

EXPLORANDO LA NO UNICIDAD DE LA GENERALIZACIÓN RECURSIVA EN SUCESIONES NUMÉRICAS

Exploring the non-uniqueness of recursive generalisation in numerical sequences

Trigueros, E.^a y Montejo-Gámez, J.^b

^aUniversidad Nacional de Costa Rica, ^bUniversidad de Granada

Resumen

Este trabajo investiga las estrategias recursivas y relaciones de recurrencia que surgen en la identificación de un patrón exponencial dado por una sucesión numérica, para lo que se analizaron las producciones escritas de 50 estudiantes de un curso de Ingeniería en Sistemas de la Universidad Nacional de Costa Rica. El análisis de los datos mostró el predominio de estrategias basadas en la conjeturación directa de una relación de recurrencia, que dieron lugar a relaciones lineales homogéneas de orden 2. Sin embargo, cuando el estudiantado añadió el análisis sistemático de las diferencias entre términos se incrementó la incidencia de relaciones no homogéneas de orden 1. Se observan así indicios de que la identificación de relaciones de recurrencia en ciertos patrones involucra habilidades de generalización altas. También se plantea que su presentación a través de sucesiones numéricas genera variedad de relaciones para el mismo patrón.

Palabras clave: Formación de Ingenieros, Recursividad, Pensamiento algebraico, Patrones, Relaciones de recurrencia

Abstract

This study investigates the recursive strategies and recurrence relations emerging when identifying an exponential pattern from a numerical sequence. To this aim, the written productions of 50 students in a Systems Engineering course at the Universidad Nacional de Costa Rica was analysed. Data analysis revealed the prevalence of strategies based on the direct conjecture of a recurrence relation. These were mainly associated with linear relations of order 2. However, when the students added a systematic analysis of the differences between terms increased the incidence of non-homogeneous relations of order 1. This provides signs that the identification of recurrence relations in certain nonlinear patterns is relevant for developing algebraic thinking. It is also raised that showing it through numerical sequences leads to emergence of different relationships for the same pattern.

Keywords: Engineer Education, Recursion, Algebraic Thinking, Patterns, Recurrence Relations

INTRODUCCIÓN, MARCO TEÓRICO Y PLANTEAMIENTO DE LA INVESTIGACIÓN

El aprendizaje de la recursividad es una cuestión de interés creciente para la educación matemática de alumnado de diferentes niveles educativos. Esto se debe no sólo a las últimas normativas curriculares que promueven el aprendizaje matemático desde el enfoque STEM, sino por la conexión existente entre los razonamientos de tipo recursivo y competencias matemáticas escolares como el pensamiento computacional (Bianco et al., 2024). Autores como Sandefur y Manaster (2022) subrayaron también la importancia del pensamiento recursivo para la resolución de problemas y el pensamiento algebraico, y demandaron más investigación sobre el aprendizaje de la recursividad.

El empleo de razonamientos de tipo recursivo cobra especial relevancia en los grados universitarios asociados a las Ciencias de la Computación (Hamouda et al., 2017), en los que la recursividad aparece de manera transversal en diferentes ramas de las matemáticas como la Lógica, la Teoría de Conjuntos

o la Matemática Discreta. Esto se refleja en el plan de estudios del grado universitario en el que se enmarca esta investigación, que en su primer año incluye cursos de matemáticas focalizados en el análisis de funciones de variable real, y en el segundo contempla un curso de Estructuras Discretas para la Informática. Esta materia pone el foco en las sucesiones numéricas, que constituyen un marco idóneo para trabajar la recursividad desde una formulación algebraica. En efecto, las sucesiones involucran de forma tácita una relación de dependencia funcional de los valores de la sucesión $a(n)$ respecto de su posición n . Además, si se concibe la recursividad a partir de aquellos objetos o procesos matemáticos cuya definición se generan en función de sí mismos (Rosen, 2019), cualquier relación que permita obtener el término $a(n)$ de una sucesión a partir de términos anteriores como son $a(n-1)$, $a(n-2)$, etc., ejemplifica el potencial de las sucesiones numéricas para trabajar la recursividad.

Además, atendiendo a lo anterior, la obtención del término general de una sucesión numérica $a(n)$ admite, al menos, dos tipos de formulación algebraica: (i) *Explícita*, que expresa la dependencia funcional de $a(n)$ respecto de n ; (ii) *Relación de recurrencia (RR)*, que es una igualdad que involucra diferentes términos de la sucesión (y puede también incluir funciones de n). Además, para este estudio son de interés las *RR lineales*, que son las que se pueden escribir de la forma $c_0 \cdot a(n) + c_1 \cdot a(n-1) + \dots + c_n \cdot a(0) = f(n)$, donde los valores c_i corresponden a constantes y $f(n)$ a una función. Del mismo modo, se hablará de *RR lineal homogénea* si $f(n)$ es idénticamente nula, y *no homogénea* en el resto de los casos (Murillo-Tsijli, 2018). Finalmente, se dice que una relación de recurrencia es de *orden k* cuando conecta el término $a(n)$ con los k términos anteriores de la sucesión, a saber, $a(n-1)$, $a(n-2)$, ..., $a(n-k)$. La identificación y escritura de fórmulas explícitas y *RR* asociadas a una sucesión numérica está conectada con las destrezas de pensamiento algebraico, lo que constituye el foco teórico del estudio.

Pensamiento algebraico desde la formulación de relaciones de recurrencia

La generalización es un aspecto que muchos autores reconocen como el corazón del razonamiento algebraico y el núcleo mismo de la actividad matemática (Kaput, 2008; Sterner, 2024). En este sentido, Kieran (2022) enfatizó la importancia de la generalización como integrante del pensamiento algebraico y señaló que la identificación de patrones es una actividad pertinente para su desarrollo, afirmación compartida por otros autores (Torres et al., 2023; Burgos et al., 2024).

Cuando se trabaja con patrones basados en sucesiones numéricas, de acuerdo a la discusión previa, se contemplan en principio dos tipos de generalización: aquella orientada a obtener la fórmula explícita, y la orientada a encontrar una relación de recurrencia. La investigación en educación matemática ha abordado de manera desigual estas dos posibilidades, ya que el grueso de los estudios sobre generalización de patrones se centra principalmente en los primeros años de la educación secundaria (p.e., Pérez et al., 2025), la educación primaria (p. e., Pinto y Cañadas, 2021; Narváez et al., 2025) o el profesorado de primaria (p.e., Vargas, 2025). En estos niveles, hay consenso entre los investigadores en que la generalización de un patrón incluye tres procesos clave: (i) identificar una característica común entre los elementos iniciales, (ii) extenderla a los siguientes términos y (iii) escribir una expresión que permita calcular cualquier término de la sucesión sin necesidad de observar todos los anteriores (Radford, 2013). En todas estas investigaciones se identifica el máximo nivel de generalización con la obtención de la relación funcional (la fórmula explícita), correspondiente al proceso (iii). La conexión entre términos consecutivos (la relación de recurrencia), vinculada al proceso (ii), se concibe como un nivel menor de generalización (p. e., Pinto y Cañadas, 2021; Stephens et al., 2017; Sterner, 2024, Pérez et al., 2025).

Es decir, en la literatura se interpreta la generalización a partir de la relación entre la posición n y el valor del patrón $a(n)$, que suele ser de tipo $a(n)=An+B$. En estos casos, la diferencia entre dos términos consecutivos es constante, por lo que la habilidad de generalización necesaria para desarrollar el proceso (ii) se percibe como baja. Sin embargo, hay casos en los que la capacidad de generalización relevante está asociada con las relaciones entre términos de la sucesión. Por ejemplo,

en una sucesión como $1, 7, 18, 34, 55, 81, \dots$, la diferencia entre términos consecutivos es $5n+1$. En este caso el proceso (ii), de extender la relación entre los primeros términos de la sucesión, conduce a identificar una *RR general*, lo que ya requiere una capacidad de generalización análoga a la investigada por la mayor parte de la literatura. La conexión con la recursividad de este tipo de capacidades hace pertinente su estudio en grados universitarios de ingeniería en informática, pero no se han encontrado antecedentes que lo hayan abordado. Esto llevó a desarrollar un estudio previo basado en el análisis de un patrón cuadrático dado por una representación pictórica (Trigueros y Montejo-Gámez, 2025). En dicha investigación se observó que el estudiantado de ingeniería optó mayoritariamente por la búsqueda de la relación de recurrencia general (en lugar de la fórmula explícita). La estrategia de mayor éxito se basó en la obtención de la sucesión numérica para los primeros casos y un proceso de análisis sistemático de las diferencias, que permitió generalizar la diferencia entre términos consecutivos de la sucesión, aunque evidenció dificultades para escribir en símbolos algebraicos la relación de recurrencia general.

En síntesis, se ha observado una primera evidencia de que la *generalización recursiva*, entendida como la identificación y escritura de relaciones de recurrencia generales asociadas a ciertos patrones no lineales, involucra habilidades propias de la generalización, tal y como esta se entiende usualmente en la literatura sobre pensamiento algebraico. Sin embargo, el estudio previo desarrollado planteó interrogantes sobre la naturaleza de estas habilidades. En primer lugar, surge su posible dependencia de la relación funcional involucrada en el patrón: hay indicios de que la introducción de patrones no lineales cuadráticos potencia la generalización recursiva, pero quedan dudas si esto ocurre en patrones como los exponenciales, que aparecen en la formación de ingenieros. Además, la estrategia de éxito mayoritario encontrada en Trigueros y Montejo-Gámez (2025) está relacionada con ideas trabajadas en el curso, por lo que se plantea qué ocurre en situaciones donde estas no conducen al éxito en la identificación del patrón. En segundo lugar, se intuye la relevancia de la representación en la que se presenta el patrón, ya que los patrones pictóricos pueden inducir ciertas formas de conteo que restrinjan la capacidad de generalización a expresar, restricción que no se da para las sucesiones numéricas. Finalmente, debe destacarse que la escritura de *RR* de patrones no lineales puede no ser única. Por ejemplo, se comentó previamente que la relación de recurrencia $a(n)=a(n-1)+5n+1$ permite definir la sucesión $1, 7, 18, 34, 55, 81, \dots$. Sin embargo, una experiencia previa de trabajo con patrones mostró a estudiantado que buscaron relaciones entre 1 y 7 con el 18, que luego se pudo extender al 7 y 18 con el 34, y así sucesivamente, lo que llevó a la relación de recurrencia $a(n)=2a(n-1)-a(n-2)+5$, encontrando así una relación distinta pero válida para la misma sucesión. En este contexto, es de interés ver qué relaciones de recurrencia pueden surgir para un patrón, y de qué depende la elección de uno u otro.

Pregunta de investigación

Los antecedentes descritos previamente conducen a plantear la siguiente pregunta de investigación: *¿Qué tipo de estrategias y relaciones de recurrencia utilizan los estudiantes de segundo año de ingeniería para generalizar un patrón exponencial escrito como sucesión numérica, y cuál es la conexión entre estrategias y relaciones de recurrencia?*

METODOLOGÍA

El presente estudio es parte de una investigación más amplia orientada a conocer y potenciar el aprendizaje de la recursividad del estudiantado de segundo año del grado en Ingeniería en Sistemas de la Universidad Nacional de Costa Rica, a partir del trabajo con patrones y sucesiones numéricas, entre otros. En este caso concreto, se llevó a cabo un análisis exploratorio y descriptivo a partir de datos cualitativos para responder a la pregunta de investigación planteada.

Participantes e instrumento de recogida de datos

Participaron un total de 50 estudiantes matriculados en los dos grupos del curso “Estructuras Discretas para Informática” durante el primer ciclo del año 2025. El curso contiene un tema centrado en la recursividad, que este estudiantado había cursado de forma previa a la investigación y que incluye la identificación de patrones usando diferentes representaciones que incluyen la notación de suma/serie, la fórmula explícita y las relaciones de recurrencia. Concretamente, cuando se realizó la recogida de datos se habían abordado estrategias específicas de cambio entre representaciones, como analizar diferencias o productos entre términos, así como técnicas matemáticas para encontrar la fórmula explícita de la sucesión a partir de diferentes tipos de relaciones de recurrencia (Vilchez, 2015).

Tarea. Considere la sucesión $a(n) = \{2, 2, 6, 10, 22, 42, 86\}$. A partir de ella, determine el n -ésimo término

El instrumento diseñado para la investigación de partida contenía 6 tareas sobre patrones: tres de ellos basados en una representación pictórica, dos basados en una situación contextualizada y una última basada en una sucesión numérica, que es la que se analiza en este estudio. Esta tarea fue seleccionada por las siguientes razones: (i) la sucesión propuesta representa un patrón exponencial escrito como secuencia numérica, de acuerdo a la pregunta de investigación. (ii) La escritura directa de su fórmula explícita (sin pasar por la relación de recurrencia) resulta complejo, ya que esta corresponde a: $a(n) = (4/3) 2^n + (2/3) (-1)^n$, con $n=0, 1, 2, \dots$ (iii) La técnica para obtener esta fórmula a partir de la relación de recurrencia se había trabajado previamente durante el curso, por lo que la expectativa inicial fue que el estudiantado abordara el patrón desde la relación de recurrencia indicada, en lugar de buscar directamente la relación explícita. Concretamente, la sucesión se puede obtener de forma recursiva a partir de la relación $a(n) = a(n-1) + 2(n-2)$ si $n > 1$, $a(0) = a(1) = 2$, sin embargo, esa relación no es única pues también se admite $a(n) = 2^n - a(n-1)$ para $n > 1$. Esto ilustra que (iv) la sucesión numérica propuesta se puede generalizar utilizando RR diversas.

Recogida y análisis de datos

Los participantes del estudio resolvieron la tarea integrada en el instrumento de seis tareas comentadas previamente, para lo que dispusieron de 2 horas. El estudiantado abordó las tareas de manera individual, en una sesión dirigida por un investigador, que era profesor de uno de los grupos, y el profesor del segundo grupo como observadores no participantes. El resultado de la sesión dio lugar a 50 producciones escritas con las resoluciones de la tarea desarrolladas por los estudiantes.

Para analizar cada una de las producciones recogidas, se identificaron en primer lugar las producciones de carácter recursivo. Estas fueron aquellas que apoyaron sus cálculos o expresiones para el término general de la sucesión usando los términos anteriores al buscado. El análisis de estas producciones fue desarrollado por uno de los investigadores y contrastado por el segundo de ellos, en torno a dos criterios. (a) Existencia (o no) de justificación que sustentara la relación ofrecida, y (b) relación numérica entre términos sobre la que se apoya la justificación dada (suma o diferencia entre términos). De esta manera, la clasificación de las producciones usando estos criterios dio lugar a tres categorías emergentes, que fueron denominadas *estrategias*, ya que recogen las tres formas en las que los participantes abordaron la tarea: *Fórmula Conjeturada*, *Análisis de Diferencias* y *Suma de Términos*, cuyas definiciones se describen en la sección de resultados. A continuación, se identificaron los tipos de RR especificadas en las producciones: *Lineal homogénea de orden 2*, *Lineal no homogénea de orden 1*, *Lineal no homogénea de orden 2*, y *Otras* y se elaboró una tabla de doble entrada (Tabla 1 debajo) para visualizar la incidencia de las relaciones de recurrencia utilizadas en cada categoría de estrategias, lo que permitió discutir la conexión entre estrategias y relaciones de recurrencia. En esa tabla se registraron el número de producciones que identificaron correctamente el patrón, con la intención de visualizar el éxito de cada tipo de estrategia y relación encontradas.

RESULTADOS

Entre las 50 producciones recogidas se contabilizaron 8 que no dieron respuesta, o esta no era identificable, una producción que muestra un intento por responder usando directamente una fórmula explícita, y 41 producciones que abordaron la tarea bajo una lógica recursiva. Los resultados del análisis de estrategias y relaciones de recurrencia que se realizó con estas se muestran en la Tabla 1.

Tabla 1

Recuento de estrategias y relaciones de recurrencia identificadas entre las producciones que utilizaron estrategias recursivas. Entre paréntesis se contabilizan las que identificaron correctamente el patrón

Relación de recurrencia	LHO2	LNO1	LNO2	Otras	NE	Total
Estrategia						
Fórmula Conjeturada (FC)	14 (14)	7 (7)	1 (1)	1	1	24 (22)
Análisis de Diferencias (AD)	1 (1)	-	-	3	4	8 (1)
FC y AD	2 (2)	5 (3)	1	-	-	8 (5)
Suma de Términos	-	-	-	-	1	1
Total	17 (17)	12 (10)	2 (1)	4	6	41 (28)

Nota: LHO2 = Lineal homogénea de orden 2, LNO1 = Lineal no homogénea de Orden 1, LNO2 = Lineal no homogénea de orden 2, NE= No escribe relación de recurrencia

Respecto a las estrategias empleadas para identificar el patrón, se encontró que la categoría *FC* fue la más exitosa, ya que apareció como estrategia exclusiva en un total de 24 ocasiones y en 22 de ellas permitió identificar una relación de recurrencia correcta. Esta categoría incluye aquellas producciones que obtuvieron una fórmula recursiva sin justificación, desde la observación directa de la sucesión numérica: en algunas ocasiones se aporta evidencia de comprobación *a posteriori* de la conjetura encontrada (p. e., Figura 1a) y en otras no (Figura 1d). A continuación, se observó que la categoría *AD* emergió como estrategia exclusiva en un total de 8 ocasiones, pero solo en una de ellas condujo a una relación de recurrencia correcta. Esta categoría recoge producciones que obtuvieron de manera sistemática las diferencias entre términos consecutivos de la sucesión numérica, entre las diferencias de esas diferencias, o bien entre dos términos de forma alternada, por ejemplo $a(5)$ con $a(3)$, $a(6)$ con $a(4)$, etc. Se encontraron además 8 casos que combinaron estos dos tipos de estrategias dentro de la misma producción (Figuras 1b y 1e), y 5 de ellos con éxito en la identificación del patrón. En estos casos, el análisis de las diferencias no guardó relación con la *RR* formulada. La última estrategia observada, de carácter anecdótico, fue *Suma de Términos*, que apareció solo en una ocasión (sin éxito), y consistió en sumar todos los términos anteriores a $a(n)$ para relacionarla con este término.

Con respecto a las *RR* obtenidas y su conexión con las estrategias, el tipo de relación que se presentó con mayor frecuencia (17 veces) fue la *LHO2* (Figura 1a y 1e), que surgió principalmente en estrategias de *FC*. Además, todas las producciones que usaron este tipo de relación fueron exitosas para identificar el patrón. El segundo tipo de relación utilizada (12 veces) fue la *LNO1*, que surgió en 7 ocasiones de la conjeturación directa (Figura 1d), dando siempre la *RR* exitosa, y en otras 5 en combinación con el *AD*, lo que originó 3 relaciones que describían correctamente el patrón. Atendiendo a los datos, se observó que la vía mayoritaria para obtener este tipo de relaciones fue la de descubrir que $a(n)$ se obtiene a partir del doble de $a(n-1)$, agregándole o restándole 2 (dependiendo si la posición a obtener era par o impar). En algunos casos se encontró que los estudiantes escribían ese comportamiento como $2(-1)^n$, y otros lo indicaban de forma textual (Figura 1b). Dentro de la categoría de relaciones no homogéneas de orden 1 también se observó una producción que identificó, tras el análisis de las diferencias, el término $a(n)$ de la sucesión partiendo de una potencia de 2 a la que restó el término $a(n-1)$, véase la Figura 1c. Un tercer tipo de relación encontrada, más minoritaria, fueron las *LNO2*, que se encontró en dos producciones. Una de ellas tomaba también como base una potencia de 2, y le sumaba el término $a(n-2)$ (Figura 1d). En la segunda ocasión, la respuesta sumaba

dos términos anteriores más la posición. Finalmente, se recogieron en la categoría *Otras*, algunas relaciones de orden 3 y otras donde se multiplicaban términos anteriores, aunque ninguna identificó el patrón correctamente.

Figura 1

Ejemplos de estrategias y relaciones de recurrencia recogidas en el estudio

2. Considere la sucesión $a_n = \{2, 2, 6, 10, 22, 42, 86, \dots\}$. A partir de ella determine el enésimo término. a $a_n = \begin{cases} 2 & \text{si } n=0 \\ 2 & \text{si } n=1 \\ a_{n-1} + a_{n-2} \cdot 2 & \text{si } n > 1 \end{cases}$ $\begin{aligned} a_0 &= a_5 + a_4 \cdot 2 \\ a_5 &= a_4 + a_3 \cdot 2 \\ a_4 &= a_3 + a_2 \cdot 2 \\ a_3 &= a_2 + a_1 \cdot 2 \\ a_2 &= a_1 + a_0 \cdot 2 \\ a_1 &= 2, a_0 = 2 \\ a_2 &= 2 + 2 \cdot 2 = 6 \\ a_3 &= 6 + 2 \cdot 2 = 10 \\ a_4 &= 10 + 6 \cdot 2 = 22 \\ a_5 &= 22 + 10 \cdot 2 = 42 \\ a_6 &= 42 + 22 \cdot 2 = 86 \end{aligned}$	b Si n es par $a_n = a_{n-1} \cdot 2$ Si n es impar $a_n = a_{n-1} \cdot 2$
c Indice Números pares -2 " " impares $+2$ $\begin{aligned} a_0 &= 2 \\ a_1 &= 2 \\ a_2 &= 6 \\ a_3 &= 10 \\ a_4 &= 22 \\ a_5 &= 42 \\ a_6 &= 86 \end{aligned}$ $\begin{aligned} 0 &= 2 - 2 = a_0 - 2 \\ 4 &= 2 + 2 = a_1 + 2 \\ 6 &= 6 - 2 = a_2 - 2 \\ 12 &= 10 + 2 = a_3 + 2 \\ 20 &= 22 - 2 = a_4 - 2 \\ 44 &= 42 + 2 = a_5 + 2 \end{aligned}$ $a_n = 2^{n+1} - a_{n-1}, \quad n > 0, \quad a_0 = 2$	e 2. Considere la sucesión $a_n = \{2, 2, 6, 10, 22, 42, 86, \dots\}$. A partir de ella determine el enésimo término. $a_n = \{2, 2, 6, 10, 22, 42, 86, \dots\}$ $b_n = \{4, 12, 20, 44\}$ $\{2 \cdot 2, 2 \cdot 2, 6 \cdot 2, 10 \cdot 2, 22 \cdot 2\}$ $a_2 = 6$ $a_2 = 2 + 4 = a_1 + b_0$ $a_2 = 2 + 2(2) = a_1 + 2a_0$ El enésimo término se determina con la fórmula: $a_n = \begin{cases} 2, & \text{si } n=0 \\ 2, & \text{si } n=1 \\ a_{n-1} + 2a_{n-2}, & \text{si } n > 1 \end{cases}$
d $\{2, 2, 6, 10, 22, 42, 86, \dots\}$ F. $a_{n-2} + 2^n; \quad n \geq 2$	

INTERPRETACIÓN Y DISCUSIÓN

Los resultados muestran la prevalencia de aproximaciones recursivas frente a las que buscaron encontrar la forma explícita del término general de la sucesión. Los datos de la Tabla 1, además, reflejan un grupo de estudiantes razonablemente numeroso que visualizaron alguna relación de recurrencia correcta para el patrón propuesto sin necesidad de justificación, lo que apoya la hipótesis de que la identificación de relaciones entre términos de una sucesión numérica estimula capacidades de generalización. Esto contrasta en apariencia con resultados como los de Pinto y Cañadas (2021) o Sterner (2024), que interpretaron la identificación de estas relaciones como descriptores de bajos niveles de generalización. No obstante, la hipótesis de que la relación funcional subyacente al patrón es relevante para activar estas habilidades cobra fuerza a partir de los datos recogidos. En efecto, de forma coherente a lo obtenido en Trigueros y Montejo-Gómez (2025) para un patrón cuadrático, el presente estudio ofrece indicios de que un patrón exponencial también estimula capacidades de generalización para expresar relaciones entre términos en lugar de la fórmula explícita de un patrón, ya que esta es compleja, pero hay *RR* asociadas a la sucesión y accesibles al estudiantado.

La Tabla 1 también muestra un grupo importante de participantes (8 AD + 8 FC y AD) que recurrieron al análisis sistemático de las diferencias trabajadas en el curso. Si bien es cierto que muchos de ellos no tuvieron éxito, situación que se esperaba para el patrón propuesto dadas sus características, se han registrado casos que supieron aprovechar el contenido escolar para identificar al patrón. En este sentido, se ha observado con sorpresa la aparición de relaciones no homogéneas de orden 1 (Figura 1b y 1e) e incluso 2 (Figura 1d), que incluyen el uso de potencias de dos (quizá porque los casos base originales son iguales a 2), y que también reflejan la aparición de habilidades de generalización.

En cuanto al uso de *RR* y su distribución en función de las estrategias utilizadas, es destacable que se han encontrado dos tipos de *RR* exitosas y con frecuencia importante dentro de este estudio. De forma coherente a lo señalado, el estudiantado que proporcionó la fórmula de manera directa obtuvo con mayor frecuencia la relación lineal homogénea de orden 2, pero en 8 casos también obtuvo relaciones no homogéneas. Por su parte, hubo menos producciones que se apoyaron en el *AD* frente al estudio previo (Trigueros y Montejo-Gámez, 2025), y estas identificaron mayormente relaciones de orden 1, posiblemente debido a las características de esta estrategia, que pone el foco en las relaciones entre términos estrictamente consecutivos, que en este caso requería identificar una potencia de 2. Este resultado ilustra el potencial de la tarea para originar riqueza de relaciones de recurrencia a pesar de que el patrón admite una única forma explícita. Aunque la acción de los dos grupos de estudiantes mencionados (los *intuitivos*, que conjeturaron, y los *sistemáticos* que analizaron diferencias) puede ser una razón que explique esta variabilidad, es posible que el uso de la representación de sucesión numérica para presentar el patrón (frente a la pictórica) haya sido un factor también relevante.

CONCLUSIONES

El presente estudio da cuenta de las estrategias y relaciones de recurrencia que usa el estudiantado de ingeniería de sistemas para analizar un patrón exponencial presentado a través de una sucesión numérica. Se ha observado que la formulación de relaciones de recurrencia puede estimular capacidades de generalización útiles en la formación de ingenieros por su conexión con la recursividad y su potencial para generar escrituras algebraicas diversas de un mismo patrón. Esta es la mayor contribución del trabajo, ya que el grueso de la literatura sobre patrones se centra en otros niveles educativos y asocia la generalización a la representación de su (única) fórmula explícita.

En respuesta a la pregunta de investigación, se han encontrado una mayoría de estudiantes que conjeturaban de forma directa relaciones lineales homogéneas de orden 2. Además, aquellos participantes en el estudio que llevaron a cabo también el *AD* ofrecieron mayor incidencia de relaciones no homogéneas de orden 1. Estos hallazgos indican que la presentación de patrones no lineales por medio de sucesiones numéricas genera variedad de relaciones para el mismo patrón, y trabaja un tipo particular de generalización que admite varias escrituras algebraicas, lo que presenta una riqueza que se debe seguir explorando. Estas apreciaciones son consistentes con las de Sandefur y Manaster (2022), que subrayaron la conexión entre el pensamiento recursivo y el algebraico.

En cuanto a las limitaciones del estudio, deben señalarse las siguientes. En relación con el enunciado de la tarea, se considera que los resultados habrían sido más ricos si se hubiera solicitado justificación, o la especificación de términos cercanos, como es usual en la literatura. Por otra parte, es posible que ubicar la tarea analizada en un instrumento más amplio pueda haber conducido a respuestas de menor calidad que hacerlo de forma aislada, debido al eventual cansancio de los estudiantes, o que los participantes pudieran abordar esta tarea condicionados por tareas anteriores en el instrumento. También es necesario mencionar el sesgo de los resultados obtenidos que se deriva de haber efectuado la recogida de datos tras el curso. En efecto, se ha encontrado una frecuencia alta de estrategias de análisis de diferencias, que probablemente sería más baja si la recogida de datos se hubiera hecho previa al curso. Este factor será tenido en cuenta en próximas investigaciones que incluirán recogidas de datos previas y posteriores a la celebración del mismo. Otra línea de trabajo futura es determinar qué tipo de tareas son más útiles para estimular las habilidades de generalización recursiva que, en particular, incluye contrastar si el uso de secuencias numéricas genera mayor riqueza de *RR*. Finalmente, es de interés identificar las habilidades de generalización asociadas a la formulación de relaciones de recurrencia generales. Esto permitiría valorar el interés de la generalización recursiva en contextos educativos más amplios al analizado, y se deja para futuras investigaciones.

Referencias

- Bianco, G., Donatiello, A. y Nicchiotti, B. (2024). Fibonacci numbers between history, semiotics, and storytelling: The birth of recursive thinking. *Education Sciences*, 14(4), 394. <https://doi.org/10.3390/educsci14040394>
- Burgos, M., Tizón-Escamilla, N. y Godino, J. D. (2024). Expanded model for elementary algebraic reasoning levels. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 20(7), em2475. <https://doi.org/10.29333/ejmste/14753>
- Hamouda, S., Edwards, S. H., Elmongui, H. G., Ernst, J. V. y Shaffer, C. A. (2017). A basic recursion concept inventory. *Computer Science Education*, 27(2), 121–148. <https://doi.org/10.1080/08993408.2017.1414728>
- Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? En J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5–17). Taylor & Francis.
- Kieran, C. (2022). The multi-dimensionality of early algebraic thinking: background, overarching dimensions, and new directions. *ZDM Mathematics Education*, 54, 1131–1150. <https://doi.org/10.1007/s11858-022-01435-6>
- Murillo-Tsijli, M. (2018). *Introducción a la matemática discreta* (5 ed.). Editorial Tecnológica de Costa Rica.
- Narváez, R., Adamuz-Povedano, N. y Cañadas, M. C. (2025). Análisis bibliométrico sobre pensamiento algebraico en educación infantil y primaria en Scopus. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 27, 43-65. <https://doi.org/10.35763/aiem27.5825>
- Pérez, O., De Gamboa, G. y Badillo, E. (2025). Análisis de las estrategias de generalización utilizadas por el alumnado de secundaria en la resolución de tres versiones de una secuencia de tareas de generalización de patrones lineales. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. 349–356). SEIEM.
- Pinto, E. y Cañadas, M. C. (2021). Generalizations of third and fifth graders within a functional approach to early algebra. *Mathematical Education Research Journal*, 33, 113–134. <https://doi.org/10.1007/s13394-019-00300-2>
- Radford, L. (2013). En torno a tres problemas de la generalización. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina y I. Segovia (Eds.), *Investigación en didáctica de la matemática: Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 3–12). Editorial Comares.
- Rosen, K. H. (2019). *Discrete mathematics and its applications* (8th ed.). McGraw-Hill Education.
- Sandefur, J. y Manaster, A. B. (2022). Encouraging research on recursive thinking through the lens of a model of the spread of contagious diseases. *ZDM Mathematics Education*, 54, 895–907. <https://doi.org/10.1007/s11858-022-01354-6>
- Stephens, A. C., Fonger, N., Strachota, S., Isler, I., Blanton, M., Knuth, E. y Murphy Gardiner, A. (2017). A Learning Progression for Elementary Students' Functional Thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, 19(3), 143–166. <https://doi.org/10.1080/10986065.2017.1328636>
- Sterner, H. (2024). Using graphical representations to develop students' correspondence relationships and covariational thinking in pattern generalizations in primary school. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 23, 1573–1597. <https://doi.org/10.1007/s10763-024-10520-z>
- Torres, M. D., Moreno, A., Vergel, R. y Cañadas, M. C. (2023). The evolution from “I think it plus three” towards “I think it is always plus three.” Transition from arithmetic generalization to algebraic generalization. *International Journal of Science and Mathematics Education. Advance online publication*, 22, 971–991. <https://doi.org/10.1007/s10763-023-10414-6>
- Trigueros-Rodríguez, E. y Montejo-Gámez, J. (2025). Formulación de relaciones de recurrencia utilizadas por estudiantes de ingeniería para la identificación de patrones. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. 445–452). SEIEM.
- Vargas, M. F. (2025). Conocimiento algebraico de futuros docentes de primaria: el caso de los patrones y sucesiones. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. 461–468). SEIEM.
- Vílchez Quesada, E. (2015). *Estructuras discretas con Mathematica*. Alphaomega.