSTs, sino su capacidad para planificar, que constituye en sí misma una ventana al PCK (Shulman, 1986) en el dominio de los problemas aritméticos multiplicativos. La elección del estudio de caso colectivo responde a la naturaleza del objeto de estudio: comprender cómo el conocimiento didáctico-matemático de los EPSTs se manifiesta y transforma a través de tres versiones sucesivas de la planificación didáctica.

Los EPSTs que participaron en el estudio (once en total) estuvieron matriculados en una asignatura de Didáctica de la Matemática en una universidad del sur de los Estados Unidos durante el otoño de 2025. Del grupo, diez eran mujeres y uno era hombre, con un rango de edad entre 20 y 22 años. La selección fue intencional (Patton, 2015), atendiendo a criterios de disponibilidad para participar en las tres fases del estudio y de representatividad de los perfiles de formación matemática presentes en el grupo. Los EPSTs son también los informantes del componente de entrevistas del proyecto más amplio, lo que permitirá triangular en fases posteriores los datos de planificación con las reflexiones de los propios EPSTs sobre sus decisiones de diseño.

El contenido de la tarea de planificación era desarrollar un “lesson plan” sobre problemas aritméticos multiplicativos para 3.º de Educación Primaria. Se debía seguir el modelo 5E e integrar los estándares curriculares del estado de Texas. Lo anterior fue trabajado previamente en clase mediante dos marcos teóricos centrales: la clasificación semántica de los problemas multiplicativos (Greer, 1992; Vergnaud, 1983) y las fases de resolución de problemas de Pólya (1945). La recolección de datos respondió a tres momentos sucesivos. En el primero (Lesson plan 1 o LP1), los EPSTs elaboraron su lesson plan de forma manual y sin apoyo tecnológico, lo que permitió valorar el conocimiento profesional de partida. En el segundo momento (Lesson plan 2 o LP2), el lesson plan fue elaborado con IAG mediante un prompt estandarizado e idéntico para todos los EPSTs. El prompt fue desarrollado en clase como parte de una tarea grupal (ver Figura 1), lo que permitió examinar el efecto de la IAG sobre una base de conocimiento compartida. En el tercer momento (LP3), cada EPST diseñó libremente su propio prompt a partir del ya utilizado en LP2, lo que permitió evaluar la capacidad de los EPSTs para usar la IAG de forma pedagógicamente informada. En cuanto a las herramientas de IAG utilizadas en LP2 y LP3, cuatro EPSTs emplearon Claude Sonnet 4 (Anthropic), cuatro emplearon Copilot con GPT-4o (Microsoft) y tres emplearon ChatGPT con GPT-4o (OpenAI)². Las versiones específicas de los modelos corresponden a las disponibles para usuarios generales durante el otoño de 2025.

Figura 1

Prompt traducido utilizado por todos los EPSTs en la LP2.

Traducción al Español: Soy un experimentado maestro 3er grado de que desea elaborar un plan didáctico detallado para la clase de matemáticas, basado en el modelo 5E, con la intención de desarrollar habilidades en la resolución de problemas aritméticos. Incluya los estándares TEKS correspondientes a la multiplicación y división de tercer grado. Incluya adaptaciones para estudiantes con necesidades especiales y estudiantes del idioma inglés. Incluya las ideas erróneas comunes. Incluya los materiales y recursos manipulativos que puedan utilizarse en las actividades correspondientes. Además, incluya una evaluación previa (pretest), una evaluación posterior (post-test), así como evaluaciones formativas y sumativas.

Instrumentos y procedimiento de análisis

En total se recolectaron 33 LPs producidos por los once EPSTs en los tres momentos. Para analizar los lesson plans, se utilizó una rúbrica analítica adaptada y validada mediante juicio de expertos en Didáctica de la Matemática, con una experiencia combinada superior a 30 años en la formación de maestros. La rúbrica consta de doce criterios organizados en dos bloques. El Bloque I recoge siete criterios referidos a los componentes generales de un lesson plan como formato y organización, materiales y apéndices, integración tecnológica, alineación con estándares y objetivos, evaluación del alumnado, diferenciación e inclusión, y discurso matemático. El Bloque II contiene cinco criterios correspondientes a las fases del modelo 5E (Bybee et al., 2006): Engage (activación del conocimiento previo y generación de curiosidad), Explore (exploración guiada por el alumnado), Explain (formalización conceptual mediada por el docente), Elaborate (transferencia a situaciones nuevas y de mayor demanda cognitiva) y Evaluate (evaluación integrada del aprendizaje). Cada criterio se evalúa en una escala de cuatro niveles: 0 (Inicio), 1 (En desarrollo), 2 (Competente) y 3 (Ejemplar), con descriptores conductuales específicos para cada combinación de criterio y nivel. La puntuación total máxima es de 36 puntos.

El análisis siguió un procedimiento en tres niveles. En el primer nivel, los dos investigadores evaluaron de manera independiente cada uno de los 33 lesson plans aplicando la rúbrica, acompañando cada puntuación de una justificación escrita con evidencia textual extraída del propio LP y conectada con el descriptor correspondiente de la rúbrica. Los casos en que existía discrepancia de más de un punto en algún criterio se resolvieron mediante discusión hasta alcanzar un acuerdo. En el segundo nivel, se realizó un análisis evolutivo de la trayectoria de cada EPST a lo largo de los tres momentos, con foco en la integración de las fases de Pólya y en la presencia o ausencia de la clasificación semántica de los problemas propuestos. En el tercer nivel, se efectuó un análisis comparativo transversal de todos los lesson plans de los once EPSTs.

RESULTADOS

Heterogeneidad inicial y efecto de la inteligencia artificial generativa

En respuesta a la primera pregunta de investigación ¿qué conocimiento didáctico-matemático evidencian los EPSTs en sus lesson plan manuales?, el análisis de los lesson plans (LP1) evidencia una marcada disparidad de conocimiento profesional de partida, con puntuaciones totales que oscilan entre 5 y 22 puntos de los 36 posibles. Esta dispersión no es atribuible a diferencias en la exposición teórica ya que todos los EPSTs cursaron los mismos contenidos. Es posible que las diferencias se deban a la capacidad de traducir ese conocimiento teórico en decisiones de diseño concretas, lo que la investigación identifica como una de las dimensiones centrales del PCK (Shulman, 1986). Solo dos EPSTs alcanzan en LP1 el nivel competente en la mayoría de los criterios de la rúbrica. Uno de ellos integra en su LP1 las cuatro fases de Pólya de forma operativa, vinculando explícitamente cada fase del 5E con el paso correspondiente del proceso de resolución de problemas. El otro cita literatura especializada en Didáctica de la Matemática y diseña un sistema de evaluación que trata la multiplicación y la división como operaciones inversas desde el mismo contexto, lo que revela una comprensión relacional del contenido coherente con los postulados de Vergnaud (1983).

La transición de LP1 a LP2 produce el mayor salto cualitativo de los EPSTs, en respuesta a la segunda pregunta de investigación ¿cómo cambia la calidad de los lesson plan cuando se introduce el apoyo de la IAG? La media del grupo pasa de 12,5 a 20,8 puntos de 36, con todos los EPSTs alcanzando al menos el nivel “en desarrollo” en todos los criterios. La IAG actúa como una herramienta que reduce la heterogeneidad del grupo: los EPSTs con menor conocimiento de partida experimentan los mayores avances, mientras que los de mayor conocimiento evidencian ganancias más modestas o, en un caso singular, un retroceso. Este es el hallazgo más llamativo de los LP2. El EPST con mayor puntuación en LP1 (22 puntos) obtiene en LP2 tan solo 16 puntos, siendo la única trayectoria regresiva de todos los EPSTs. La IAG genera un lesson plan formalmente correcto pero que no

preserva los elementos pedagógicos más valiosos de la LP1 de este EPST: la integración de Pólya, la diversidad semántica de los problemas propuestos y la orientación hacia las presentaciones del propio alumnado en la fase Explain. Este caso ilustra con claridad la irregularidad del efecto de la IAG en función del nivel de conocimiento profesional de partida de los EPSTs.

El análisis de LP3 revela que la libertad para diseñar el prompt no garantiza por sí sola una mejora respecto a LP2. La media del grupo asciende a 23,5 puntos sobre 36, pero este incremento no es homogéneo: sólo los EPSTs que utilizan el diseño del prompt como un ejercicio de reflexión pedagógica activa, evidenciada en la especificidad de las exigencias didácticas incorporadas al prompt, logran superar de forma sustancial la calidad de su LP2. Los dos EPSTs con mayor puntuación en el LP3 (36 y 33 puntos respectivamente) elaboraron prompts en los que detallaron el tipo semántico de los problemas a incluir, las fases de Pólya como estructura metodológica, el nivel de demanda cognitiva de las tareas y las acomodaciones específicas para la neurodiversidad en el aula. En los demás casos, los LP3 de los EPSTs son equivalente a su LP2 o presenta mejoras menores. Este resultado sugiere que la competencia para escribir prompts pedagógicamente informados es, en sí misma, una dimensión del conocimiento docente que los EPSTs deben desarrollar de forma explícita en su formación inicial.

Los déficits persistentes: clasificación semántica y fases de Pólya

El hallazgo más consistente y transversal, que responde a la tercera pregunta de investigación, relativa a qué conocimiento específico no transfiere al lesson plan, es la ausencia de la clasificación semántica de los problemas multiplicativos en los lesson plans de los EPSTs a lo largo de las tres condiciones (LP1, LP2 y LP3). De las cinco categorías semánticas de problemas multiplicativos (Greer, 1992; Vergnaud, 1983) —igualación o grupos iguales, comparación multiplicativa, proporcionalidad, producto cartesiano y producto de medidas—, la totalidad de los problemas propuestos en los 33 lesson plans pertenece a la categoría de igualación. La comparación multiplicativa y el producto de medidas aparecen de forma implícita en algunos casos, pero sin que ningún EPST los identifique ni trabaje explícitamente como tipos diferenciados. La categoría de producto cartesiano está ausente en todos los LPs de los EPSTs. Esta concentración en la categoría más simple es coherente con los resultados de Mulligan y Mitchelmore (1997), quienes documentaron la tendencia de los EPSTs a enseñar los tipos de problemas con los que ellos mismos aprendieron en la escuela.

El segundo déficit persistente es la falta de integración operativa de las fases de Pólya (1945) en el diseño de las actividades. De los 33 lesson plans analizados, solo tres presentan una integración funcional de las cuatro fases: una durante el desarrollo del LP1 y dos en el LP3. En los 30 casos restantes, las fases de Pólya están ausentes o aparecen mencionadas sin articulación metodológica con las decisiones de diseño. Este resultado contrasta con el hecho de que las fases de Pólya fueron trabajadas explícitamente en clase como marco central de la resolución de problemas y formaban parte de la consigna de la tarea. La persistencia de este déficit a lo largo de los tres momentos apunta a la existencia de una brecha entre el conocimiento declarativo del marco y el conocimiento procedimental necesario para que los EPSTs lo traduzcan en decisiones de diseño concretas (Llinares, 2013), brecha que ni la exposición teórica ni el uso de la IAG consiguen cerrar de forma sistemática.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Los resultados del estudio permiten articular tres conclusiones de relevancia (no generalizables) para la investigación en la formación de EPSTs. En relación con la primera pregunta de investigación, el análisis evidencia que la IAG actúa como una herramienta de apoyo cuyo efecto sobre la calidad de los lesson plan varía en función del nivel de conocimiento profesional de partida de los EPSTs. Para los EPSTs con menor evidencia de PCK, la IAG produce mejoras sustanciales en la estructura, la coherencia y la formalidad de los lesson plans. Para los EPSTs con mayor evidencia de PCK, la IAG tiende a generar una respuesta homogénea que no preserva los elementos pedagógicos más valiosos de su lesson plan manual (LP1). Este resultado matiza las perspectivas más optimistas sobre el uso

de la IAG como herramienta de formación docente y señala la necesidad de considerar el perfil de conocimiento de los EPSTs como variable moduladora de su efecto, aunque se tendrían que llevar a cabo estudios más profundos.

En relación con la segunda pregunta de investigación, los déficits en la clasificación semántica de los problemas multiplicativos y en la integración de Pólya se muestran resistentes al uso de la IAG cuando éste no es activado explícitamente por los EPSTs en el diseño de su prompt. Este resultado tiene implicaciones directas para el diseño curricular de la formación inicial: la exposición teórica al marco de Pólya (1945) no es condición suficiente para que los EPSTs lo trasladen a sus decisiones de planificación. Se requieren oportunidades de práctica reflexiva guiada que conecten explícitamente el marco teórico con el diseño de actividades (Llinares, 2013; Martín-Díaz et al., 2023), así como el desarrollo de lo que podría denominarse competencia de prompting pedagógico: la capacidad de los EPSTs para traducir su propio conocimiento didáctico-matemático en instrucciones precisas para una herramienta de IAG.

En relación con la tercera pregunta de investigación, los resultados apuntan a que la IAG amplifica el conocimiento pedagógico del contenido que los EPSTs ya poseen, pero no lo genera ni lo transforma de forma autónoma. Los EPSTs que obtienen los mejores resultados en LP3 son precisamente aquellos que ya evidenciaban en LP1 un conocimiento más sólido sobre la enseñanza de los problemas multiplicativos, y que son capaces de traducir ese conocimiento en prompts de alta especificidad didáctica. En este sentido, los resultados concuerdan con estudios similares llevados a cabo por Kasneci et al. (2023) y Mollick y Mollick (2023), quienes señalan que el potencial de la IAG en contextos educativos depende en última instancia de la calidad del conocimiento que el usuario aporta a la interacción. Las entrevistas y el componente cuantitativo del proyecto más amplio permitirán profundizar en los mecanismos que subyacen a estos resultados y en las condiciones bajo las cuales la IAG puede constituir una herramienta genuinamente transformadora del conocimiento profesional de los EPSTs.

Agradecimientos

Este trabajo se ha desarrollado dentro del marco del proyecto de generación del conocimiento «Proyectos de Educación STEAM y aprendizaje escolar», PID2021-128261NB-I00, financiado por MICIU/AEI/10.13039/501100011033 y por FEDER, UE.

Referencias

- Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407. <https://doi.org/10.1177/0022487108324554>
- Bresser, R., Melanese, K. y Sphar, C. (2009). *Supporting English language learners in math class, Grades K-2*. Math Solutions.
- Bybee, R. W., Taylor, J. A., Gardner, A., Van Scotter, P., Powell, J. C., Westbrook, A. y Landes, N. (2006). *The BSCS 5E instructional model: Origins and effectiveness*. BSCS.
- Cevikbas, M., König, J. y Rothland, M. (2024). Empirical research on teacher competence in mathematics lesson planning: Recent developments. *ZDM – Mathematics Education*, 56(1), 101–113. <https://doi.org/10.1007/s11858-023-01487-2>
- Cohen, J. (1960). A coefficient of agreement for nominal scales. *Educational and Psychological Measurement*, 20(1), 37-46. <https://doi.org/10.1177/001316446002000104>
- Greer, B. (1992). Multiplication and division as models of situations. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 276-295). Macmillan.
- Grossman, P., Compton, C., Igra, D., Ronfeldt, M., Shahan, E. y Williamson, P. W. (2009). Teaching practice: A cross-professional perspective. *Teachers College Record*, 111(9), 2055-2100. <https://doi.org/10.1177/016146810911100905>

- Gurl, T. J., Markinson, M. P. y Artzt, A. F. (2025). Using ChatGPT as a lesson planning assistant with preservice secondary mathematics teachers. *Digital Experiences in Mathematics Education*, 11, 114–139. <https://doi.org/10.1007/s40751-024-00162-9>
- Jahudin, J. y Siew, N. M. (2024). The effects of Polya's problem solving with digital bar model on the algebraic thinking skills of seventh graders. *Problems of Education in the 21st Century*, 82(3), 390–409. <https://doi.org/10.33225/pec/24.82.390>
- Kasneci, E., Sessler, K., Küchemann, S., Bannert, M., Dementieva, D., Fischer, F., Gasser, U., Groh, G., Günemann, S., Hüllermeier, E., Krusche, S., Kutyniok, G., Michaeli, T., Nerdel, C., Pfeffer, J., Poquet, O., Sailer, M., Schmidt, A., Seidel, T. y Kasneci, G. (2023). ChatGPT for good? On opportunities and challenges of large language models for education. *Learning and Individual Differences*, 103, artículo 102274. <https://doi.org/10.1016/j.lindif.2023.102274>
- Landis, J. R. y Koch, G. G. (1977). The measurement of observer agreement for categorical data. *Biometrics*, 33(1), 159-174. <https://doi.org/10.2307/2529310>
- Lincoln, Y. S. y Guba, E. G. (1985). *Naturalistic inquiry*. SAGE.
- Llinares, S. (2013). El desarrollo de la competencia docente "mirar profesionalmente" la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. *Educación en Revista*, 50, 117-133. <https://doi.org/10.1590/S0104-40602013000400009>
- Lupiañez, J. L. y Rico, L. (2006). Análisis didáctico y formación inicial de profesores: competencias y capacidades en el aprendizaje de los escolares. En P. Bolea, M. J. González y M. Moreno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)* (pp. 225–236). Instituto de Estudios Altoaragoneses y Universidad de Zaragoza.
- Martín-Díaz, J. P., Codes, M., Pascual, M. I., Contreras, L. C. y Climent, N. (2023). La tarea profesional de definir desde el modelo MTSK. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 347-354). SEIEM.
- Mollick, E. y Mollick, L. (2023). *Using AI to implement effective teaching strategies in classrooms*. SSRN. <https://doi.org/10.2139/ssrn.4391243>
- Mulligan, J. T. y Mitchelmore, M. C. (1997). Young children's intuitive models of multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(3), 309-330. <https://doi.org/10.2307/749783>
- Patton, M. Q. (2015). *Qualitative research and evaluation methods: Integrating theory and practice* (4.ª ed.). SAGE.
- Pólya, G. (1945). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton University Press.
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Academic Press.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14. <https://doi.org/10.3102/0013189X015002004>
- Stake, R. E. (2006). *Multiple case study analysis*. Guilford Press.
- Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 127-174). Academic Press.
- Wood, D., Bruner, J. S. y Ross, G. (1976). The role of tutoring in problem solving. *Journal of Child Psychology and Psychiatry*, 17(2), 89-100. <https://doi.org/10.1111/j.1469-7610.1976.tb00381.x>
- Yin, R. K. (2018). *Case study research and applications: Design and methods* (6.ª ed.). SAGE.