PERFILES DE CONCEPCIONES DE LA RECTA TANGENTE ENTRE ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS DE CIENCIAS: UN ANÁLISIS DE CLASES LATENTES

Profiles of tangent line conceptions among undergraduate science students: A Latent Class Analysis

Giovani González, Isabel Marrero y Matías Camacho-Machín
Departamento de Análisis Matemático | Universidad de La Laguna

ANTECEDENTES Y PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

Investigaciones previas sugieren que el concepto de recta tangente a una curva se introduce de forma fragmentada en la enseñanza de las Matemáticas, lo cual , eventualmente, genera concepciones erróneas en el alumnado, que persisten hasta su paso a la Universidad.

Orts et al. (2016) muestran, mediante un análisis epistemológico y curricular del concepto, que la tangente se introduce desde su perspectiva geométrica en la ESO, y analíticamente en Bachillerato, sin establecer una conexión explícita entre ambas visiones. Biza et al. (2008) presentan un estudio con estudiantes griegos de último curso de Secundaria en el que analizan la concepción de tangente que tienen tras cursar las asignaturas de Geometría y Análisis, mediante un cuestionario de preguntas teórico-prácticas y un posterior análisis de clases latentes (LCA). Desde una perspectiva histórica y epistemológica del concepto, distinguen tres concepciones de recta tangente que ayudan a justificar los errores conceptuales del alumnado: la euclídea, en la que la recta tangente toca a la curva sin cortarla; la cartesiana, en la que la recta tangente es entendida como el límite del cociente incremental; y la leibniziana, en la que la recta tangente es la prolongación de uno de los segmentos infinitesimales que forman la curva. Hogue y Scarcelli (2021) evidencian que muchas de las concepciones erróneas que tiene el alumnado se corresponden con las que arrastra el profesorado, lo que apunta a un problema de origen didáctico.

La pregunta que dirige esta investigación es: *¿Cuáles son las dificultades, obstáculos y errores conceptuales que presentan los estudiantes universitarios de Ciencias y Tecnología sobre la recta tangente?*

MARCO CONCEPTUAL

Nuestro estudio se sustenta en los constructos de *concept image* y *concept definition* (Tall y Vinner, 1981). El primero de ellos se refiere a la estructura cognitiva, no necesariamente correcta ni completa, que un individuo asocia a un concepto concreto, y que puede incluir imágenes mentales, propiedades y contextos donde aplicarlo. Por su parte, el segundo constructo designa toda formulación verbal que especifica un concepto, ya sea formal o personal.

Socas (1997) entiende que las dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas son de naturaleza diversa, y se conectan y refuerzan en redes complejas que se concretan, en la práctica, en forma de obstáculos, y se manifiestan en los estudiantes en forma de errores. El obstáculo se entiende como conocimiento previo útil para el alumno en su contexto original, pero que actúa como barrera para comprender conceptos más abstractos. Similarmente, el error no se corresponde con la ausencia de conocimiento, sino con la manifestación de un sistema cognitivo interiorizado que resulta insuficiente en un nuevo contexto.

En su investigación, Biza et al. (2008) determinan tres perspectivas de la recta tangente: la Geométrica Global (GG), heredada del estudio de la circunferencia; la Analítica Local (AL), que concibe la recta tangente como el límite de las rectas secantes en un entorno del punto de tangencia; y la Intermedia Local (IL), que combina elementos de ambas visiones sin identificarse plenamente con ninguna. Cada una de estas perspectivas están caracterizadas por un conjunto de siete factores influyentes (F1-F7), que recogen aspectos concretos de la relación entre una curva y su tangente. La correspondencia entre factores influyentes (F1-F7) y perspectivas (GG, AL, IL) se recoge en la Tabla 1.

Perspectiva	Conceptos dominantes	Factores
Analítica Local	La recta tangente: • puede tener más de un punto en común con la curva; • existe en un punto de inflexión; • puede coincidir con la curva; y • no existe en un punto anguloso.	F1, F2, F3, F4, F5, F6, F7
Intermedia Local	La recta tangente: • puede tener más de un punto en común con la curva, pero existe un entorno del punto de tangencia en el que no hay otro punto común entre la recta y la curva; • no existe en un punto de inflexión; y • no existe en un punto anguloso.	F1, F2, F5, F6, F7
Geométrica Global	La recta tangente: • tiene un único punto en común con la curva y deja la curva en el mismo semiplano, o tiene un único punto en común con la curva y puede existir en un punto de inflexión; • puede existir en un punto anguloso.	F1, F7

Tabla 1

METODOLOGÍA

En nuestro estudio, adoptamos los siete factores influyentes anteriormente mencionados e incorporamos un octavo, F8, relativo a la existencia o no de tangente vertical. Como instrumento de investigación, se diseñó un cuestionario que fue administrado vía Moodle a un total de 100 estudiantes de Ciencias Ambientales, Química e Ingeniería Química de la Universidad de La Laguna, adaptado parcialmente de Biza et al. (2008) y conteniendo: preguntas de tipo abierto (por ejemplo, definir qué es la recta tangente a una curva), preguntas de elección única o múltiple (en las que el estudiante marca aquellos factores influyentes que considera válidos), y una pregunta con ocho subitems apoyados en representaciones gráficas con GeoGebra (en los que el estudiante debe decidir si la recta indicada es o no tangente a la curva). Esta última ilustra los casos más conflictivos en la literatura: tangente en puntos de inflexión (F4), tangente vertical (F8), tangente con infinitos puntos de contacto (F3) y tangente a secciones cónicas (F7). Se estableció una biyección entre siete subítems y los factores influyentes F1-F5, F7-F8), además de incluir un caso control (CC) para detectar respuestas irreflexivas. Por último, las preguntas 4, 5, 6 y 7 del cuestionario, de tipo calculístico, se relacionan con F6. La Tabla 2 resume la descripción de cada factor influyente, así como la correspondencia entre cuestiones y factores.

Factor	Descripción	Ítem
F1	Único punto en común con la curva	3.4
F2	Único punto en común en un entorno del punto de tangencia	3.1
F3	Infinitos puntos en común en un entorno del punto de tangencia	3.6
F4	Tangente en un punto de inflexión	3.3
F5	No hay tangente en un punto anguloso	3.7
F6	Manipulación simbólica de la tangente	4, 5, 6, 7
F7	Tangente a secciones cónicas	3.5
F8	Tangente vertical*	3.8
-	Control de validez	3.2

*Propuesta por los autores.

Tabla 2

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Los datos (Figura 1) muestran que aparecen más dificultades en los ítems más exigentes del cuestionario, tales como la tangente en puntos de inflexión (F4), la tangente con infinitos puntos de contacto (F3) y la tangente vertical (F8), todos ellos con un porcentaje de acierto entre el 14% y el 37%, muy por debajo de la media (61,6%). La pregunta 4, relativa a la fórmula de la recta tangente a una curva, obtiene únicamente un porcentaje de acierto del 16%, y casi 30 de los encuestados no la responden. Las preguntas 5, 6 y 7 arrojan mejores resultados (60% de acierto), siendo la pregunta 5 la de mejor desempeño (63%) y la 7, la de peor (54%).

El posterior análisis LCA, aplicado sobre 12 variables vinculadas a los factores influyentes, identificó un modelo óptimo de 3 perfiles de alumnos, con probabilidades medias de pertenencia superiores al 91%. Estos perfiles pueden asociarse, con matices, a las perspectivas de Biza et al. (2008): la Clase 3 (49 estudiantes) se corresponde con la perspectiva IL, mostrando un dominio sólido de la mayoría de los factores; la Clase 1 (38 estudiantes) se aproxima a la perspectiva AL, con buenos resultados conceptuales pero baja capacidad de cálculo explícito (F6); y la Clase 2 (13 estudiantes) refleja la perspectiva GG, con una concepción restrictiva basada casi exclusivamente en criterios visuales (Figura 2 y Tabla 3).

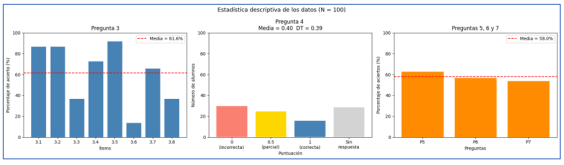


Figura 1

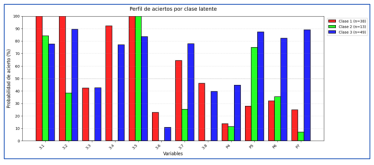


Figura 2

Clase	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	P4	P5	P6	P7	Medio
1	100,0	100,0	42,3	92,2	100,0	22,8	64,4	46,1	13,6	27,9	31,9	24,9	55,5
										24,6			
2	84,1	38,4	0,0	0,0	100,0	0,0	25,3	0,0	11,5	74,9	35,4	6,9	31,4
										32,2			
3	77,6	89,5	42,5	77,0	83,7	10,8	77,8	39,5	44,6	87,4	82,2	89,0	66,8
										75,8			
Global													51,2

Tabla 3

Finalmente, ni variables como la nota PAU ni los estudios cursados con anterioridad predicen significativamente la clase de pertenencia ($p > 0,05$ en ambos casos). Esto refuerza la hipótesis de que las dificultades observadas tienen un carácter didáctico y no dependen del expediente académico del estudiante.

CONCLUSIONES E IMPLICACIONES DIDÁCTICAS

Los resultados confirman que la concepción geométrica de la tangente, heredada de la circunferencia, actúa como obstáculo cognitivo ante casos más complejos. Se recomienda:

- Diseñar secuencias de enseñanza que integren las distintas concepciones de la recta tangente.
- Incluir la concepción leibniziana de la recta tangente y su relación con las demás perspectivas.
- Hacer uso de GeoGebra y otros sistemas de geometría dinámica en el aula.
- Apostar por el aprovechamiento didáctico del error y un diseño curricular que anticipe estos obstáculos.

REFERENCIAS

Biza, I., Christou, C. y Zachariades, T. (2008). Student perspectives on the relationship between a curve and its tangent in the transition from Euclidean geometry to analysis. *Research in Mathematics Education, 10*(1), 53–70. https://doi.org/10.1080/14794800801916457

Hogue, M. y Scarcelli, D. (2021). Nonequivalent definitions and student conceptions of tangent lines in calculus. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology, 53*(9), 1–31. https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1878302

Orts, A., Llinares, S. y Boigues, F. (2016). Aprendizaje del concepto recta tangente en alumnos de Bachillerato. En J.A. Macías, A. Jiménez, J.L. González, M.T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F.J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 157–165). SEIEM.

Socas, M. M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria. En L. Rico (Coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125–154). Horsori.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics, with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*(2), 151–169.

Investigación parcialmente subvencionada por el proyecto de referencia PID2022-139007NBI00 (MCIN-AEI/FEDER)