

FLEXIBILIDAD Y COMPRENSIÓN DEL ÁREA: UNA TRAYECTORIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAJE PARA LOS PRIMEROS CURSOS DE SECUNDARIA

Flexibility and understanding of area: a hypothetical learning trajectory for the early years of secondary education

Areny, M., Caviedes, S. y Rojas, F.

Universitat Autònoma de Barcelona

Resumen

Este estudio presenta el diseño teórico de una progresión hipotética de aprendizaje que fundamenta una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje para la medición de áreas, orientada a favorecer el desarrollo conceptual y la flexibilidad matemática. A lo largo de cuatro niveles, se describe el tránsito desde la percepción y la acción manipulativa hacia formas de razonamiento que permiten justificar el área como magnitud estructurada e invariante. La flexibilidad, en sus dimensiones procedimental y representacional, se incorpora como eje articulador al conectar distintos significados parciales del área. El diseño propuesto ofrece una base teórica y metodológica para planificar experiencias que promuevan una comprensión flexible y estructural del área en la educación secundaria.

Palabras clave: *trayectoria hipotética de aprendizaje, flexibilidad, significados parciales del área*

Abstract

This study presents the theoretical design of a hypothetical learning progression that underpins a Hypothetical Learning Trajectory for area measurement, aimed at fostering conceptual development and mathematical flexibility. Across four levels, it describes the transition from perception and manipulative action towards forms of reasoning that allow area to be justified as a structured and invariant magnitude. Flexibility, in its procedural and representational dimensions, is incorporated as an articulating axis by connecting different partial meanings of area. The proposed design provides a theoretical and methodological basis for planning learning experiences that promote a flexible and structural understanding of area in secondary education.

Keywords: *hypothetical learning trajectory, flexibility, partial area meanings*

INTRODUCCIÓN

El aprendizaje del área constituye un eje fundamental en la educación matemática, al articular de manera integrada la geometría, la medida y el álgebra (Freudenthal, 1983; Kospentaris et al., 2011). Sin embargo, diversos estudios evidencian que los estudiantes de los primeros cursos de secundaria (12-14 años) suelen reducir la medición de superficies a la aplicación mecánica de fórmulas, sin reconocer las propiedades y relaciones estructurales que las sustentan, ni movilizar estrategias adecuadas para descomponer y recomponer figuras (Caviedes 2024; Zacharos, 2006; Lehmann, 2023). Estas limitaciones reflejan una comprensión fragmentada del concepto de área y la necesidad de diseñar trayectorias de aprendizaje que integren el desarrollo conceptual con el uso flexible de estrategias y representaciones. En este contexto, la presente comunicación propone una progresión hipotética de aprendizaje para una trayectoria hipotética de aprendizaje (THA) sobre la medición de áreas para estudiantes de 12 a 14 años. La propuesta se apoya en los significados parciales del área

(Caviedes et al., 2023) y en la incorporación de la flexibilidad como principio articulador del aprendizaje matemático.

MARCO TEÓRICO

Trayectoria hipotética de aprendizaje para la medición de áreas

El constructo de THA, introducido por Simon (1995), describe un modelo de planificación instruccional basado en la anticipación del aprendizaje del estudiante. Una THA integra tres componentes: un objetivo de aprendizaje, una secuencia de tareas matemáticas y una hipótesis sobre los procesos de desarrollo conceptual de los estudiantes (Simon y Tzur, 2005). Desde esta perspectiva, la THA constituye tanto una herramienta de diseño como un marco de análisis del aprendizaje, que permite al docente anticipar los razonamientos de los estudiantes, caracterizar niveles de comprensión y planificar intervenciones instruccionales ajustadas al progreso observado. Los trabajos de Sarama y Clements (2009) ampliaron esta noción al proponer el modelo de Learning Trajectories, que articula tres elementos equivalentes: la meta matemática, la secuencia de niveles de pensamiento o desarrollo y un conjunto de actividades coherentes con dichos niveles. En el caso particular del área, estos autores muestran que el aprendizaje implica pasar de la identificación del atributo superficial al reconocimiento de la necesidad de unidades congruentes y, posteriormente, a la coordinación de medidas lineales mediante relaciones multiplicativas (Clements et al., 2018; Sarama y Clements, 2009).

La extensión de estas trayectorias hacia la educación secundaria exige considerar que los estudiantes, al llegar a los primeros cursos de la ESO, ya dominan ciertos procedimientos aritmético-algebraicos, pero aún presentan limitaciones conceptuales en torno a la noción de área. En particular, suelen concebirla como un dato asociado a fórmulas y no como una magnitud que se conserva bajo transformaciones isométricas ni como una relación entre dimensiones (p.ej., Caviedes et al., 2023a; 2023b; Freudenthal, 1983; Zacharos, 2006). Esta desconexión entre el razonamiento geométrico y el métrico justifica la necesidad de construir trayectorias hipotéticas que integren tanto los aspectos estructurales del concepto como las habilidades de razonamiento que permiten movilizarlos en contextos diversos. El estudio de Caviedes et al. (2023a) proporciona un marco particularmente relevante para este propósito. Los autores identifican tres significados parciales del área que emergen del análisis de las producciones de estudiantes de secundaria al resolver tareas. Estos significados no constituyen etapas sucesivas en sentido estricto, sino configuraciones semióticas y conceptuales que reflejan distintas formas de organización del conocimiento del área.

El primer significado parcial (PM_1) concibe el área como el espacio delimitado por una línea cerrada. En este caso, la atención se centra en la figura como objeto perceptual y en su interior como porción de espacio ocupada, sin referencia explícita a unidades de medida. La comprensión se apoya en la percepción visual y en acciones que permiten comparar de manera cualitativa, pero no cuantificar. El segundo significado (PM_2) define el área como el número de unidades bidimensionales que cubren una superficie. Aquí el área se asume como una magnitud medible, lo que requiere comprensión de la conservación, la congruencia y la aditividad. La iteración de unidades y la relación entre la medida y el tamaño de la unidad se convierten en los fundamentos del razonamiento. Este significado implica un salto cualitativo respecto al anterior, ya que introduce la idea de cuantificación y la posibilidad de justificar la equivalencia de áreas mediante procesos de descomposición, recomposición e isometrías respecto de las unidades. El tercer significado parcial (PM_3) comprende el área como el producto de dos dimensiones lineales, lo que supone la integración de relaciones multiplicativas y la comprensión simbólica del proceso de medida. Aquí se requiere una coordinación de razonamientos geométricos y algebraicos que permitan justificar relaciones de proporcionalidad y equivalencia; el área deja de ser un resultado numérico derivado de un procedimiento para convertirse en una relación estructural entre magnitudes.

Estos tres significados parciales describen un continuo de desarrollo conceptual que puede enriquecer la trayectoria de aprendizaje del área propuesta por Sarama y Clements (2009). El tránsito entre ellos implica reorganizaciones conceptuales y semióticas, es decir, pasar de la percepción a la medición, de la medición al razonamiento estructural y, finalmente, a la formalización.

La flexibilidad como elemento integrador en la THA del área

La noción de experticia adaptativa (Hatano e Inagaki, 1984) concibe la competencia experta como la capacidad de aplicar procedimientos con comprensión y de ajustarlos o justificarlos de manera versátil, más allá de su ejecución precisa y eficiente. De este modo, la flexibilidad matemática puede entenderse como un rasgo central del desempeño experto, pues implica movilizar múltiples representaciones y procedimientos, y seleccionar los más adecuados a las demandas de la tarea y al contexto de resolución (Schoenfeld, 1985; Hickendorff, 2022; Star, 2007). Esta conceptualización ha llevado a proponer que la flexibilidad presenta dimensiones interdependientes. Por ejemplo, Heinze et al. (2009) describen la flexibilidad procedimental o estratégica como la disponibilidad de un repertorio diverso de procedimientos de resolución y la capacidad de seleccionar entre ellos en función de la tarea. En esta misma línea, Xu et al. (2017) distinguen entre flexibilidad procedimental potencial (conocimiento de distintas estrategias) y práctica (habilidad para emplearlas); no obstante, en este estudio se considerarán conjuntamente bajo la dimensión de flexibilidad procedimental. Por su parte, la flexibilidad representacional alude a la capacidad de emplear y traducir entre diferentes sistemas de representación, geométrico, numérico, simbólico o gráfico, para construir y comunicar significado (Duval, 2017; Heinze et al., 2009). Ambos tipos de flexibilidad convergen en la resolución de tareas complejas, donde los estudiantes deben articular razonamientos geométricos y métricos, y justificar sus decisiones de manera fundamentada.

En el caso específico del área, la flexibilidad procedimental y representacional adquiere un papel central, ya que la medición de superficies exige coordinar representaciones espaciales, unidades de medida y relaciones multiplicativas. Al respecto, Lehmann (2023) evidencia que los estudiantes de primeros cursos de secundaria enfrentan dificultades persistentes al calcular el área de figuras compuestas, especialmente al seleccionar estrategias de descomposición y recomposición. El autor señala que muchos estudiantes logran aplicar correctamente fórmulas parciales, pero no coordinan esas operaciones con la estructura geométrica de la figura original, lo que revela una falta de flexibilidad procedimental. En este contexto, la flexibilidad no se reduce al mero cambio de procedimiento, sino que supone una coordinación dinámica entre significados parciales del área, entendidos como diferentes formas de conceptualizar y operar con el objeto matemático (Caviedes, 2023a). En particular, la transición del significado PM_1 (el área como espacio delimitado), al PM_2 (el área como número de unidades bidimensionales), requiere que los estudiantes identifiquen los límites de la comparación perceptual e incorporen explícitamente la unidad de medida. Este tránsito activa una flexibilidad procedimental y representacional, en tanto exige articular conocimiento conceptual y procedimental y reorganizar el sistema de referencia: dejar de pensar la figura como totalidad visual para considerar la unidad como elemento generador de la magnitud. Análogamente, el paso del significado PM_2 al PM_3 (el área como producto de magnitudes lineales) exige una flexibilidad procedimental y representacional, pues los estudiantes deben articular los procedimientos de recubrimiento o conteo con las relaciones geométrico-numéricas que fundamentan la fórmula, y coordinar traducciones entre representaciones geométricas, numéricas y algebraicas. En esta fase, las isometrías cumplen una función articuladora (Caviedes et al., 2023b), ya que facilitan la visualización de equivalencias, sostienen la justificación de la conservación del área y median entre las representaciones. Esta articulación progresiva ayuda a consolidar un sistema de significados más coherente y facilita que los estudiantes transiten con mayor seguridad entre diferentes modos de abordar las tareas, favoreciendo una comprensión que integra procedimientos, representaciones y principios geométricos.

MÉTODO

El diseño de la THA se enmarca en una tesis doctoral desarrollada bajo una Investigación Basada en el Diseño (IBD) (Cobb et al., 2003). En este trabajo se presenta la fase previa a la implementación: la construcción teórica de la progresión de aprendizaje y de las transiciones entre sus niveles, con el propósito de fundamentar un modelo progresivo que articule los significados parciales del área con el desarrollo de la flexibilidad matemática. La flexibilidad se concibe como un eje transversal que estructura dichas transiciones. El proceso metodológico comprende tres fases:

Fase 1. Revisión de literatura y diagnóstico de dificultades: Se revisaron estudios que documentan dificultades persistentes en la enseñanza y el aprendizaje del área, las cuales convergen en una misma problemática: la conceptualización del área como magnitud suele quedar subordinada a un tratamiento operativo centrado en fórmulas. En primer lugar, diversos trabajos evidencian una instrumentalización de las fórmulas, ya que los estudiantes tienden a identificar, hallar o calcular el área con elegir y aplicar una expresión conocida, con escasa atención a las condiciones geométricas que la hacen pertinente, al significado de sus términos o a la plausibilidad del resultado (Huang, 2017; Zacharos, 2006). Esta orientación favorece respuestas correctas solo en configuraciones prototípicas y, en cambio, se debilita ante variaciones de la figura, cambios de orientación o ausencia de medidas explícitas, situaciones en las que el razonamiento debería apoyarse en relaciones geométricas y no únicamente en sustituciones numéricas.

En segundo lugar, se reportan dificultades específicas vinculadas con la conservación del área. Al respecto, algunos estudios señalan que muchos estudiantes no reconocen que el área permanece invariante cuando una figura se transforma mediante descomposición y recomposición, o cuando se realizan modificaciones que alteran la apariencia sin cambiar la superficie total (Kamii y Kysh, 2006). En estos casos, los juicios suelen apoyarse en rasgos perceptivos (por ejemplo, “más alargada”, “más ancha”, “ocupa más espacio”) o en magnitudes lineales asociadas (perímetro, longitud de lados), lo que conduce a interpretaciones inconsistentes de equivalencia de áreas (Kordaki, 2003; Kospentaris et al., 2011). Esta fragilidad conceptual afecta, además, la capacidad de justificar, pues aun cuando se acepta que dos figuras tienen la misma área, con frecuencia no se dispone de argumentos geométricos que articulen aditividad, descomposición y recomposición, o comparación por unidades (Caviedes et al., 2023b).

En tercer lugar, la investigación señala limitaciones para seleccionar y coordinar estrategias ante figuras planas compuestas. Frente a configuraciones no estándar, los estudiantes suelen recurrir a particiones arbitrarias o a procedimientos parciales que no garantizan una cobertura exhaustiva ni una descomposición aditiva correcta (Caviedes et al., 2023a); también se observan omisiones, solapamientos o la elección de descomposiciones que incrementan la complejidad en lugar de reducirla (Lehmann, 2023). Esta dificultad no se limita a no saber qué hacer, sino que refleja problemas para coordinar representaciones, procedimientos y ser flexibles entre ellos, es decir, para decidir qué partes conviene conservar, qué recomposiciones son válidas y qué relaciones geométricas permiten transferir un método conocido a una situación nueva.

Lo anterior respalda la necesidad de diseñar una progresión hipotética de aprendizaje que incorpore de forma explícita oportunidades para desarrollar flexibilidad procedimental y representacional en torno al área: (i) justificar fórmulas a partir de transformaciones y descomposiciones controladas, (ii) reconocer e identificar la conservación del área en configuraciones variadas, y (iii) elegir, comparar y validar estrategias de resolución para figuras planas compuestas, articulando representaciones geométricas y argumentos de conservación.

Fase 2. Construcción de los niveles hipotéticos: Partiendo de los niveles propuestos por Sarama y Clements (2009) y las aportaciones de Caviedes et al. (2023a), la Tabla 1 muestra que cada nivel de la progresión representa una forma cualitativamente distinta de comprender y operar con el área.

Tabla 1

Niveles de progresión de la THA sobre el área para estudiantes de 12-14 años. (Adaptada de Sarama y Clements, 2009)

Nivel	Acciones del estudiante y elementos matemáticos	Tipo de flexibilidad
Nivel 1: Conservación perceptiva y acción manipulativa inicial (PM1-área como espacio delimitado)	<i>Acciones observables:</i> El estudiante compara de manera directa y verifica la conservación del área mediante isometrías, recorte y reorganización. Justifica la equivalencia o diferencia entre superficies a partir de expresiones como “ocupan lo mismo”, “coinciden al superponerlas” o “se puede formar la misma figura con las mismas partes”. <i>Elementos matemáticos asociados:</i> superficie delimitada, congruencia, comparación directa conservación, transformaciones isométricas.	<i>Procedimental:</i> Conoce y usa acciones manipulativas para explorar conservación y equivalencia. <i>Representacional:</i> Identifica la misma extensión de superficie en distintas configuraciones de una misma superficie.
Nivel 2: Cuantificación y estructuración de la medida (PM2-área como número de unidades congruente)	<i>Acciones observables:</i> El estudiante recubre superficies con una unidad constante sin huecos ni solapamientos. Cuenta unidades para determinar y comparar áreas, descompone y recompone figuras para facilitar el recubrimiento y suma o resta partes para determinar el área de figuras compuestas. <i>Elementos matemáticos asociados:</i> unidad bidimensional, congruencia, recubrimiento, iteración de la unidad, acumulación y aditividad, conservación, transitividad, relación inversamente proporcional entre unidad de medida y cuantificación de la superficie.	<i>Procedimental:</i> Alterna entre recubrimiento, conteo y descomposición, según la tarea. <i>Representacional:</i> Coordina representaciones de recubrimiento (cuadrículas o unidades iteradas) con el registro numérico (conteo).
Nivel 3: Estructuración espacial y uso explícito de isometrías (PM2-área como número de unidades congruente)	<i>Acciones observables:</i> El estudiante organiza unidades cuadradas en filas y columnas, utiliza multiplicación para estructurar el área y descompone figuras en rectángulos, triángulos u otras partes conocidas. Utiliza isometrías para justificar que el área total se conserva. Justifica sus procedimientos mediante relaciones entre partes de la figura y cálculos numéricos. <i>Elementos matemáticos asociados:</i> estructuración rectangular, unidad cuadrada, transformaciones isométricas, comparación indirecta, conservación, congruencia transitividad, acumulación y aditividad.	<i>Procedimental:</i> Selecciona y combina procedimientos geométricos y numéricos (suma reiterada, multiplicación, descomposición, recomposición). <i>Representacional:</i> Traduce y convierte entre representaciones geométricas (arreglo de filas/columnas), numéricas (sumas y/o productos).
Nivel 4: Justificación estructural y articulación de significados (PM3-área como producto de dos dimensiones lineales)	<i>Acciones observables:</i> El estudiante selecciona y aplica fórmulas de área según las características de la figura. Justifica la validez de una fórmula mediante descomposiciones, recomposiciones, equivalencias y/o estructuraciones rectangulares. Determina áreas de figuras compuestas o no prototípicas combinando procedimientos de naturaleza diferente. <i>Elementos matemáticos asociados:</i> Área como magnitud bidimensional, dimensiones lineales, base, altura, unidad cuadrada estándar, expresión algebraica, congruencia, conservación, acumulación y aditividad, transitividad.	<i>Procedimental:</i> Selecciona, adapta y justifica procedimientos geométricos y numérico-algebraicos según la estructura de la figura y la demanda de la tarea. <i>Representacional:</i> Coordina registros geométrico, numérico y algebraico para calcular, comunicar y justificar.

Fase 3. Tránsito entre niveles: La progresión supone una reconstrucción de la comprensión del área como magnitud, en la que cada nivel incorpora, reorganiza y amplía los significados parciales previos (Caviedes et al., 2023a; Clements et al., 2018). Dicha reconstrucción está mediada por la flexibilidad procedimental y representacional (Heinze et al., 2009; Rittle-Johnson y Schneider, 2015), ya que el avance entre niveles requiere seleccionar y adaptar procedimientos, así como coordinar distintas representaciones de la superficie y su medida. Dado que esta comunicación corresponde a la fase previa a la implementación, los tránsitos se formulan como hipótesis de aprendizaje que deberán contrastarse mediante el análisis de las producciones y justificaciones de los estudiantes.

Nivel 1 → Nivel 2: El paso del nivel 1 al nivel 2 supone el tránsito del significado PM_1 al inicio del PM_2 . Se espera que el estudiante deje de depender exclusivamente de juicios perceptivos sobre las figuras y empiece a usar una unidad constante para cubrir la superficie (Clements et al., 2018; Sarama y Clements, 2009). La flexibilidad procedimental se manifiesta cuando el estudiante incorpora procedimientos de cuantificación (recubrimiento, conteo) a las acciones manipulativas iniciales. La flexibilidad representacional se evidencia cuando pasa de interpretar la superficie como una configuración perceptiva a representarla mediante unidades bidimensionales y registros numéricos. Las familias de tareas asociadas son comparación directa de superficies, recubrimiento con unidades congruentes, análisis de recubrimientos incorrectos y comparación de áreas mediante una unidad bidimensional común. Se consideran tareas de recubrimiento de una misma superficie con unidades de distinto tamaño o forma, con el propósito de discutir la conveniencia de la unidad cuadrada, así como tareas de estimación del área de superficies irregulares o de contorno no poligonal mediante conteo de unidades completas y fraccionadas.

Nivel 2 → Nivel 3: El tránsito del nivel 2 al nivel 3 implica pasar de la cuantificación por recubrimiento y conteo a una organización más estructurada de la medida (PM_2 - inicio PM_3). Se espera que el estudiante deje de contar unidades una a una y comience a organizarlas en filas y columnas, use sumas reiteradas o multiplicaciones, descomponga figuras en partes conocidas y emplee isometrías para justificar la conservación del área. También se espera que establezca comparaciones indirectas y equivalencias transitivas entre superficies. La flexibilidad procedimental (Rittle-Johnson y Schneider, 2015) se manifiesta cuando se seleccionan y combinan las acciones anteriores. La flexibilidad representacional (Duval, 2017; Heinze et al., 2009) se evidencia al coordinar el uso de cuadrículas o unidades iteradas, particiones geométricas, recomposiciones y registros numéricos. Las familias de tareas asociadas son figuras compuestas, arreglos rectangulares, descomposición y recomposición, comparación indirecta mediante una unidad bidimensional o figura auxiliar, y justificación de equivalencias mediante isometrías. Específicamente, se contemplan tareas en las que el estudiante debe fraccionar la unidad cuadrada para medir superficies que no admiten un recubrimiento exacto con unidades completas, como triángulos o figuras compuestas, así como tareas en las que debe relacionar la base y la altura de un triángulo con las del rectángulo que lo contiene para justificar fórmulas de áreas sencillas.

Nivel 3 → Nivel 4: El tránsito del nivel 3 al nivel 4 implica pasar del área como número de unidades congruentes, estructurada mediante arreglos y transformaciones, al área como producto de dos dimensiones lineales (consolidación PM_3). Se espera que el estudiante seleccione fórmulas según las características de la figura y justifique su validez mediante descomposiciones, recomposiciones, equivalencias o estructuraciones rectangulares. La flexibilidad procedimental se expresa cuando se adaptan y justifican procedimientos geométricos, numéricos y algebraicos según la demanda de la tarea. La flexibilidad representacional se evidencia cuando se coordinan registros geométricos, numéricos y algebraicos para calcular, comunicar y justificar (Duval, 2017). Las familias de tareas asociadas son justificación de fórmulas para rectángulos, romboides y trapecios por descomposición y recomposición. Por ejemplo, obtener el área del trapecio a partir de un corte horizontal que permite reorganizar la figura y relacionar sus bases con la altura. Se incluyen tareas de transformación de

figuras en configuraciones equivalentes, cálculo de áreas de figuras compuestas o no prototípicas e inicio de generalización verbal o preálgebraica, sin exigir todavía una expresión simbólica formal.

CONCLUSIONES

La progresión hipotética para una THA, propuesta en esta comunicación, se concibe como una estructura que integra teoría y práctica, orientada a describir la progresión del pensamiento geométrico y métrico y a fundamentar el diseño de intervenciones didácticas basadas en evidencia (Simon y Tzur, 2012). Integra los aportes de Sarama y Clements (2009) sobre el desarrollo del pensamiento de los estudiantes, la propuesta de Simon (1995) para la construcción y validación de trayectorias hipotéticas, y los significados parciales del área caracterizados por Caviedes et al. (2023a) para interpretar el desarrollo de estudiantes en los primeros cursos de secundaria. En este contexto, la flexibilidad se asume como una dimensión organizadora del aprendizaje del área, en tanto orienta la selección, articulación y justificación de estrategias y representaciones (Heinze et al., 2009; Star, 2007; Rittle-Johnson y Schneider, 2015), por ejemplo, mediante descomposición, recubrimiento o recomposición de superficies equivalentes. Con ello, la propuesta se alinea con la evidencia que muestra que la comprensión del área no se deriva solo de la fluidez procedimental, sino de la coordinación entre conservación de la superficie, estructuración espacial y cuantificación (Freudenthal, 1983; Kospentaris et al., 2019; Lehmann, 2023; Caviedes et al., 2023a, 2023b). Así, la progresión se presenta como un instrumento que ofrece una base teórico-práctica para diseñar experiencias que promuevan el razonamiento geométrico y métrico en secundaria y para consolidar la comprensión del área como magnitud estructurada e invariante. Asimismo, esta progresión puede tener implicaciones para la formación del profesorado al funcionar como un instrumento teórico que permite interpretar evidencias de aprendizaje. Concretamente, su uso puede materializarse mediante el análisis de producciones reales de alumnado, guiado por la identificación de indicadores observables a cada nivel, el reconocimiento de desajustes entre procedimientos y significados del área, y el diseño de intervenciones de enseñanza más ajustadas con la investigación.

Agradecimientos

PID2023-149580NB-I00 (MCIN/AEI/10.13039/501100011033 y FEDER UE).

Referencias

- Caviedes, S., de Gamboa, G. y Badillo E. (2023a). Mathematical objects that configure the partial area meanings mobilized in task solving. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 54(6), 1092–1111. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1991019>
- Caviedes, S., De Gamboa, G. y Badillo Jiménez, E. R. (2023b). Conexiones matemáticas en la resolución de una tarea de área por estudiantes de 13-14 años. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 187–194). SEIEM.
- Caviedes, S., De Gamboa, G. y Badillo, E. (2024). Mathematical connections involved in area measurement processes. *Research in Mathematics Education*, 26(2), 237-257. <https://doi.org/10.1080/14794802.2024.2370333>
- Clements, D. H., Sarama, J., Van Dine, D. W., Barrett, J. E., Cullen, C. J., Hudyma, A., Dolgin, R., Cullen, A. y Eames, C. L. (2018). Evaluation of three interventions teaching area measurement as spatial structuring to young children. *The Journal of Mathematical Behavior*, 50, 23-41. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.12.004>
- Cobb, P., Confrey, J., DiSessa, A., Lehrer, R. y Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational researcher*, 32(1), 9-13. <https://doi.org/10.3102/0013189X032001009>
- Duval, R. (2017). *Understanding the mathematical way of thinking-The registers of semiotic representations*. Springer International Publishing. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-56910-9>

- Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Springer.
- Hatano, G. y Inagaki, K. (1986). Two courses of expertise. In H. W. Stevenson, H. Azuma, y K. Hakuta (Eds.), *Child development and education in Japan* (pp. 262–272). Henry Holt y Co.
- Heinze, A., Star, J. R. y Verschaffel, L. (2009). Flexible and adaptive use of strategies and representations in mathematics education. *ZDM Mathematics Education*, 41, 535–540. <https://doi.org/10.1007/s11858-009-0214-4>
- Hickendorff, M. (2022). Flexibility and adaptivity in arithmetic strategy use: What children know and what they show. *Journal of Numerical Cognition*, 8(3), 367–381. <https://doi.org/10.5964/jnc.7277>
- Huang, H. M. E. (2017). Curriculum interventions for area measurement instruction to enhance children's conceptual understanding. *Int J of Sci and Math Educ*, 15(7), 1323-1341. <https://doi.org/10.1007/s10763-016-9745-7>
- Kamii, C. y Kysh, J. (2006). The difficulty of “length× width”: Is a square the unit of measurement? *The Journal of Mathematical Behavior*, 25(2), 105-115. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2006.02.001>
- Kordaki, M. (2003). The effect of tools of a computer microworld on students' strategies regarding the concept of conservation of area. *Educational Studies in Mathematics*, 52(2), 177-209. <https://doi.org/10.1023/A:1024065107302>
- Kospentaris, G., Spyrou, P. y Lappas, D. (2011). Exploring students' strategies in area conservation geometrical tasks. *Educational Studies in Mathematics*, 77(1), 105-127. <https://doi.org/10.1007/s10649-011-9303-8>
- Lehmann, T. H. (2023). Learning to measure the area of composite shapes. *Educational Studies in Mathematics*, 112(3), 531-565. <https://doi.org/10.1007/s10649-022-10191-z>
- Rittle-Johnson, B. y Schneider, M. (2015). Developing conceptual and procedural knowledge in mathematics. In *Oxford handbook of numerical cognition* (pp. 1102–1118). Oxford University Press. <https://doi.org/10.1093/oxfordhb/9780199642342.013.014>
- Sarama, J. y Clements, D. H. (2009). *Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children*. Routledge.
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Academic Press.
- Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education* 26(2), 114-145. I: <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.26.2.0114>
- Simon, M. A. y Tzur, R. (2012). Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: An elaboration of the hypothetical learning trajectory. In D.H. Clements y J. Sarama (Eds.), *Hypothetical learning trajectories* (pp. 91-104). Routledge. <https://doi.org/10.4324/9780203063279>
- Star, J. R. y Newton, K. J. (2009). The nature and development of experts' strategy flexibility for solving equations. *ZDM*, 41(5), 557-567. <https://doi.org/10.1007/s11858-009-0185-5>
- Xu, L., Liu, R. D., Star, J. R., Wang, J., Liu, Y. y Zhen, R. (2017). Measures of potential flexibility and practical flexibility in equation solving. *Frontiers in Psychology*, 8, 1368. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2017.01368>
- Zacharos, K. (2006). Prevailing educational practices for area measurement and students' failure in measuring areas. *The Journal of Mathematical Behavior*, 25(3), 224-239. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2006.09.003>