Tipología de errores en la identificación de demostraciones formales *basadas en* argumentos informales

Error typology in the identification of formal proofs *based on* informal arguments

Carla Acosta-Hernández, Isabel Marrero, Matías Camacho-Machín
Departamento de Análisis Matemático · Universidad de La Laguna

SEIEM2026 XXIX SIMPOSIO - MADRID

Universidad de La Laguna

1. Introducción y objetivos

En Acosta-Hernández et al. (2024), analizamos las respuestas de 22 estudiantes de cuarto curso del Grado en Matemáticas a un cuestionario de *juicios FBI* (*Formal proof Based on Informal arguments:* decidir si una demostración formal se *basa en* un argumento informal dado), adaptado de Zazkis & Villanueva (2016). Las tasas de éxito obtenidas por los participantes sugerían que su formación avanzada facilita, parcialmente, la conexión entre la intuición geométrica y su formalización analítica. En este trabajo se profundiza en dicho análisis, con el objetivo de caracterizar los errores y dificultades al conectar argumentos informales con demostraciones formales. Nos cuestionamos:

- ***¿Qué errores sistemáticos cometen los estudiantes al justificar sus juicios FBI y qué concepciones revelan?***
- ***¿Garantiza la formación avanzada la competencia conceptual, además de la de reconocimiento?***

Objetivos específicos

- Revisar críticamente la investigación reciente sobre enseñanza y aprendizaje de la demostración.
- Replicar y extender el estudio de Zazkis & Villanueva con estudiantes de último curso.
- Analizar la competencia conceptual, no solo la de reconocimiento, en la formalización.
- Derivar implicaciones didácticas para los cursos de transición cálculo–análisis.

2. Marco conceptual

- **Argumento informal:** recurre a la visualización matemática, sin ajustarse a las normas formales. Es un apoyo provisional a la demostración.
- **Demostración formal:** argumento deductivo ajustado a las normas del sistema verbal-simbólico.
- **Relación «basada en» (*based on*):** traducción rigurosa de las ideas nucleares del argumento informal al lenguaje formal.
- **Juicio FBI** (*Formal proof Based on Informal arguments judgment*): tarea cognitiva por la que un estudiante juzga si una demostración formal está «basada en» un argumento informal dado, y justifica su decisión.

¿Qué tienen en cuenta los estudiantes al formular sus juicios FBI? Los cuatro Focos de Atención de Zazkis & Villanueva

- **F1** **Estructural:** Encadenamiento lógico de las inferencias.
- **F2** **Contenido:** Elementos concretos presentes o ausentes.
- **F3** **Metodológico:** Método de demostración empleado (contradicción, inducción...).
- **F4** **Holístico:** Idea, estilo u objetivo global del argumento/prueba.

3. Metodología y diseño

- **Participantes:** 22 estudiantes de 4º curso del Grado en Matemáticas (ULL), con formación en análisis, álgebra e introducción a la demostración.
- **Instrumento:** cuestionario escrito con 3 tareas FBI (argumento informal + prueba correcta + distractora), adaptado de Zazkis & Villanueva; justificación de 8-10 líneas y tabla de correspondencias.
- **Entrevistas semiestructuradas** a dos estudiantes (EA, EB).

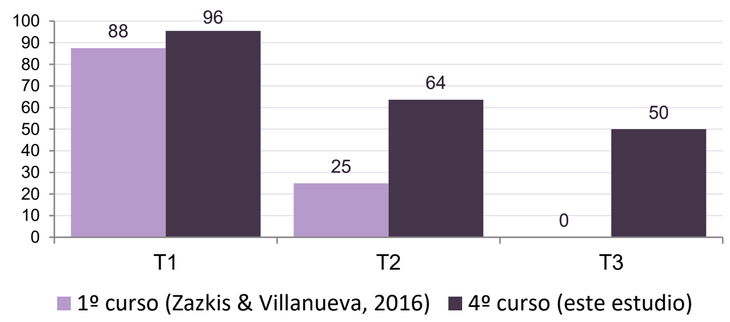
Tarea	Contenido	Ámbito
T1	Integral de $\text{sen}^3(x)$ en intervalo simétrico respecto al origen	Algebraico
T2	Unicidad del límite de una sucesión	Lógico
T3	Derivada de una función par es impar	Geométrico

Dos niveles de competencia

- **Reconocimiento:** capacidad de identificar correctamente, de manera binaria, qué demostración formal está «basada en» un argumento informal dado.
- **Conceptual:** capacidad para identificar y verbalizar explícitamente las conexiones conceptuales entre los argumentos informales y las demostraciones formales.

4. Competencia de reconocimiento

Porcentaje de éxito en el juicio FBI, por tarea



Persiste el patrón de Z&V: el grado de dificultad T1 < T2 < T3 se mantiene inalterado en ambos grupos; la brecha T1-T3 baja de 87.5 a 45.5 pp, pero no desaparece; T3 es un «núcleo duro» resistente a la formación avanzada.

5. Competencia conceptual

Identificación de criterios

Tarea	Nº criterios	% identificación
T1	2 criterios	77.3 – 81.8 %
T2	3 criterios	50.0 – 54.5 %
T3	3 criterios	36.4 %

Calidad de las justificaciones

Tarea	Bien	Regular	Mal	% acierto
T1	36.4%	45.5%	18.2%	**95.5%**
T2	40.9%	13.6%	45.5%	**63.6%**
T3	**18.2%**	18.2%	63.6%	**50.0%**

*En T3, tan solo el 18.2 % articula «Bien» aun cuando el 50 % acierta: **el reconocimiento precede a la comprensión articulatoria**.*

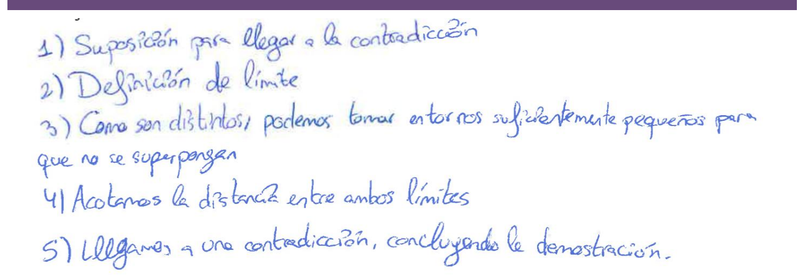
6. Tipología de errores

Cód.	Descripción	T2	T3
M1	Valoración superficial (“más claro”, “más analítico”)	3	4
M2	Confusión solapamiento / separación de entornos	3	0
M3	“Dos lugares a la vez” interpretado como igualdad	2	0
M4	Desconexión entre tangente y derivada como límite	**0**	**5**
M5	Sobregeneralización de la regla de la cadena	**0**	**5**
O6	Justificaciones vagas o imprecisas	2	2

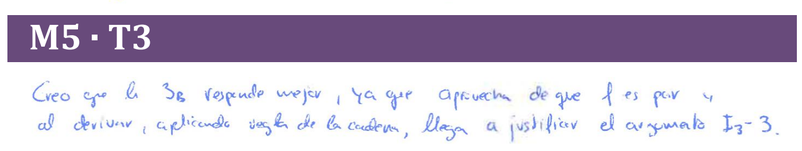
M1 · T1



M2 · T2



M5 · T3



M4 y M5 concentran 10 de los 16 errores en T3: la intuición geométrica no llega a formalizarse (M4) o el formalismo prescinde de ella (M5).

Focos en aciertos «Bien», por tarea

Tarea	Focos integrados
T1	F2 (imparidad) + F4 (compensación)
T2	F1 (absurdo) + F2 (elección de ε)
T3	F2 (definición) + F4 (simetría) + F1 (límite)

Los aciertos «Bien» integran varios Focos a la vez (p. ej. en T3: contenido + holístico + estructural). Los errores priorizan un único Foco de forma excluyente, típicamente el metodológico (regla de la cadena, M5).

7. Análisis de casos

- La **estudiante A** (M1, M5) consideró la regla de la cadena «más clara» y la sobregeneralizó como traslación del argumento geométrico.
- La **estudiante B** priorizó la perspectiva docente sobre la fidelidad conceptual, aunque solo se percató de ello durante la entrevista.

8. Conclusiones

- Se mantiene el patrón de dificultad T1 < T2 <T3, con independencia del nivel formativo. La transición de la geometría al análisis es un núcleo duro de la formalización.
- La competencia de reconocimiento mejora notablemente con la formación avanzada. Los estudiantes muestran una *concepción en transición* que supera a la *concepción infradesarrollada* observada por Zazkis & Villanueva.
- Sin embargo, los avances en la competencia conceptual son frágiles: persiste una visión instrumental, influenciable por consideraciones procedimentales y valorativas.
- La visualización es necesaria, pero no suficiente, para la comprensión de la prueba formal.
- Se recomienda instrucción explícita con actividades de juicio FBI que tiendan puentes entre intuición y rigor.

Referencias

Acosta-Hernández, C., Camacho-Machín, M. y Marrero, I. (2024). *Investigación en Educación Matemática XXVII*. SEIEM.

Zazkis, D., y Villanueva, M. (2016). *Int. J. Res. Undergrad. Math. Ed.*, *2*, 318–337.

Investigación subvencionada por el proyecto PID2022-139007NB-I00 (MICIU-AEI/FEDER).